TEKNOFEST 2023 ROKET YARIŞMASI

ORTA İRTİFA KATEGORİSİ

MBK KOUSPACE ROKET TAKIMI

UÇUŞ BENZETİM RAPORU (UBR)

İÇİNDEKİLER

1-) Sorular ve Cevaplar

1. Soru ve Cevap - 1

Kinematik ve dinamik hareket denklemleri nedir, aralarındaki farklar nelerdir?

Dinamik iki alt başlığa ayrılmaktadır. Bunlardan birisi kinematik diğeri ise kinetiktir. Kinetik hareket eden cisme etki eden kuvvetler (örneğin; kütle, tork, atalet) ile birlikte cismin hareketinin nasıl gerçekleşeceğini ya da cismin yönünün veya hareketinin istenilen şekilde gerçekleşmesi için uygulanan kuvvetleri inceleyen bilim dalıdır. Kinematik ise dinamiğin bir diğer alt dalıdır. Kinematik genellikle hareket geometrisi olarak adlandırılır. Yer değiştirme, ivme, zaman arasında ilişkiler kurarak cismin hareketini inceleyen daldır.

2. Soru ve Cevap - 2

İki serbestlik dereceli kinematik benzetimin, roket dinamik denklemlerinin (motor itki kuvveti ve aerodinamik sürükleme kuvveti) de katılarak roket uçuşuna uyarlanması ile elde edilecek uçuş benzetimi, roket tasarımında ne amaçlarla kullanılabilir, faydaları nelerdir?

Roketin alt sistemleri, motor seçimi, burun, kanatçık, gövde ve gövde parçalarının uzunlukları ve çaplarının ölçülendirilmesi gibi işlemler yapmamızı sağlamaktadır. Roketin uçuş simülasyonu gerçek bir roket atışına daha yakın sonuçlar almamızı sağlayabilir. Bu sayede rokete uygulanacak pozitif kuvvet ve buna karşılık oluşacak negatif kuvvetlerin uçuşa uyarlanması sonucunda irtifa gibi değerlerin iki serbestlik dereceli kinematik benzetimi kullanılarak daha doğru sonuçlar elde etmiş oluruz.

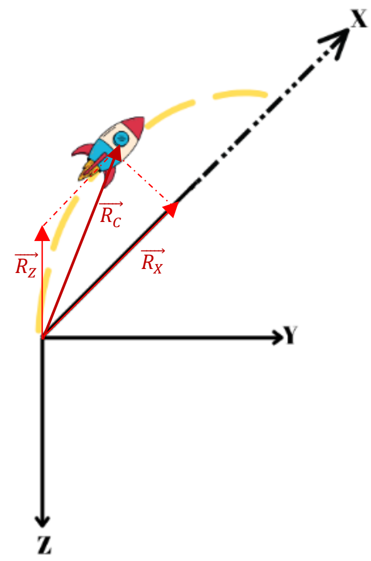
3. Soru ve Cevap – 3

İki serbestlik dereceli dinamik uçuş benzetimine Y ekseni etrafında açısal hareket eklenerek elde edilecek 3 serbestlik dereceli benzetimin getireceği faydalar nelerdir? Bu benzetimin kullanılması için roketin ek olarak hangi bilgilerinin bilinmesi ve kullanılması gerekir?

Bu benzetim sayesinde roketin ne kadar optimum düzeyde uçabildiğini, açısal hareket sayesinde roketin uçuşunu ya da yönünü gerçeğe yakın şekilde simüle edebiliriz. Bu benzetimin kullanılması için roketin ağırlık ve basınç merkezinin noktalarını ve bu noktaların birbirine olan uzaklıkları bilinmesi gerekiyor. Bu etkenler dışında roketin dış etkenleri (rüzgar, sıcaklık , dış basınç) modellendiği zaman daha doğru veriler elde etmiş olacağız.

2-) Kinematik Denklemler

2.1 Konum ve Hız Denklemleri



Şekil 2.1

Şekil 1.1, roketin yaptığı 2 boyutlu hareketin yörünge üzerinde yer değiştirme ve hız arasındaki ilişkisini göstermektedir. Şekil 1.1 incelenerek yer değiştirme, hız ve ivme arasındaki matematiksel denklemler açıklanabilir.

