

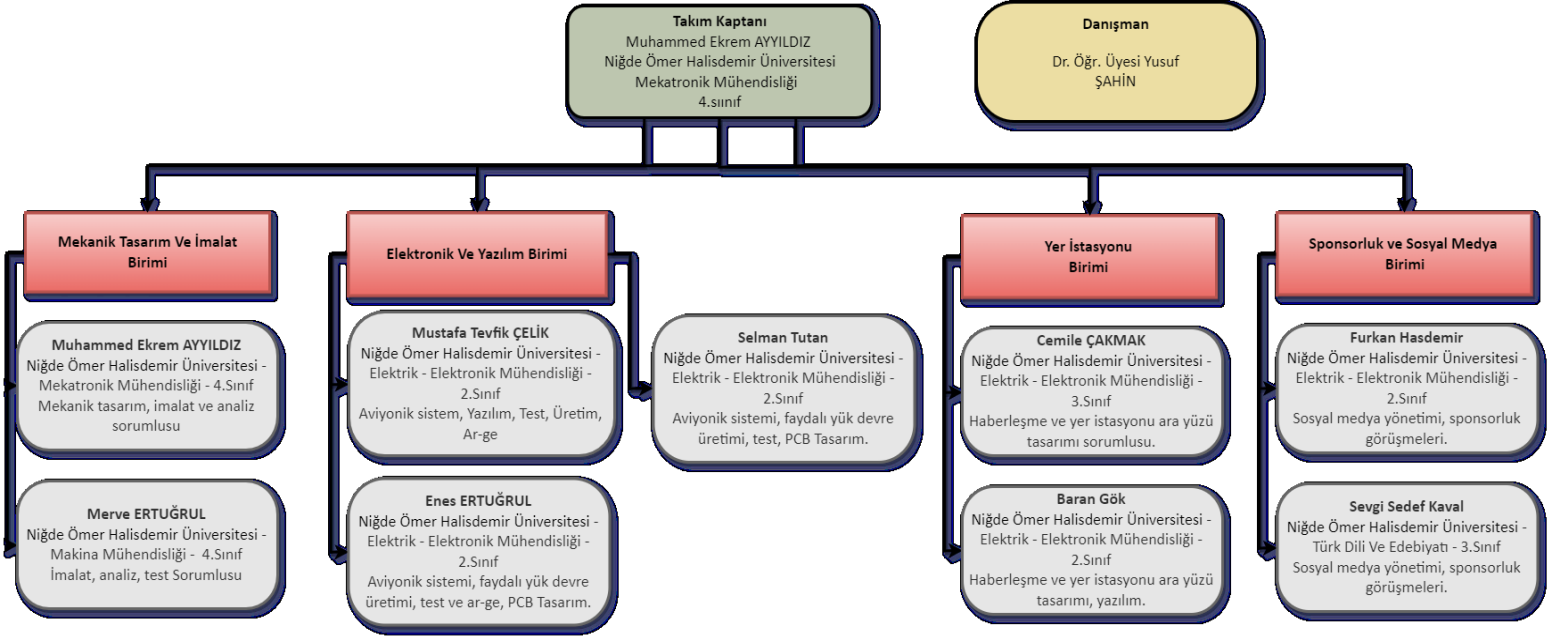


TEKNOFEST 2022 ROKET YARIŞMASI

Kritik Tasarım Raporu Aşaması

3 Serbestlik Uçuş Benzetimi Raporu

METİS ROKET TAKIMI



İçindekiler

1. Dinamik Kinematik Denklemler.....	3
2. Atmosfer Modeli.....	5
3. Motor Modeli.....	7

1. Kinematik ve Dinamik Denklemler

Dönme Dinamiği

Roketin toplam açısal hızı yalpalama, yunuslama ve yuvarlanma açılarının türevleri şeklinde olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\vec{w} = [q] = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\phi} \sin\theta \\ \dot{\theta} \cos\phi + \phi \sin\phi \cos\theta \\ \dot{\phi} \cos\phi \cos\theta - \theta \sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Yalpalama, yunuslama ve yuvarlanma açılarının türevleri de açısal hızın bileşenleri cinsinden de ifade edilebilir. Aşağıdaki denklem dönme kinematığının en sık karşılaşılan denklemidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\phi \sin\theta & \cos\phi \sin\theta \\ 0 & \cos\phi \cos\theta & -\sin\phi \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\phi & \cos\phi \\ \sin\phi & \cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Öteleme Dinamiği

Hız ve açısal hız vektörleri, bileşenleri ile birlikte aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad (3)$$

$$\vec{w} = p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k} \quad (4)$$

İvme ise hız vektörünün türevi olduğundan, Coriolis teoremi kullanılarak ivme denklemi elde edilebilir.

$$\dot{\vec{V}} = (\dot{u}\hat{i} + \dot{v}\hat{j} + \dot{w}\hat{k}) + \vec{w} \times \vec{V} \quad (5)$$

$$\vec{w} \times \vec{V} = \begin{bmatrix} \dot{p} & \dot{q} & \dot{r} \\ u & v & w \end{bmatrix} = (qw - rv)\hat{i} + (pw - ru)\hat{j} + (pv - qu)\hat{k} \quad (6)$$

Newton'un ikinci kanunu uygulandığında, ötelemeden dolayı meydana gelen kuvvet bileşenleri elde edilebilir.

