

## ÜLGENHAN ROKET TAKIMI

Teknofest Roket Yarışması 2022 Uçuş Benzetimi Raporu (KTR)



Bu belgede Teknofest 2022 Roket Yarışması için istenilen uçuş benzetimi raporu sunulmaktadır.



## İçindekiler Tablosu

Kinematik ve Dinamik Denklemler.....	3
Atmosfer Modeli.....	7
Motor Modeli.....	9
Aerodinamik Model.....	11
Benzetim Yapısı.....	12
Benzetimin Doğrulanması .....	14
Benzetimin Sonuçları .....	15
Referanslar .....	17

## 1 Kinematik ve Dinamik Denklemler

Kütlesinin bir kısmını oluşturan yakıtı motorundan yüksek güçle dışarı atarken Newton'un üçüncü yasasına bağlı olarak yakıtın motoru terk etme doğrultusunda ve gazın çıkış yönünün ters yönünde bir itki kuvveti sağlayarak momentumun korunumu sayesinde hareket eden bir roket modeli için tipik bir uçuş sırasında roket üzerindeki kuvvetler önemli ölçüde değişir. Motorlu uçuş sırasında tahrik sisteminin itici gazları motordan itki kuvveti için atılırken yakıt sürekli olarak tükenir. Bu durumda roketin kütlesi ve ağırlığı değişkendir. Bu şekilde bir hareket için Tsiolkovsky İdeal Roket Denklemlerini Kullanabiliriz.

Tsiolkovsky'nin Roket denklemleri, Roketin basit hareket prensibini kullanarak, kütlenin dahil edilmeden hızla değişim gösteren momentumun matematiksel dökümüdür. Tsiolovsky Genelleştirilmiş Formülü:

$$\Delta V = V_e \ln \frac{m_0}{m_f} = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_0}{m_f}$$

$\Delta V$ : Dış kuvvetler 0 kabul edilerek, Roketteki maksimum ivmesi

$m_{ilk}$ : Roketin bütünü ele alınarak sahip olduğu kütlesi (Islak kütle)

$m_{son}$ : Roketin yakıtı bittikten sonra sahip olduğu kütle (Kuru kütle)

$V_e = I_{sp} g_0$ : Roketin motorunun nozzle'dan verdiği enerji hızı (Effective Exhaust Velocity)

Burada

$I_{sp}$ : Özgül itki (birimi saniye cinsinden zaman)

$g_0$ : Standart yer çekimi

---

Denklemlerin Türetilmesi ve Tanımlamalar:

*Roket* = roket ve içindeki tüm tükenmemiş yakıt

$F_i$  = dış kuvvetler

$t$  = zaman

$V = \text{roketin } t=0 \text{ anındaki hızı}$

$V + \Delta V = \text{roketin } t = \Delta t \text{ anındaki hızı}$

$V_e = \Delta t \text{ süresi boyunca motordan atılan (roket tarafından kaybedilen) kütlenin hızı}$

$m + \Delta m = \text{roketin } t=0 \text{ anındaki kütlesi}$

$m = \text{roketin } t = \Delta t \text{ anındaki kütlesi}$

$I_{sp} = \text{özgül itki [saniye]}$

Newtonu'nun ikinci hareket yasası, dış kuvvetleri ( $F_i$ ) roketin doğrusal momentumundaki değişimle aşağıdaki gibi ilişkilendirir:

$$\sum_i F_i = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{P_{son} - P_{ilk}}{\Delta t}$$

$$P_{ilk} = (m + \Delta m)V$$

$$P_{son} = m(V + \Delta V) + \Delta m V_e$$

Gözlemci referans çerçevesinde motordan çıkan gazın ( $V_e$ ) hızı, roket referansındaki roket motorundan çıkan gaz hızı ( $v_e$ ) ile ilişkilidir. Egzoz hızı negatif yönde olduğundan

$$V_e = V - v_e$$

$$P_{son} - P_{ilk} = m\Delta V - v_e \Delta m$$

$$\sum_i F_i = m \frac{dV}{dt} + v_e \frac{dm}{dt}$$

Sisteme etki eden dış kuvvetler olmadığını varsayarak

$$-m \frac{dV}{dt} + v_e \frac{dm}{dt}$$

Bu eşitlik  $v_e$  nin sabit olduğu varsayılarak aşağıdaki şekilde integre edilebilir:

$$\int_V^{V+\Delta V} dV = v_e \int_{m_{ilk}}^{m_{son}} \frac{dm}{m}$$

$$= \Delta V = v_e \ln \frac{m_{ilk}}{m_{son}}$$

veya

$$m_{son} = m_{ilk} e^{-\Delta V/v_e}$$

Tsiolkovsky'nin Roket Denklemleri tek tek parametreler üzerinden de incelenebilir. Üç Benzetim Gereksinimleri göz önünde bulundurulduğunda İvme tabanlı türevin daha doğru bir sonuç getireceği çıkarımı yapılabilir.

İvme Tabanlı Tsiolkovsky Denklemi Türetilmesi:

Roketimizin gökyüzündeki hareketinde herhangi bir kuvvetin etki etmediğini düşünelim. Motorun başladığı durumdan itibaren, Roketin motoru sabit kütle akış oranı  $R(\text{kg/s})$  ve nozzle çıkış hızı  $V_e(\text{m/s})$  ile dışarıya doğru kuvvet vermeye başlar. Bu durumda  $R \times V_e$  eşitliğine sahip olacak şekilde sabit bir kuvvet oluşur. Roket bu kuvvet ile bağdaşır, aynı zamanda sürekli bir şekilde motor bitene kadar kütle azalmaya devam eder. Newton'un ikinci hareket yasası göz önünde bulundurulduğunda,  $t$  zamanında  $F$  kuvvetle oluşan ivmesi:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{F}{m(t)} = -\frac{RV_e}{m(t)}$$

Yakıt tamimiyle tükendiğinde, roketin kütlesi  $m_{ilk} - m_{son}$  eşitliğine sahip olmuş olur. Bütün yakıtın bitmesinin hesabını yapmak için:

$$T = (m_0 - m_f)/R$$

İki tarafında integralini 0'dan  $t$  zamanına olacak şekilde aldığımız zaman:

$$\Delta V = V_f - V_0 = -V_e [\ln m_f - \ln m_0] = V_e \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right)$$

Uçuş Yolu Açısı Hesabı Denklemi

Roketin Uçuş Yolu açısını hesaplamak için:

$$R_{glide} = h \times \left( \frac{L}{D} \right) = h \times \left( \frac{C_L}{C_D} \right)$$