Bir cismin yer değiştirme vektörü;

$$\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_x}(t) + \overrightarrow{r_z}(t)$$

$$\overrightarrow{r_C} = \vec{x}(t) + \vec{z}(t)$$

$$\overrightarrow{r_C} = \vec{x}(t)\hat{\imath} + \vec{z}(t)\hat{k}$$

Bir cismin hız vektörü;

$$\overrightarrow{V_C}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r_C}}{\Delta t}$$

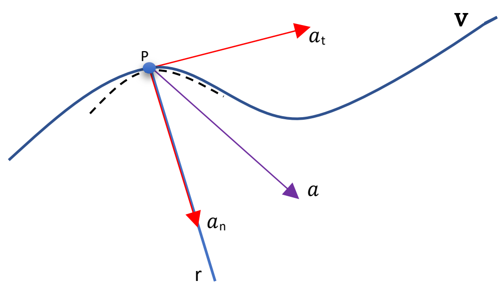
$$\overrightarrow{V_C}(t) = \frac{d(\overrightarrow{r_C})}{dt}$$

Bir cismin doğrusal hareket esnasında ivmesi;

$$\overrightarrow{a_C}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{V_C}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{a_C}(t) = \frac{d(\overrightarrow{V_C})}{dt}$$

Bir cismin hız vektörü yörüngeye teğettir fakat ivme vektörünün yörüngeye teğet olup olmadığı ilgili kesin bir şey söylenemez. Bu yüzden radyal ve teğetsel ivme sonucu bileşke ivme (Şekil 2.2) değerini alınır.



Şekil 2.2

$$\left.\begin{aligned} a_t &= teğetsel\ ivme \\ a_r &= radyal\ ivme \\ a &= bileşke\ ivme \end{aligned}\right\} a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

Hız ve Konum denklemleri için ivme sabit (g=9.801 m/s^2) kabul edilerek aşağıdaki denklem çıkarımları yapılır.

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \qquad v(t) = \frac{dr}{dt}$$

$$\int dv = \int a(t)dt \qquad dr = v(t)dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv \cong a \int_0^t dt \qquad \int_{r0}^{r} dr \cong \int_0^t (\vec{v_0} + \vec{a}t)dt \qquad [1]$$

$$v\,\Big|_{v_0}^{v(t)} \cong a(t)\,\Big|_0^t \qquad \vec{r}\,\Big|_{r0}^{r} \cong (\vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2})\Big|_0^t$$

$$v(t) - v_0 \cong \vec{a}t \qquad \vec{r} - \vec{r}(0) \cong \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$v(t) \cong \vec{v_0} + \vec{a}t \ \ldots\ldots\ldots (2.1.1) \qquad \vec{r} \cong \vec{r}(0) + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \ldots \ldots \ldots \ldots (2.1.2)$$

Bu çıkarımlar sonucunda (2.1.1) ve (2.1.2) denklemleri elde edilir. Elde edilen (2.1.1) denkleminde bileşke alınırsa hızın istenilen yöndeki bileşkesi elde edilir;

$$V_x(t) \cong \overrightarrow{v_{0x}} + a_x t \ldots\ldots (2.1.3) \qquad V_z(t) \cong \overrightarrow{v_{0z}} + a_z t \ldots\ldots (2.1.4)$$

Denklemleri elde edilir. (2.1.3) denkleminde a_x değeri sıfır olduğundan;

$$V_x(t) \cong \overrightarrow{v_{0x}} \ldots\ldots (2.1.5)$$

(2.1.5) denklemi elde edilir ve bu denklem bizlere herhangi bir anda X eksenindeki hızın ilk hıza eşit olduğunu ifade eder.

(2.1.4) denkleminde ivme sabitini yerçekimi ivmesi olarak kabul ettiğimizde;

$$V_z(t) \cong \overrightarrow{v_{0z}} - gt \ldots\ldots (2.1.6)$$

denklemi elde edilir ve bu denklem bizlere Z eksenindeki hızın zamana bağlı fonksiyonunu verir.

