

05.05.2022



Günaltay Roket Takımı

Uçuş Benzetim Raporu



SEMBOLLER

F : Kuvvet (N)

T : İtki kuvveti (N)

G : Ağırlık (N)

D : Aerodinamik sürüklenme kuvveti (N)

m : Kütle (kg)

v : Hız (m/s)

\dot{m} : Kütlenin zamanla değişim oranı

A : Roket kesit alanı (m²)

P_e : Egzoz basıncı (Pa)

P_{atm} : Atmosfer basıncı (Pa)

A_e : Egzoz kesit alanı (m²)

a : İvme (m/s⁻²)

C_d : Sürüklenme katsayısı

ρ : Yoğunluk (m³/kg)

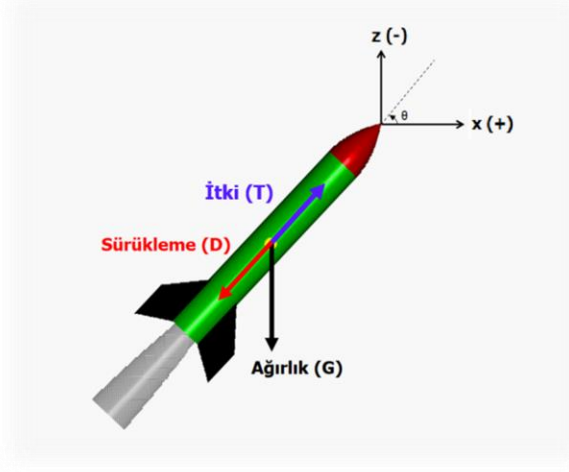
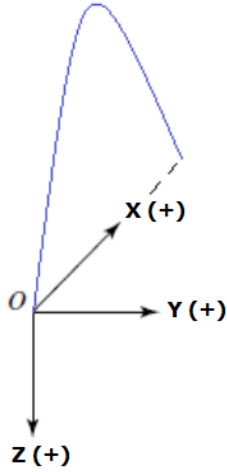
θ : Uçuş yolu açısı (rad)

İÇİNDEKİLER

1. Semboller	2
2. Kinematik ve Dinamik Denklemler	4
3. Atmosfer Modeli	11
4. Motor Modeli	11
5. Aerodinamik Model	13
6. Benzetim Yapısı	14
7. Benzetimin Doğrulanması	16
8. Benzetim Sonuçları	17
Referanslar	21

Kinematik ve Dinamik Denklemler

Benzetimin iki serbestlik derecesinde modellenmiştir ve uçuş denklemlerinde X ve Z eksenleri için yalnızca birer doğrusal hareket serbestliği bulunmaktadır.

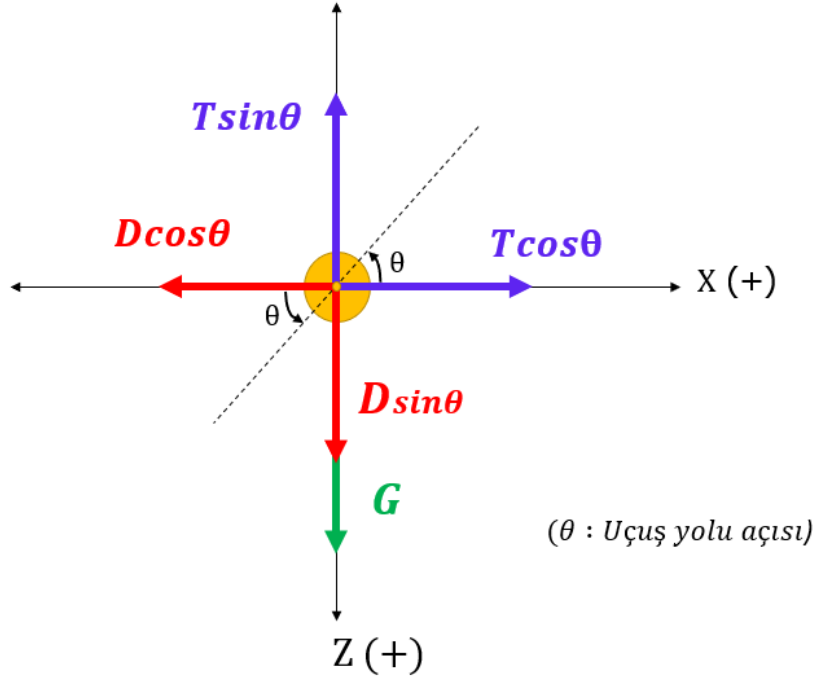


Benzetimin kolay şekilde modellenebilmesi adına bazı ihmaller ve varsayımlar yapılmıştır:

KTR Rapor Gereksinimleri madde 1.4' te belirtildiği üzere; benzetiminin çalışması için başlangıç koşulları olarak, roketin ilk pozisyon değeri, ilk bileşke hız değeri, ilk uçuş yolu açısı değeri, ilk toplam kütle değeri ve ateşleme noktası deniz seviyesi yükseklik değerlerinin yeterli olması gerektiğinden, uçuş boyunca motor tarafından atılan kütle miktarı (kütlenin zamanla azaldığı); ivme, hız ve konum hesapları yapılırken yalnızca itki kuvveti denklemi içerisinde kullanılmıştır. Newton' un İkinci Yasası uygulanırken kütle sabit alınmıştır.

Roket, parçacık/kütle varsayımıyla ele alınmış, rokete etkiyen tüm kuvvetlerin ağırlık merkezinden etki ettiği kabul edilmiştir. Denklemler oluşturulurken aerodinamik kaldırma ve rüzgâr kuvvetleri ihmal edilmiş, ancak; yer çekimi, aerodinamik sürüklemeye ve motor itki kuvvetleri denklemlere dahil edilmiştir. Ayrıca itki ve sürüklemeye kuvvetlerinin hareket boyunca hız vektörüyle aynı doğrultuda olduğu kabul edilmiştir.

