Лабораторная работа 2. Классическая вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- определения классической и статистической вероятности и формулы для их вычисления;
- теоремы сложения и умножения вероятностей и их частные случаи;

уметь:

- выбирать события и устанавливать связи между ними согласно условию задачи;
- использовать теоремы сложения и умножения вероятностей при решении задач;
- использовать функции Excel для подсчёта вероятностей;

владеть:

- методами вычисления классической и статистической вероятностей.

ХОД ЗАНЯТИЯ

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

Цель мини-проекта: освоение математических методов вычисления классической и статистической вероятности, теорем сложения и умножения вероятностей.

Для достижения этой цели решаемые задачи должны использовать как формулу вероятности, так и теоремы сложения и умножения вероятностей. Общее их число должно быть значительным для наработки навыков и развития математической интуиции, но, с другой стороны укладываться во временные рамки занятия.

Учебная задача: Составить проектное задание не менее чем из 10 задач. При этом можно использовать приёмы известные по прошлому занятию (варианты 1 и 2) или предложить свой вариант отбора задач из списка (раздаточный материал 1).

ПЛАНИРОВАНИЕ

Составляя план мини-проекта студенты используют опыт предыдущего занятия, соответственно внося доработки и коррективы, учитывая замечания при обсуждении. При планировании участники группы более чётко описывают свои роли.

РЕАЛИЗАЦИЯ

Студентам предоставляется информационно-справочный материал по их запросу (раздаточный материал 2). Здесь приведены основные определения, формулы и теоремы в соответствии с тематикой занятия, примеры решения задач, в том числе с использованием Microsoft Office Excel, примеры оформления отчёта по мини-проекту.

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

В обсуждении результатов мини-проекта могут участвовать и студенты других групп, уже завершивших выполнение своего задания. Мини-проект зачтён, если верно решено три задачи из первых двадцати и три задачи из вторых двадцати задач списка. Если проект не зачтён, то студенты продолжают работать вне аудитории и представляют отчёт дистанционно в портфолио проекта.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Обдумайте возможности использования методов, освоенных на лабораторных работах 1 и 2 в основном проекте. Выполняйте проектные работы в соответствии с планом.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Задания для студентов

Ответы на все задачи записываются десятичной дробью с четырьмя знаками после запятой.

1. Загадано двузначное число. Найти вероятность того, что его цифры различны.
2. Монета брошена три раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится изображение герба.
3. В коробке семь одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу вытаскивают все кубики по очереди. Найти вероятность того, что номера кубиков появятся в убывающем порядке.
4. В пачке содержится 30 пронумерованных карточек. Наудачу взято 3 карточки. Найти вероятность того, что взяты карточки с номерами 12, 24, 30.
5. Среди 25 участников розыгрыша 5 призов находятся 10 девушек. Вычислить вероятность того, что обладателями ровно двух призов окажутся девушки.

6. В коробке 4 белых и 5 чёрных футболок. Наугад вытаскивают две футболки. Найти вероятность того, что одна из футболок белая, а другая – чёрная.

7. 30 экзаменационных билетов содержат по 3 вопроса, которые не повторяются. Студент знает ответы на 45 вопросов. Найти вероятность того, что в вытащенном билете студент знает ответы на все вопросы.

8. Из 20 плееров 2 имеют дефекты. Для проверки произвольно взято три плеера. Найти вероятность того, что в число отобранных для проверки плееров попадут оба бракованных.

9. В ремонт сдано 16 компьютеров, из них 8 нуждаются в мелком ремонте. Мастер наугад отобрал 6 компьютеров. Найти вероятность того, что ровно два из них нуждаются в мелком ремонте.

10. Среди 14 женщин и 9 мужчин разыгрываются 6 билетов на бесплатное посещение театра. Найти вероятность того, что билеты достанутся трём женщинам и трём мужчинам.

11. В ящике лежат 6 чёрных и 6 синих пар перчаток. Из них наудачу взято 7 пар перчаток. Найти вероятность того, что взято 3 пары синих и 4 пары чёрных перчаток.

12. В коробке 12 мячиков, из которых 3 красных, 5 зелёных и 4 жёлтых. Наудачу взято 3 мячика. Найти вероятность того, что все три мячика разного цвета.

13. В партии из 12 шкафов при транспортировке 4 получили повреждение. Наудачу выбрано 6 шкафов. Вычислить вероятность того, что из них ровно 2 шкафа имеют повреждения.