Sonrasında (2.1.2) denkleminin yani konum denkleminin bileşenleri alınır;

$$\overrightarrow{r_x} \cong \overrightarrow{r_{x0}} + \overrightarrow{v_{x0}} t + \frac{\overrightarrow{a_x} t^2}{2} \ldots\ldots (2.1.7) \qquad \overrightarrow{r_z} \cong \overrightarrow{r_{z0}} + \overrightarrow{v_{z0}} t + \frac{\vec{g} t^2}{2} \ldots\ldots (2.1.8)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde X ekseninde ilk konumun ve ivmenin sıfır olduğu bilindiğinden denklem;

$$\overrightarrow{r_x} \cong \overrightarrow{v_{x0}} t \ldots\ldots (2.1.9)$$

halini alır. (2.1.9) denklemi bizlere X eksenindeki konumun zamana bağlı fonksiyonunu verir. Aynı şekilde Y ekseninde ilk konum sıfır olduğundan (2.1.8) denklemi;

$$\overrightarrow{r_z} \cong \overrightarrow{v_{z0}} t + \frac{\vec{g} t^2}{2} \ldots\ldots (2.1.10)$$

halini alır. (2.1.10) denklemi bizlere Z eksenindeki konumun zamana bağlı fonksiyonunu verir.

2.2 Uçuş Yolu Açısı Hesabı Denklemleri

Uçuş yolu açısı, roketin fırlatma rampasından uçuşunu tamamladığı âna kadar değişiklik gösterebilmektedir. Bu açı değerine roketin yer ile arasındaki açı, Z eksenindeki hız vektörünün ve X eksenindeki hız vektörünün değerlerinin trigonometrik bağlantıları ile ulaşılabilir.

$$tan(\theta) = (\frac{dz(t)}{dx(t)})$$

$$\theta = arctan(\frac{dz(t)}{dx(t)})$$

Yukarıdaki denkleme göre $\frac{dx(t)}{dz(t)}$ifadesi doğrudan bulunamamaktadır. Fakat $\frac{dx(t)}{dz(t)}$ ifadesinde zincir kuralı uygulandığı durumda aşağıdaki denklem ortaya çıkmaktadır.

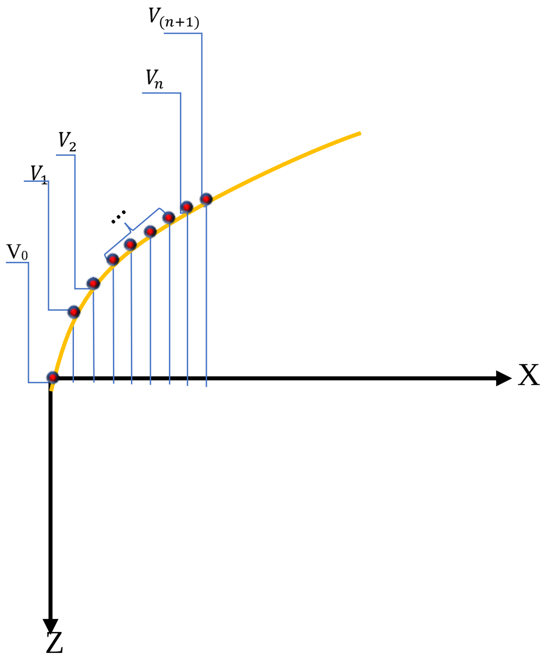
$$\theta = arctan\left(\frac{dz(t)}{dt}\frac{dt}{dx(t)}\right)$$

$$\theta(t) = arctan(\frac{V_z(t)}{V_x(t)})$$

Denkleme göre uçuş yolu açısı cismin hız bileşkelerinden elde edilebileceği görülmektedir. Çözüm sırasında $Vz(t)$ ve $Vx(t)$ ifadelerinin sayısal değerleri bilindiğinden denkleme göre hesaplamak daha doğru sonuç elde etmemizi sağlayacaktır.

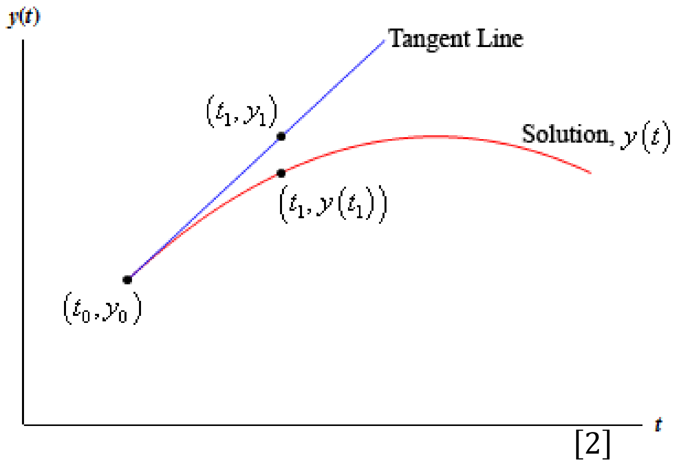
3-) Benzetim Yapısı

3.1) Euler Metodu



: Noktasal kütle

Şekil (3.1.1)



