Лабораторная работа 1. Элементы комбинаторики

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- правила суммы и произведения;
- определение основных комбинаторных объектов;
- формулы для числа размещений, сочетаний, перестановок без повторений и с повторениями;
- функции Microsoft Office Excel, которые используются для вычисления комбинаторных чисел;

уметь:

- определять вид комбинаторного объекта из условия задачи;
- применять правила суммы и произведения для решения комбинаторных задач;
- применять формулы для вычисления комбинаторных чисел;
- использовать возможности Microsoft Office Excel для решения комбинаторных задач и оформления отчёта мини-проекта;

владеть:

- математическими методами, связанными с вычислением комбинаторных чисел.

ХОД ЗАНЯТИЯ

Далее студенты переходят к деятельности по освоению комбинаторных методов в рамках мини-проекта на лабораторной работе.

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

Студенты и преподаватель совместно формулируют цель мини-проекта исходя из общих целей курса и специфики темы.

Цель мини-проекта: освоение математических методов вычисления комбинаторных чисел.

Очевидно, что для этого нужно решать комбинаторные задачи, в которых фигурируют различные комбинаторные объекты.

Учебная задача:

Вариант 1. Выбрать варианты проектного задания из представленных пятнадцати. Они содержат по десять комбинаторных задач (раздаточный материал 1) различной сложности, для решения которых необходимо применять как правила суммы и произведения, так и формулы сочетаний, размещений, перестановок с повторениями и без повторений, учитывать дополнительные условия.

Номер варианта	Номер задачи									
1	1	4	9	12	17	20	25	28	33	36
2	2	5	10	13	18	21	26	29	34	37
3	3	6	11	14	19	22	27	30	35	38
4	1	7	10	15	18	23	26	31	35	39
5	2	8	9	16	19	24	27	32	34	40
6	3	5	11	13	17	21	25	32	33	38
7	1	6	11	14	19	22	25	31	34	39
8	2	4	10	12	17	23	27	30	35	40
9	3	7	9	15	18	24	26	29	33	36
10	1	8	10	16	17	20	26	28	35	37
11	2	6	11	14	19	22	25	31	33	37
12	3	4	9	12	18	23	27	32	34	39
13	1	5	9	13	18	24	27	28	34	36
14	2	7	11	15	17	21	25	29	33	38
15	3	8	10	16	19	20	26	30	35	40

Вариант 2. Из представленного списка задач (раздаточный материал 1) выбрать две задачи из первых восьми (номера 1-8), две задачи из следующих восьми (задачи 9-16) и так далее. В итоге получится проектное задание из 10 комбинаторных задач. В проектных заданиях различных групп не должно совпадать более трёх задач.

ПЛАНИРОВАНИЕ

Студентам предлагается составить план реализации мини-проекта и затем представить его преподавателю. При обсуждении плана студенты должны обосновать необходимость каждого пункта, защищая свою точку зрения. Им следует обратить внимание на разработку формы отчёта по мини-проекту. При затруднениях преподаватель может предложить им некоторые варианты отчёта. Основная форма отчёта – это файл в табличном процессоре Excel в котором записаны исходные данные задачи, ход решения и выделены полученные результаты. Также допускается файл в текстовом редакторе Microsoft Word или решение задач, записанное в тетради.

РЕАЛИЗАЦИЯ

При выполнении проектного задания студенты могут использовать материалы лекций, а также раздаточные материалы, в которых представлено описание функций Excel и примеры решения комбинаторных задач, таблицы с основными формулами, блок-схема решения задач, отчёты в Excel (раздаточный материал 2)

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

Студенты представляют отчёт по мини-проекту, происходит обсуждение с преподавателем результатов и процесса выполнения работы, отмечаются плюсы и минусы, направления дальнейшей работы. Мини-проект будет зачтён, если представлено верное решение шести задач. При этом учитывается обоснованность решения, вклад каждого члена проектной команды, качество оформления отчёта.