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{V}} \quad (7)$$

Denklem 5, 6 ve 7 kullanılarak son hali elde edilir.

$$\vec{F}_{öteleme} = \begin{bmatrix} m(\dot{u} + qw - rv) \\ m(\dot{v} + pw - ru) \\ m(\dot{w} + pv - qu) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Öteleme kuvveti, 3 temel kuvvet etkisinde oluşur: itki, aerodinamik ve yerçekimidir.

$$\vec{F}_{öteleme} = \vec{F}_{itki} + \vec{F}_{aerodinamik} + \vec{F}_g \quad (9)$$

Dönme Dinamiği (Euler)

Rijit bir cisim olarak roketin kütle merkezi etrafında dönme hareketini de incelemeliyiz. Bu hareket Euler'in ikinci kanunu ile ifade edilir ve bu kanun aşağıdaki denklem gibidir.

$$\vec{\dot{T}} = \vec{\dot{H}} \quad (10)$$

Burada, \vec{T} rokete etki eden toplam torku, \vec{H} ise açısal momentumu ifade eder. Açısal momentum denklemi ise aşağıdadır.

$$\vec{H} = I \cdot \vec{\omega} \quad (11)$$

Burada $\vec{\omega}$, toplam açısal hızı, I atalet momentini ifade eder. Açısal momentum, roketin istenen açısal hıza ulaşması için ne kadar tork uygulanması gerektiğini gösterir.

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Atalet momentlerini sadeleştirmek işimizi çok kolaylaştıracaktır. Bunun için rokete göre olan referans sisteminin belirli bir yönlendirmesi bu çarpım atalet momentlerinin sadeleşmesine sebep olacaktır. Bu yönlendirme referans sistemi eksenlerinin roketin asal eksenleri ile

hizalanması ile elde edilir vebu sadeleştirme işlemi bu koşulu sağlayan tüm rijit cisimler için uygulanabilir, yani simetrik olması gerekmez. Eğer 11 roket referans sistemi yerine rüzgâr referans sistemi gibi farklı bir sistem kullanılırsa bu sadeleştirme yapılamaz. O halde atalet momentinin son hali denklem (13)'deki gibi olur.

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (13)$$

Denklem (10)'u açarsak denklem (14)'ü elde ederiz.

$$\vec{T} = I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega}) \quad (14)$$

Aşağıda denklem (14)'ün parça parça incelenmesi yer almaktadır.

$$I\dot{\vec{\omega}} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}I_x \\ \dot{q}I_y \\ \dot{r}I_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\vec{\omega} \times I\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ pI_x & qI_y & rI_z \end{vmatrix} = (qrI_z - qrI_y)\vec{i} + (prI_z - prI_x)\vec{j} + (pqI_y - pqI_x)\vec{k} \quad (16)$$

Son olarak tork bileşenleri L, M ve N aşağıdaki matrisle elde edilir.

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) \\ \dot{q}I_y + pr(I_z - I_x) \\ \dot{r}I_z + pq(I_y - I_x) \end{bmatrix} \quad (17)$$

2. Atmosfer Modeli

Kapsamlı bir roket hareket benzetimi gerçekleştirebilmek için öncelikle uçuş senaryosuna atmosfer koşullarını dahil etmek gerekir. İrtifaya bağlı olarak değişen hava yoğunluğu (ρ) ve ses hızını (V_s) bulmak için aşağıdaki denklemler kullanılır.

$$\rho = \begin{cases} \rho_0(1 - 0.00002256h)^{4.256}, & h \leq 10000 \text{ m} \\ 0.412e^{-0.000151(h-10000)}, & h > 10000 \text{ m} \end{cases} \quad (2.1)$$

ρ_0 , deniz seviyesindeki hava yoğunluğunu ifade eder ve 1.223 kg/m^3 olarak alınır.