Şekil (3.1.2)

Şekil 3.1.2'de gösterildiği gibi t_0 noktası t_1 noktasına yeterince yakın olursa diğer bir deyişle adım sayısı yeteri kadar küçük olursa, y_1 değeri rahatlıkla bulunabilir. Bu örnek, adım sayısını açıklamak için verilmiştir.

Şekil (3.1.1) noktasal bir kütlenin X ve Z eksenlerindeki konum grafiğini temsil eder. Burada V_0, V_1, V_2, V_n ve V_{n+1} gösterimleri noktasal kütlenin belirtilen andaki hızını göstermektedir. Euler Metodunda n'inci veriyi bulmak için n-1'inci veriye ihtiyaç duyulmaktadır. Bizim benzetimimizde ise ilk hız bilindiği için V_0 değerinden başlayarak tüm veriler hesaplanabilir.

Euler Metodu Taylor Serisi açılımındaki ilk iki terimin kullanılması ile elde edilir.

$$y(a_{(n+1)}) = y(a_n) + \dot{y}(a_{(n-1)})(a_n - a_{(n-1)}) \ldots\ldots (3.1.1)$$

Denklem (3.1.1)'de Taylor Serisi açılımının ilk iki terimi verilmiştir. (3.1.1) denkleminde $(a_n - a_{(n-1)})$ ifadesi adım sayısına eşittir ve h ile gösterilebilir.

$$y(a_{(n+1)}) = y(a_n) + \dot{y}(a_{(n-1)})(h) \ldots\ldots (3.1.2)$$

Gösterimin ardından (3.2.2) denklemi elde edilir. Bu aşamadan sonra (3.1.2) denklemi hız ve zaman değişkenleri ile yazılırsa;

$$V_{(n+1)} = V_n + \dot{V}(\Delta t) \ldots\ldots (3.1.3)$$

denklemi elde edilir. (3.2.3) denkleminde $\dot{V}$ ivmeyi, Δt ifadesi ise adım sayısını ifade eder. $\dot{V}$ ifadesinin ivmeye eşitliği denkleme yansıtılırsa;

$$V_{(n+1)} = V_n + a(\Delta t) \ldots\ldots (3.1.4)$$

denklemi elde edilir. (3.1.4) denklemi bize hızın zamana bağlı fonksiyonunu verir. (3.1.4) denkleminden konum verisi elde etmek için konumun zamana bağlı değişimi hıza eşitlenip integral alınırsa;

$$\frac{dx}{dt} = V_0 + \vec{a}t$$

$$dx = (V_0 + \vec{a}t)dt$$

$$\int_{x_0}^{x_n} dx \cong \int_0^t (v_0 + \vec{a}t)dt$$

$$X_n - X_0 = \overrightarrow{V_0}t + \frac{at^2}{2} \ldots\ldots (3.1.5)$$

elde edilir. Bizim yapacağımız hesaplamada X_0 değeri sıfır olduğundan (3.1.5) denklemi;