Если при обсуждении выявлены ошибки в решении задач, недостатки в отчёте мини-проекта, либо группа не успела в отведенное время реализовать план, то проект отправляется на доработку. В этом случае участники группы вносят корректировки в план проекта (например, замены задач, исполнителей или методов решения) и продолжают работать внеаудиторно, размещая отчёт в электронном портфолио проекта, например, в рубрике «Математические методы». Здесь обсуждение и оценка мини-проекта происходит дистанционно на форуме или через комментарии.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Составьте краткое описание проекта по схеме: название, проблема, необходимые ресурсы и оборудование, задачи, план работ, предполагаемые результаты проекта, форма отчёта по проекту. Составьте график выполнения проекта с конкретными датами для каждой задачи, указанием лиц, работающих по данной задаче, и обязательным выделением одного ответственного. Отметьте также промежуточные результаты и предложите точки контроля.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Задания для студентов

1. Найдите число маршрутов из города A в город B через город C, если из A в C ведут 3 дороги, из C в B – 5 дорог.
2. Надо переслать 6 срочных писем. Сколько существует способов передачи, если каждое письмо можно передать с любым из 3 курьеров?
3. В турнире разыгрывается три медали (золотая, серебряная, бронзовая) среди 10 команд. Сколько вариантов различных призовых троек?
4. Сколькими способами можно выбрать 10 книг из 15?
5. Сколько существует перестановок из букв слова «колобок»?
6. Сколькими способами можно 17 человек разбить на три группы: две по 5 и одну из 7 человек?
7. В магазине продаётся 4 сорта мороженого и 6 сортов шоколада. Сколькими способами можно купить набор из мороженого и шоколада?
8. Сколько можно образовать шестизначных телефонных номеров, если использовать только цифры 3, 7, 9?
9. В турнире разыгрывается три медали (золотая, серебряная и бронзовая) среди 7 команд. Сколькими способами можно их разыграть?
10. Сколькими способами можно выбрать бригаду в 3 студента из группы, состоящей из 10 студентов?
11. Сколько существует перестановок из букв слова «институт»?
12. Сколькими способами можно 25 человек разбить на три группы: две по 7 и одну из 11 человек?
13. Сколько пар можно составить из 7 юношей и 5 девушек?
14. Сколько можно образовать шестизначных телефонных номеров, если использовать только цифры 2, 5, 3, 8?
15. В студенческой группе из 20 человек выбирают старосту, профорга и физорга. Сколькими способами можно это сделать?
16. Сколькими способами можно выбрать бригаду в 19 студентов из группы, состоящей из 24 студентов?

17. Сколько существует перестановок из букв слова «приоритет»?

18. Сколькими способами можно 15 человек разбить на три группы: две по 4 и одну из 7 человек?

19. В продаже имеются юбки 5 фасонов и жакеты 4 фасонов. Сколькими способами можно купить костюм из юбки и жакета?

20. Известно, что пятизначный код сейфа содержит только цифры 3 и 7. Сколько существует таких кодов?

21. Из 10 журналистов одной газеты требуется выбрать четырёх для ведения тематических страничек: «Спорт», «Новости дня», «Красота», «Здоровье». Сколькими способами это можно сделать?

22. Сколькими способами можно выбрать 3 карты из колоды в 32 карты?

23. Сколько существует перестановок из букв слова «переворот»?

24. Сколькими способами можно 23 человек разбить на три группы: две по 10 и одну из 3 человек?

25. Имеется 5 кружков: 3 белых и 2 чёрных. Сколько различных узоров можно составить из этих кружков, располагая их в ряд?

26. Флаг Анчурии составляется из 13 горизонтальных полос красного, белого и голубого цвета, причем 2 соседние полосы должны быть разных цветов. Сколькими способами можно это сделать?

27. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «перешеек», чтобы четыре буквы «е» не стояли рядом?

