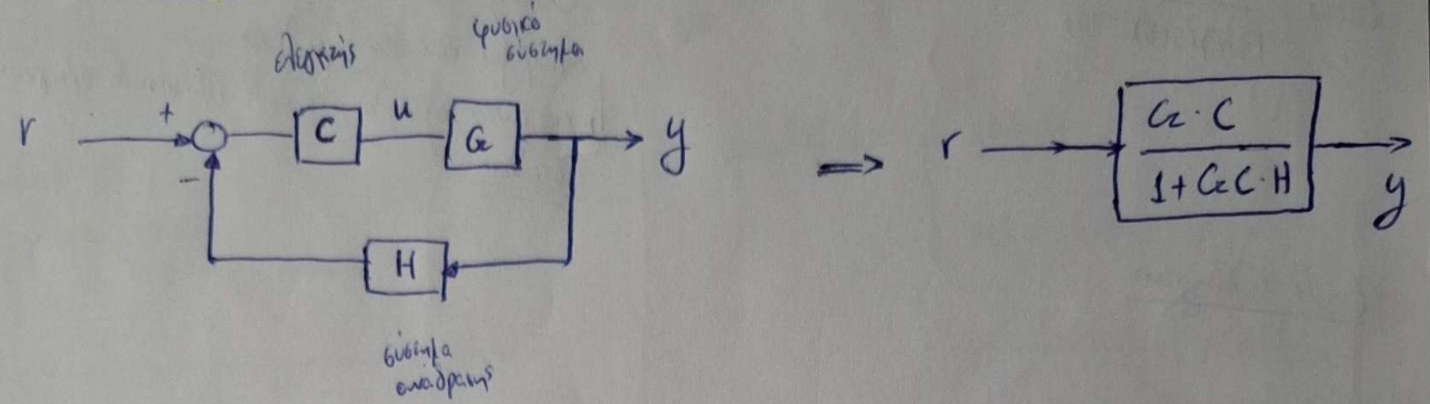
Σημειώσεις διαλέξεων

Σ.Α.Ε.Ι



- ελεγκτής: συνήθως απλά ένα κέρδος (K)
- σύστημα ανάδρασης: συνήθως μονάδα (μοναδιαία αρνητική ανάδραση)

Ακρίβεια στη μόνιμη κατάσταση

$e(s) = r(s) - y(s)$ (σφάλμα)

$\boxed{\lim_{s \to 0} s\, e(s)}$ σφάλμα τελικής τιμής

ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ

	e_{ssp}	e_{ssv}	e_{ssa}
N=0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
N=1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
N=2	0	0	$\frac{1}{K_a}$
N=3	0	0	0

$K_p = \lim_{s \to 0} H(s)$

$K_v = \lim_{s \to 0} s\, H(s)$

$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 H(s)$

or

ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

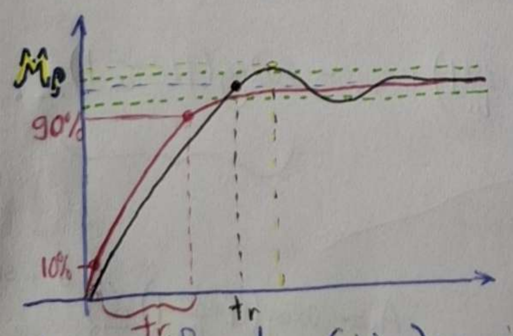
$e_{ssp} = \lim_{s \to 0} [1 - H_c(s)]$

$e_{ssv} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} [1 - H_c(s)]$

$e_{ssa} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2} [1 - H_c(s)]$

Ταχύτητα απόκρισης

Αφορά ευσταθή συστήματα όπως και η ακρίβεια στη μόνιμη κατάσταση.



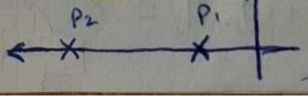
{υποαποσβενυμένη / υπεραποσβενυμένη} → με και χωρίς ταλαντώσεις

- Χρόνος ανόδου t_r (rising): ο χρόνος που ανεβαίνει για να φτάσει στην τελική του τιμή
- Χρόνος αποκατάστασης t_s (settling): ο χρόνος που φτάνει στη ζώνη (συνήθως ±2%) και έπειτα δεν βγαίνει από αυτή.
- Υπερύψωση M_p: Το υψηλότερο σημείο στο οποίο φτάνει η γραφική παράσταση δεδομένου ότι ασκείται υπερύψωση.

$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

$\zeta \in (0,1)$: $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ $\quad p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$

$\zeta \in (1,\infty)$: $t_s = \frac{4}{p_1}$



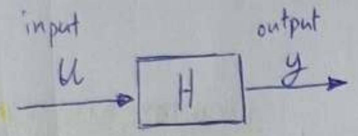
In general $t_s = \frac{4}{Re\{\text{πιο αργού πόλου}\}}$

$M_p = e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$

$$G_c(s) = \frac{16(s+5)}{(s+2)(s+8)(s-10)} \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} c_c(t) = Ae^{-2t} + Be^{-8t} + \underbrace{Ce^{10t}}$$

απειρίζει και δεν συγκλίνει
↳ για αυτό οι πόλοι στο δεξί ημιεπίπεδο οδηγούν σε **αστάθεια**

Bode Diagram

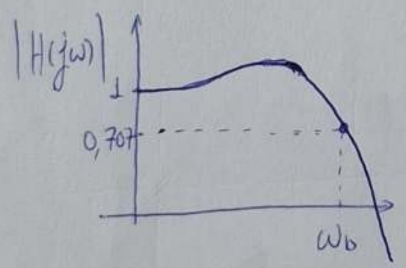


$u = A_{input} \sin \omega t$

$y = A_{out} \sin(\omega t + \varphi)$

$\lim_{t\to\infty} y(t) = A_{input} \, |H(j\omega)| \sin(\omega t + \theta)$, όπου $|H(j\omega)| = \frac{A_{out}}{A_{input}}$ και θ η γωνία της $H(j\omega)$

ω_b: εύρος των συχνοτήτων μέχρι το ω_b όπου ω_b είναι η συχνότητα εκείνη όπου το πλάτος του σήματος εξόδου έχει φτάσει στο 70,7 % του σήματος εισόδου.

