Σημειώσεις Θεωρίας

Σ.Ι. (Σημείο Ισορροπίας)

Παράδειγμα Σύστημα $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^4$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2^3 + x_1^4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_1^4 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{matrix} \quad \underbrace{x^*}_{} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↳ συμβολισμός σημείου ισορροπίας

Γραμμικοποίηση (Taylor) / (κοντά σε σημείο ισορροπίας)

Παράδειγμα Σύστημα $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^4$

$$z = x - x^* \xrightarrow{\Sigma I = [0\ 0]} z = x$$

(Αναλυτικά $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x$)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2^3 + x_1^4 \end{bmatrix}}$$

Έστω $F(x)$

$$\dot{x} = F(x)$$

Προσεγγίζουμε την $F(x)$, μέσω της σειράς Taylor, στο σημείο $[0\ 0]$

$\dot{x} = F(x)$ $\quad$ x^* είναι σημείο ισορροπίας άρα $F(x^*) = 0$

$$= F(x^*) + \frac{\partial F}{\partial x}(x - x^*) + \ldots$$

→ Ανώτεροι όροι σειράς $\simeq 0$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x - x^*)$$

Άρα $\dot{x} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x^*} (x - x^*)$

ή

$\dot{z} = Az$, όπου $A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x^*}$

Advanced Example

$\dot{x}_1 = x_2 - 2x_1x_2^2$

$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 2x_2^3$

ΣΙ $(0,0)$

$$\dot{z} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x^*} z = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} -2x_2^2 & (1-4x_1x_2) \\ -1 & (-1-6x_2^2) \end{bmatrix}$$

Έτσι κοντά στο $[0, 0]$ έχουμε: $\dot{z} = Az \Rightarrow \dot{z} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4x_1^3 & -3x_2^2 \end{bmatrix}\right|_{x=x^*} z \overset{\begin{pmatrix} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 0 \end{pmatrix}}{\Rightarrow} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z$

Ευστάθεια Σ.Ι. με γραμμικοποίηση

Χαρακτηριστική εξίσωση

$s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2$

φυσική συχνότητα: ω_n

συντελεστής απόσβεσης: ζ

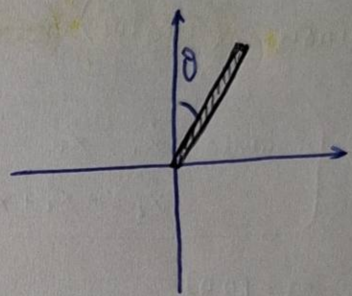
Παράδειγμα

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin x_1 - \gamma x_2 \end{bmatrix} \quad \text{, όπου } \gamma > 0$$

ΣΙ

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = \sin x_1 - \gamma x_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ \sin x_1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = 0, \pi, 2\pi, \dots \end{array}$$

Στην περίπτωση ανάστροφου εκκρεμούς



$\theta \in [0, 2\pi)$

Περίπτωση 1

$x^* = (0, 0)$ Κοντά στο 0 $\sin x_1 \cong x_1$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - \gamma x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax$$

$$\boxed{\det(sI - A) = 0}$$

$$\begin{vmatrix} s-0 & 1 \\ 1 & s-(-\gamma) \end{vmatrix} = s(s+\gamma) - 1\cdot 1 = s^2 + s\gamma - 1 = 0$$

Από Routh-Hurwitz έχουμε:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & -1 \\ s^1 & \gamma & 0 \\ s^0 & -1 & \end{array} \qquad \frac{\gamma(-1) - 1\cdot 0}{\gamma}$$

Δεν είναι όλα θετικά επομένως το (0,0) είναι ασταθές σημείο ισορροπίας

Περίπτωση 2

$x^* = (\pi, 0)$

$$z = x - x^* \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = x_1 - \pi \Rightarrow x_1 = z_1 + \pi \\ z_2 = x_2 - 0 \end{array}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \sin(z_1+\pi) - \gamma z_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sin(z_1+\pi) = -\sin z_1 \cong -z_1} \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 - \gamma z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} s-0 & 1 \\ -1 & s+\gamma \end{vmatrix} = s(s+\gamma) - (-1) = s^2 + \gamma s + 1 = 0$$

Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & \gamma & 0 \\ s^0 & 1 & \end{array} \qquad \frac{\gamma\cdot 1 - 1\cdot 0}{\gamma} = 1$$

Όλα θετικά επομένως ασυμπτωτικά ευσταθές ΣΙ

Liapunov

Αν πάρουμε την ενεργειακή συνάρτηση του συστήματος και αποδείξουμε ότι είναι φθίνουσα τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ευστάθεια. Ισχύει όταν, μεταξύ άλλων ΣΙ, $x^*=0$.