28. В лаборатории работают 20 человек. Нужно составить группу в 5 человек для поездки в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если начальник, его заместитель и главный инженер одновременно уехать не могут?

29. Сколько шестизначных чисел содержат ровно 4 одинаковые цифры?

30. Сколько чётных пятизначных чисел можно получить, переставляя цифры 2, 3, 4, 5, 9?

31. Сколько существует способов размещения 10 пассажиров в трёх вагонах?

32. Сколькими способами можно из 15 человек выбрать группу

людей для работы?

33. На один ряд, в котором 8 стульев, рассаживаются 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами они могут сесть, чтобы не все девушки сидели рядом?

34. Буквы азбуки Морзе состоят из точек и тире. Сколько всего букв можно изобразить, если буква содержит не более пяти символов?

35. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы цифры не повторялись и крайние цифры были чётными?

36. Завод выпускает погремушки, состоящие из кольца с надетыми на нем 5 синими и 3 красными шариками. Сколько разных видов погремушек может выпускать завод?

37. Сколько можно составить девятизначных чисел, у которых все цифры разные и идут слева направо в порядке убывания?

38. Сколько пятизначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 (с повторениями и без повторений)?

39. Сколькими способами можно 10 одинаковых подарков распределить между 6 детьми так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы один подарок?

40. Сколько существует положительных целых чисел, меньших, чем 10 000, цифры которых располагаются в неубывающем порядке?

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Пусть множество $\boldsymbol{E}$ содержит n элементов. Все необходимые формулы удобно свести в таблицу.

Таблица 1.

Основные комбинаторные объекты и числа

Название объекта	Характеристика объекта	Комбинаторное число	Вычислительная формула
Множество всех подмножеств $P(\boldsymbol{E})$	Все неупорядоченные подмножества	$\lvert P(\boldsymbol{E})\rvert$	2^n
Размещение k элементов множества $\boldsymbol{E}$	Упорядоченный кортеж длины k	A_n^k	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
Перестановка элементов мно-	Упорядоченный кортеж длины n	P_n	$n!$

жества ***E***			
Сочетание k элементов множества ***E***	Неупорядоченное подмножество мощности k	C_n^k	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$
Сочетание с повторениями k элементов множества ***E***	Неупорядоченное подмножество мощности k с повторными элементами	$\overline{C_n^k}$	C_{n+k-1}^k
Перестановка с повторениями элементов множества ***E***	Упорядоченный кортеж длины (k_1+k_2+...+k_n), куда a_i входит k_i раз	$\overline{P_{k_1,k_2,\ldots k_n}}$	$\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!..k_n!}$
Размещение с повторениями k элементов множества ***E***	Упорядоченный кортеж длины k с повторными элементами	$\overline{A_n^k}$	n^k

Для решения задач по данной теме необходимо знание двух следующих правил:

Правило суммы. Если объект A может быть выбран m способами, а объект B – другими n способами, то выбор «A или B» осуществляется (m+n) способами.

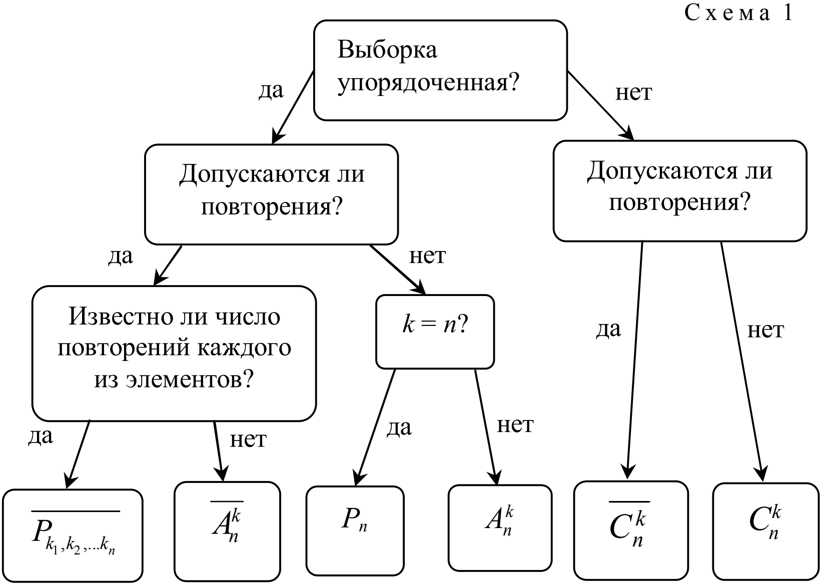
Правило произведения. Если объект A может быть выбран m способами, и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор «A и B» в указанном порядке осуществляется ($m \cdot n$) способами.

