TEKNOFEST 2024 ROKET YARIŞMASI

ORTA İRTİFA KATEGORİSİ

KILAVUZ KOUSPACE ROKET TAKIMI

UÇUŞ BENZETİM RAPORU (UBR)

İÇİNDEKİLER

1-) Sorular ve Cevaplar

1. Soru ve Cevap - 1

Kinematik ve dinamik hareket denklemleri nedir, aralarındaki farklar nelerdir?

Dinamik iki alt daldan oluşur: Kinematik ve kinetik. Kinetik sistemler cisimlerin hareketini kuvvet(ler)in etkisi altında hız, yerdeğiştirme, ivme, zaman gibi parametreler arasında ilişkiler kurarak karşılaştırma yapar. Kinematik ise genel anlamda hareketin geometrisini ve zamana bağlı oluşumunu inceleyen bilim dalıdır. Ayrıca kinematik, hareketlere etki eden kuvvet(ler)i göz ardı ederek inceler. [1]

2. Soru ve Cevap - 2

İki serbestlik dereceli kinematik benzetimin, roket dinamik denklemlerinin (motor itki kuvveti ve aerodinamik sürükleme kuvveti) de katılarak roket uçuşuna uyarlanması ile elde edilecek uçuş benzetimi, roket tasarımında ne amaçlarla kullanılabilir, faydaları nelerdir?

Benzetime bu kuvvetlerin katılmasıyla benzetim sonucu elde ettiğimiz veriler doğrultusunda roket yapısı üzerinde; gövde ölçüsü, burun konisi ve ölçülendirilmesi, kanat seçimi ve ölçülendirilmesi gibi alanlarda istenilen sonuç(lar) için roket üzerinde gerekli değişiklikler yapılmasında yardımcı olur. Bundan dolayı roketin genel yapısı hakkında fikir sahibi olma ve detaylara inildikçe sınırlarımızın oluşmasını sağlar.

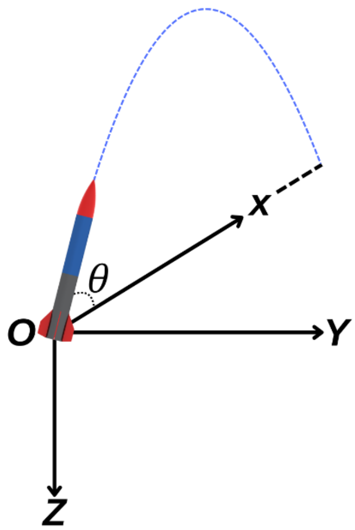
3. Soru ve Cevap – 3

İki serbestlik dereceli dinamik uçuş benzetimine Y ekseni etrafında açısal hareket eklenerek elde edilecek 3 serbestlik dereceli benzetimin getireceği faydalar nelerdir? Bu benzetimin kullanılması için roketin ek olarak hangi bilgilerinin bilinmesi ve kullanılması gerekir?

Roketin optimum performansını belirlemek ve gerçeğe yakın uçuş simülasyonları yapmak için bu benzetimden faydalanabiliriz. Aynı zamanda, roketin hareket yönünü etkileyen faktörler olan dönüşü, irtifası ve menzili de modellenebilir. Açısal hareketin hesaba katılmasıyla, roketin istenilen yöne doğru daha hassas bir şekilde yönlendirilmesi sağlanabilir. Ancak bunun için roketin ağırlık ve basınç merkezi gibi temel noktalarının yanı sıra kütle atalet momentinin de bilinmesi gerekir. Ayrıca, atmosferik koşulların modellenmesi ve rüzgarın dikkate alınması da doğru sonuçlar elde etmemize yardımcı olur.