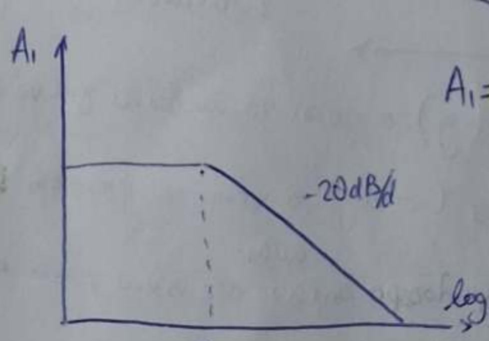


$$H(s) = \frac{(s+b_1)(s+b_2)(\dots)}{(s+a_1)(s+a_2)(\dots)} = \frac{G_c\left(1+\frac{s}{b_1}\right)\left(1+\frac{s}{b_2}\right)(\dots)}{\left(1+\frac{s}{a_1}\right)\left(1+\frac{s}{a_2}\right)(\dots)}$$

$G_c = \frac{\prod b_i}{\prod a_i}$

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log(G_c) + 20\log\left(\left|1+\frac{j\omega}{b_1}\right|\right) + \dots - \underbrace{20\log\left(\left|1+\frac{j\omega}{a_1}\right|\right)}_{} \dots$$

$\boxed{\log(A\cdot B/C) = \log A + \log B - \log C}$



$$A_1 = -20\log\left(\left|1+\frac{j\omega}{a_1}\right|\right) \simeq \begin{cases} 0, & \omega \le a_1 \\ -20\log\left(\frac{\omega}{a_1}\right), & \omega > a_1 \end{cases}$$

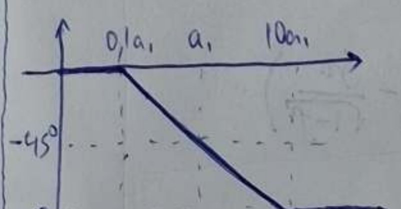
$A_1 = -20\log(\omega) + 20\log(a_1)$

$y = ax + b$

η προσέγγιση εξηγείται

$$\left(1+\frac{j\omega}{a_1}\right) \simeq \begin{cases} 0^\circ, & \omega < 0{,}1a_1 \\ -45^\circ - 45^\circ\log\left(\frac{\omega}{a_1}\right), & 0{,}1a_1 < \omega < 10a_1 \\ -90^\circ, & \omega > 10a_1 \end{cases}$$

$-90^\circ - 90^\circ$, -180° όταν έχω τετράγωνο

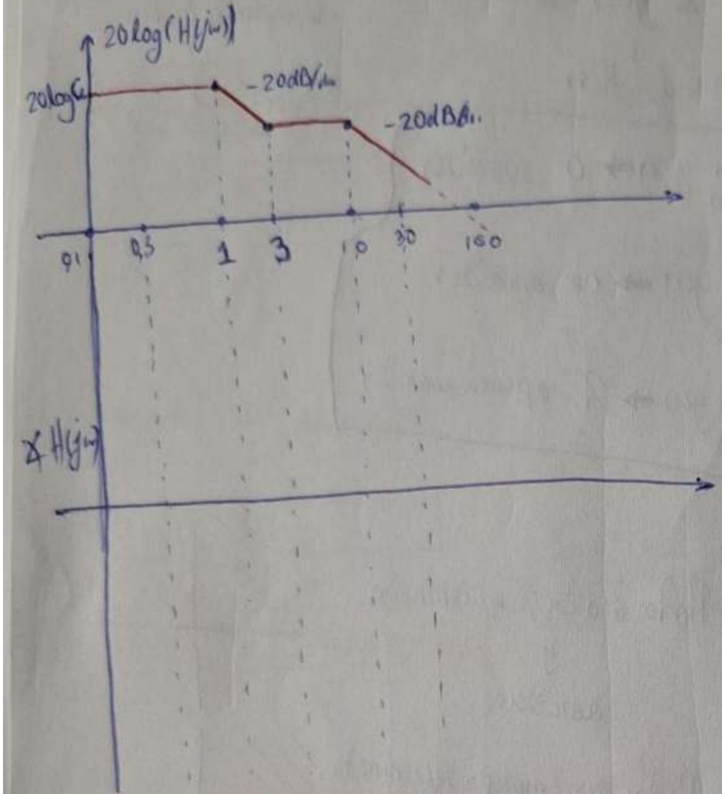


Για $A_1^2 = -20\log\left(\left|1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{j\omega}{\omega_n}\zeta\right|\right) \simeq \begin{cases} 0, & \omega \le \omega_n \\ -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right), & \omega > \omega_n \end{cases}$

Παράδειγμα Bode

$$H(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+10)} = \frac{C_c\left(1+\frac{s}{3}\right)}{\left(1+\frac{s}{1}\right)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$, όπου $C_c = \frac{3}{1\cdot 10} = 0,3$.

$$20\log|H(j\omega)| \simeq \begin{cases} 20\log C_c , & \omega \le 1 \\ 20\log C_c - 20\log\left(\frac{\omega}{1}\right), & \omega \le 3 \\ 20\log C_c - 20\log\left(\frac{\omega}{1}\right) + 20\log\left(\frac{\omega}{3}\right), & \omega \le 10 \\ 20\log C_c - 20\log\left(\frac{\omega}{1}\right) + 20\log\left(\frac{\omega}{3}\right) - 20\log\left(\frac{\omega}{10}\right), & \omega > 10 \end{cases}$$



$\measuredangle H(j\omega) =$

Σύνοψη

	σημείο θλάσης	μέτρο	φάση
$\frac{1}{s+a}$	$\omega = a$	$-20dB/dec$ $\omega > a$	0° $\omega < 0,1a$ -45° $0,1a \le \omega \le 10a$ -90° $\omega > 10a$
$\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega = \omega_n$	$-40dB/dec$ $\omega > \omega_n$	0° $\omega < 0,1\omega_n$ -90° $0,1\omega_n < \omega < 10\omega_n$ -180° $10\omega_n < \omega$

↳ $\zeta < 1$

αν $\zeta > 1$ τότε έχει δύο πραγματικές ρίζες και πρέπει να το σπάσω

Routh-Hurwitz Παραδείγματα

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

① $D(s) = s^3+4s^2+100s+500$

s^3	1 +	100	0
s^2	4 +	500	0
s^1	-25	0	
s^0	500 +		

$$\frac{4\cdot 100 - 500\cdot 1}{4} = \frac{400-500}{4} = \frac{-100}{4} = -25$$

$$\frac{-25\cdot 500 - 4\cdot 0}{-25} = 500$$

Σύστημα Ασταθές

Από + σε − } 2 αλλαγές
Από − σε + } προσήμου

⇓

2 ρίζες στο δεξί ημιεπίπεδο

② $D(s) = s^3+10s^2+16s+160$

s^3	1	16	0
s^2	10	160	0
s^1	0	0	Row of zeros
s^0			

$$\frac{10\cdot 16-160}{10} = 0 \Rightarrow 10s^2+160s^0 = 10s^2+160 \xrightarrow{d/ds} 20s$$

Άρα

s^3	1	16	0
s^2	10	160	
s^1	20	0	
s^0	160		

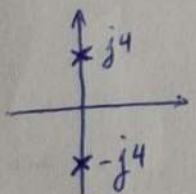
$$\frac{20\cdot 160-10\cdot 0}{20} = 160$$

Δεν υπάρχει αλλαγή προσήμου στη πρώτη στήλη
Άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

Η ύπαρξη (Row of zeros) σημαίνει ότι υπάρχουν ρίζες πάνω στον φανταστικό άξονα.
Τις βρίσκουμε: $10s^2+160=0$

$s^2=-16$

$s = \pm\sqrt{-16} = \pm 4\sqrt{-1} = \pm j4.$



③ $H(s) = \dfrac{300K}{(s+2)(s+3)(s+5)}$ ΣΜ [Ανοιχτού βρόχου]

K=? ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές
K=? ώστε το περιθώριο κέρδους $g_m=3$.