Συνάρτηση Liapunov: $V(x)$

αρνητικά / θετικά ορισμένη
$V(x) \gtrless 0 \quad \forall x \neq 0$
$V(0)=0$ π.χ. $V(x)=x_1^2+x_2^2$

μηδενίζεται μόνο για $(x_1,x_2)=(0,0)$

αρνητικά / θετικά ημιορισμένη
$V(x) \geq / \leq 0 \quad \forall x \neq 0$
$V(0)=0$ π.χ. $V(x)=x_1^2$

μπορεί να μηδενισεί για πολλαπλές λύσεις: $(x_1,x_2)=(0,a_1)=(0,a_2)=\dots$

Όταν για $B_r(0)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<r\}$ έχουμε:

- $V>0$ και $\dot V \leq 0 \quad \forall x\in B_r(0) \Rightarrow x^*=0$ τοπικά ευσταθές
- $V>0$ και $\dot V < 0 \quad \forall x\in B_r(0) \Rightarrow x^*=0$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές

Αν οι προϋποθέσεις ισχύουν $\forall x \in \mathbb{R}^n$ τότε η ευστάθεια είναι ολική.

Παράδειγμα

$$\dot x_1 = x_2 \qquad \dot x = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_2=0 \\ x_1=-\sin 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2=0 \\ x_1=0 \end{matrix} \quad \text{ΣΙ.}$$

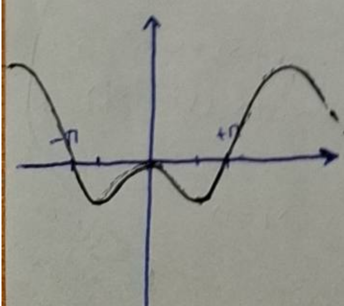
$$\dot x_2 = -x_1 - \sin x_2$$

Επιλέγω την κλασική συνάρτηση Liapunov $V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$

$$V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$$

$$\begin{aligned}\dot V(x) &= x_1\dot x_1 + x_2\dot x_2 \\ &= x_1x_2 + x_2(-x_1-\sin x_2) \\ &= x_1x_2 - x_1x_2 - (\sin x_2)(x_2) \\ &= \underline{-(\sin x_2)\, x_2}, \quad x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Δηλαδή επιλέγω $B_r(0)=\{x\in\mathbb{R}^n \ |x_2|<\frac{\pi}{2}\}$. Επομένως μιλάμε για τοπική ευστάθεια.



Συνεπώς • $V(x)$ θετικά ορισμένη

• $\dot V(x)$ αρνητικά ημιορισμένη επειδή στο $x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, όπου $\dot V(x)\leq 0$, η ισότητα $\dot V(x)=0$ μπορεί να ισχύει για παραπάνω από ένα x_1. Δηλαδή:

$\dot V(x_1^{(1)},0)=\dot V(x_1^{(2)},0)=0$ Άρα τοπικά ευσταθές.

La Salle

Η αρχή αμεταβλητότητας του La Salle επιτρέπει την διαπίστωση ασυμπτωτικής ευστάθειας έπειτα από διενέργεια Liapunov.

Έστω $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ όπου:

- $V(x) > 0$
- $\dot{V}(x) \leq 0$

$\Big\}\ \forall x \in \Omega_r = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq r,\ r>0\}$

- $S = \{x \in \Omega_r : \dot{V}(x) = 0\}$

Αν το S έχει ως μοναδικό αμετάβλητο σύνολο το $x=0$ (ή $x_1=0, x_2=0$) τότε το $x=0$ είναι τοπικά (στο Ω_r) ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο.