14. В клуб принесли в корзине 9 рыжих и 11 серых котят. Наугад выбрано два котёнка. Найти вероятность того, что они разного цвета.

15. На блюде лежало 30 пирожков, из них с 6 грибами. Наугад взято 3 пирожка. Найти вероятность того, что хоть один пирожок окажется с грибами.

16. Вася забыл номер телефона своего приятеля, но помнит из него первые 4 цифры. Всего в номере 7 цифр. Найти вероятность того, что Вася дозвонится до приятеля, если наберёт номер случайным образом.

17. У замка сейфа есть 4 диска с пятью секторами, на каждом

из которых записана одна из цифр от 0 до 4. Найти вероятность открыть замок сейфа, набрав 4 цифры наугад.

18. Из группы, в которой 16 юношей и 14 девушек, выбирается делегация из 5 человек. Найти вероятность того, что при случайном выборе в состав делегации войдут три девушки и два юноши.

19. В мешке лежат 25 красных, 19 синих и 16 зелёных шарфов, одинаковых на ощупь. Наудачу выбрано 9 шарфов. Вычислить вероятность того, что выбрано 4 красных, 3 синих и 2 зелёных шарфа.

20. Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются наугад сразу три карты. Найти вероятность того, что этими картами будут тройка, семёрка и туз.

21. В ящике лежат 15 игрушек, среди которых 4 с дефектами. Найти вероятность того, что среди семи наудачу вынутых игрушек ровно одна окажется с дефектом.

22. Среди 17 желающих поехать на модный курорт 10 женщин. Определить вероятность того, что среди 12 случайным образом купивших путёвки окажется 7 женщин.

23. Из 22 пар ботинок 3 пары бракованные. Случайным образом для проверки выбрано 6 пар. Найти вероятность того, что в число отобранных ботинок войдёт не более одной бракованной пары.

24. На прилавке лежат 15 дынь, среди которых есть три нестандартные. Найти вероятность того, что среди четырёх наугад отобранных дынь будет хотя бы одна нестандартная.

25. В команде из 16 спортсменов 6 являются мастерами спорта. Для выступления на Олимпиаде выбирают 4 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

26. Экзаменационный билет содержит четыре вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9; на второй – 0,85; на третий – 0,8; на четвёртый – 0,75. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на три вопроса.

27. Доля костюмов высшего качества составляет 85%. Найти вероятность того, что из трёх наугад взятых костюмов хотя бы

один будет высшего качества.

28. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,9, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что охотник попал в цель.

29. Шкаф состоит из 5 крупных деталей. Вероятности брака при изготовлении каждой детали равны 0,1; 0,05; 0,03; 0,02; 0,04 соответственно. Найти вероятность того, что изделие будет бракованным, если для этого достаточно наличие в сборке одной бракованной детали.

30. Три стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель каждого стрелка равны 0,9; 0,8; 0,85 соответственно. Найти вероятность того, что в цель попадут ровно два стрелка.

31. Оператор обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок потребует внимания оператора, равна 0,6; для второго станка эта вероятность равна 0,5; для третьего – 0,8; а для четвёртого – 0,65. Найти вероятность того, что в течение часа хотя бы один станок потребует к себе внимания оператора.

32. Гардеробщица выдала номерки 5 лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы. После этого она перепутала все шляпы и повесила их наугад. Найти вероятность того, что каждому из 5 лиц гардеробщица выдаст его собственную шляпу.

33. Произведён залп из трёх орудий по мишени. Вероятность поражения мишени первым орудием равна 0,8; вторым – 0,75; третьим – 0,9. Найти вероятность поражения мишени.

34. Ребёнок играет с четырьмя буквами разрезной азбуки – А, А, К, Ш. Найти вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд у него получится слово "каша".

35. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечётные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

36. На 25 одинаковых жетонах нанесены двузначные числа от 25 до 49. Наугад выбран один жетон. Найти вероятность того, что номер жетона делится на 3 или на 5.

37. Из множества 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 наудачу выбрано три различных числа. Найти вероятность того, что сумма выбранных чисел делится на 5.

38. На гранях кубиков написаны числа от 1 до 6. Бросают три кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших чисел меньше или равна числу 12.

39. Вероятность попадания в кольцо первого игрока – 0,7, а второго игрока – 0,8. Игроки бросают мяч по два раза независимо друг от друга. Найти вероятность того, что мяч попадет в кольцо ровно два раза.