$1+H(s)=0$

$$1+\frac{300K}{s^3+10s^2+31s+30} = 0$$

$$\frac{s^3+10s^2+31s+30+300K}{s^3+10s^2+31s+30} = 0$$

$$s^3+10s^2+31s+30+300K=0$$

s^3	1	31	0	
s^2	10	30+300K	0	
s^1	28-30K	0		
s^0	30+300K			

$$\frac{31\cdot 10 - (30+300K)}{10} = 31-3-30K = 28-30K$$

$$\frac{\cancel{(28-30K)}(30+300K) - 0}{\cancel{28-30K}} = 30+300K$$

Πρέπει $28-30K>0 \Rightarrow K<0,93$ & $30+300K>0$
$K > -\frac{30}{300} = -0,1$

οριακά ευσταθές για
$K=0,93$

$g_m=3$ σημαίνει να μπορώ να πολλαπλασιάσω K επί 3 και να είμαι πάλι στα όρια ευστάθειας

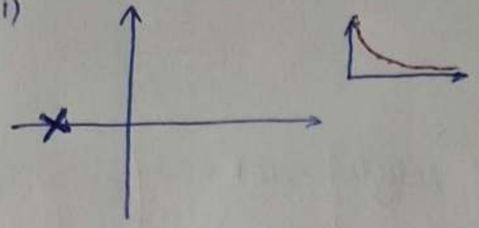
$$g_m = \frac{0,93}{K}$$

$$K = \frac{0,93}{3} = 0,31$$

Ευστάθεια

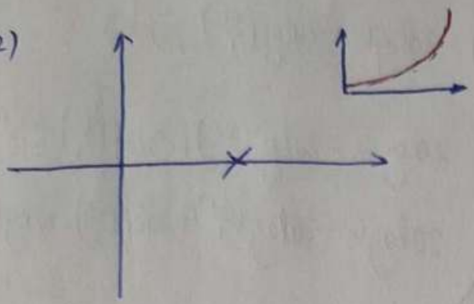
Η ευστάθεια εξαρτάται από τους πόλους του συστήματός μας.

1)



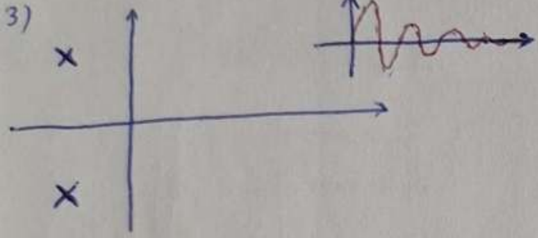
ευσταθές

2)



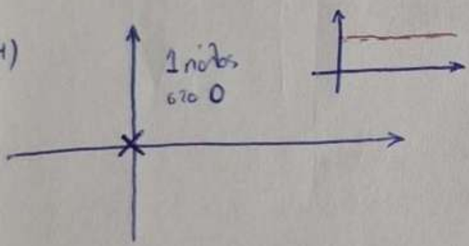
ασταθές

3)



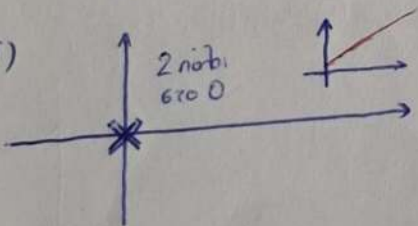
ευσταθές

4)



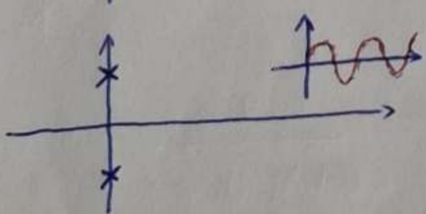
οριακά ευσταθές

5)

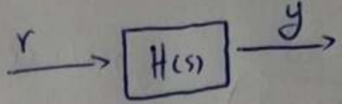


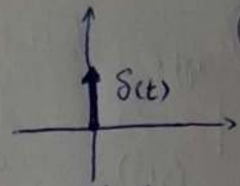
ασταθές

6)



οριακά ευσταθές





σαν είσοδο το δοκιμαστικό σήμα της συνάρτησης δέλτα

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} Y(s) = \mathcal{L}^{-1} H(s) R(s)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} H(s)$$

$\lim_{t\to\infty} y(t) \to 0$ ευσταθές

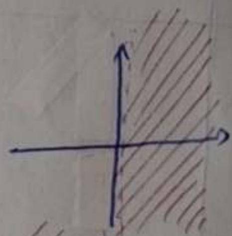
$\lim_{t\to\infty} y(t) \to \infty$ ασταθές

$\lim_{t\to\infty} y(t) \to \lambda$ οριακά ευσταθές

Πόλοι στο δεξί ημιεπίπεδο

⇓

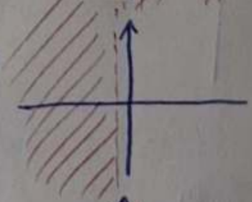
αστάθεια



Πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο

⇓

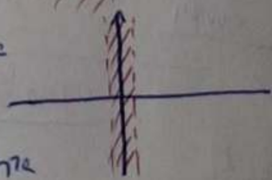
ευστάθεια



Πόλοι στον φανταστικό άξονα

⇓

σημασία έχει η πολλαπλότητα της ρίζας



Routh-Hurwitz Criteria

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\begin{array}{l|llll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \ \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \ \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & & \\
\vdots & \omega & & & \\
s^0 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

Για ευστάθεια πρέπει να έχω το ίδιο πρόσημο στην πρώτη στήλη του πίνακα

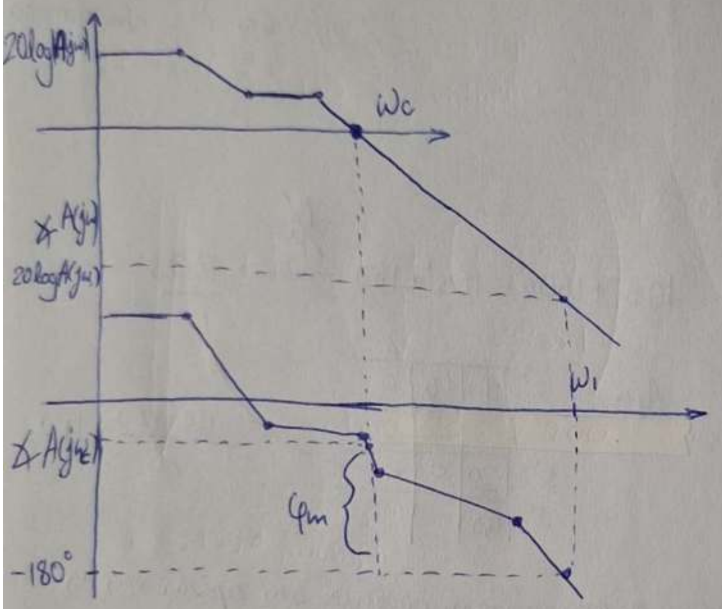
Περιθώριο φάσης και κέρδους

Περιθώριος φάσης: $|A(j\omega_c)| = 1$ $\quad \measuredangle A(j\omega_c) - \varphi_m = -180^\circ$ (όπου ω_c είναι η συχνότητα όπου έχουμε κέρδος 1 (0 dB))

Περιθώριο κέρδους: $\measuredangle A(j\omega_1) = -180^\circ \quad g_m = \dfrac{1}{|A(j\omega_1)|}$ (όπου ω_1 είναι η συχνότητα στην οποία η φάση είναι -180°)