Παράδειγμα 1

Σε συνέχεια του παραδείγματος του Liapunov έχουμε:

$$S = \{\underbrace{x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)}_{\Omega_r} : \underbrace{\dot{V}(x) = 0}_{\text{συμβαίνει για } x_2=0}\} = \{x \in \Omega_r : x_2 = 0\}$$

$\boxed{\text{Εντός του } S}$

Για $x_2 = 0$ $\quad \begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \sin x_2\end{aligned}$ $\quad$ γίνεται:

$\dot{x}_1 = 0$ $\quad$ ▶ Αν $x_1 \neq 0$ τότε $\dot{x}_2 \neq 0$ επομένως x_2 αυξάνει ή μειώνει και φεύγω από το S

$\dot{x}_2 = -x_1$ $\quad$ ▶ Αν $x_1 = 0$ τότε παραμένω μέσα στο S

Το μοναδικό αμετάβλητο σύνολο που περιέχεται μέσα στο S είναι το $(0,0)$.

Συνεπώς το Σ.Ι. $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα 2

$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1 x_2^3$

$\dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2 x_2^2$

Σ.Ι. $\dot{x} = 0 \Rightarrow \begin{aligned}-x_1 + x_2 + x_1 x_2^3 &= 0 \\ -x_1 - x_1^2 x_2^2 &= 0\end{aligned} \Big\}\ \begin{aligned}-x_1 + x_2 + x_1 x_2^3 &= 0 \\ -x_1(1 + x_1 x_2^2) &= 0\end{aligned}$

→ Έστω $x_1 = 0$ τότε: $x_2 = 0$

→ Έστω $(1 + x_1 x_2^2) = 0$ τότε: $\begin{aligned}-x_1 + x_2 + x_1 x_2^3 &= 0 \\ -x_1 + x_2(1 + x_1 x_2^2) &= 0 \\ -x_1 + x_2 \cdot 0 &= 0 \\ x_1 &= 0\end{aligned}$

Έτσι $(x_1, x_2) = (0,0)$

$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ $\quad V(x) > 0$

$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(-x_1 + x_2 + x_1 x_2^3) + x_2(-x_1 - x_1^2 x_2^2) = -x_1^2$ $\quad \dot{V}(x) \leq 0$

Άρα ευσταθές.

La Salle για να ελέγξω ασυμπτωτική ευστάθεια

$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$

$\dot{x}_1 = x_2$ $\quad$ ▶ Αν $x_2 \neq 0$ φεύγω από το S

$\dot{x}_2 = 0$ $\quad$ ▶ Αν $x_2 = 0$ παραμένω στο S

Άρα το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές Σ.Ι.

Γραμμικοποίηση (Ανάδραση)

Ρύθμιση ελεγκτή u με σκοπό την αναίρεση μη γραμμικών όρων.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a\sin x_2 + b x_1^2 + c u$$

Θέτω $u = \dfrac{-b x_1^2 + a\sin x_2 + v}{c}$

Έτσι: $\dot{x}_1 = x_2$
$x_2 = v$

Ελεγξιμότητα

Αν ο πίνακας ελεγξιμότητας M έχει βαθμό n τότε το σύστημα θεωρείται ελέγξιμο.

$$M = [B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^{n-1}B], \quad \det(M) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(M) = n.$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$M = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \Rightarrow \det(M) \neq 0$$ Άρα το σύστημα είναι <u>ελέγξιμο</u>.

$\operatorname{rank}(M) = 2 = n$

Ιδιοτιμές

Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\det(sI-A)=0$

$$\dot{x} = Ax$$

Το παραπάνω σύστημα λέγεται:

- <u>Ασυμπτωτικά ευσταθές</u> αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του A έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος. $\lambda(A) < 0$
- <u>Ασταθές</u> αν έστω και μία ιδιοτιμή του A έχει θετικό πραγματικό μέρος $\lambda(A) > 0$

<u>Παράδειγμα</u>

$\dot{x}_1 = x_2$ $\qquad \dot{x}=0 \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{matrix}$ $\quad$ Άρα $(0,0)$ είναι Σ.Ι.