"Noktasal kütle varsayımıyla roket'e etkiyen kuvvetler"



Roket için kütle/parçacık varsayımı yapıldığından “Newton’ un İkinci Yasası” bu sistem üzerine uygulanabilmektedir. Böylece:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{sistem} \quad (1)$$

Eşitliği yazılır. Toplam kuvvet vektörlerle ifade edilirse:

$$\sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{D} + \vec{G} \quad (2)$$

Eşitliği elde edilir. Ardından tüm kuvvet vektörleri X ve Z bileşenlerine ayrılıp eksen takımına göre yönleri tayin edilirse:

$$\sum F_x = ma_x = T \cos[\theta(t)] - D(t) \cos[\theta(t)] \quad (3)$$

$$\sum F_z = ma_z = -T \sin[\theta(t)] + D(t) \sin[\theta(t)] + G \quad (4)$$

Denklemleri elde edilir. Son olarak \vec{F} vektörünün büyüklüğü;

$$|\sum \vec{F}| = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_z)^2} \quad (5)$$

Denklemleri ile ifade edilir. Ayrıca silindirik yapıya sahip bir roket için, sürüklenme kuvveti denklemi [1]:

$$D = \frac{1}{2} C_d A \rho v^2 \quad (6)$$

İtme kuvveti denklemi [2]:

$$T = \dot{m} v_e + (P_e - P_{atm}) A_e \quad (7)$$

şeklindedir.

İvme Denklemleri

Belirtildiği üzere benzetim gerçekleştirilirken yakıt kütlelerinin zamanla azalması denklemlere dahil edilmemiştir. Bu sayede kütle/parçacık varsayımıyla ele alınan roket için Newton' un Yasaları uygulanabilir.

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} = \frac{d[m\vec{v}(t)]}{dt} = \vec{T} + \vec{D} + \vec{G} \quad (8)$$

$$\sum F_x = m a_x = m \frac{d[v_x(t)]}{dt} = T(t) \cos[\theta(t)] - D(t) \cos[\theta(t)] \quad (9)$$

$$m \dot{v}_x = T \cos[\theta(t)] - D(t) \cos[\theta(t)] \quad (10)$$

$\dot{v}_x = a_x(t)$ olduğundan;

$$m a_x(t) = T \cos[\theta(t)] - D(t) \cos[\theta(t)] \quad (11)$$

$$a_x(t) = \frac{T \cos[\theta(t)] - D(t) \cos[\theta(t)]}{m} \quad (12)$$

(6) ve (7) numaralı denklemler yukardaki ifadede yerine yazıldığında;

$$a_x(t) = \frac{[\dot{m}v_e + (P_e - P_{atm})A_e] \cos[\theta(t)] - [\frac{1}{2}C_d A \rho v^2(t)] \cos[\theta(t)]}{m} \quad (13)$$

X ekseninde zamana bağlı ivme denklemi elde edilir. Z ekseninde zamana bağlı ivme denklemi için benzer adımlar uygulanır:

$$\sum F_z = ma_z = m \frac{d[v_z(t)]}{dt} = T \sin[\theta(t)] - D(t) \sin[\theta(t)] - G \quad (14)$$

$$m\dot{v}_z = -T \sin[\theta(t)] + D(t) \sin[\theta(t)] + mg \quad (15)$$

$\dot{v}_z = a_z(t)$ olduğundan;

$$m a_z(t) = -T(t) \sin[\theta(t)] + D(t) \sin[\theta(t)] + mg \quad (16)$$

$$a_z(t) = \frac{-T(t) \sin[\theta(t)] + D(t) \sin[\theta(t)]}{m} + g \quad (17)$$

(6) ve (7) numaralı denklemler yukardaki ifadede yerine yazıldığında;

$$a_z(t) = \frac{-[\dot{m}v_e + (P_e - P_{atm})A_e] \sin[\theta(t)] + [\frac{1}{2}C_d A \rho v^2(t)] \sin[\theta(t)]}{m} + g \quad (18)$$

Z ekseninde zamana bağlı ivme denklemi elde edilir. Zamana bağlı toplam ivme denklemi için ise aşağıdaki ifade kullanılır:

$$|\vec{a}(t)| = a(t) = \sqrt{[a_x(t)]^2 + [a_z(t)]^2} \quad (19)$$

a_x ve a_z denklemde yerlerine konulduklarında;

$$a(t) = \sqrt{\left[\frac{[T(t) - D(t)] \cos[\theta(t)]}{m}\right]^2 + \left[\frac{[T(t) - D(t)] \sin[\theta(t)] - G}{m}\right]^2} \quad (20)$$

elde edilir.

Hız Denklemleri

Bir önceki başlık altında ivme denklemlerini elde etmek için dinamik denklemler kullanıldı. X ekseninde hız denklemini elde etmek için ise denklem (10) kullanılabilir. Böylece:

$$m\dot{v}_x = T(t) \cos[\theta(t)] - D(t) \cos[\theta(t)] \quad (10)$$

\dot{v}_x İfadesi yalnız bırakılıp, 0-t zaman aralığında, zamana göre entegrasyonu hesaplanarak;

$$\int_0^t \dot{v}_x dt = v_x(t) = \int_0^t \frac{T(t) \cos[\theta(t)] - D(t) \cos[\theta(t)]}{m} dt \quad (21)$$

X ekseninde, zamana bağlı hız denklemi (21) elde edilir. Benzer şekilde Z ekseninde hız denklemini elde etmek için denklem (15) kullanılır:

$$m\dot{v}_z = -T(t) \sin[\theta(t)] + D(t) \sin[\theta(t)] + mg \quad (15)$$

\dot{v}_z İfadesi yalnız bırakılıp, 0-t zaman aralığında, zamana göre entegrasyonu hesaplanarak;

$$\int_0^t \dot{v}_z dt = v_z(t) = \int_0^t \left(\frac{-T(t) \sin[\theta(t)] + D(t) \sin[\theta(t)]}{m} + g \right) dt \quad (22)$$

Z ekseninde, zamana bağlı hız denklemi (22) elde edilir. Zamana bağlı toplam hız denklemi için ise denklem (20)' nin 0-t zaman aralığında, zamana göre entegrasyonu alınır;

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t \left(\sqrt{\left[\frac{[T(t) - D(t)] \cos[\theta(t)]}{m}\right]^2 + \left[\frac{[-T(t) + D(t)] \sin[\theta(t)] + G}{m}\right]^2} \right) dt \quad (23)$$

Konum Denklemleri

Hız fonksiyonunun, “0” ile herhangi bir “t” zaman aralığında, zamana göre entegrasyonu 0-t zaman aralığındaki yer değiştirmeyi verir [3]. Böylece X ekseninde yer değiştirme denklemini elde etmek için denklem (21) kullanılabilir;

$$v_x(t) = \int_0^t \frac{T(t) \cos[\theta(t)] - D(t) \cos[\theta(t)]}{m} dt \quad (21)$$