При решении задачи с использованием комбинаторных объектов и чисел основными трудностями являются:

- выбор комбинаторного объекта, соответствующего условию задачи;
- правильное определение параметров выборки n и k.

Выбор комбинаторного объекта, вообще говоря, неоднозначен, так как все основные объекты связаны между собой и могут выражаться друг через друга.

Схема 1



Вполне можно рекомендовать *алгоритм решения задач с помощью комбинаторных объектов*. Для этого нужно последовательно выполнить такие действия:

1) определить конкретный объект, о котором идёт речь в задаче (число – набор цифр; букет – набор цветов; слово – набор букв);
2) найти число <u>k элементов в наборе,</u> а также число <u>n элементов во множестве</u>, из которого осуществляется выборка;
3) по схеме 1 ответить на поставленные вопросы, определить комбинаторный объект для решения и найти нужную формулу в таблице 1;
4) вычислить соответствующее комбинаторное число, подставив в выбранную формулу значения n и k;
5) обратить внимание на наличие дополнительных условий, не учтённых при выборе комбинаторного объекта, и скорректировать решение с использованием правил суммы и

произведения.

Редактор Microsoft Office Excel содержит обширную библиотеку специальных функций, которые позволяют быстро отыскать нужные комбинаторные числа.

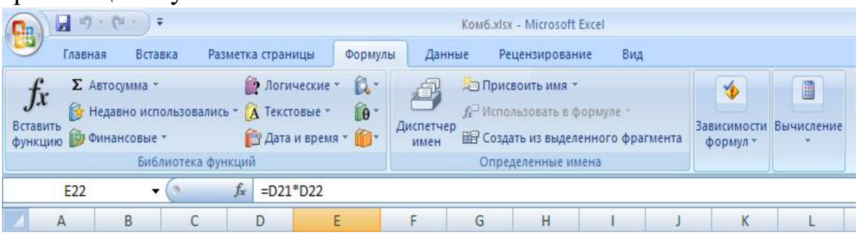
Ниже приводятся формулы для вычисления основных комбинаторных чисел из схемы 1.

Число сочетаний $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ можно подсчитать с помощью функции ЧИСЛКОМБ(n, k), которая относится к математическим функциям. Число сочетаний с повторениями $\overline{C_n^k}$ вычисляется с помощью этой же функции, но вместо n нужно взять (n+k–1).

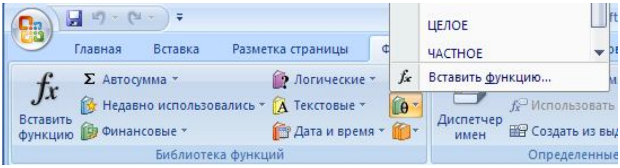
Для нахождения числа размещений $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ используется статистическая функция ПЕРЕСТ(n; k), а для размещений с повторениями $\overline{A_n^k}$ – математическая функция СТЕПЕНЬ(n; k).