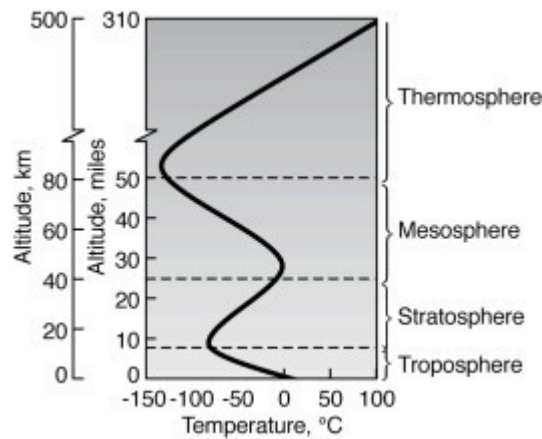
$$V_s = \sqrt{kRT} \quad (2.2)$$

k ısı oranı, R evrensel gaz sabiti, T ise ortam sıcaklığıdır ve aşağıdaki denklem ile ifade edilir.

$$T = \begin{cases} T_0(1 - 0.00002256h), & h \leq 10000 \text{ m} \\ 0.7744T_0, & h > 10000 \text{ m} \end{cases} \quad (2.3)$$

T_0 , deniz seviyesi sıcaklığı değerini, h irtifayı ifade eder.

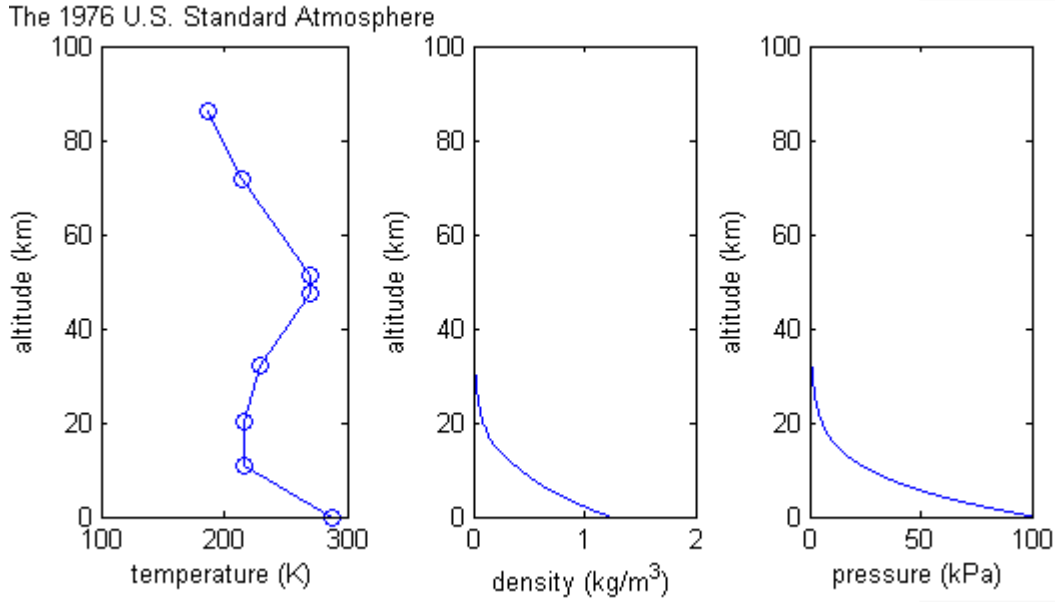
Atmosfer modeli, Dünya atmosferinin basıncının, sıcaklığının, yoğunluğunun ve viskozitesinin geniş bir irtifa veya yükseklik aralığında nasıl değiştiğini gösteren bir modeldir. Bu model var olan birçok uluslararası standartlarla da desteklenmektedir ve belirli yıllarda güncellenmektedir. Bu modeller, jeopotansiyel yüksekliğe (h) karşı mutlak sıcaklık T'nin tahmini doğrusal dağılımı ile katmanlara ayırmaktadır. Aşağıdaki şekilde atmosferin katmanları jeopotansiyel yüksekliğe bağlı olarak gösterilmektedir.



Şekil. Atmosferin jeopotansiyel yüksekliğe bağlı katmanları [1]

Yoğunluk, sıcaklık ve basınç atmosfer modelinde yüksekliğe bağlı olarak sürekli

değişmektedir. Roket modelimizin çıkacağı yükseklik 3000 m seviyesinde olacağından dolayı atmosferin troposfer tabakasına denk gelmektedir. Bu tabakada yükseklik arttıkça sıcaklıkta düşme gözlemlenmektedir. Diğer bir yandan basınç ve yoğunluk değerleri de düşmektedir. Bu değişim aşağıdaki grafiklerde de görülmektedir.