Eşitlik (21)’ in, 0-t aralığında, zamana göre integrali alınır;

$$\Delta s_x(t) = \int_0^t v_x(t) = \int_0^t \left(\int_0^t \frac{T(t) \cos[\theta(t)] - D(t) \cos[\theta(t)]}{m} dt \right) dt \quad (24)$$

X ekseninde yer değiştirme denklemi (24) elde edilir. Z ekseninde yer değiştirme denklemi için denklem (22) kullanılabilir.

$$v_z(t) = \int_0^t \left(\frac{-T(t) \sin[\theta(t)] + D(t) \sin[\theta(t)]}{m} + g \right) dt \quad (22)$$

Eşitlik (22)’ nin, 0-t aralığında, zamana göre integrali alınır;

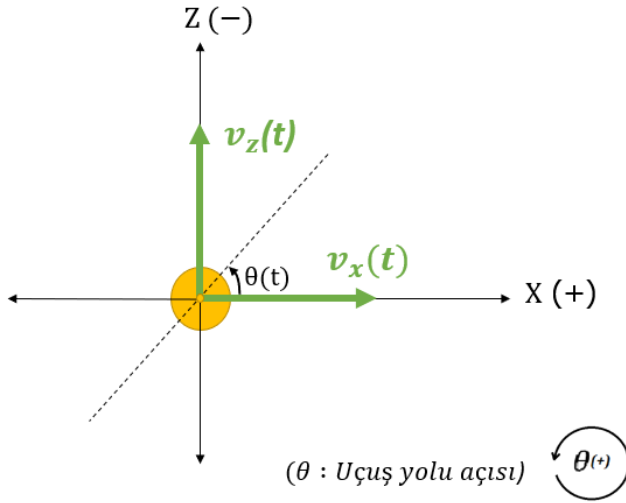
$$\Delta s_z(t) = \int_0^t v_z(t) dt = \int_0^t \left(\int_0^t \left(\frac{-T(t) \sin[\theta(t)] + D(t) \sin[\theta(t)]}{m} + g \right) dt \right) dt \quad (25)$$

Z ekseninde yer değiştirme denklemi (25) elde edilir. Toplam yer değiştirme denklemi için denklem (23)’ ün 0-t zaman aralığında, zamana göre integrali alınır;

$$\Delta s(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \left(\int_0^t \left(\sqrt{\left[\frac{[T(t) - D(t)] \cos[\theta(t)]}{m} \right]^2 + \left[\frac{[-T(t) + D(t)] \sin[\theta(t)] + G}{m} \right]^2} \right) dt \right) dt \quad (26)$$

Zamana bağlı toplam yer değiştirme denklemi (26) elde edilir.

Uçuş Yolu Açısı Hesabı Denklemi



Uçuş süresince hızın X ve Z bileşenleri zamana göre değiştiğinden, θ açısı zamanın bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir. θ Açısı trigonometrik olarak ifade edilirse;

$$\tan[\theta(t)] = - \frac{v_z(t)}{v_x(t)} \quad (27)$$

Denklem (27) elde edilir. $\theta(t)$ açısı için pozitif yön, saat yönü tersi olarak alınmıştır. Ayrıca eksen takımlarının işaretleri dikkate alındığında, yukarı yöndeki hızın değeri negatif olacağından eşitliğin önünde eksi işareti olmalıdır.

Son olarak $\theta(t)$ ifadesini yalnız bırakmak için eşitliğin her iki tarafının ters tanjantı alınırsa;

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left[- \frac{v_z(t)}{v_x(t)} \right] \quad (28)$$

Zamana bağlı uçuş yolu açısı denklemi (28) elde edilir. $v_z(t)$ ve $v_x(t)$ Denklemde yerine yazılırsa;

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left[- \frac{\int_0^t \left(\frac{-T(t) \sin[\theta(t)] + D(t) \sin[\theta(t)]}{m} + g \right) dt}{\int_0^t \frac{T(t) \cos[\theta(t)] - D(t) \cos[\theta(t)]}{m} dt} \right]$$

İfadesi elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left[\int_0^t \left(\tan \theta(t) - \frac{mg}{[T(t) - D(t)] \cos[\theta(t)]} \right) dt \right] \quad (27)$$

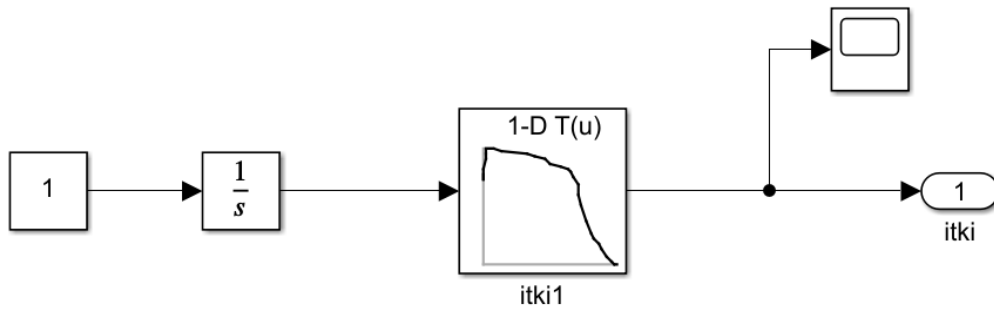
Zamana bağlı uçuş yolu açısı $\theta(t)$ denklemi (27) elde edilir.

Atmosfer Modeli

Hava yoğunluğu – deniz seviyesi yüksekliği grafiği (0 m – 10000 m)

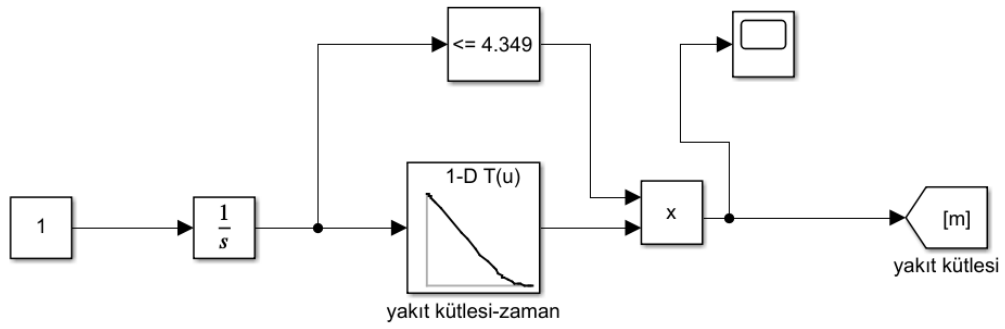
Ses hızı – deniz seviyesi yüksekliği grafiği (0 m – 10000 m)