Şeklinde numerik bir denklem oluşturulabilir. Burada

$h$ : Roketin  $y$  ekseninde yerden yüksekliği

L: Kalkış açısı (Lift)

D: Sürüklenme açısı(Drag)

CL: Kalkış katsayısı

CD: Sürüklenme katsayısı

Elimizde olan ve roketimizin uçuş yolunu hesaplamak için gerekli olan açıları denkleme adapte ettiğimiz zaman:

$$\frac{V_V}{V_H} = \frac{h/\Delta t}{R_{glide}/\Delta t} = \frac{h}{R_{glide}}$$

Burada roketimizin x eksenı üzerindeki değeri ve y eksenı üzerindeki eksenini göz önünde bulundurursak trigonometrik bir  $\theta$  açısı elde ederiz. Bu açı, Üçgen biçiminde düşünüldüğü zaman

$$\tan\theta = \frac{h}{R_{glide}}$$

Olarak kabul edebiliriz. teta açısının küçük bir değeri olduğunu kabul edip,

$$V_H = V$$

Eşitliğini kullanabiliriz. Bununla beraber:

$$V_V = \frac{DV}{W} \rightarrow \frac{V_V}{V} = \frac{h}{R_{glide}} = \frac{D}{W}$$

$L=W\cos\theta$  eşitliğini de yerine koyarsak;

$$\frac{h}{R_{glide}} = \frac{D}{W} = \frac{D}{L/\cos\theta} \rightarrow \frac{h}{R_{glide}} = \left(\frac{D}{L}\right) \cos\theta$$

Eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği kullanarak uçuş yolu mesafesini elde edebiliriz. Aynı zamanda  $\cos\theta$ 'yi eşitlikte yalnız bırakarak Uçuş Yolu açısını elde edebiliriz.

Roketimizin istediğimiz uçuş yolu açısına sahip olması için, gerekli bir hıza ihtiyacı vardır.

Bu hızı:

$$V = \sqrt{\frac{2\cos\theta}{\rho C_L} \times \frac{W}{S}}$$

Denklemini ile hesaplayabiliriz.

Kalkış katsayısını ise:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \cdot \alpha$$

Denkleminle hesaplayabiliriz

## 2 Atmosfer Modeli

Benzetimde aerodinamik kuvvetlerin irtifaya bağılı değişimini modellemek ve doğruluğu arttırmak için ICAO (International Civil Aviation Organization) Standart Atmosfer Modeli (International Standard Atmosphere) kullanılmıştır.

Uluslararası Standart Atmosfer (ISA), Dünya atmosferinin sıcaklık, basınç, yoğunluk, viskozite gibi özelliklerinin irtifaya bağılı olarak nasıl değiştiğini gösteren bir atmosfer modelidir.

ISA atmosfer modeline göre deniz seviyesindeki tanımlanan koşullar:

Basınç :  $p_0 = 101\,325\, N/m^2 = 1013.25\, hPa$

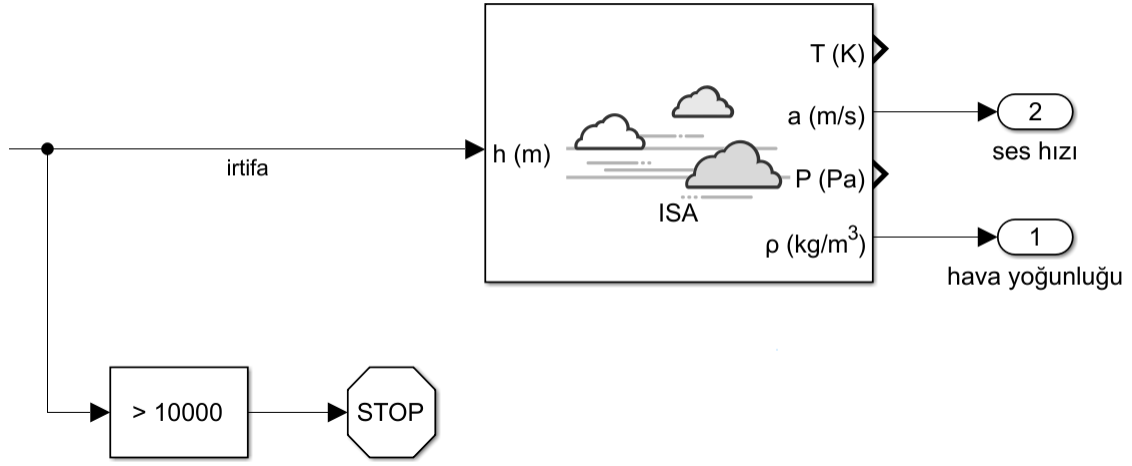
Yoğunluk:  $\rho_0 = 1.225\, kg/m^3$

Sıcaklık:  $T_0 = 288.15^\circ K (15^\circ C)$

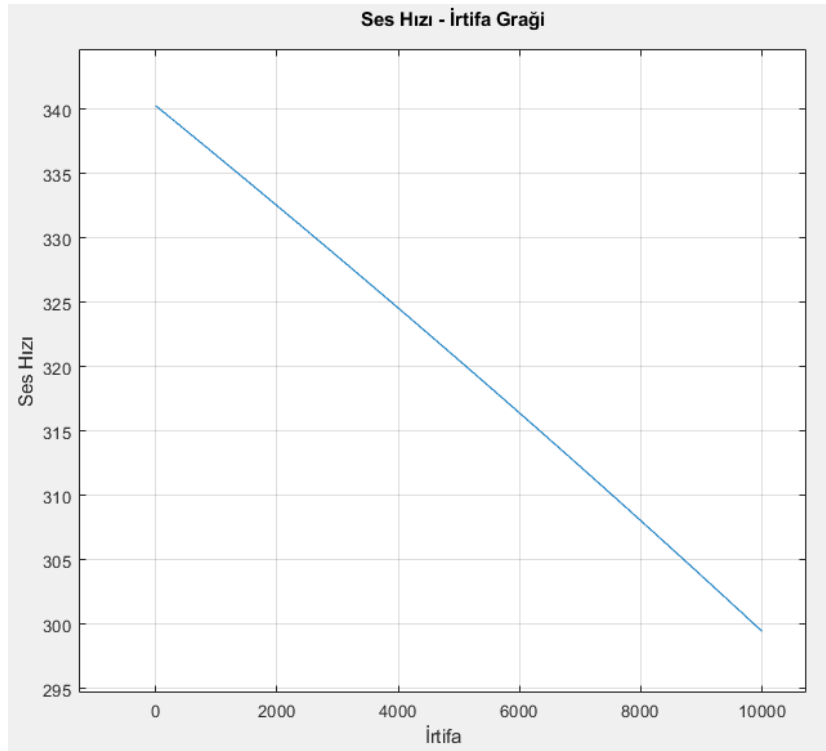
Ses Hızı:  $a_0 = 340.294\, m/s$

Kütle Çekimi:  $g_0 = 9.80665\, m/s^2$

Matlab Simulink yazılımı kullanılarak oluşturulan modelle deniz seviyesinden yüksekliğe bağılı hava yoğunluğu ve ses hızı eğrileri Resim 1, Resim 2 ve Resim 3' de verilmiştir.