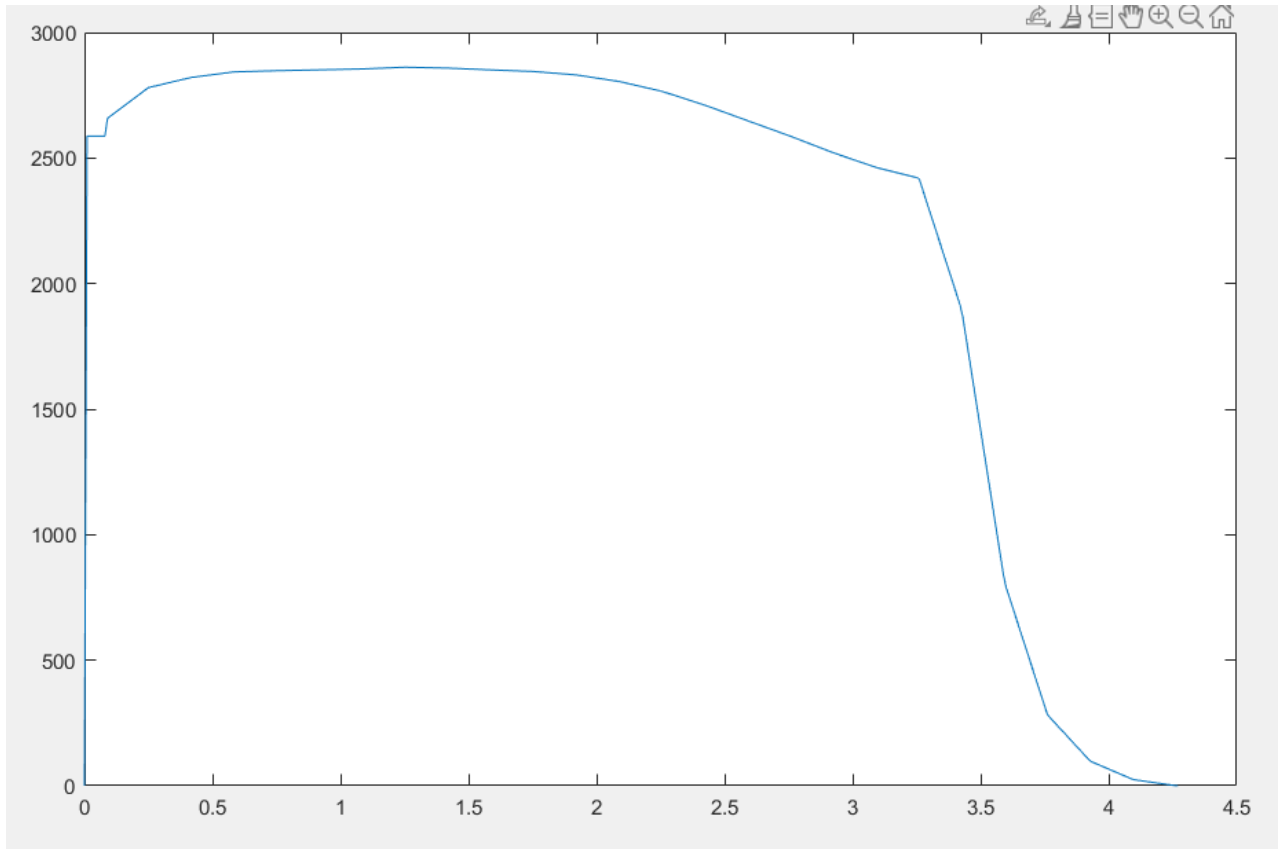


Şekil.1.2 Yüksekliğe bağlı olarak basınç, sıcaklık ve yoğunluğun değişimi [2]

Bu değişkenler Matlab-Simulink içerisinde hazır olarak bulunmaktadır. Benzetim girdi ve çıktılarını doğru bir şekilde elde edebilmek için Matlab Simulink içerisinde hazır olarak bulunan bu değişkenler kullanılacaktır.

3.Motor Modeli

Verilen itki-zaman değerlerine göre MATLAB Simulink de itki zaman grafiğimiz oluşturulmuştur.



Şekil2.1 İtke-Zaman Grafiği

Referanslar

- [1] https://www.nasa.gov/centers/langley/pdf/245893main_MeteorologyTeacherResCh2.r4.pdf,
- [2] <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a035728.pdf>,
- [3] https://astronomi.istanbul.edu.tr/ders_proje/konu6.htm
- [4] TEWARI, A. (2007): Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modeling and Simulation with MATLAB, United States of America: Birkhauser, p. 230.
- [5] HEDIN, A. E. (1991): Extension of the MSIS Thermosphere Model into the middle and lower atmosphere, Journal of Geophysical Research Atmospheres, 96(A2), 1159–1172
- [6] https://www.nasa.gov/centers/langley/pdf/245893main_MeteorologyTeacherResCh2.r4.pdf,
- [7] <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a035728.pdf>,
- [3] YANUSHEVSKY, R., Modern Missile Guidance, Florida: CRC Press, 2008.