Motor Modeli



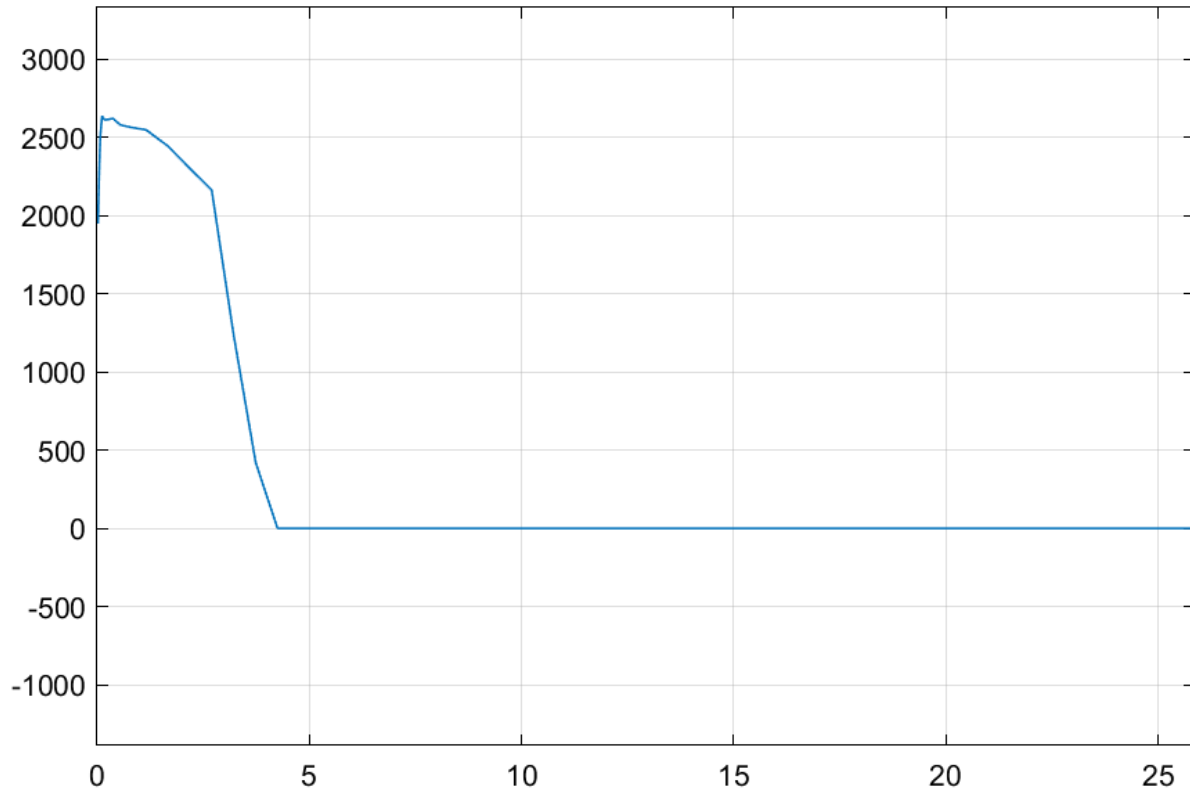
M2020 motoru için paylaşılan itki kuvveti verileri referans alınarak oluşturulmuştur.

Zamana bağı atılan kütle (harcanan yakıt kütlesi) modeli:

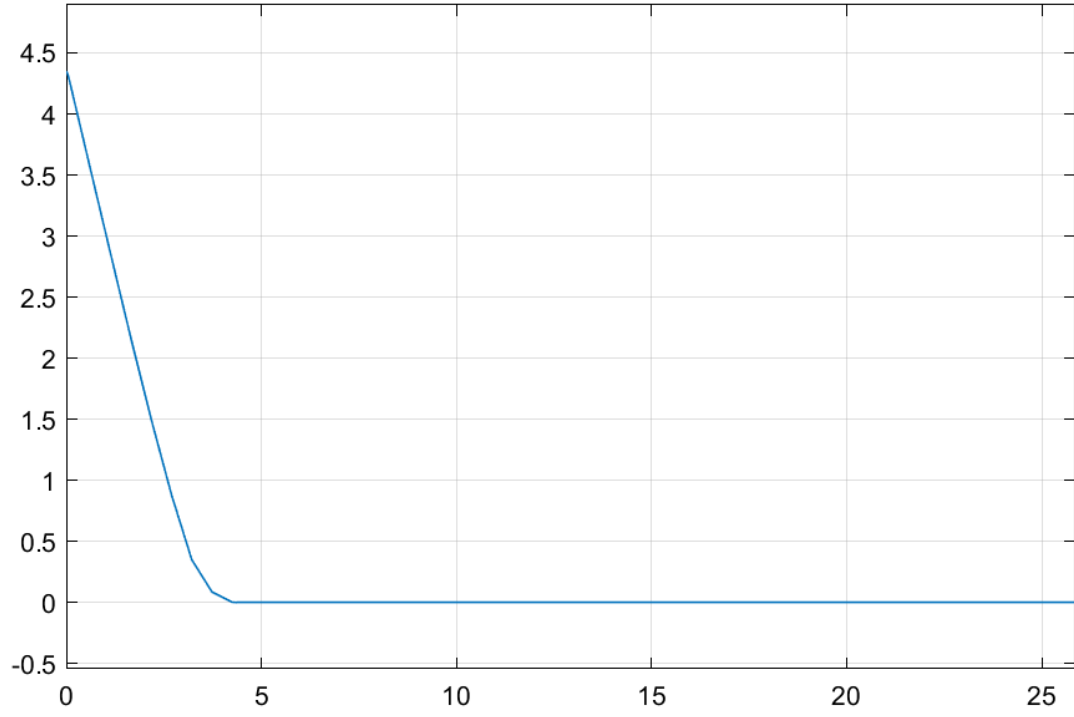


(Kütle değeri 4.349. saniyeden sonra sıfırlanıyor)