Για ευστάθεια πρέπει $g_m > 1$

Παραδείγματα



Nyquist

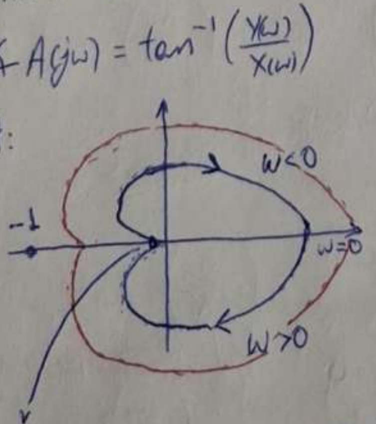
$A(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) \qquad A'(j\omega) = kX(\omega) + jkY(\omega)$

$$\boxed{Z = N + P}$$

Bode: $|A(\omega)| = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$\measuredangle A(j\omega) = \tan^{-1}\left(\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}\right)$

Nyquist:



Δεν είναι απαραίτητο
- $\omega > 0$ από κάτω
- $\omega < 0$ από πάνω

αλλά έτσι συνηθίζεται

$\dfrac{1}{g_m}$ έτσι ώστε όταν πολλαπλασιαστεί με g_m να μας δώσει 1.

(+) N: αριθμός περικυκλώσεων του -1 από το Nyquist plot

P: αριθμός πόλων της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου (στο δεξί ημιεπίπεδο)

Z: αριθμός πόλων της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου (στο δεξί ημιεπίπεδο)

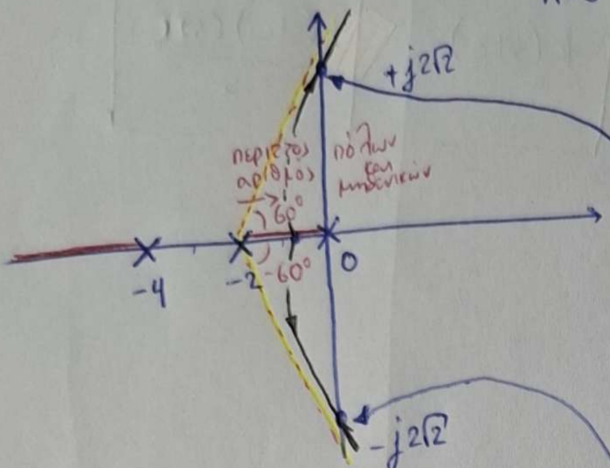
Γεωμετρικός Τόπος Ριζών

Παράδειγμα

Χαρακτηριστική εξίσωση: $1 + A(s) = 1 + \dfrac{\overbrace{k}^{m=0}}{\underbrace{s(s+2)(s+4)}_{n=3}} = 0$

μορφής $1 + k \underbrace{\dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}}_{H_p(s)}$

$n-m=3$



Ασύμπτωτες

$$\theta_i = \frac{(2i+1)180}{n-m}, \quad i=0,1,\dots,n-m-1$$

$\theta_0 = 60^\circ$

$\theta_1 = 180^\circ$

$\theta_2 = 300^\circ$ ή -60°

Σημείο τομής ασυμπτώτων με τον πραγματικό άξονα

$$\sigma_A = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n-m} = \frac{0+(-2)+(-4)}{3} = -2$$

$s^3+2s^2+4s^2+8s+k=0$

$s^3+6s^2+8s+k=0$

s^3	1	8	
s^2	6	k	
s^1	$\frac{48-k}{6}$	0	
s^0	k		

$$\frac{6\cdot 8-k}{6} = \frac{48-k}{6}$$

$$\frac{\frac{48-\cancel{k}}{\cancel{6}}\cdot k}{\frac{48-\cancel{k}}{\cancel{6}}} = k$$

$\dfrac{48-k}{6} = 0 \Rightarrow k=48$ Όταν K παίρνει αυτή τη τιμή τότε βρίσκομαι στο

Για να βρω τις ρίζες πηγαίνω στην πάνω γραμμή

$6s^2+k=0$

$6s^2+48=0$

$s^2=-8$

$s=\pm j\sqrt{8} = \pm j2\sqrt{2}$

Σημεία απόσχισης

$$\frac{dH_p(s)}{ds} = 0$$

$$\frac{1\cdot(s(s+2)(s+4))' - (1)'(s(s+2)(s+4))}{(s(s+2)(s+4))^2} = 0$$

$((s^2+2s)(s+4))' = 0$

$(s^3+2s^2+4s^2+8s)' = 0$

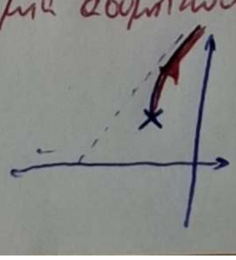
$3s^2+12s+8=0$

$s_1 = -0{,}845$ ✓

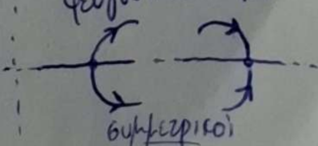
$s_2 = -3{,}155$ ✗ απορρίπτεται επειδή δεν ανήκει στο ΓΤΡ

Notes

Κάθε κλάδος ξεκινάει από έναν πόλο και καταλήγει σε μία ασύμπτωτη ή ένα μηδενικό!



Ένα σημείο θλάσης έχει πάντα δύο κλάδους που είτε φεύγουν είτε έρχονται



Laplace

Signal	Laplace Transform (L.T.)
$u(t)$ *	$\frac{1}{s}$ *
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\omega_c, \omega_n, \omega_b, \varphi_m, g_m$

gain margin

g_m: περιθώριο κέρδους $\quad g_m = \frac{1}{|A(j\omega)|}$, όπου ω αυτό όταν $\measuredangle A(j\omega) = 180^\circ$

φ_m: περιθώριο φάσης $\quad \varphi_m = 180^\circ + \measuredangle A(j\omega_c)$

ω_c: συχνότητα στην οποία ισχύει $|A(j\omega_c)| = 1$ (0 dB)

ω_b: εύρος ζώνης

Ελεγκτές

P.I. (Proportional Integral)

$$H_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} = \frac{K_P(s+z)}{s} \quad \text{όπου } z = \frac{K_I}{K_P}$$

προσθέτει έναν πόλο και ένα μηδενικό

I (Integral)

$$H_c(s) = \frac{K_I}{s}$$

προσθέτει έναν πόλο

P (Proportional)

$$H_c(s) = K_P$$

P.D. (Proportional Derivative)