2-) Kinematik Denklemler

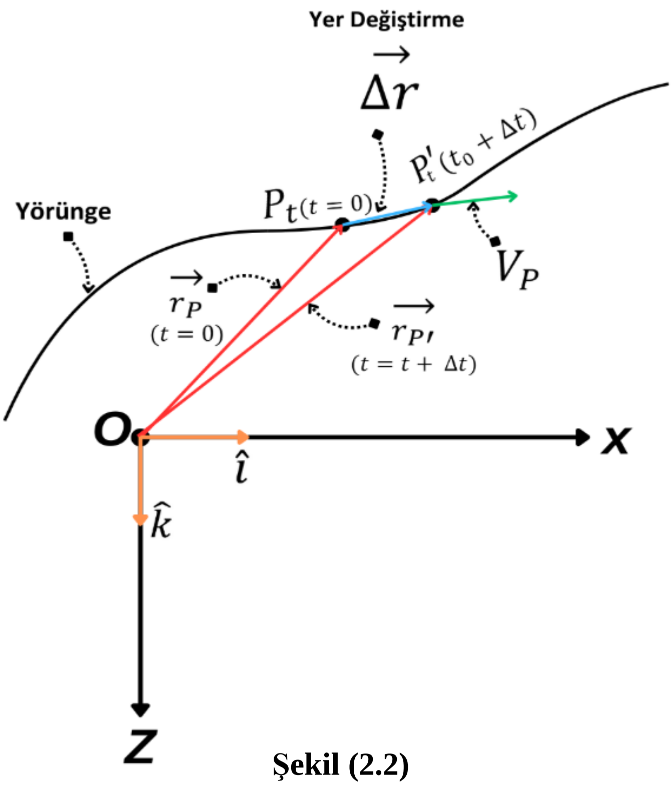
2.1 Eksen Tanımlama



Şekil (2.1)

Roketin fırlatıldığı ateşleme noktası eksen takımı olarak kabul edilmiştir. X ve Y eksenleri yer yüzeyine paraleldir. X ekseni atış hattı doğrultusuna, Y ekseni sağa, Z ekseni ise aşağıya doğru tanımlıdır.

2.2 Konum, Hız ve İvme Denklemleri arasındaki bağıntı



Şekil (2.2)

Roket için noktasal kütle/parçacık varsayımı yapılarak. Şekil (2.2), 2 serbestlik dereceli benzetim oluşturmak için 2 boyutlu hareketin yörünge üzerinde yer değiştirme ve hız arasındaki ilişkisini göstermektedir. Şekil 2.2 incelenerek yer değiştirme, hız ve ivme arasındaki matematiksel denklemler açıklanabilir.

Bir maddenin yer değiştirme vektörü;

$$\overrightarrow{r_P} = \overrightarrow{r_x}(t) + \overrightarrow{r_z}(t)$$

$$\overrightarrow{r_P} = \vec{x}(t) + \vec{z}(t)$$

Bir cismin hız vektörü;

$$\overrightarrow{V_P}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r_P}}{\Delta t}$$

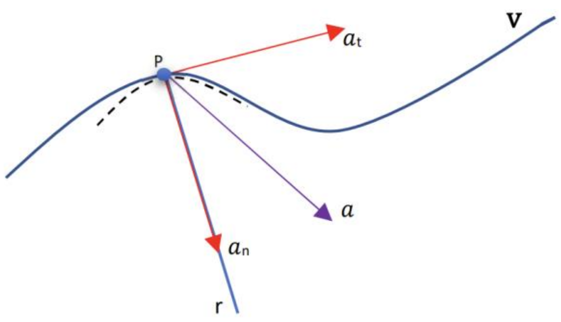
$$\overrightarrow{V_P}(t) = \frac{d(\overrightarrow{r_P})}{dt}$$

Maddenin açısal hareketi benzetime dahil edilmediğinden

$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = 0$ ve $\frac{d\hat{k}}{dt} = 0$ eşit olur. Bu çıkarımdan hareketle;

$$\vec{V}_P(t) = \dot{x}(t)\hat{\imath} + \dot{z}(t)\hat{k}$$

Bir noktasal parçacığın ivme vektörü;



Şekil (2.3)

Maddenin hız vektörü yörüngeye teğettir fakat ivme vektörünün yörüngeye teğet olup olmadığı ile ilgili kesin bir şey söylenemez. Bu yüzden radyal ve teğetsel ivme sonucu bileşke ivme (Şekil 2.3) değerini alır.

$$\left.\begin{array}{l} a_t = teğetsel\ ivme \\ a_r = radyal\ ivme \\ a = bileşke\ ivme \end{array}\right\} \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

Maddenin hareket esnasında ivme vektörü;

$$\overrightarrow{a_C}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{V_p}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{a_C}(t) = \frac{d(\overrightarrow{V_p})}{dt}$$

Hız ve konum denklemleri için ivme sabit (g=9.801 m/s^2) kabul edilerek denklem çıkarımları yapılacaktır.