İtki kuvveti (Z) – zaman (X) grafiğı

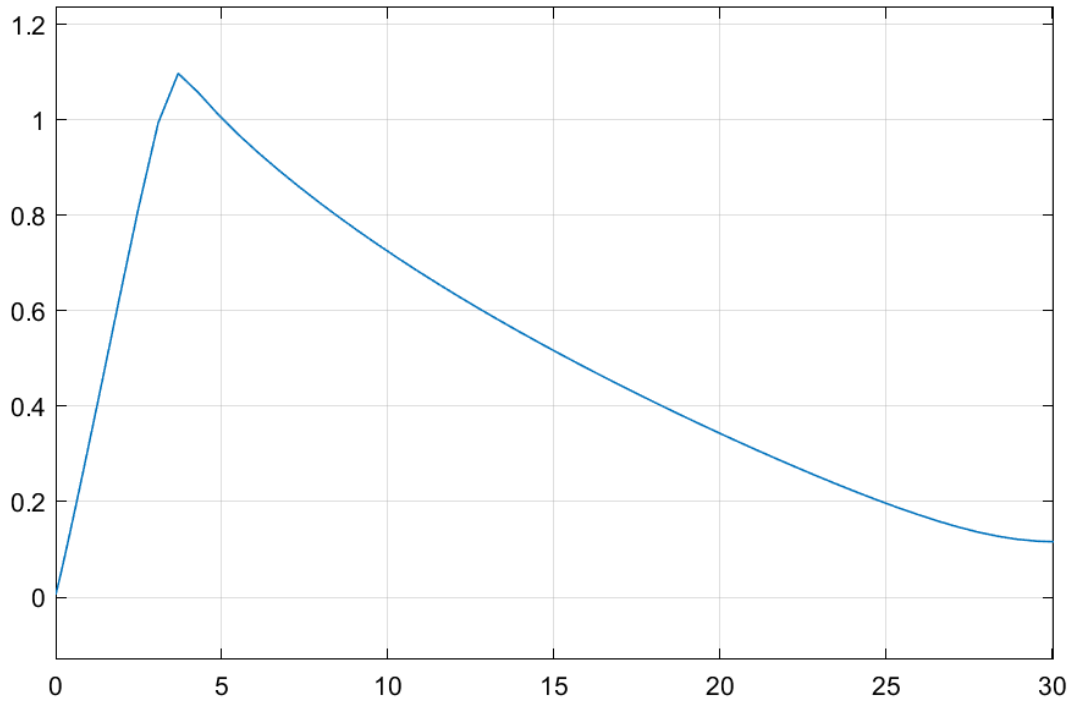


Atılan kütle (Z) – Zaman (X) grafiği



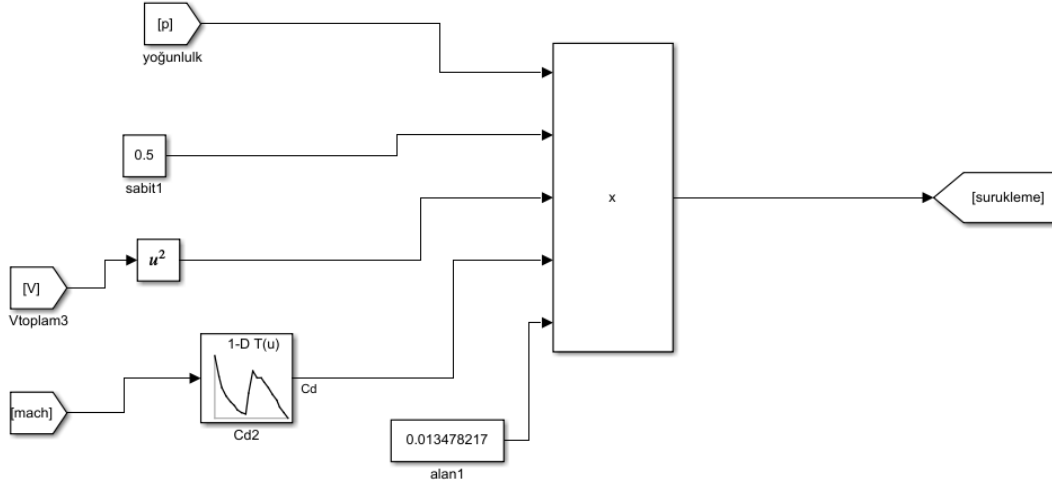
Aerodinamik Model

Mach Sayısı – Zaman Grafiği

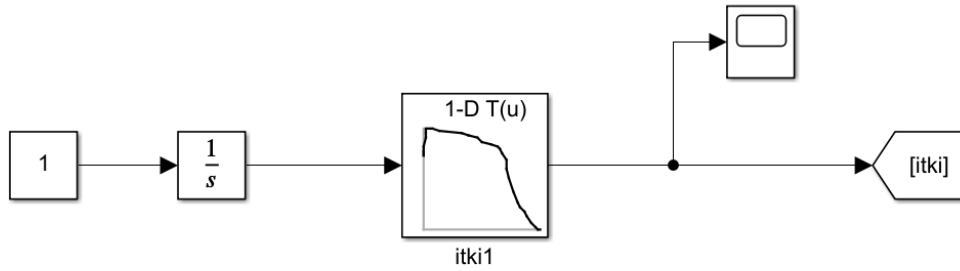


Benzetim Yapısı

Sürüklenme kuvveti

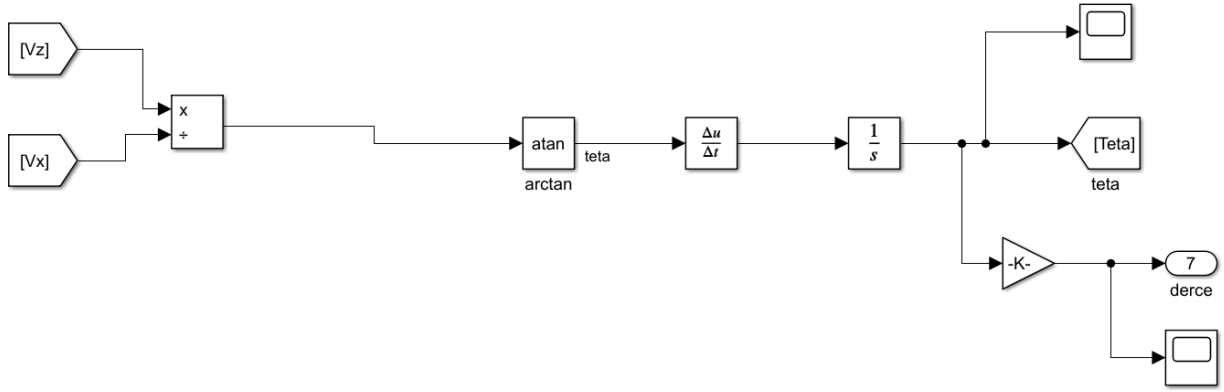


İtken kuvveti

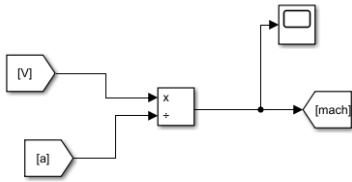


İtken verileri M2020 motoru için paylaşılan itken verilerinden alınmıştır.