$\dot{x}_2 = x_1$ $\qquad \dot{x} = Ax \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\det(sI-A) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 1 = (s-1)(s+1)$$

Άρα $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ Και συνεπώς σύστημα ασταθές ($\exists$ τουλ. 1 ιδιοτιμή $\lambda > 0$)

Μεταβλητές κατάστασης

<u>Παράδειγμα</u>

$$\ddot{y} + \dot{y}^3 + y = 0$$

Για να βγάλω της <u>μεταβλητές κατάστασης</u> ορίζω $y = x_1$ και $\dot{x}_1 = x_2$:

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{y = x_1} \\ &\dot{x}_1 = x_2 = \dot{y} \\ &\dot{x}_2 = \ddot{y} \end{aligned}\right\} \quad \dot{x}_2 + x_2^3 + x_1 = 0$$

$$\text{Άρα: } \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 - x_1 \end{aligned}\right] \text{ εξισώσεις κατάστασης}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Για $D=0$ $\boxed{k_r = -\dfrac{1}{C(A-Bk)^{-1}B}}$

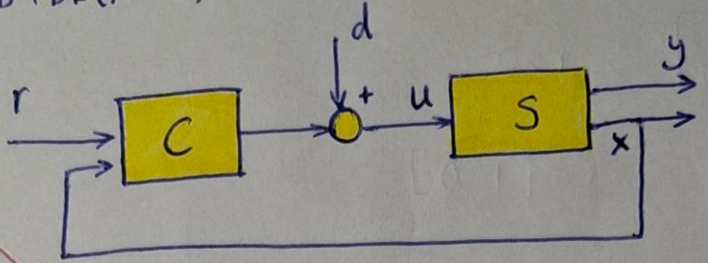
steady state

Απεικόνιση Πλήρους Συστήματος

$$r = y_{ss} = Cx^* + Du^* = Cx^* + D[-kx^* + k_r r]$$

$$1 = [-C(A-Bk)^{-1}B + Dk(A-Bk)^{-1}B + D]\,k_r \Rightarrow k_r = \frac{1}{Dk(A-Bk)^{-1}B + D - C(A-Bk)^{-1}B}$$

ταυτοποιείται



S : σύστημα (system)

C : ελεγκτής (controller)

d : διαταραχή (disturbance)

r : είσοδος αναφοράς (input reference)

y : έξοδος

x : διάνυσμα κατάστασης

u : είσοδος συστήματος

διαταραγμένη έξοδος ελεγκτή

Σύστημα

$$S: \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

Ασχολούμαστε κυρίως με $r(t) = r = \text{const.}$

- $y(t) = r$ για $t \to +\infty$
- γραμμικός ελεγκτής: $u = -kx + k_r \cdot r$, για $d(t) = 0$
- $\dot{x} = Ax + B(-kx + k_r \cdot r) = \underbrace{(A-Bk)}_{\tilde{A}}x + Bk_r r$

Στη μόνιμη κατάσταση $\dot{x} = 0 \Rightarrow (A-Bk)x^* + Bk_r r = 0 \Rightarrow x^* = -(A-Bk)^{-1}Bk_r r$

Παρατηρησιμότητα

Αν ο πίνακας παρατηρησιμότητας W έχει βαθμό n τότε το σύστημα θεωρείται παρατηρήσιμο.

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \det(W) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(W) = n$$

Παράδειγμα

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -k_0 - k_1 & k_1 \\ k_2 & -k_2 \end{bmatrix}}^{A} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k_0 - k_1 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_0 - k_1 & k_1 \\ k_2 & -k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_0 - k_1 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$\det(W) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -k_0 - k_1 & k_1 \end{vmatrix} = k_1 - (0) = k_1$$

Αν $k_1 \neq 0$ τότε $\operatorname{rank}(W) = 2$ και επομένως το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Επιλογή Ελεγκτή Πλήρους Συστήματος

Παράδειγμα

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad r > 0$$

$$y = Cx$$

$$B = \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Στόχος: Σχεδίαση γραμμικού ελεγκτή ανάδρασης καταστάσεων ώστε $y \to r = \text{const.}$

1ο Βήμα: Έλεγχος Ελεγξιμότητας

$$\left.\begin{aligned} M &= [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \det(M) = \begin{vmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(M) = 2$$

Επομένως το σύστημα είναι ελέγξιμο.