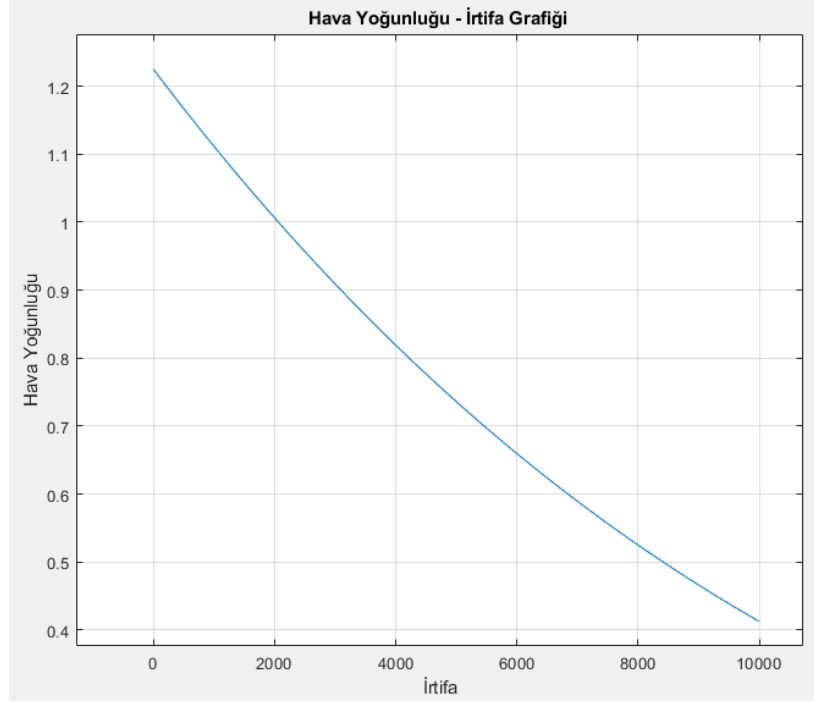


*Resim 1 Oluşturulan atmosfer modeli*



*Resim 2 Simülasyonun 10.000 Metreye Kadar Çalıştırılmasıyla Elde Edilen Ses Hızı – İrtifa Grafiği*

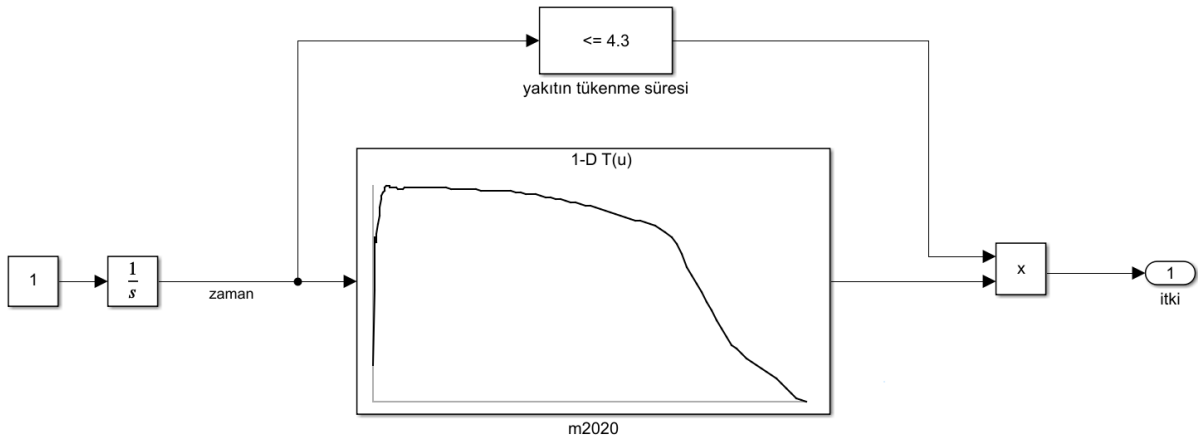




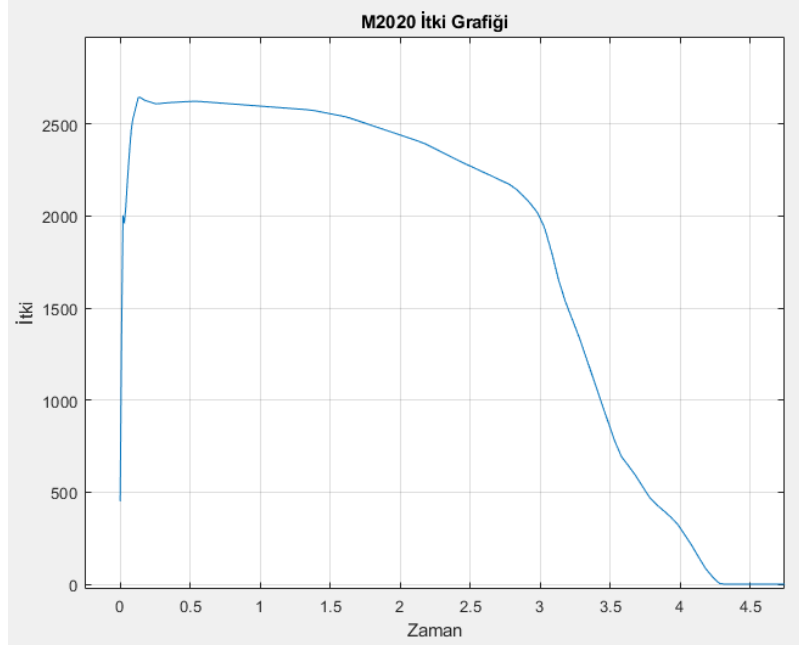
*Resim 3 Simülasyonun 10.000 Metreye Kadar Çalıştırılmasıyla Elde Edilen Hava Yoğunluğu – İrtifa Grafiği*

### 3 Motor Modeli

Benzetimin doğru sonuçlar vermesi için roketle etki eden kuvvetlerin gerçeğe en yakın şekilde modellenmesi gerekmektedir. Bu bağlamda Cesaroni M2020 motoru için zamana bağlı itki verileri ve değişen kütle (yakıt atıldıkça azalan) bağlı olarak değişen roketin ağırlığı benzetimde kullanılmıştır. Motor itki eğrisindeki zaman noktalarının arasında kalan simülasyon zaman adımı noktalarının bulunduğu ara değerler için interpolasyon (Simulink 1-d Lookup Table Kullanılarak) yapılmıştır.