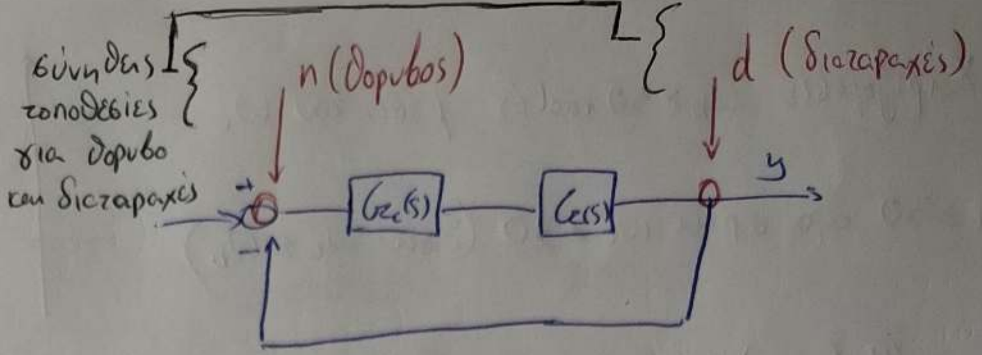
$$H_c(s) = K_P + K_D s = K(s+z) \quad , \text{όπου } z = \frac{K_P}{K_D}, \; K = K_D$$

P.I.D. (Proportional Integral Derivative)

$$H_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = \frac{K_P \cdot s + K_I + K_D \cdot s^2}{s} = \frac{K(s+c_1)(s+c_2)}{s}$$

, όπου $K_d = 1$, $K_P = c_1 + c_2$, $K_I = c_1 c_2$

Άσκηση Επιλογής Ελεγκτή



Άσκηση 1

$$G_p(s) = \frac{4}{s+5}$$

1) $e_{ssv} < 0{,}1$

2) $\omega_b \geq 30 \text{ rad/s}$

3) Απόρριψη διαταραχών τουλάχιστον 20dB για $\omega \leq 1$ rad/s $\Rightarrow 20\log|H_{yd}(j1)| \leq -20$

4) Απόσβεση θορύβου τουλάχιστον 10dB για $\omega = 200$ rad/s $\Rightarrow 20\log|H_{yn}(j200)| \leq -10$

5) Περιθώριο φάσης $\varphi_m \geq 50^\circ$

$$H_{yd}(s) = \frac{1}{1+A(s)} \qquad H_{yn}(s) = \frac{A(s)}{1+A(s)} \qquad \text{όπου } A(s) = G_{cc}(s)\cdot G_p(s)$$

1) $e_{ssv} < 0{,}1 \Rightarrow e_{ssp} = 0 \Rightarrow$ τουλάχιστον 1 ολοκληρωτής στην $A(s)$

$$\boxed{G_{cc}(s) = \frac{K_I}{s}}$$

I ελεγκτής

για να έχω όμως μεγαλύτερη ελευθερία στην επιλογή παραμέτρων ικανοποιώντας τους υπόλοιπους περιορισμούς

$$G_{cc}(s) = \frac{K_I}{s} + K_P = \frac{K_I + sK_P}{s} = \frac{\left(s + \frac{K_I}{K_P}\right)K_P}{s} = \frac{k(s+c)}{s}$$

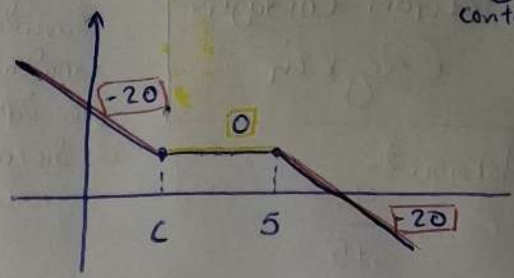
$$\frac{1}{K_v} < 0{,}1 \Rightarrow K_v > 10 \quad \text{όπου } K_v = \lim_{s\to 0} sA(s) = \lim_{s\to 0} 4\,\frac{k(s+c)}{\cancel{s}(s+5)}\cdot\cancel{s} = \frac{4kc}{5}$$

$$\frac{4kc}{5} > 10$$

$$\boxed{kc > 12{,}5} \quad (1)$$

2) Χειριζόμαστε $\omega_b \geq 30$ rad/s μέσω του ω_c

$\omega_b \geq 30$ άρα αρκεί $\omega_c \geq 30$ (διότι $\omega_c \leq \omega_b$)



$$A(s) = \frac{4k(s+c)}{s(s+5)}$$

ω_c : το ω για το οποίο $|A(j\omega)| = 1$

Για αυτό $|A(j30)| \geq 1$

$|A(j30)| \geq |A(j\omega_c)|$

$\Downarrow$ A φθίνουσα

$30 \leq \omega_c$

$A(s)$ φθίνουσα άρα:

$|A(j30)| \geq 1 \to \omega_c \geq 30$

$$\frac{4k\sqrt{c^2+30^2}}{30\sqrt{5^2+30^2}} \geq 1$$

$\boxed{k\sqrt{c^2+900} \geq 228,1}$ 2

3) $20 \log |H_{yd}(j1)| \leq -20$

$\log |H_{yd}(j1)| \leq -\frac{20}{20}$

$|H_{yd}(j1)| \leq 10^{-\frac{20}{20}}$

$|H_{yd}(j1)| \leq 0,1$ $\qquad |H_{yd}(j1)| = \frac{1}{1+A(j1)}$

$$\frac{1}{1+|A(j1)|} \leq 0,1$$

$$|A(j1)| \geq \frac{1-0,1}{0,1} = \frac{0,9}{0,1} = 9$$

Άρα $|A(j1)| \geq 9 \Rightarrow$ Ισχύει και ότι $|A(j1)| \geq 10$

περισσότερο αυστηρό
↳ Ικανοποιείται για μεγαλύτερο εύρος τιμών.

λιγότερο αυστηρό
↳ Ικανοποιείται για μικρότερο εύρος τιμών.

$$\frac{4k\sqrt{c^2+1}}{30\sqrt{5^2+1}} \geq 10 \Rightarrow k\sqrt{c^2+1} \geq 12,75 \Rightarrow \boxed{kc \geq 12,75}$$ 3

Από συνθήκη 1 $kc \geq 12,5$
η συνθήκη 3 επίσης ικανοποιείται

③ control

4) $20\log|H_{yn}(j200)| \le -10$

$$|H_{yn}(j200)| \le +10^{-10/20} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316$$

$$\Rightarrow |A(j200)| \le 0,316$$

$$\frac{4k\sqrt{c^2+200^2}}{200\sqrt{5^2+200^2}} \le 0,316$$

$$\boxed{k\sqrt{c^2+200^2} \le 3160}$$ περισσότερο αυστηρή

$$k\sqrt{c^2+200^2} = kc\sqrt{1+\left(\frac{200}{c}\right)^2} =$$

$\Downarrow$ για $\frac{200}{c} \gg 1$

$$= kc\,\frac{200}{c} = k\cdot 200$$ προσέγγιση

$$\boxed{k \le 15,8}$$ λιγότερο αυστηρή ④

προσέγγιση

$$H_{yn}(s) = \frac{A(s)}{1+A(s)}$$

Όταν $H_{yn}(s) \le x$

$$\frac{A(s)}{1+A(s)} \le x \Rightarrow x + A(s)x \ge A(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(s)(x-1) \ge -x \Rightarrow x \ge A(s)(1-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(s) \le \frac{x}{1-x}$$ επειδή $x \le \frac{x}{1-x}$

Μπορώ να πω ότι $A(s) \le x$ αν και είναι λιγότερο ακριβές από το $A(s) \le \frac{x}{1-x}$.