2.3 Hız Denklemleri

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$$

$$\int \overrightarrow{dv} = \int a(t)dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \overrightarrow{dv} \cong \int_0^t a(t)dt$$

$$v \begin{matrix} v(t) \\ v_0 \end{matrix} \cong \int_0^t a(t)dt$$

$$v(t) - v_0 \cong \int_0^t a(t)dt$$

$$v(t) \cong \overrightarrow{v_0} + \int_0^t a(t)dt \text{ ....(2.3.1)}$$

(2.3.1) denkleminde bu adımdan itibaren analitik yöntemle çözülemediği için nümerik metod kullanılması gerekmektedir. Nümerik metod olarak Euler metodu seçilmiş olup (2.3.2) denklem sistemine dönüşüm yapılmıştır.

$$\vec{v}_p(t) \cong \overrightarrow{v_p}(t=0) + \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{a_p}(t)dt \text{.........(2.3.2)}$$

2.4 Konum Denklemleri

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$v(t) = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

$$\overrightarrow{dr} = v(t)dt$$

$$\int_{r0}^{r} dr \cong \int_{0}^{t} V_x(t)dt$$

$$\vec{r} \begin{matrix} r \\ r0 \end{matrix} \cong \int_{0}^{t} V_x(t)dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}(0) \cong \int_{0}^{t} V_x(t)dt$$

$$\vec{r} \cong \vec{r}(0) + \int_0^t V_x(t)dt \text{ ....(2.4.1)}$$

(2.3.1) denkleminde bu adımdan itibaren analitik yöntemle çözülemediği için nümerik metod kullanılması gerekmektedir. Nümerik metoduna uygun şekilde (2.4.2) denklem sistemine dönüşüm yapılmıştır. Euler Metodu ile ilgili detaylı bilgi benzetim yapısında açıklanmıştır.

$$\vec{r}_p \cong \vec{r}_p(t = 0) + \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{V_p}(t)dt \text{........(2.4.2)}$$

2.5 Uçuş Yolu Açısı Hesabı Denklemleri

Uçuş yolu açısı, roketin fırlatma rampasından uçuşunu tamamladığı âna kadar değişiklik gösterebilmektedir. Uçuş yolu açısını hesaplayabilmek için parçacığın (Şekil 2.1**)**’de görüldüğü gibi z ekseni doğrultusunda x’e göre değişimi baz alınarak gerekli trigonometrik hesaplamalarla açıya ulaşılabilir.

$$tan(\theta) = (\frac{dz(t)}{dx(t)})$$

$$\theta = arctan(\frac{dz(t)}{dx(t)})$$

Yukarıdaki denkleme göre $\frac{dx(t)}{dz(t)}$ifadesi doğrudan bulunamamaktadır. Fakat $\frac{dx(t)}{dz(t)}$ ifadesinde zincir kuralı uygulandığı takdirde aşağıdaki denklem ortaya çıkmaktadır.

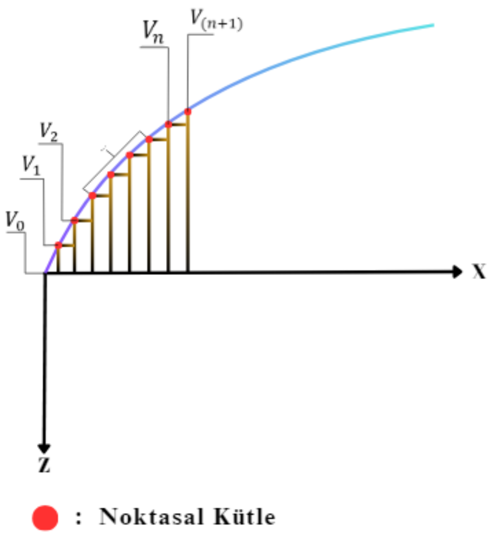
$$\theta = arctan\left(\frac{dz(t)}{dt}\frac{dt}{dx(t)}\right)$$