Число перестановок P_n можно вычислить двумя способами: либо с помощью математической функции ФАКТР(n), либо используя статистическую функцию ПЕРЕСТ(n; n). Для перестановок с повторениями $\overline{P_{k_1,k_2,\dots k_n}}$ нужно сначала подсчитать числитель: ФАКТР(k_1+k_2+…+ k_n), а затем произведение факториалов в знаменателе и произвести деление в соответствии с формулой.

Несложные формулы можно просто набирать в строке формул, обязательно начиная со знака равенства «=». Вводить в формулу адрес нужной ячейки с клавиатуры не обязательно, достаточно просто щёлкнуть по этой ячейке левой кнопкой мыши.



Для набора сложных формул проще всего использовать мастер функций, который вызывается с помощью кнопки с надписью «f_x», размещённой на панели формул. Соответствующие функции выбираются из списка в меню.



З а д а ч а 1.1. Рассматриваются различные семизначные числа, в десятичной записи которых не встречается ни одна из цифр 1, 2, 3. Сколько существует таких чисел, в которых:

a) цифры не повторяются;

b) цифры могут повторяться;

c) содержится ровно три цифры 4, две цифры 5 и по одной 6 и 7;

d) только две различные цифры.

Р е ш е н и е. Семизначное число можно считать за упорядоченный набор из семи цифр, первая из которых не может быть равна 0. По условию, все цифры следует выбирать из множества $\boldsymbol{A} = \{0,4,5,6,7,8,9\}$.

B3 =ФАКТР(7)

	A	B	C	D	E
1	Лаб. 1				
2	Задача 1			Ответы:	
3	а)	5040	720	4320	

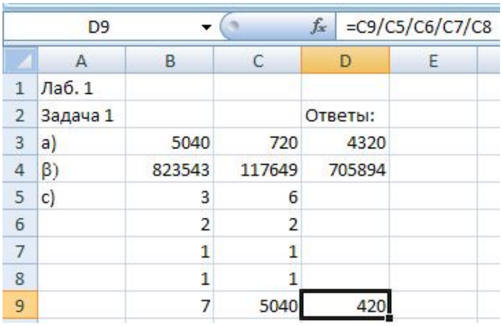
а) Если цифры не повторяются, то число получается перестановкой всех 7 элементов множества $\boldsymbol{A}$. Можно просто щёлкнуть по ячейке B3 и в строке формул записать =ФАКТР(7) или найти функцию ФАКТР в списке математических функций. Но если на первом месте находится цифра 0, то число не будет семизначным. Все такие числа получатся перестановкой шести остальных цифр на 2-7 местах. Их количество ФАКТР(6) записано в ячейке C3. Ответ получается как разность ячеек B3 и C3 и записывается в ячейке D3.

D4 =B4-C4

	A	B	C	D
1	Лаб. 1			
2	Задача 1			Ответы:
3	а)	5040	720	4320
4	β)	823543	117649	705894

b) В этом случае цифры могут повторяться, поэтому надо использовать функцию СТЕПЕНЬ(7;7). Для случаев с нулём на первом месте подсчитывается их число: СТЕПЕНЬ(7;6). Итоговая разность записывается в ячейку D4.

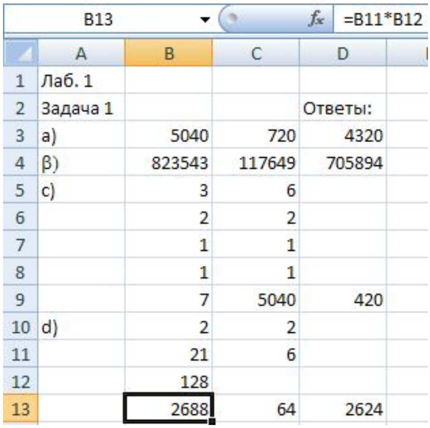
c) Наиболее сложными являются расчёты именно в этом случае. Сначала в ячейках B5-B9 последовательно записываются количества цифр 4, 5, 6, 7 и общее количество цифр, а в C5-C9 вычисляются их факториалы. Затем в ячейке D9 получается ответ.