5) $\varphi_m = 180° + \measuredangle A(j\omega_c)$

$\varphi_m \ge 50° \Rightarrow \measuredangle A(j\omega_c) > -130° \Rightarrow$

$$\Rightarrow -90° + \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{c}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{5}\right) > -130° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{c}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{5}\right) > -40° \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Επειδή από 2ο υποερώτημα θέλω $\omega_c \ge 30$ Για $\omega_c \ge 30$ $\boxed{\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{5}\right) \ge \tan^{-1}\left(\frac{30}{5}\right) = 80,53°}$

Στη χείριστη περίπτωση $\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{5}\right) \to 90°$ Άρα:

$$\overset{\text{αρκεί}}{\Rightarrow} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{c}\right) - 90° > -40° \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{c}\right) \ge 50° \\ &\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{c}\right) \ge \tan^{-1}\left(\frac{30}{c}\right) \end{aligned}\right\} \tan^{-1}\left(\frac{30}{c}\right) \ge 50° \Rightarrow \boxed{c \le 25,17}$$ ⑤

Για $c=10$: ① $\Rightarrow k > 1{,}25$

② $\Rightarrow k \geq 7{,}22$

③ $\Rightarrow k \geq 1{,}275$

④ $\Rightarrow k \leq 15{,}8$

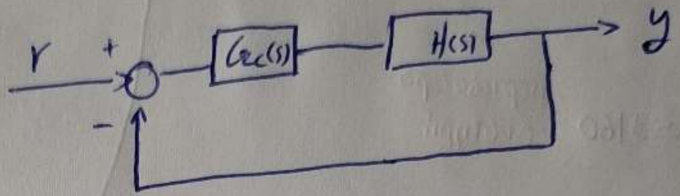
$$7{,}22 \leq k \leq 15{,}8$$

Έστω $k=12$

Άρα $G_c(s) = \dfrac{12(s+10)}{s}$.

Άσκηση 2

$$H(s) = \frac{2}{(s+4)^2+25}$$



1) Σφάλμα ταχύτητας $<0{,}4$

2) Άπειρο περιθώριο κέρδους

3) Εύρος ζώνης τουλάχιστον 8 rad/s

4) Απόρριψη διαταραχών τουλάχιστον 20dB για $\omega \leq 0{,}1$ rad/s

5) Περιθώριο φάσης τουλάχιστον 40°

1) Για περιορισμένο σφάλμα ταχύτητας χρειαζόμαστε σίγουρα έναν ολοκληρωτή

$$G_c(s) = \frac{k}{s}$$

Για να ικανοποιήσουμε και τις υπόλοιπες προδιαγραφές βάζω και έναν αναλογικό οπότε:

$$G_c(s) = \frac{k_I}{s} + k_P = \frac{k(s+c)}{s}$$

ΣΜΑΒ: $A(s) = G_c(s)\cdot H(s) = \dfrac{k(s+c)\cdot 2}{s[(s+4)^2+25]}$

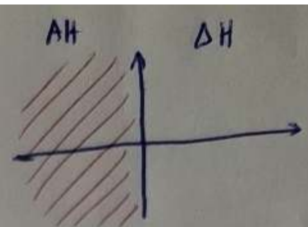
$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s\,A(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} \frac{2k(s+c)}{(s+4)^2+25}} = \frac{1}{\frac{2kc}{16+25}} = \frac{41}{2kc}$$

①

$e_{ssv} < 0{,}4$

$\dfrac{41}{2kc} < 0{,}4$

$2kc > \dfrac{41}{0{,}4} \Rightarrow \boxed{kc > 51{,}25}$



2) $g \to \infty$

Δηλαδή:

$\chi \in : 1 + A(s) = 0$

$$s[(s+4)^2+25] + 2k(s+c) = 0$$

$\forall k$ πρέπει οι πόλοι να παραμένουν στο αριστερό ημιεπίπεδο

(α) τροπος

Γεωμετρικός τόπος ριζών

$$1 + kL(s) = 0 \Rightarrow L(s) = \frac{2(s+c)}{s[(s+4)^2+25]}$$

επειδή $1 + k\left[\frac{2(s+c)}{s[(s+4)^2+25]}\right] = 0$

$$s[(s+4)^2+25] + 2k(s+c) = 0$$

=

Μηδενικά

$z_1 = -c$ Αριθμός μηδενικών $\boxed{m=1}$

Πόλοι

$p_1 = 0 \quad p_{2,3} = -4 \pm j5$ Αριθμός πόλων $\boxed{n=3}$

$(s+4)^2 + 25 = 0$

$s^2 + 8s + 16 + 25 = 0$

$s^2 + 8s + 41 = 0$ $\Delta = 8^2 - 4\cdot 1\cdot 41 = 64 - 164 = -100$

$s_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-100}}{2}$

$s_1 = -4+5j \quad s_2 = -4-5j$

Ασύμπτωτες

$n - m = 3 - 1 = 2$

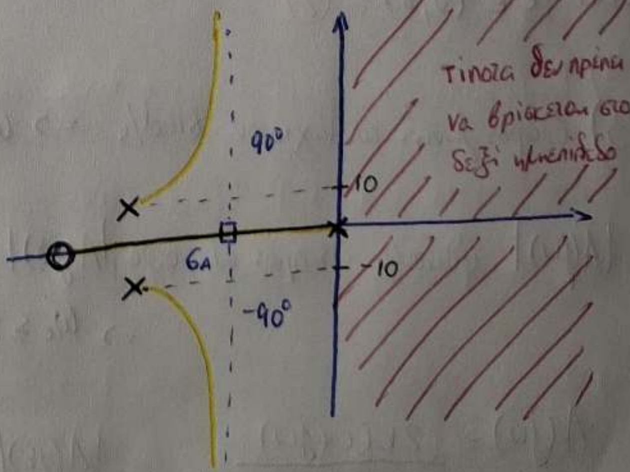
$$\theta_i = \frac{(2i+1)180^\circ}{n-m}, \quad i \in [0, n-m-1]$$

$$\theta_0 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\theta_1 = \frac{3\cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ \text{ ή } -90^\circ$$

Σημείο τομής (ασυμπτώτων με τον πραγματικό άξονα)

$$\sigma_A = \frac{\Sigma p_i - \Sigma z_i}{n-m} = \frac{[0-4-4]-[-c]}{2} = \frac{-8+c}{2}$$



1. $z_1 < 0 \Rightarrow c > 0$
2. $\sigma_A < 0 \Rightarrow \frac{-8+c}{2} < 0 \Rightarrow c < 8$

Άρα $c \in (0,8)$ ②

⑥
control

⑧ τρόπος

Routh Hurwitz

ΧΕ: $1+A(s)=0 \Rightarrow s^3+8s^2+(2k+41)s+2kc=0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2k+41 \\ s^2 & 8 & 2kc \\ s^1 & a_1 & a_2 \\ s^0 & b_1 & \end{array}$$

$$a_1 = \frac{8(2k+41)-2kc}{8} \qquad a_2=0$$

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot 2kc - 8a_2}{a_1} = \frac{a_1 2kc}{a_1} = 2kc$$

Θέλω $\forall k>0$ η πρώτη στήλη να μην αλλάξει πρόσημο.