40. Из колоды из 32 карт наугад одна за другой вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что в руках окажутся валет, дама, король и туз.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Для расчёта вероятностей событий необходимо учитывать связи между ними, которые перечислены ниже.

1. $A \subset B$ – событие A *содержится* в событии B (рис. 3а);
2. $A = B$ – *равносильность* событий A и B;
3. $A{\cdot}B$ или $A \cap B$ – *произведение* (или *пересечение*) A и B (рис. 3б);
4. $A{\cdot}B = \varnothing$ – *несовместность* событий A и B (рис. 3в);
5. $A+B$ или $A \cup B$ – *сумма* (*объединение*) событий A или B (рис. 3г);
6. $A + \overline{A} = U$, где U универсальное множество; $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ – *дополнение* $\overline{A}$ события A (рис. 3д);
7. $A \backslash B = A - B$ – *разность* событий A и B (рис. 3е).

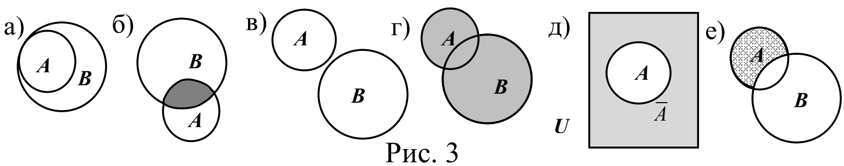


Рис. 3

Частота события – это отношение числа испытаний $m(A)$, в которых появилось данное событие A, и общего числа проведенных испытаний n. Частота события A равна:

$P^*(A) = \dfrac{m(A)}{n}$ (1).

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа благоприятных для этого события случаев k к числу n всех возможных случаев, образующих полную группу несовместных равновозможных событий. При этом вероятность события A равна:

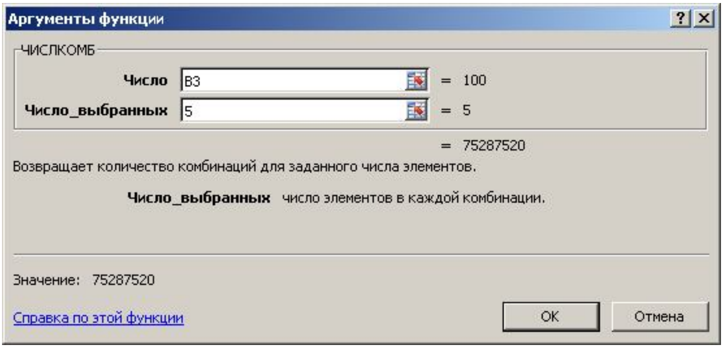
$P(A) = \dfrac{k}{n}$ (2).

При достаточно большом числе испытаний частота *близка* к соответствующей теоретической вероятности $P(A) \cong P^*(A) = \dfrac{m(A)}{n}$.

З а д а ч а 2.1. В ящике находится 100 деталей, из которых 80 штук стандартные. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу выбранных деталей найдётся хотя бы одна стандартная.

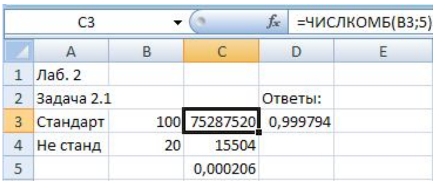
Р е ш е н и е. Пусть событие A – наличие хотя бы одной стандартной детали среди выбранных. Тогда противоположным к A будет событие $\overline{A}$, при котором среди выбранных деталей нет ни одной стандартной. Числа стандартных и нестандартных деталей записываются соответственно в ячейках B3 и B4.

Далее нужно найти $P(\overline{A})$. Ясно, что взять 5 деталей из 100 имеющихся можно C_{100}^{5} способами. Так как число нестандартных деталей равно 100–80 = 20, то из них можно C_{20}^{5} способами выбрать 5 нестандартных деталей. Для ячейки C3 нужно вызвать функцию ЧИСЛКОМБ, затем следует для графы «Число» щёлкнуть левой кнопкой мыши по ячейке B3 и нажать «Enter». В графе «Число_выбранных» просто набирается «5» и «Enter». Затем нужно нажать «OK», и в ячейке C3 появится число, равное C_{100}^{5}.