$$\theta(t) = arctan(\frac{V_z(t)}{V_x(t)})$$

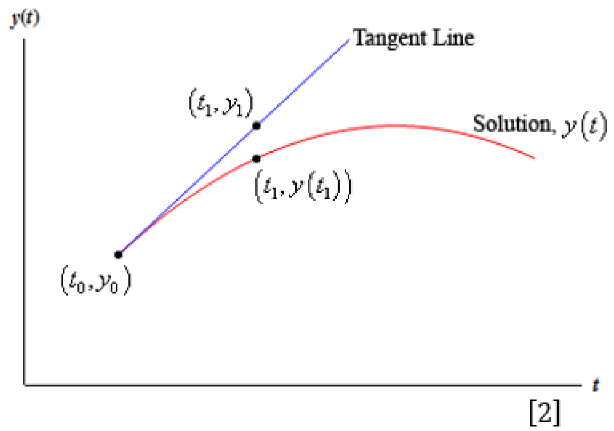
Denkleme göre uçuş yolu açısı, parçacığın hız bileşkelerinden elde edilebileceği görülmektedir. Çözüm sırasında $Vz(t)$ ve $Vx(t)$ ifadelerinin sayısal değerleri bilindiğinden, denkleme göre hesaplamak daha doğru sonuç elde etmemizi sağlayacaktır.

3-)Benzetim Yapısı

3.1 Euler Metodu



Şekil (3.1.1)



Şekil (3.1.2)

Şekil 3.1.2'de gösterildiği gibi t_0 noktası t_1 noktasına yeterince yakın olursa diğer bir ifadeyle adım sayısı sonsuza yaklaştıkça, y_1 değeri rahatlıkla bulunabilir. Bu örnek, adım sayısını açıklamak için verilmiştir. Şekil (3.1.1) noktasal bir kütlenin X ve Z eksenlerindeki konum grafiğini temsil eder. [5]

Burada V_0, V_1, V_2, V_n ve V_{n+1} gösterimleri noktasal kütlenin belirtilen andaki hızını göstermektedir. Euler Metodunda n'inci veriyi bulmak için (n-1)'inci veriye ihtiyaç duyulmaktadır. Bizim benzetimimizde ise ilk hız bilindiği için V_0 değerinden başlayarak tüm veriler hesaplanabilir.

Euler Metodu Taylor Serisi açılımındaki ilk iki terimin kullanılması ile elde edilir.

$$y(a_{(n+1)}) = y(a_n) + \dot{y}(a_{(n-1)})(a_n - a_{(n-1)}) \ldots\ldots (3.1.1)$$

Denklem (3.1.1)'de Taylor Serisi açılımının ilk iki terimi verilmiştir. (3.1.1) denkleminde $(a_n - a_{(n-1)})$ ifadesi adım sayısına eşittir ve h ile gösterilebilir.

$$y(a_{(n+1)}) = y(a_n) + \dot{y}(a_{(n-1)})(h) \ldots\ldots (3.1.2)$$

Gösterimin ardından (3.1.2) denklemi elde edilir. Bu aşamadan sonra (3.1.2) denklemi hız ve zaman değişkenleri ile yazılırsa;

$$\mathrm{V}_{(\mathrm{n}+1)} = \mathrm{V}_\mathrm{n} + \dot{V}(\Delta\mathrm{t}) \ldots\ldots (3.1.3)$$

denklemi elde edilir. (3.1.3) denkleminde $\dot{V}$ ivmeyi, $\Delta\mathrm{t}$ ifadesi ise adım sayısını ifade eder. $\dot{V}$ ifadesinin ivmeye eşitliği denkleme yansıtılırsa;