1. $2kc>0 \overset{k>0}{\Rightarrow} \boxed{c>0}$

2. $\frac{8(2k+41)-2kc}{8}>0$

$16k+328-2kc>0$

$k(16-2c)+328>0$

$k(8-c)+164>0$ Το αριστερό μέλος της ανισότητας είναι σίγουρα θετικό για $(8-c)>0$

$8-c>0$

$\boxed{c<8}$

Έτσι $\boxed{c\in(0,8)}$ ②

3) Εύρος ζώνης τουλάχιστον 8rad/s $\Rightarrow \omega_b \geq 8$ rad/s και αρκεί $\omega_c \geq 8$ rad/s (διότι $\omega_c \leq \omega_b$)

$|A(j\omega)|$ φθίνουσα ως προς ω, άρα $|A(j8)| \geq 1 = |A(j\omega_c)| \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_c \geq 8$

$$A(j\omega) = \frac{2k(c+j\omega)}{j\omega(41-\omega^2+j8\omega)}$$

$|A(j8)| \geq 1 \Rightarrow 2k\sqrt{c^2+8^2} \geq 8\sqrt{(41-8)^2+(8\cdot 8)^2}$

$\boxed{k\sqrt{c^2+8^2} \geq 272{,}03}$ Η ισότητα ισχύει για $\omega_c=8$

③

4) Απόρριψη διαταραχών τουλ. 20dB για $\omega \le 0,1 rad/s$

$$20\log|H_{yd}(j0,1)| \le -20$$

$$|H_{yd}(j0,1)| \le 10^{-1}$$

$$|A(j0,1)| \ge 10$$

$$2k\sqrt{c^2+0,1^2} \ge 10 \cdot 0,1\sqrt{(41-0,1^2)^2+(8 \cdot 0,1)^2}$$

$$k\sqrt{c^2+0,01} \ge 20,5$$

προσέγγιση

$$\boxed{kc \ge 20,5} \quad (4)$$

5) Περιθώριο φάσης τουλ 40°

$$\varphi_m \ge 40^\circ$$

$$180^\circ + \measuredangle A(j\omega_c) \ge 40^\circ$$

$$\measuredangle A(j\omega_c) \ge -140^\circ$$

$$-90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{8\omega_c}{41-\omega_c^2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{c}\right) \ge -140^\circ$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{c}\right) \ge -50^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{8\omega_c}{41-\omega_c^2}\right)$$

Έστω $\omega_c = 8$:

$$\tan^{-1}\left(\frac{8}{c}\right) \ge -50^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{64}{41-64}\right) + 180^\circ$$

$$\frac{8}{c} \ge \tan\left(130^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{64}{-23}\right)\right)$$

$$c \le \frac{8}{\tan\left(130^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{64}{-23}\right)\right)}$$

$$\boxed{c \le 4,66} \quad (5)$$

Απόδειξη προσεγγίσεων τύπων διαταραχών & θορύβου

$$H_{yd}(s) = \frac{1}{1+A(s)}$$

Διαταραχές

$$|H_{yd}(s)| \le 0,1$$

$$\frac{|1|}{|1+A(s)|} \le 0,1$$

(όταν $A(s) >> 1$)

$|1+A(s)| \ge 10$ προσεγγιστικά λέμε

$$|A(s)| \ge 10$$

Ομοίως για τον θόρυβο:

$$H_{yn}(s) = \frac{A(s)}{1+A(s)}$$

$$|H_{yn}(s)| \le 0,1$$

$$\frac{|A(s)|}{|1+A(s)|} \le 0,1$$

(όταν $A(s) << 1$)

$$\frac{|A(s)|}{|1|} \le 0,1$$

$$|A(s)| \le 0,1$$

Έστω $c=4$

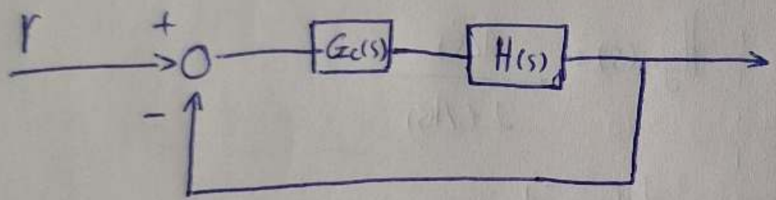
③ $\Rightarrow k \geq 30,42$
① $\Rightarrow k \geq 12,82$
$\Big\}\ k \geq 30,42$

② $\Rightarrow c \in (0,8)$ ισχύει
④ $\Rightarrow ck \geq 20,5 \Rightarrow k \geq 5,125$ ισχύει
⑤ $\Rightarrow c \leq 4,66$ ισχύει

Οπότε $G_{cc}(s) = \dfrac{30,42(s+4)}{s}$.

Άσκηση 3

Δίνεται το παρακάτω σύστημα με $H(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+4)}$



Να σχεδιαστεί ο ελεγκτής $G_{cc}(s)$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες προδιαγραφές:

1) Σφάλμα ταχύτητας στη μόνιμη κατάσταση μικρότερο από 0,1
2) Άπειρο περιθώριο κέρδους
3) Χρόνος αποκατάστασης μικρότερος από 0,5s
4) Βηματική απόκριση χωρίς ταλαντώσεις

Να σχεδιαστεί ο Γ.Τ.Ρ. (Γεωμετρικός τόπος ριζών) για θετικές τιμές του κέρδους (έστω k) της ΣΜΑΒ (συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου).

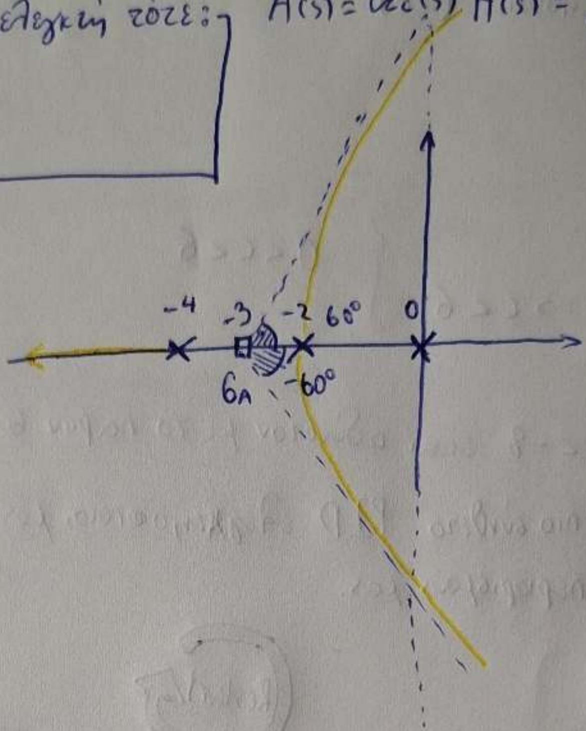
Σχολιάστε αν αυξάνοντας το κέρδος k η βηματική απόκριση της ΣΜΚΒ θα παρουσιάζει ή όχι ταλαντώσεις και αν θα αυξηθεί ή μειωθεί ο χρόνος αποκατάστασης. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1) Για περιορισμένο essv πρέπει να έχουμε σίγουρα ολοκληρωτή.