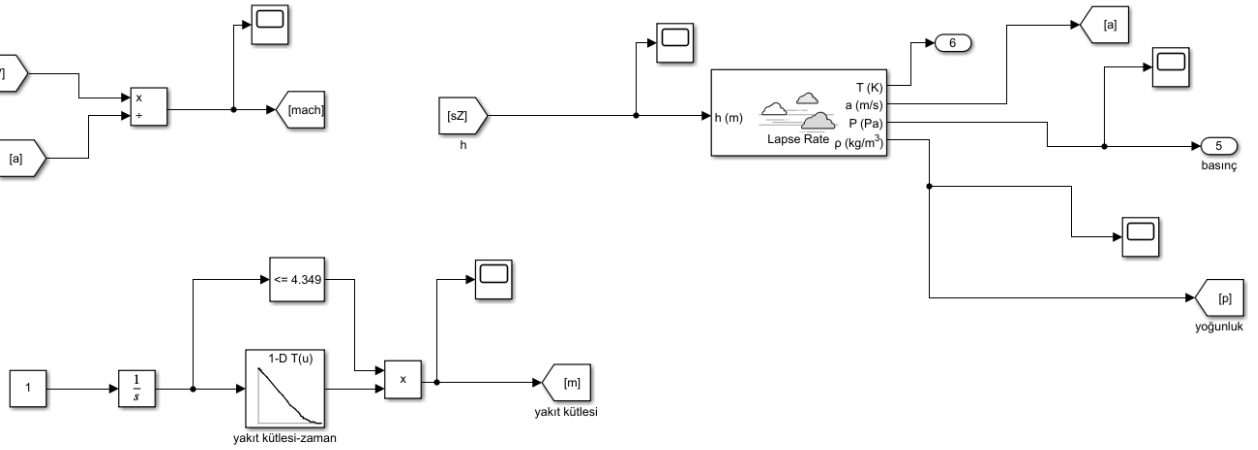
Uçuş yolu açısı



Mach



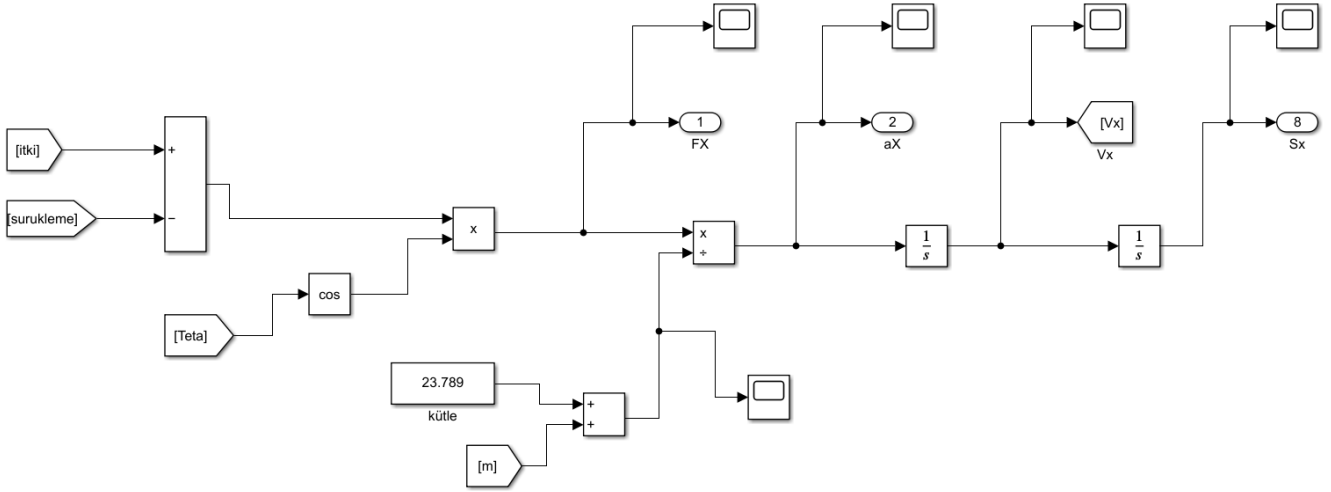
ISA Atmosfer modeli



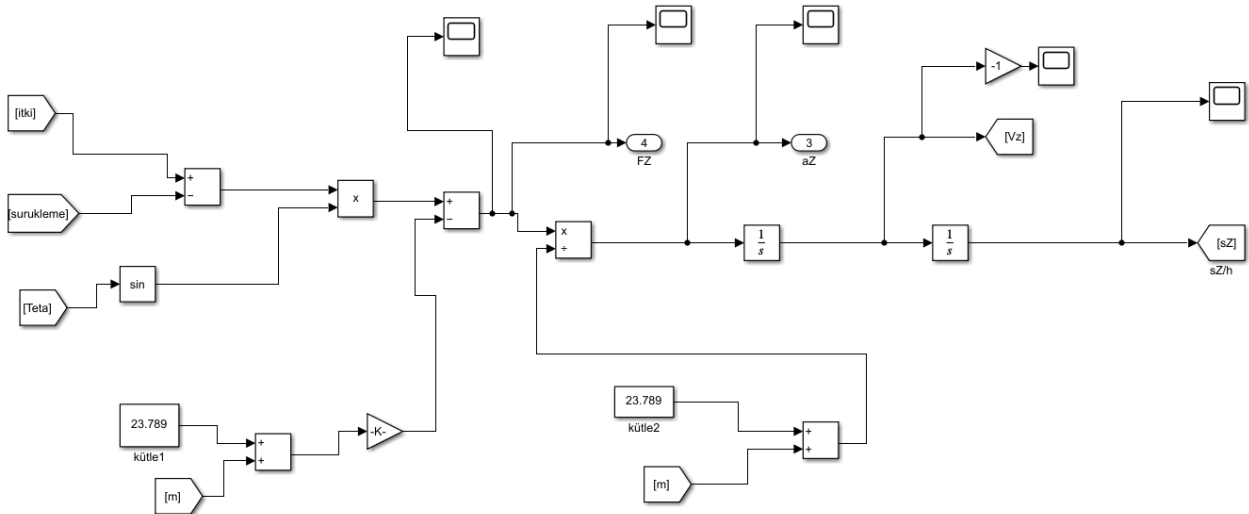
Atılan kütle miktarı

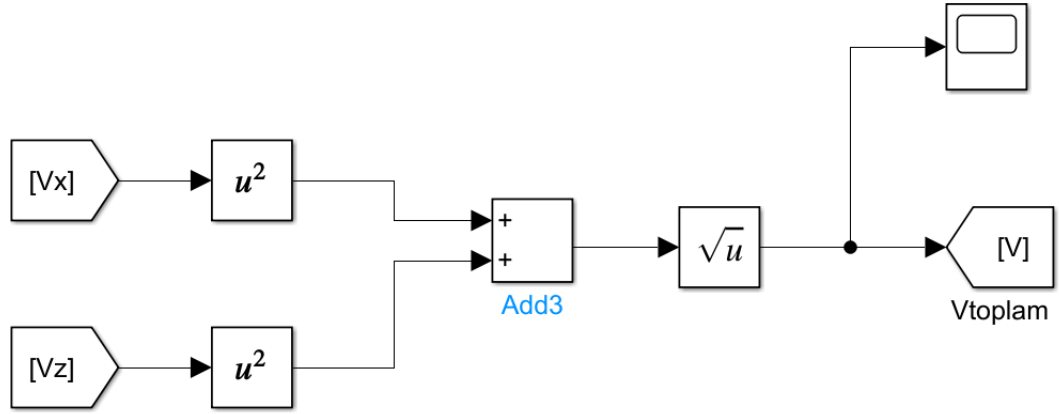
Atılan kütle verileri M2020 motoru için paylaşılan verilerden elde edilmiştir.

X eksenli kuvvet, ivme, hız, konum



Z eksenli kuvvet, ivme, hız, konum





Benzetimin Doğrulanması

	Değer
Pozisyon [m]	[0, 0, 0]
Hız (bileşke) [m/s]	2
Uçuş Yolu Açısı [derece]	85