*Resim 4 Oluşturulan Motor İtki Modeli*



*Resim 5 Oluşturulan Simulink Modeli ile Elde Edilen İtci – Zaman Eğrisi*

Özgül itki ( $I_{sp}$ ) roket ve jet motorlarının verim oranını tanımlamak için kullanılan bir yöntemdir. Kullanılan itici yakıt miktarı ile ilgili olarak itici kuvvetin türevini belirtir. Başka bir deyişle, itme kuvveti birim zamanda kullanılan itici yakıt miktarına bölünür.

Oluşturulan modelde  $I_{sp}$  tanımı ve formülünden faydalanılarak motor çalışırken atılan kütle debisi ( $\dot{m}$ ) hesaplanmıştır. Hesaplanan debi kullanılarak roketin değişken ağırlığı hesaplanıp modelde kütle ve ağırlık sinyalleri beslenmiştir.

$I_{sp}$  için genel formülü ile  $\dot{m}$  hesabı:

$$F_{itki} = g_0 \cdot I_{sp} \cdot \dot{m}$$

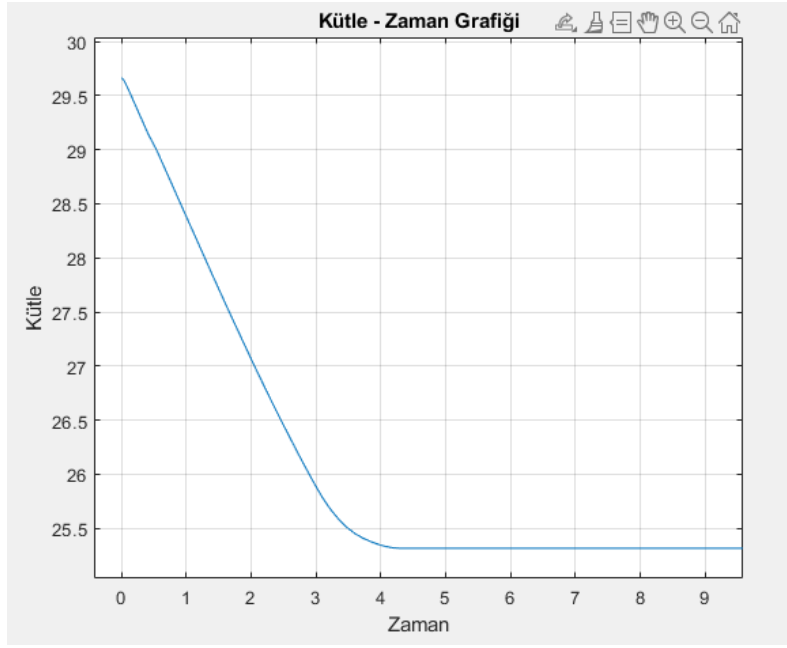
$$\frac{F_{itki}}{g_0 \cdot I_{sp}} = \dot{m}$$

$F_{itki}$ : Motordan elde edilen itme kuvveti [Newton]

$g_0$ : Standart yer çekimi [ $m/s^2$ ]

$I_{sp}$ : Özgül itki [saniye]

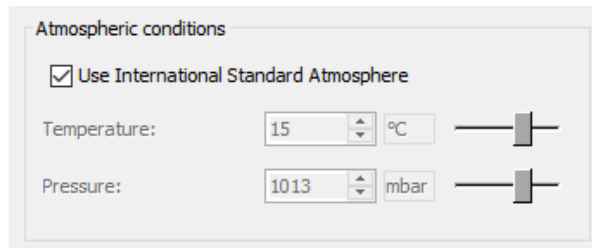
$\dot{m}$ : Atılan kütle debisi [kg/s]



Resim 6 Oluşturulan Atılan Kütle Modeli ile Elde Edilen Kütle Zaman Grafiği Eğrisi

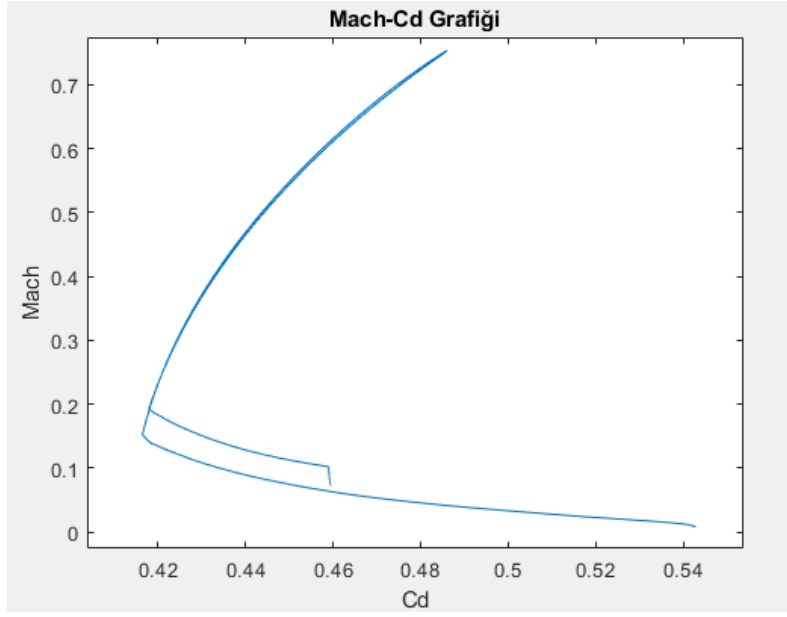
#### 4 Aerodinamik Model

Benzetimde kullanılan aerodinamik veri seti OpenRocket yazılımı üzerinden mach sayısı değişimlerinin çıktıları ile kullanılmıştır. OpenRocket simülasyon seçenekleri ekranından atmosferik koşullar sekmesi altında seçilen Standart Atmosfer Modeli (ISA) ile Simulink yazılımıyla hazırlanan benzetim modelinde kullanılan atmosfer modeli aynı olduğu için irtifaya bağlı olarak değişen koşullarda (hava yoğunluğu, sıcaklık, ses hızı gibi) yakın sonuçlar elde edileceği öngörülüp Cd sayısı sağlanmıştır.