D9 — f_x =C9/C5/C6/C7/C8

	A	B	C	D	E
1	Лаб. 1				
2	Задача 1			Ответы:	
3	a)	5040	720	4320	
4	β)	823543	117649	705894	
5	c)	3	6		
6		2	2		
7		1	1		
8		1	1		
9		7	5040	420	

d) В этом случае готовой формулы нет, поэтому приходится рассуждать логически. Вначале для составления числа следует выбрать две цифры из семиэлементного множества A, то есть $k=2$ и $n=7$. Выбор цифр осуществляется C_7^2 способами (ячейка B11). Затем на каждое из 7 мест можно поставить любую из двух выбранных цифр. Это можно сделать $\overline{A}_2^7$ способами, что записано в ячейке B12. Количество всех таких чисел определяется по правилу произведения (B13). Но и здесь может оказаться ноль на первом месте и ещё какая-то из цифр (например, цифра a). Тогда для каждого из мест со 2-ого по 7 существует два способа выбора: a или 0. Такие числа (их количество в ячейке C13) нужно исключить. Полученный итог записан в ячейке D13. ■



B13 — f_x =B11*B12

	A	B	C	D
1	Лаб. 1			
2	Задача 1			Ответы:
3	a)	5040	720	4320
4	β)	823543	117649	705894
5	c)	3	6	
6		2	2	
7		1	1	
8		1	1	
9		7	5040	420
10	d)	2	2	
11		21	6	
12		128		
13		2688	64	2624

Обратите внимание на последнюю картинку. Именно в таком виде можно предоставлять решение задачи в файле из Microsoft Office Excel. Для составления отчёта по мини-проекту достаточно в этот же файл включить решение остальных девяти задач.

Аналогичным образом можно оформлять отчёты и по остальным мини-проектам. В решении следующей задачи подсчёт несложен, поэтому он приведен без иллюстрации в Excel.

З а д а ч а 1.2. На одной из двух данных параллельных прямых отмечено 8 точек, на другой – 11 точек. Найдите число треугольников с вершинами в отмеченных точках.

Р е ш е н и е. Любой треугольник можно задать его вершинами, поэтому каждому треугольнику соответствует набор из трёх точек. По условию две вершины любого треугольника приходится выбирать на одной прямой и третью – на другой (рис. 2). Поэтому треугольники будут двух видов – с двумя вершинами на первой прямой (где восемь точек), и имеющие две вершины, принадлежащие второй прямой.

Далее нужно отдельно подсчитать число треугольников каждого вида и сложить полученные числа (используется правило суммы: будет треугольник 1-ого или 2-ого вида, то есть выбор объекта «*A* или *B*»).

Две точки из восьми, которые лежат на первой прямой, можно выбрать C_8^2 способами (тут порядок точек не важен, и повторный выбор невозможен). Третью вершину треугольника на другой прямой можно выбрать 11 способами. Всего треугольников первого вида будет $C_8^2 \cdot 11$. Здесь используется правило произведения, так как одновременно нужно выбрать три точки (сначала две точки на одной прямой, и после этого – ещё одну на другой прямой), следовательно, выбирается объект «*A* и *B*».

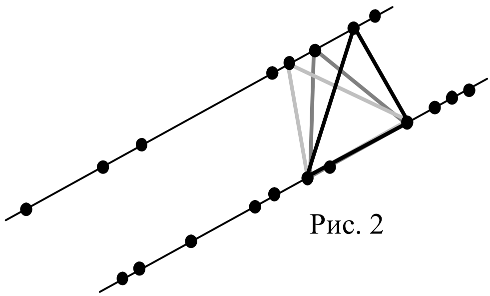


Рис. 2

Аналогично треугольников второго вида – $C_{11}^2 \cdot 8$.

Число всех треугольников будет равно: $8 \cdot C_{11}^2 + 11 \cdot C_8^2 = 748$. ■