	Değer
Başlangıç Kütlesi [kg]	25
Atış Noktası Rakımı [m]	980
Başlangıç Yakıt Kütlesi [kg]	4.659
Özgül İtki (Isp) [s]	209.5
İtki Profili Dosyası	“veri_itki_F_2022.xlsx”
Aerodinamik Veri Seti Dosyası	“veri_aero_Cd_2022.xlsx”
Roket Çapı [m]	0.14

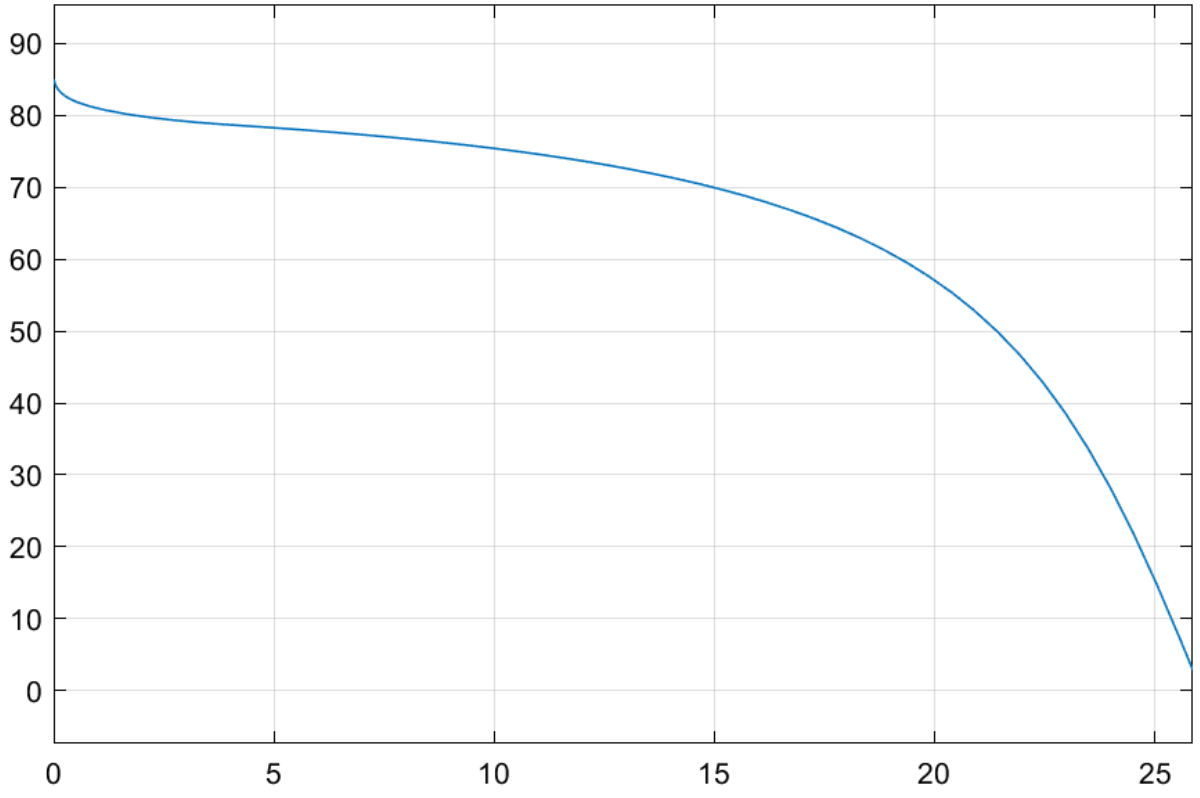
	Değer
Maksimum Mach Sayısı [-]	1.0979
Tepe Noktası Pozisyonu [m]	[1248, 0, 5671,]
Tepe Noktası Hızı (bileşke) [m/s]	37.756
Tepe Noktası Mach Sayısı [-]	0.1172
Tepe Noktası Zamanı [s]	30.046