$$\mathrm{V}_{(\mathrm{n}+1)} = \mathrm{V}_\mathrm{n} + \mathrm{a}(\Delta\mathrm{t}) \ldots\ldots (3.1.4)$$

denklemi elde edilir. (3.1.4) denklemi bize hızın zamana bağlı fonksiyonunu verir. (3.1.4) denkleminden konum verisi elde etmek için konumun zamana bağlı değişimi hıza eşitlenip integral alınırsa;

$$\frac{dx}{dt} = V$$

$$dx = (V)dt$$

$$\int_{x_0}^{x_n} dx \cong \int_0^t (V)dt$$

$$X_n - X_{(n-1)} = V(t) - V(0) \ldots\ldots (3.1.5)$$

(3.1.4) ifadesi (3.1.5) yerine yazılırsa

$$X_n - X_{(n-1)} = V(t) - V(0) + V(0) + a(t)$$

$$X_n - X_{(n-1)} = V(t) + a(t)$$

$$X_n = X_{(n-1)} + V(t) + a(t)$$

Yukarıda adım adım ifade edildiği üzere Euler Metodu ile n'inci veriyi hesaplamak için, kendisinden önce gelen veriye yani (n-1)'inci veriye ihtiyaç duyulur. Eğer başlangıç verisi biliniyorsa her bir adımda hesaplama yapılarak istenilen veriye ulaşılır.

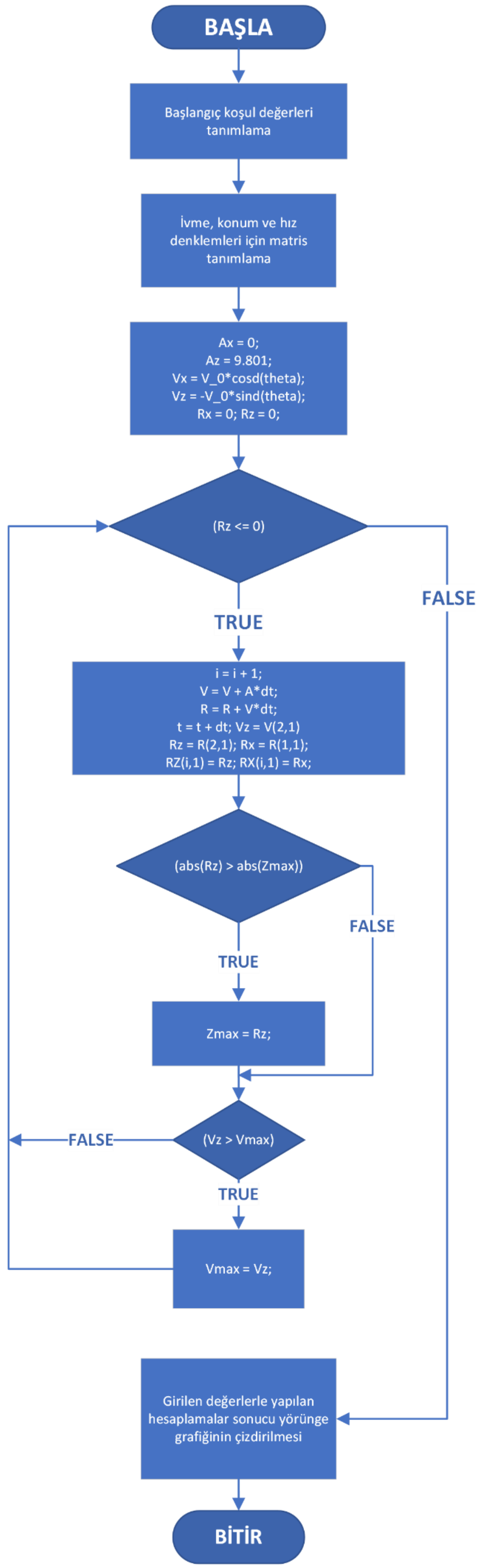
Euler Metodunda belirlenen adım sayısına göre her aralıkta ivme sabit kabul edilir ve her bir aralık için ayrı ayrı hesaplama yapılır. Nümerik çözüm kullanıldığından denklemlerin çözümleri bizlere tam değer değil yaklaşık değer verir.