2ο Βήμα: Σχεδίαση γραμμικού ελεγκτή ανάδρασης

$$u = -kx + k_r \cdot r = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_r \cdot r = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + k_r \cdot r$$

3ο Βήμα: Κλειστό βρόχου με ελεγκτή

$$\dot{x} = \underbrace{(A - Bk)}_{\tilde{A}} x + B k_r r$$

$$= \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right)}_{\tilde{A}} x + \begin{bmatrix} k_r\gamma \\ k_r \end{bmatrix} r \quad , \text{όπου } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma k_1 & \gamma k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma k_1 & 1 - \gamma k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - \tilde{A}) = \begin{vmatrix} s + \gamma k_1 & \gamma k_2 - 1 \\ k_1 & s + k_2 \end{vmatrix} = (s + \gamma k_1)(s + k_2) - k_1(\gamma k_2 - 1) = s^2 + s(k_2 + \gamma k_1) + k_1$$

όπου $s^2 + s(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 \cdot \lambda_2)$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ where } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

$$\begin{cases} k_2 + \gamma k_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ k_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{cases}$$

λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του συστήματος

$$k_r = \frac{1}{-C(A - BK)^{-1}B} = \frac{1}{-\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\gamma k_1 & 1 - \gamma k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{-1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{k_1}\begin{bmatrix} -k_2 & \gamma k_2 - 1 \\ k_1 & -\gamma k_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{-k_1}{\begin{bmatrix} -k_2 & \gamma k_2 - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{-k_1}{-\gamma k_2 + \gamma k_2 - 1} = k_1$$

Άρα $u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_r r$

$= -k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_1 r$

Ελάχιστη Υλοποίηση

Οι εξισώσεις κατάστασης/εξόδου αποτελούν ελάχιστη υλοποίηση όταν το σύστημα είναι:

- Ελέγξιμο
- Παρατηρήσιμο

Hurwitz Matrix

Ένας πίνακας θεωρείται πίνακας Hurwitz όταν:

- είναι τετραγωνικός $(n \times n)$
- όλες του οι ιδιοτιμές έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος $(Re\{\lambda\} < 0)$

Συμπέρασμα: Αν έχουμε $\dot{x} = Ax$, όπου A πίνακας Hurwitz τότε το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα

$\dot{x} = (A+B)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, όπου A πίνακας Hurwitz

Αν $B \neq 0$ να βρεθεί ένα άνω φράγμα στη νόρμα $|B|$ του πίνακα B ώστε το μηδέν να παραμένει ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Πίνακας P $\quad P = P^T > 0 \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} > 0$

- θετικά ορισμένος
- συμμετρικός

→ ελάσσονες ορίζουσες αυστηρά θετικές

$\tilde{A} = A + B$

Επιλέγω $V(x) = x^T P x$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = \tilde{A}^T x^T P x + x^T P \tilde{A} x = (A+B)^T x^T P x + x^T P (A+B) x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) = A^T x^T P x + B^T x^T P x + X^T P A x + x^T P B x$$
$$= x^T (P A^T + PA) x + x^T (P B^T + PB) x$$
$$= -\underbrace{x^T Q x} + \underbrace{x^T (B^T P + BP) x}$$

Ορίζω πίνακα Q

- θετικά ορισμένος $\quad Q = Q^T > 0$
- συμμετρικός

όπου $\boxed{A^T P + PA = -Q}$ (1) Εξίσωση Liapunov

Θεώρημα ευστάθειας Liapunov για γραμμικά συστήματα.

Το γραμμικό σύστημα $\dot{x} = Ax$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν για κάποιο δοσμένο πραγματικό και συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα Q η λύση της εξίσωσης (1) ως προς P είναι επίσης πραγματικός συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

$$\lambda_{min}(Q)\|x\|^2 \leq x^T Q x \leq \lambda_{max}(Q)\|x\|^2$$

$$x^T (B^T P + BP) x \leq \|x\|^2 \|B^T P + BP\|$$
$$\Downarrow$$
$$x^T (B^T P + BP) x \leq \|x\|^2 (\|B^T P\| + \|BP\|)$$
$$\Downarrow$$
$$x^T (B^T P + BP) x \leq \|x\|^2 \cdot 2\|BP\|$$

$\dot{V}(x) < 0$ για ασυμπτωτική ευστάθεια οπότε:

$$-x^T Q x + x^T (B^T P + BP) x < 0$$

$$-\lambda_{min}(Q)\|x\|^2 + \|x\|^2 2\|BP\| < 0$$

$$\|B\| < \frac{\lambda_{min}(Q)}{2\|P\|}.$$