$$X_n = \overrightarrow{V_0}t + \frac{at^2}{2} \ldots\ldots (3.1.6)$$

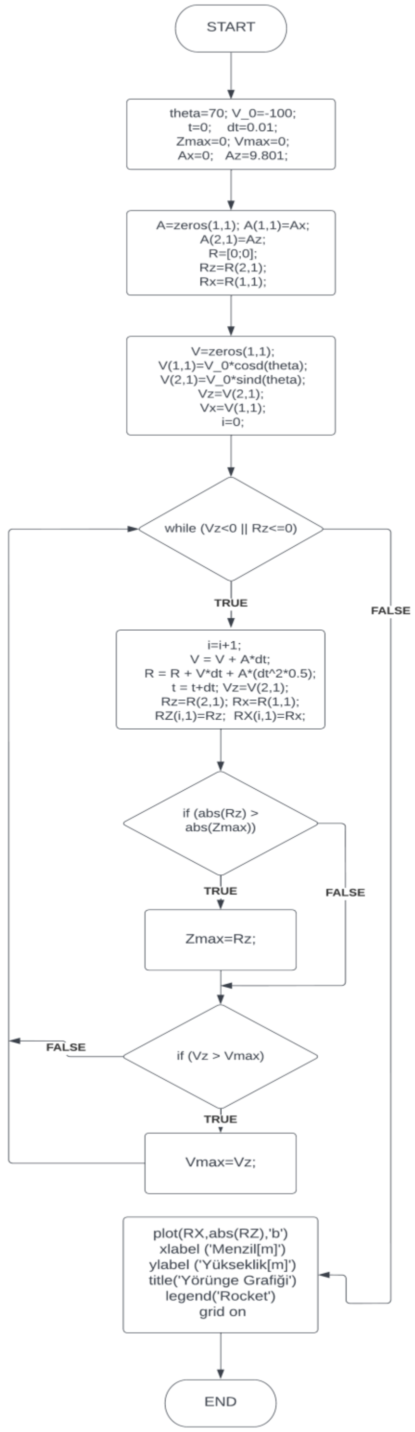
haline gelir.

Yukarıda adım adım ifade edildiği üzere Euler Metodu ile n'inci veriyi hesaplamak için, kendinsinden önce gelen veriye yani (n-1)'inci veriye ihtiyaç duyulur. Eğer başlangıç verisi biliniyorsa her bir adımda hesaplama yapılarak istenilen veriye ulaşılır.

Euler Metodunda belirlenen adım sayısına göre her aralıkta ivme sabit kabul edilir ve her bir aralık için ayrı ayrı hesaplama yapılır. Nümerik çözüm kullanıldığından denklemlerin çözümleri bizlere tam değer değil yaklaşık değer verir.

3.2-)Benzetim yapısı ve çözüm yöntemi:

Kinematik denklemler ve benzetim yapısı denklemleri kullanılarak çıkarımlar elde edilmiş ve elde edilen çıkarımlar MATLAB üzerinde script yazılması ile oluşturulmuştur. Benzetim kodları tamamen bizim tarafımızdan yazılmıştır.
Nümerik analiz yöntemi uygulamak için While döngüsü kullanılmıştır. While döngüsü içerisinde (0.01 periyotla) konum, hız ve uçuş süresi hesaplamaları yapılmış ve uçuş süresi değeri 19.160 $[s]$ olarak elde edilmiştir.
Kod içersinde ilk hız değeri (-100) olarak belirlenmiştir. Bunun nedeni ise roketimizin uçuşunun tanımladığımız eksen takımında -z ekseninde uçmasından kaynaklanmaktadır.
(Şekil 4.1)'de görüldüğü üzere çözüm sonucu olarak aşağıdaki gibi bir grafik çıktısı elde edilmiştir.
Bu çıktı el ile yapılan matematiksel hesaplar ile doğrulanmıştır. Değerlerin mantıksal olarak da doğru olduğu tespit edilmiştir.