$$G_{c}(s) = \frac{k}{s}$$

Αν χρησιμοποιούσα αυτόν τον ελεγκτή τότε:

$$A(s) = G_{c}(s)\,H(s) = \frac{k}{s(s+2)(s+4)}$$



Πόλοι και μηδενικά

$n = 3$

$m = 0$

Ασύμπτωτες

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\,180°}{n-m}$$

$\theta_0 = 60°$

$\theta_1 = 180°$

$\theta_2 = 5 \cdot 60° = 300°$ ή $-60°$

Σημείο τομής

$$\sigma_A = \frac{\Sigma p_i - \Sigma z_i}{n-m} = \frac{0-2-4}{3} = -3.$$

Οι κλάδοι που θα εισέρχονταν στο Δ.Η. οπότε πρέπει να βάλω και έναν αναλογικό ελεγκτή.

$$G_{c}(s) = \frac{k(s+c)}{s}$$

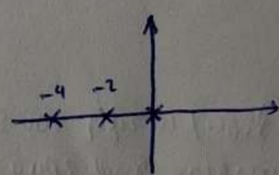
$$A(s) = G_{c}(s)\,H(s) = \frac{k(s+c)}{s(s+2)(s+4)}$$

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s A(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} \frac{k(s+c)}{(s+2)(s+4)}} = \frac{1}{\frac{kc}{8}} = \frac{8}{kc}$$

$e_{ssv} < 0{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8}{k \cdot c} < 0{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{kc > 80}$ 1



3) Χρόνος αποκατάστασης $< 0{,}5s$

$$t_s \approx \frac{4}{Re\{\text{πόλου πιο κοντά στο φανταστικό άξονα}\}}$$

Για να είναι εντός του ΑΗ

$\frac{4}{|Re\{\text{πόλου}\}|} < 0{,}5 \Rightarrow |Re\{\text{πόλου}\}| > 8 \Rightarrow \boxed{Re\{\text{πόλου}\} < -8}$ 2

Χαρακτηριστική εξίσωση

ΧΕ.: $1 + A(s) = 1 + kL(s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + kL(s) = 1 + k\left(\frac{(s+c)}{s(s+2)(s+4)}\right)$$

Ασύμπτωτες

$n = 3$, $m = 1$

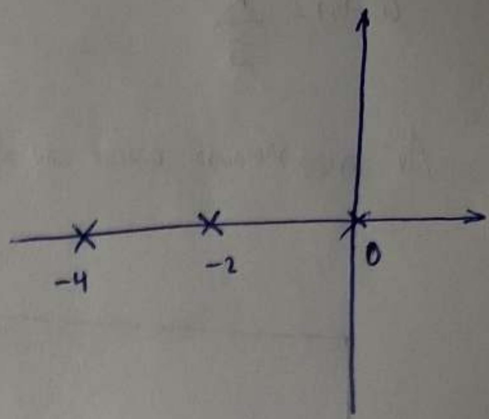
$$\theta_i = \frac{(2i+1)\,180°}{n-m} = \begin{cases} 90° \\ +270° \text{ ή } -90° \end{cases}$$

Επομένως

$$\sigma_A = \frac{\Sigma p_i - \Sigma z_i}{n-m} = \frac{(0-2-4) - (-c)}{2} = \frac{-6+c}{2}$$

2) Για άπειρο περιθώριο κέρδους g_m

Έχω 3 κλάδους → 2 ασύμπτωτες $\pm 90^\circ$
→ 1 μηδενικό $(-c)$



Για $g_m \to \infty$ αρκεί:

- $c > 0$
- $\sigma_A < 0 \Rightarrow \dfrac{-6+c}{2} < 0 \Rightarrow c < 6$

$\Bigg\} \; 0 < c < 6$

Όμως η ② $Re\{πόλου\} < -8$ είναι αδύνατον με το παρόν σύστημα οπότε ο PI δεν μας κάνει. Άρα επιλέγουμε τον πιο σύνθετο PID ελεγκτή ο οποίος μας δίνει μεγαλύτερη ελευθερία για να ικανοποιήσουμε τους περιορισμούς μας.

Restart

$$C_C(s) = \frac{k(s+c_1)(s+c_2)}{s}$$

Slower	Faster
$t_s = \dfrac{4}{2} = 2\,s$	$t_s = \dfrac{4}{4} = 1\,s$

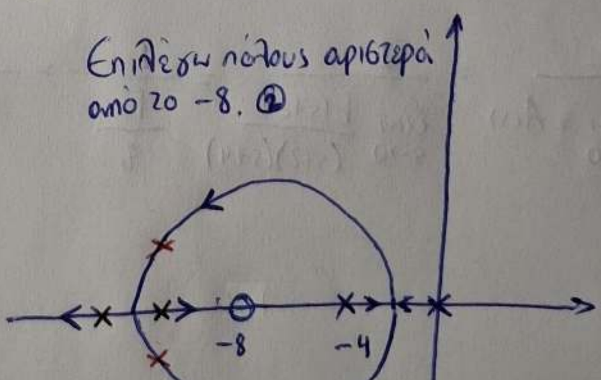
Επιλέγουμε $c_2 = 2$ για να απλοποιήσουμε τον πιο αργό πόλο.

$$A(s) = \frac{k(s+c_1)(s+2)}{s(s+2)(s+4)} = \frac{k(s+c)}{s(s+4)}$$

Επιλέγω πόλους αριστερά από το -8. ②

$$X.E.: 1 + A(s) = 1 + kL(s) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + k\frac{(s+c)}{s(s+4)}$$

Έστω $c = 8$



Ασύμπτωτες

$$\theta_i = \frac{(2i+1)180^\circ}{n-m}$$

$$\theta_0 = 180^\circ$$

Επιλέγω μια τιμή του s που σίγουρα υπάρχει στον γεωμετρικό τόπο ριζών μου: $s = -10$.

Αυτή η τιμή επαληθεύει την:

$$1 + kL(s) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{k(s+8)}{s(s+4)} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{k(-2)}{(-10)(-6)} = 0 \Rightarrow k = \frac{-60}{-2} = 30.$$

- Δεν θέλω μιγαδικούς πόλους (ταλαντώσεις)
- Επιλέγω k έτσι ώστε οι πόλοι μου να είναι πραγματικοί

Επαληθεύουμε ότι ισχύει ερώτημα 1): $e_{ssv} = \dfrac{1}{K_v} = \dfrac{1}{\lim_{s\to 0} s\dfrac{30(s+8)}{s(s+4)}} = 0{,}016\overline{6}$

$e_{ssv} < 0{,}1$ ✓

Έπειτα επαληθεύουμε το ερώτημα 3) : $t_s = \frac{4}{Re\{πόλου\}}$

$$1 + kL(s) = 1 + 30L(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{30(s+8)}{s(s+4)} = \frac{s(s+4) + 30(s+8)}{s(s+4)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 + 4s + 30s + 240 = 0$$

$$s^2 + 34s + 240 = 0$$

$\left.\begin{array}{l} s_1 = -10 \\ s_2 = -24 \end{array}\right\}$ s_1 είναι ο πιο αργός πόλος $\quad t_s = \frac{4}{10} = 0{,}4s < 0{,}5s$ ✔

Ερώτημα 2) ικανοποιείται μέσω του ΓΤΡ $g_m \to \infty$ ✔

Επομένως $G_{c_c}(s) = \frac{30(s+8)(s+2)}{s}$