3.2 Benzetim yapısı ve çözüm yöntemi:

Yukarıdaki sayfalarda hız, ivme, konum kinematik denklem çıkarımları yapılmıştı. Bu denklem sistemleri analitik yöntemle çözülmeye çalışıldığında gerçek sonuca uzak değerlerin elde edildiği görülmüştür. Bu yüzden gerçek sonuca yaklaşmak için nümerik metot kullanılmasına karar verilmiştir. Nümerik yöntemle çözmek için de Euler Metodu tercih edilmiştir.

Euler Metodundaki benzetim yapısı denklemleri ve kinematik denklemler kullanılarak denklem sistemleri kurulmuş olup bu denklem sistemlerini çözmek için doğrulama başlangıç koşul değerleri kullanılarak Matlab üzerinden bir kod yapısı oluşturulmuştur.

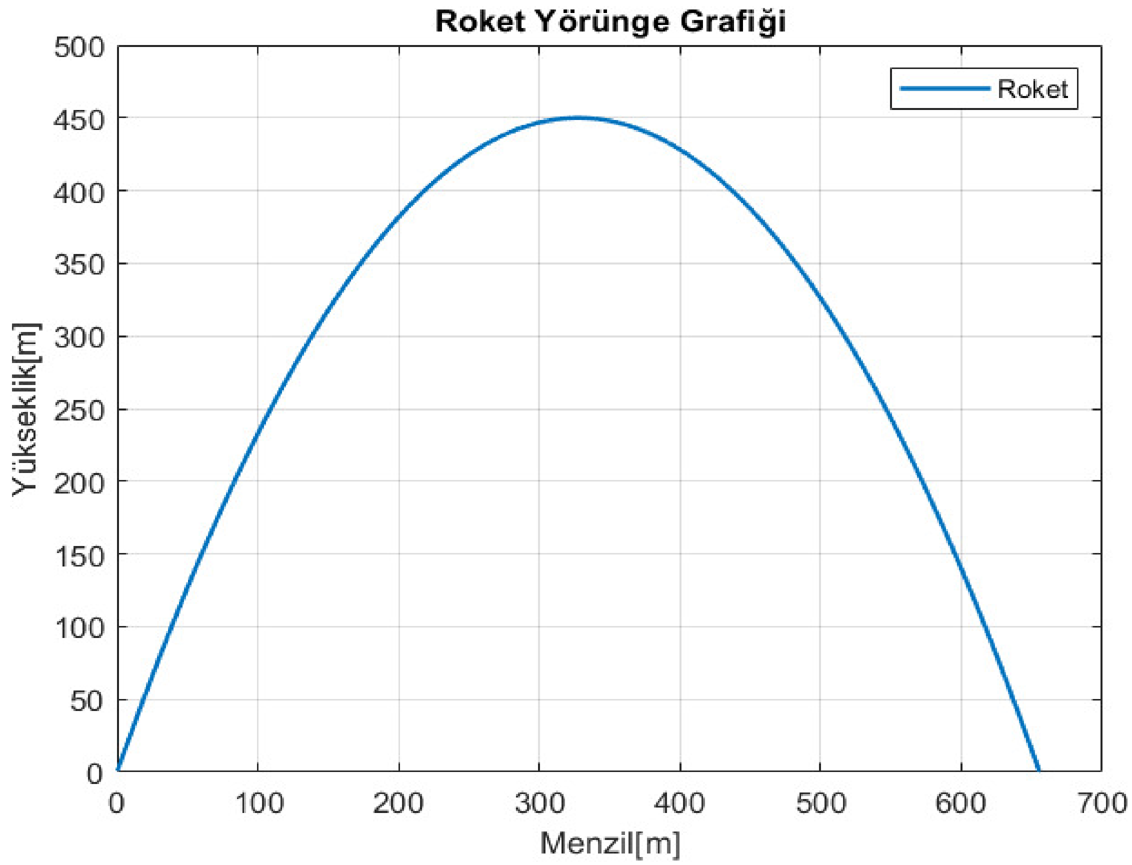
Nümerik analiz yöntemi uygulamak için "While" döngüsü kullanılmıştır. While döngüsü içerisinde (0.01 periyotla) konum, hız ve uçuş süresi hesaplamaları yapılmış ve uçuş süresi değeri 19.170 olarak elde edilmiştir.[4]