Resim 7 Mach-Zaman Grafiği

Doğrulama benzetimi için hem mach sayısına bağlı hem de yüksekliğe bağlı olan bir veri seti kullanılmış olup Simulink yazılımı ile zaman adımının denk geldiği yerde veri olmayan noktalar için lookup table kullanılarak ara değerlendirme (interpolasyon) yapılmıştır.



Resim 8 Mach-Cd Grafiği

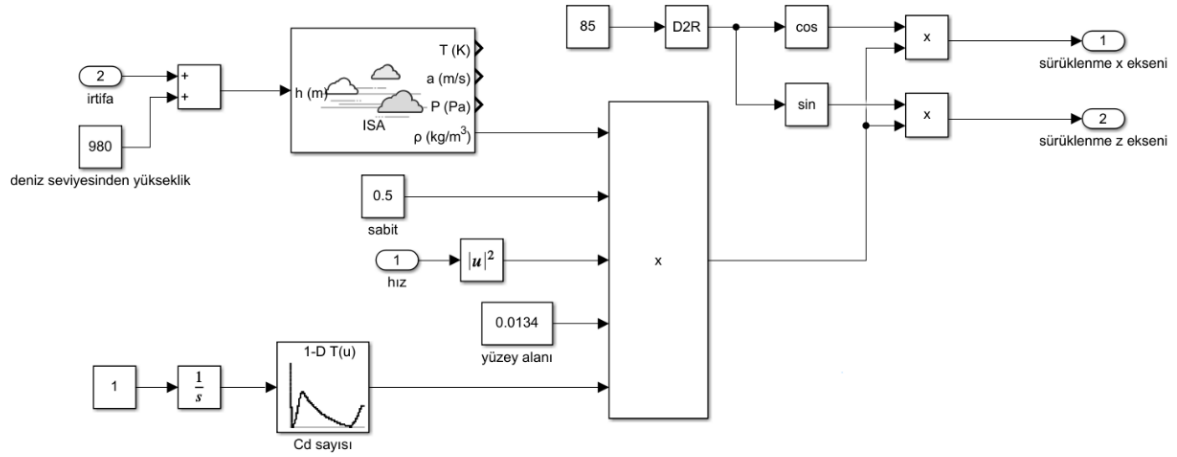
## 5 Benzetim Yapısı

Başlangıç koşulları verilen 2 serbestlik dereceli roket hareketi için Simulink yazılımı kullanılarak 0.01 saniye zaman adımlı bir model oluşturulup Euler Metodu ile çözülmüştür.

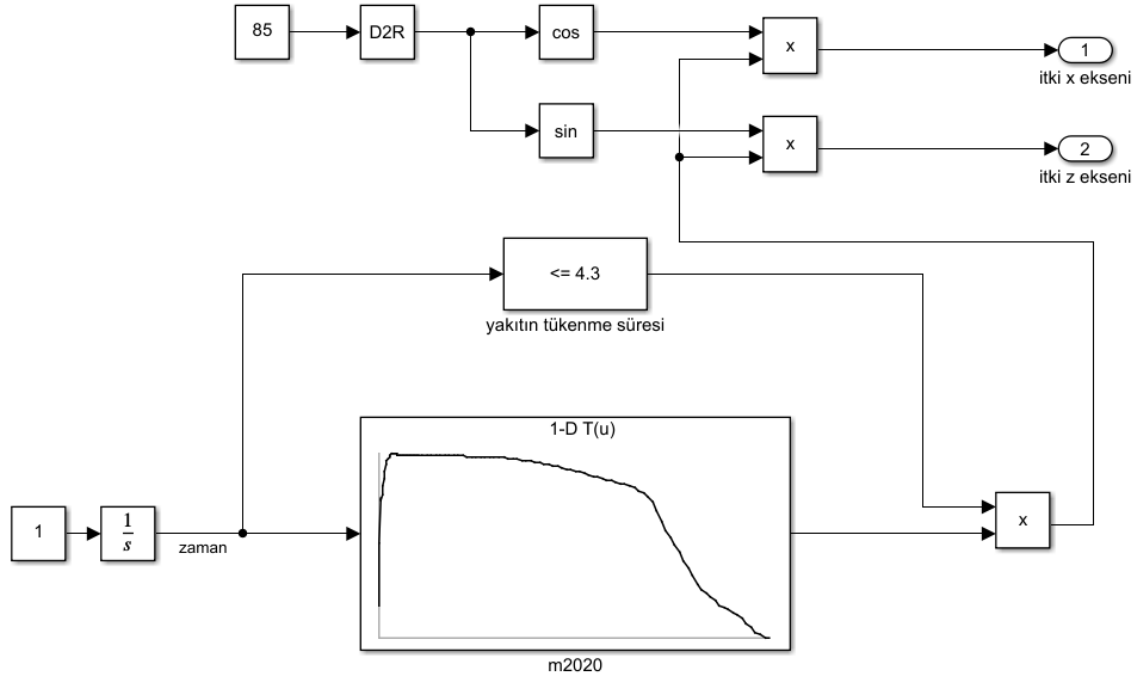
Euler Metodu başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılan bir teknik olup Taylor Serisinin ilk iki teriminin alınmasıyla oluşturulmuştur. Bu yüzden Taylor Serisi yöntemi ile aynı yöntem olarak kabul görür ve sonuç olarak Euler Metodu, Taylor Serisinin bir alt kümesi olarak düşünülür.

Benzetim 2 serbestlik dereceli olup açısal hareket içermemektedir. Roket için noktasal kütle/parçacık varsayımı yapılmıştır ve bütün kuvvetlerin roketin kütle merkezine uygulandığı varsayılmıştır. Başlangıç koşulları olarak verilen ilk uçuş yolu açısı değeri 85 derece, atışın yapıldığı yerin deniz seviyesinden yüksekliği 980 metre, yer çekimi ivmesi  $9.801 m/s^2$  ve ilk hız değeri 2 m/s kabul edilip, oluşturulan itki kuvveti ve kütle modeli kullanılmıştır.