Для расчёта C_{20}^{5} проще всего «взяться» левой кнопкой мыши за квадратик в правом нижнем углу ячейки C3 (он превратится в крестик), и протянуть его на ячейку C4, где и появится нужный результат.

Вероятность того, что среди выбранных пяти деталей нет ни одной стандартной, подсчитывается как частное C4/C3 и записывается в ячейке C5. Она равна $P(\overline{A}) = {C_{20}^{5}}\Big/{C_{100}^{5}} \approx 0{,}0002$.



Окончательный результат легко найти как разность

$P(A) = 1 - 0{,}0002 \approx 0{,}9998$.

Он размещён в ячейке D3.■

З а д а ч а 2.2. В лотерее разыгрывается 100 билетов, из которых 10 выигрышных. Виктор покупает три билета. Найти: а) вероятность того, что хотя бы один из билетов выиграет; б) какое минимальное число билетов нужно купить, чтобы вероятность получения хотя бы одного выигрыша оказалась больше, чем 0,5?

Р е ш е н и е. а) Для начала нужно определить число способов выбора трёх любых лотерейных билетов. Если перенумеровать все возможные тройки билетов, то их будет 1, 2, ... n, где n = $C_{100}^{3} = \dfrac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Пусть событие A состоит в том, что хотя бы один из выбранных билетов оказался выигрышным. Благоприятными для A являются такие группы из трёх билетов, которые содержат хотя бы один выигрышный билет, неблагоприятными – такие, в которых ни на один билет не падает выигрыш. Число неблагоприятных групп равно C_{90}^{3}. Следовательно, число благоприятных равно $k = C_{100}^{3} - C_{90}^{3}$. Отсюда

$$p(A) = \frac{k}{n} = 1 - \frac{C_{90}^{3}}{C_{100}^{3}} = 1 - \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}2735.$$

б) Пусть куплено m билетов, и вероятность выигрыша хотя бы по одному из них равна p_m. Ясно, что с ростом m число p_m будет возрастать. Нужно найти наименьшее значение m, при котором это число станет большим 0,5. Аналогично пункту а), получается:

$$p_m = 1 - \left(1 - \frac{10}{100}\right)\left(1 - \frac{10}{99}\right)\ldots\left(1 - \frac{10}{100-(m-1)}\right).$$

Поэтому примерно должно получиться $p_m > 1-(0{,}9)^m$.

При $m = 6$ правая часть будет больше 0,5. Следовательно, искомое значение m находится среди чисел 1,2,3,4,5,6. При подсчёте получается:

$p_4 = 0{,}34\ldots$, $p_5 = 0{,}43\ldots$ Оба эти числа меньше 0,5. Таким образом, искомое значение m равно 6. ■

З а д а ч а 2.3. В аудитории присутствуют k человек. Какова вероятность того, что хотя бы у двух из них дни рождения совпадают (событие T)?

Р е ш е н и е. Если не считать маловероятные високосные годы, то все возможные дни рождения у k случайно собравшихся людей можно заменить случайной выборкой с повторением k элементов из множества $\boldsymbol{E} = \{1, 2, \ldots 365\}$. В задаче требуется найти вероятность события T – совпадения дней рождения у каких-либо двух из присутствующих. Событие, противоположное T, заключается в том, что все дни рождения различны. При $n = 365$ получится:

$$p(T) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot \left(365 - (k-1)\right)}{365^k}.$$

Это выражение для $p(T)$ зависит от k – числа собравшихся в зале. Подсчитав $p(T)$ для различных значений k с точностью до трёх знаков после запятой, можно получить следующую таблицу.

k	5	10	22	23	30	60
$p(T)$	0,027	0,117	0,476	0,507	0,706	0,994

Из этой таблицы видно, что если в зале находятся всего лишь 23 человека, то уже и в этом случае имеется более половины шансов на то, что, по крайней мере, у двоих из них дни рождения совпадают! ■

Задача 2.4. Слово "фото", составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад достают одну за другой все буквы. Какова вероятность того, что при этом снова появится слово "фото" (событие A)?

Решение. Можно обозначить нужные события:

A_1 – первой достали букву "ф";

A_2 – второй букву "о";

A_3 – третьей букву "т",

A_4 – и последней четвертой ещё одну букву "о".

Тогда $A = A_1A_2A_3A_4$. По формуле произведения событий получится:

$$p(A) = p(A_1)p_{A1}(A_2)p_{A1A2}(A_3)p_{A1A2A3}(A_4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{12}.$$ ■