3.3 Matlab Programı Üzerinden Oluşturulan Kod Çıktısı:

```
clc;  clear;  close all;
%Başlangıç koşul değerleri tanımlandı.
 theta=70;
 V_0=100;
 t=0;    dt=0.01;
 Zmax=0; Vmax=0;
 Ax=0;   Az=9.801;
 Rx=0;  Rz=0;

% x,z üzerindeki sıfır ivme matrisi oluşturuldu ve ilk değerleri atandı.
 A=zeros(1,1);
 A(1,1)=Ax;
 A(2,1)=Az;

 % x,z üzerindeki sıfır konum matrisi oluşturuldu. Roket başlangıç noktasındayken
% ilk değerlerimiz sıfır olarak atanır.
 R=zeros(1,1);
 R(1,1)=Rx;
 R(2,1)=Rz;

% Hız sıfır matrisi oluşturuldu ve uçuş yolu açısına göre ilk x,z hız
% vektörleri hesaplanarak matrise atandı.
 V=zeros(1,1);
 V(1,1)=V_0*cosd(theta);
 V(2,1)=-V_0*sind(theta);   %Uçuş -z ekseninde gerçekleştiği için
                            % (-) ile çarpıldı
 Vz=V(2,1);
 Vx=V(1,1);
 i=0;
 % İlk konum değerine göre döngü içersine girilip konum yatay eksende 0
 % değerine ulaştığında döngü bitirilir ve toplam konum, hız ve  ivme
 % dizileri elde edilir.
 while (Rz<=0)
 % Euler yöntemi yardımıyla hız ve konum hesaplamaları yapıldı.
     i=i+1;
     V = V + A*dt;
     R = R + V*dt;
     t = t+dt;
     Vz=V(2,1);
     Rz=R(2,1); Rx=R(1,1);
     % Alınan hız ve konum bilgileri dinamik dizide tutuldu.
     RZ(i,1)=Rz;  RX(i,1)=Rx;
     VZ(i,1)=Vz;

     if (abs(Rz) > abs(Zmax))
        Zmax=Rz; % Apogee nok. hesaplandı.
     end
     if (Vz > Vmax)
         Vmax=Vz;    % Max hız hesaplandı.
     end
 end

 plot(RX,abs(RZ),'b') % Konum-zaman grafiği çizildi.
 xlabel ('Menzil[m]')
 ylabel ('Yükseklik[m]')
 title('Yörünge Grafiği')
 grid on
```

4-) Benzetimin Doğrulanması



Benzetim Çıktı Formatı	
	Değer
Tepe Noktası Yüksekliği [m]	450.0058
Tepe Noktası Hızı (bileşke) [m/s]	34.2020
Tepe Noktası Zamanı [s]	9.585
Son Pozisyon [m]	[655.6526, 0, 0.4280]
Son Hız (bileşke) [m/s]	99.9499
Son Uçuş Yolu Açısı [derece]	68.9895
Son Uçuş Zamanı [s]	19.170

5-) Referanslar

[1]Nihat Özkaya & Margareta Nordin & David Goldsheyder & Dawn Leger "Fundamentals of Biomechanics" , 2019

[2]https://www.roketsan.com.tr/uploads/docs/1628594512_20.03.2020model-roketcilik-master-dokumanv04.pdf

[3]https://polen.itu.edu.tr:8443/server/api/core/bitstreams/f26505a8-6631-4da9-94e8-9e6e9eb36591/content

[4]Kiusalaas, Jaan.2005. Numerical Methods in Engineering with MATLAB, Cambridge University Press, 426 sayfa, The Edinburgh Building, Cambridge UK

[5]https://tutorial.math.lamar.edu/classes/de/eulersmethod.aspx