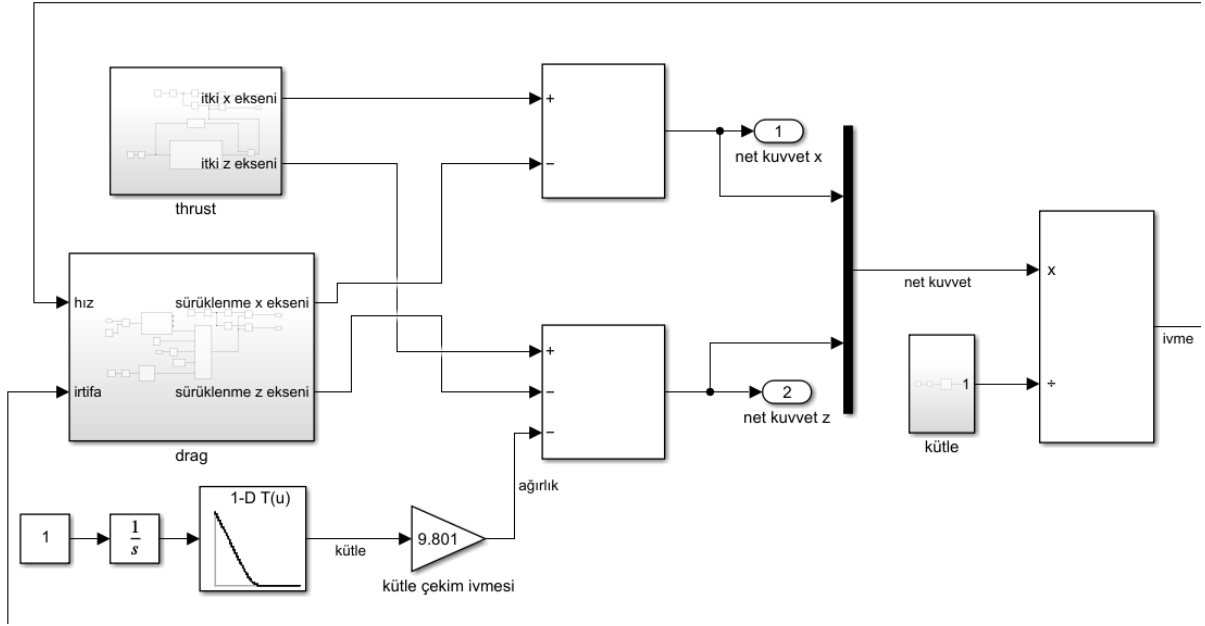
Ateşleme noktası eksen takımı kullanılıp modelleme Z eksenini pozitif aşağı yönlü kabul edilerek modellenmiştir. Ek olarak benzetime aerodinamik sürüklenme kuvveti ve motor itki kuvveti dahil edilmiş olup aerodinamik taşıma/kaldırma kuvveti, rüzgâr etkisi ve dünyanın dönüşü dahil edilmemiştir. Ses hızı ve hava yoğunluğu için yüksekliğe bağlı değişken bir atmosfer modeli (ISA Atmosfer Modeli) kullanılmıştır.



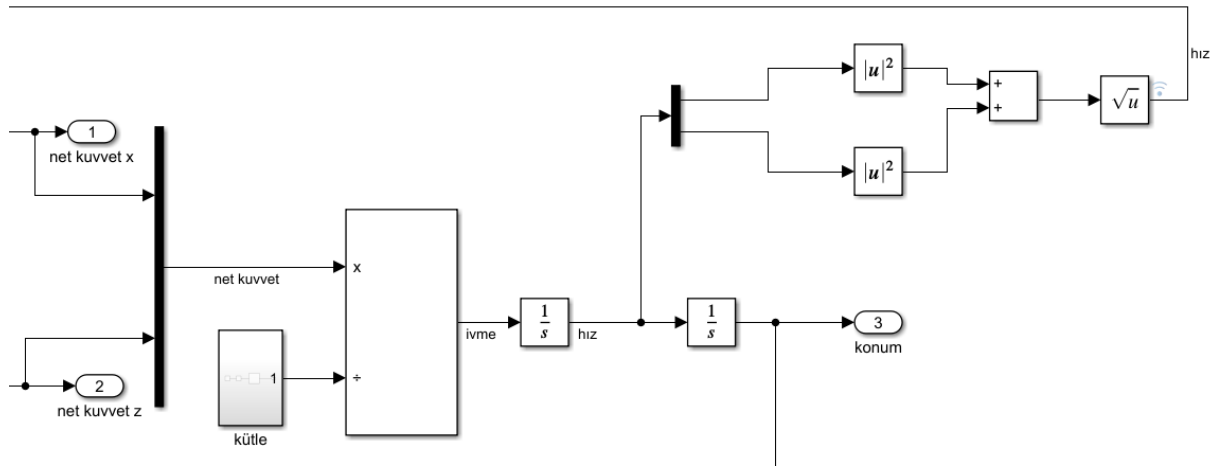
Resim 9 Aerodinamik Sürüklenme Kuvveti İçin Oluşturulan Model



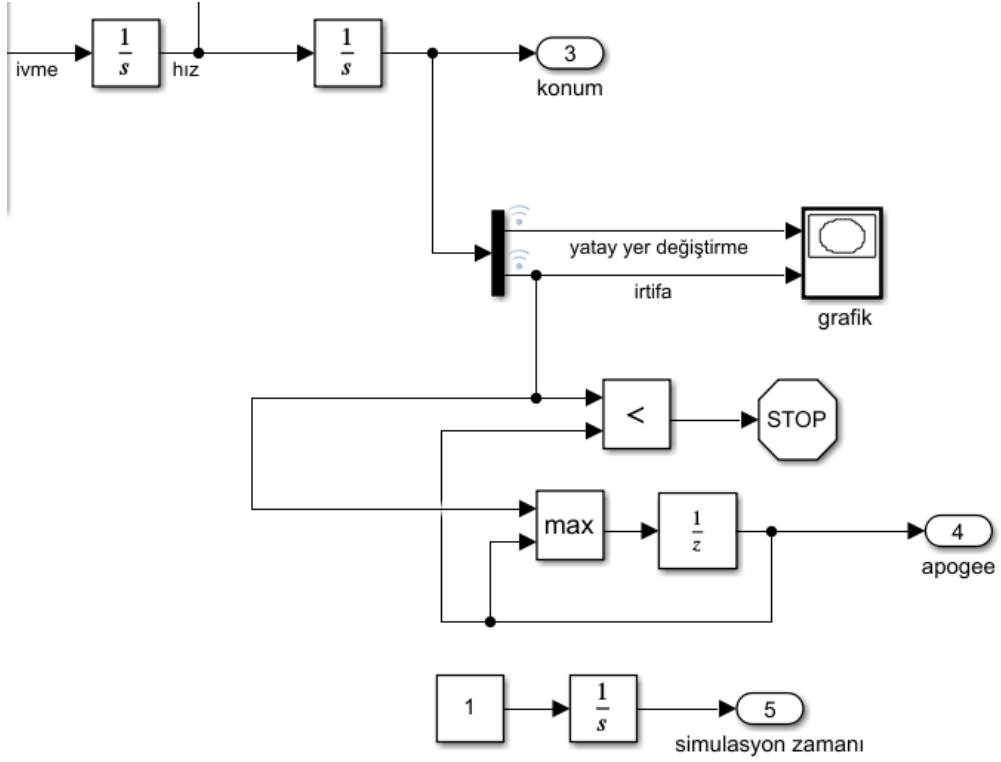
Resim 10 İtki Kuvveti İçin Oluşturulan Model