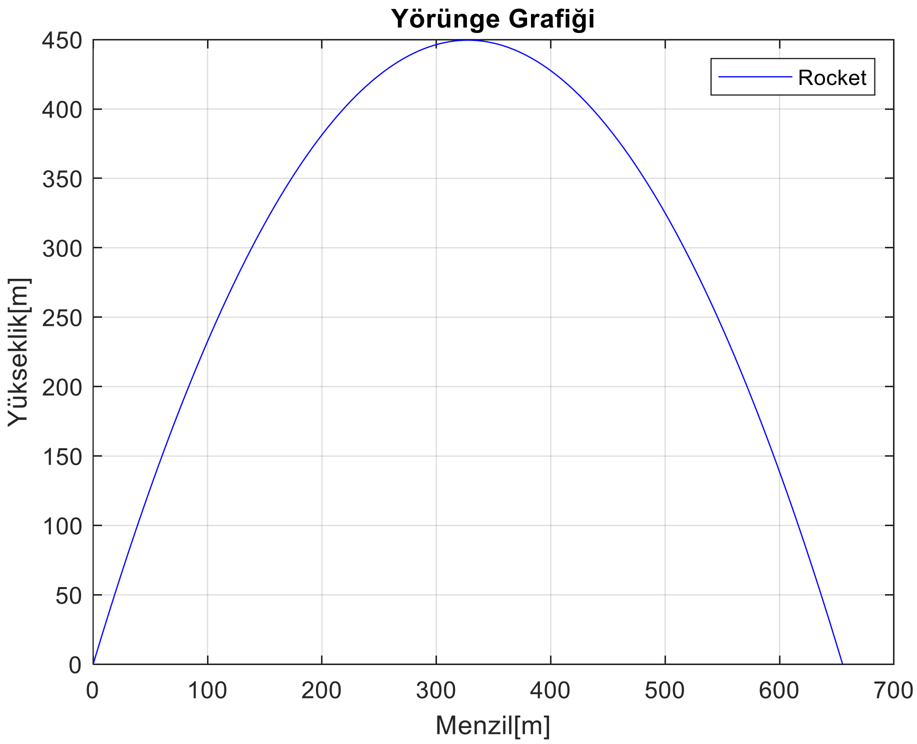
3.3-)Matlab Programı Üzerinden Oluşturulan Kod Çıktısı:

```
clc;  clear; close all;
 theta=70;                          %değişken tanımlamaları yapıldı
 V_0=-100;
 t=0;    dt=0.01;
 Zmax=0; Vmax=0;
 Ax=0;   Az=9.801;

 A=zeros(1,1);                      % İvme için sıfır matris tanımlandı-
 A(1,1)=Ax; A(2,1)=Az;              % değişkenler matrise atandı

 R=[0;0];                           % Konum için sıfır matris tanımlandı
 Rz=R(2,1);    Rx=R(1,1);

 V=zeros(1,1);                      % Hız değeri için sıfır matris tanımlandı
 V(1,1)=abs(V_0*cosd(theta));       % İlk hız değişkenine göre Vz -
 V(2,1)=V_0*sind(theta);            % ve Vx değerleri hesaplandı
 Vx=V(1,1);    Vz=V(2,1);
 i=0;

%Roket inişini güvenli bir şekilde gerçekleştirene kadar nümerik analiz yöntemiyle Konum
%ve Hız değerleri hesaplanarak dinamik bir dizi içerisine atama yapıldı
while (Vz<0 || Rz<=0)
    i=i+1;
    V = V + A*dt;
    R = R + V*dt + A*(dt^2*0.5);
    t = t+dt;
    Vz=V(2,1);
    Rz=R(2,1); Rx=R(1,1);
    RZ(i,1)=Rz;  RX(i,1)=Rx;

    %Hesaplanan Rz değeri,bir condition bağlı olarak
    % Zmax (Roketin Z eksenindeki max yüksekliği)değişkenine atama yapıldı
    if (abs(Rz) > abs(Zmax))
      Zmax=Rz;
    End
    % Hesaplanan Vz değeri,bir condition bağlı olarak
    % Vmax(Roketin Z ekseninde son andaki hız) değişkenine atama yapıldı
    if (Vz > Vmax)
      Vmax=Vz;
    end
 end
plot(RX,abs(RZ),'b')                % Dinamik dizideki değerlere göre grafik çizimi yapıldı
 xlabel ('Menzil[m]')
 ylabel ('Yükseklik[m]')
 title('Yörünge Grafiği')
 legend('Rocket')
 grid on
```

4-) Benzetimin Doğrulanması

Doğrulama Başlangıç Koşul Değerleri	
	Değer
Pozisyon[m]	[0,0,0]
Hız (bileşke) [m/s]	-100
Uçuş Yolu Açısı[derece]	70

Benzetim Çıktı Formatı	
	Değer
Tepe Noktası Yüksekliği [m]	-449.5363
Tepe Noktası Hızı (bileşke) [m/s]	34.2020
Tepe Noktası Zamanı [s]	9.58
Son Pozisyon [m]	[655.3106, 0, 0.4278]
Son Hız (bileşke) [m/s]	99.95
Son Uçuş Yolu Açısı [derece]	69.9703041
Son Uçuş Zamanı [s]	19.160



Şekil 4.1

5-) Referanslar

[1]https://tr.wikipedia.org/wiki/At%C4%B1%C5%9F_hareketi

[2]Section 2.9 : Euler's Method