Resim 11 1. Bölümdeki Denklem Takımına Göre Kuvvetlerin Modellenmesi



Resim 12 Hız Bileşenlerinin Bulunması



Resim 13 Konum Çıktıları ve Simülasyon Bitirme Koşulu

Solver selection

Type: Fixed-step Solver: ode1 (Euler)

▼ Solver details

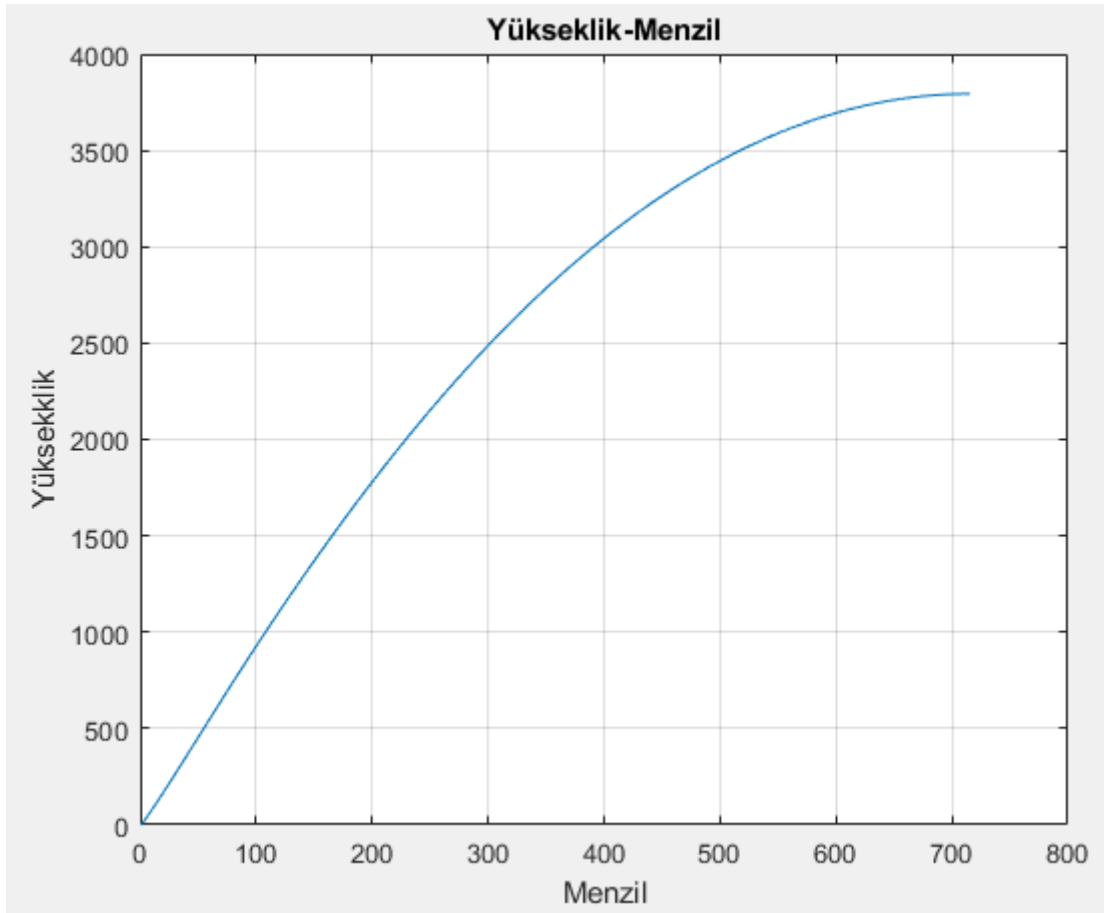
Fixed-step size (fundamental sample time): 0.01

Resim 14 Benzetim Çözüm Metodu ve Zaman Adımı

## 6 Benzetimin Doğrulanması

-	Değer
Maksimum Mach Sayısı	0.896
Tepe Noktası Pozisyonu [XZ]	[715.6 , 3793]
Tepe Noktası Hızı (bileşke ) [m/s]	25.71
Tepe Noktası Mach Sayısı	0.079
Tepe Noktası Zamanı [s]	27.87

*Tablo 1 Benzetim Doğrulama Çıktıları*



*Resim 15 Yükseklik Menzil*

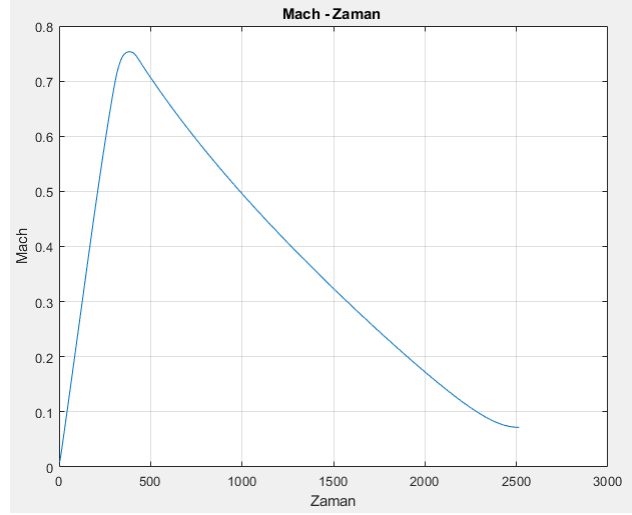


	<b>OpenRocket Değeri (a)</b>	<b>Benzetim Değeri (b)</b>	<b>Yüzdece Fark (b-a)/a*100</b>
<b>Maksimum Mach Sayısı [-]</b>	0.7489	0.7533	%0.58
<b>Tepe Noktası Pozisyonu [m] [XZ]</b>	[236.4, 3012]	[578.2, 2991]	[% 144.5, %0.69]
<b>Tepe Noktası Hızı (bileşke) [m/s]</b>	9.22 m/s	23.36 m/s	% 153
<b>Tepe Noktası Mach Sayısı [-]</b>	0.0100	0.0719	% 619
<b>Tepe Noktası Zamanı [s]</b>	25.30 saniye	25.13 saniye	%0.67

## 7 Benzetimin Sonuçları

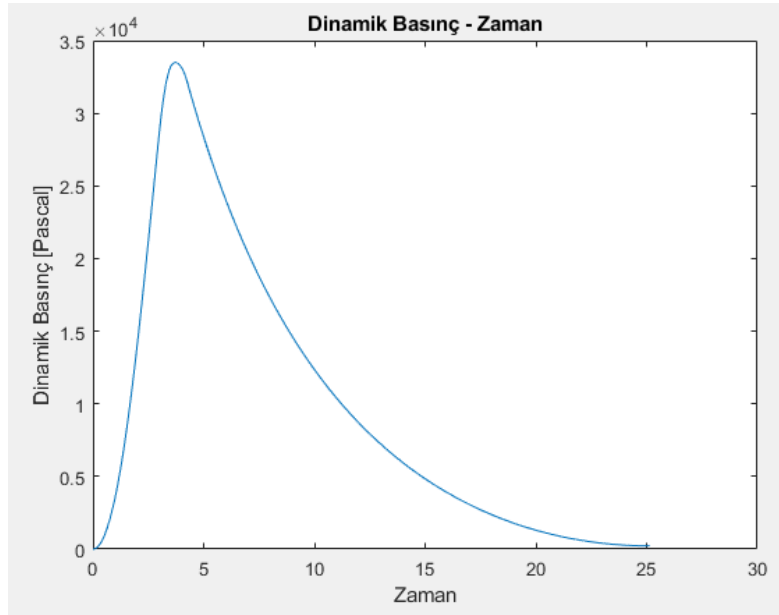
*Tablo 2 Alınan Değer ile Benzetim Değerleri Arasındaki Farklar*

Çıktı tablosundaki OpenRocket ve modellenen benzetim sonuçları arasında irtifa değeri ve uçuş süresinin hata payı çok az olmasına rağmen yataydaki alınan yol (menzil) hata payının oldukça yüksek olduğu görülmüştür. Görülen bu hatanın sebebinin benzetimdeki kabuller olduğu düşünülmektedir. Aerodinamik taşıma/kaldırma kuvveti ve rüzgâr etkisi simülasyona dahil edilmediğinden, ayrıca aerodinamik sürüklenme kuvvetinin uçuş boyunca sabit 85 derece ile roketi etki ettiği varsayıldığından bu değerlerin OpenRocket simülasyon değerlerinden farklı olması gerektiği düşünülmektedir.



*Resim 16 Mach-Zaman Grafiği*

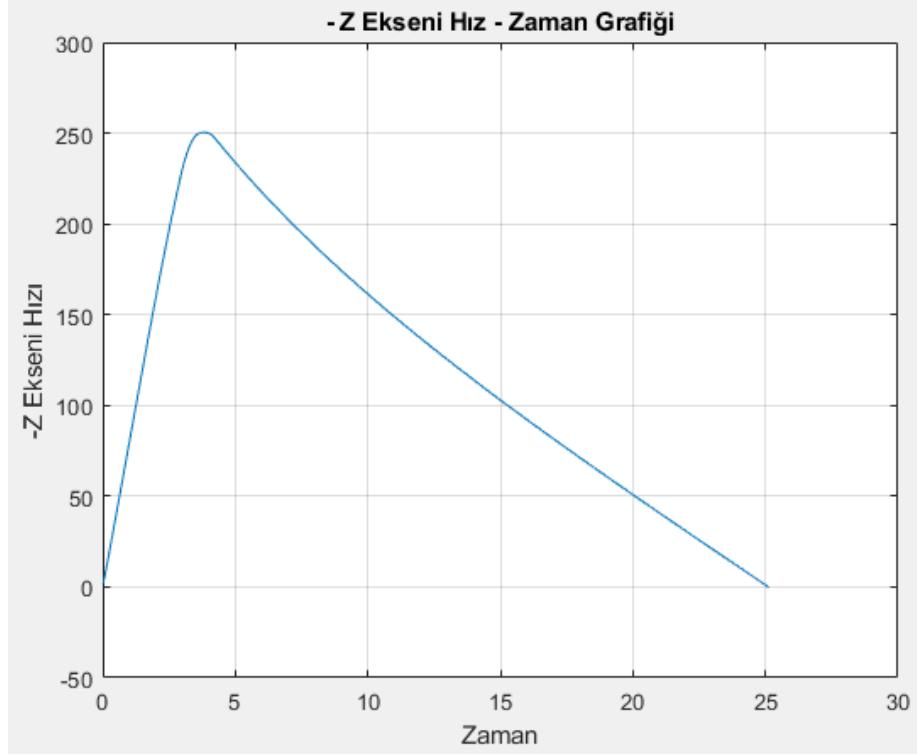
Maksimum Mach yüksekliği motor yakıtı bitmeden hemen önce 3.8 saniye civarındaki roketin maksimum hıza ulaştığı irtifa olan 568 metredir.



*Resim 17 Dinamik Basınç Zaman Grafiği*

Roketin maksimum dinamik basınca ulaştığı yükseklik 560 metre civarındır. Aerodinamik kuvvet etkisinin fiziksel olarak rokete en çok etki ettiği noktada dinamik basınç maksimumdur. Maksimum dinamik basıncın değeri ve roketin hangi yükseklikte maksimum dinamik basınca

ulaştığı gibi parametreleri bilmek analizler sonucunda roketin üzerinde oluşacak stresi belirlemede kullanılabilir.



*Resim 18 -Z Eksen Hızı – Zaman Grafiği*

## **Referanslar**

<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/rktpow.html>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Tsiolkovsky\\_rocket\\_equation#:~:text=The%20Tsiolkovsky%20rocket%20equation%2C%20classical,high%20velocity%20can%20thereby%20move](https://en.wikipedia.org/wiki/Tsiolkovsky_rocket_equation#:~:text=The%20Tsiolkovsky%20rocket%20equation%2C%20classical,high%20velocity%20can%20thereby%20move)

<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/specimp.html>

<http://fisicaatmo.at.fcen.uba.ar/practicas/ISAweb.pdf>

<https://www.thespacetechie.com/max-q-what-is-it/>