Benzetim Sonuçları

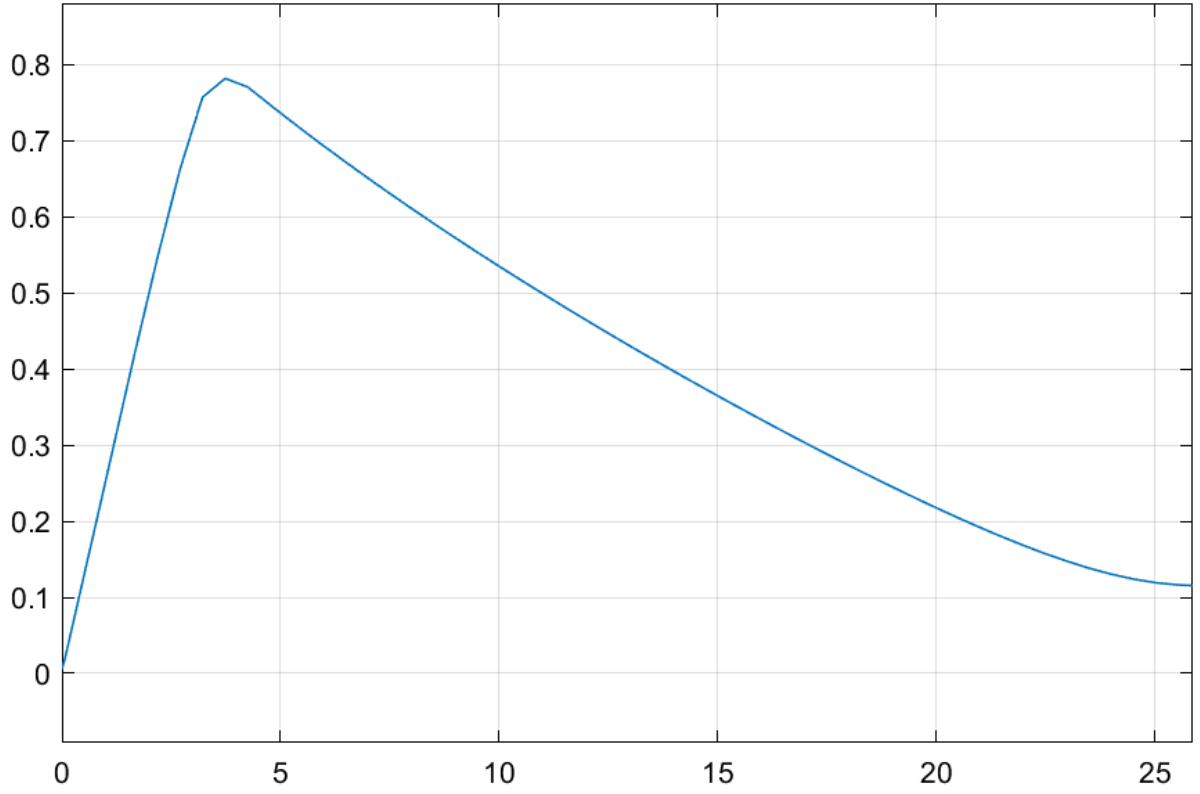
	Değer
Maksimum Mach Sayısı [-]	0.782
Tepe Noktası Pozisyonu [m]	[1002, 0, 4178,]
Tepe Noktası Hızı (bileşke) [m/s]	37.63
Tepe Noktası Mach Sayısı [-]	0.118
Tepe Noktası Zamanı [s]	25.861

	OpenRocket Değeri (a)	Benzetim Değeri (b)	Yüzdece Fark (b-a)/a*100
Maksimum Mach Sayısı [-]	0.83	0.782	-%5.8
Tepe Noktası Pozisyonu [m]	[252.61, 0, 3286,]	[1002, 0, 4178,]	[+%74, 0, +%21,]
Tepe Noktası Hızı (bileşke) [m/s]	6.8441	37.63	+%80
Tepe Noktası Mach Sayısı [-]	0.002419	0.118	+%97.95
Tepe Noktası Zamanı [s]	25.768	25.861	+%0.36

Uçuş yolu açısı (Derece) (Z) – zaman grafiği (X)

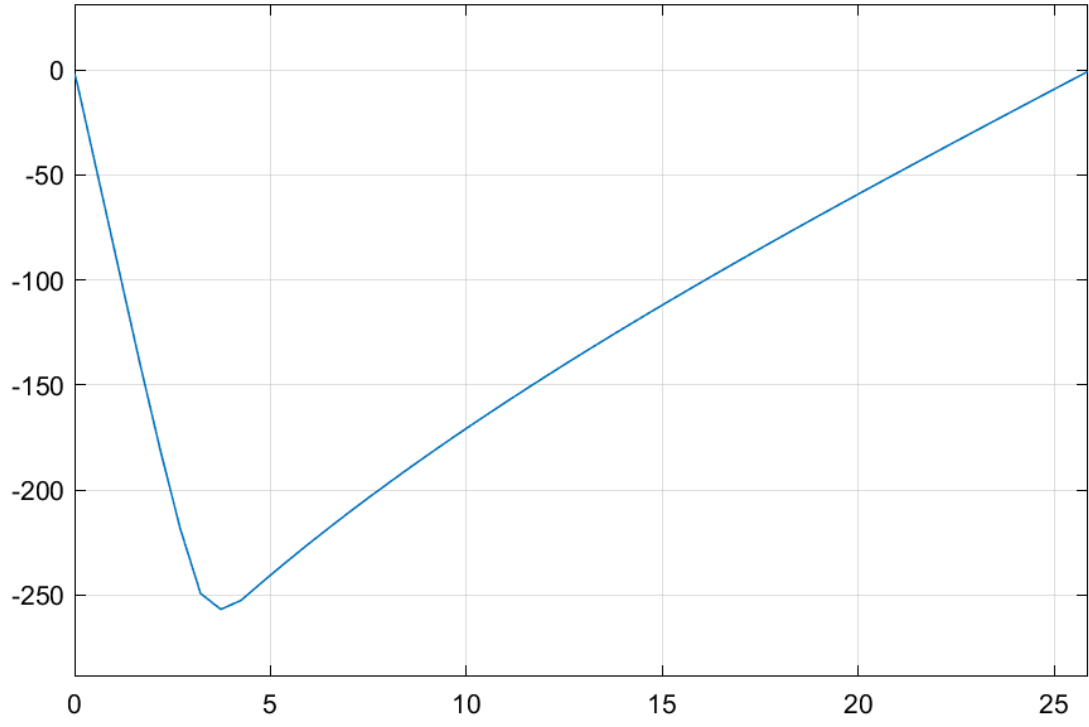


Mach – zaman grafiği

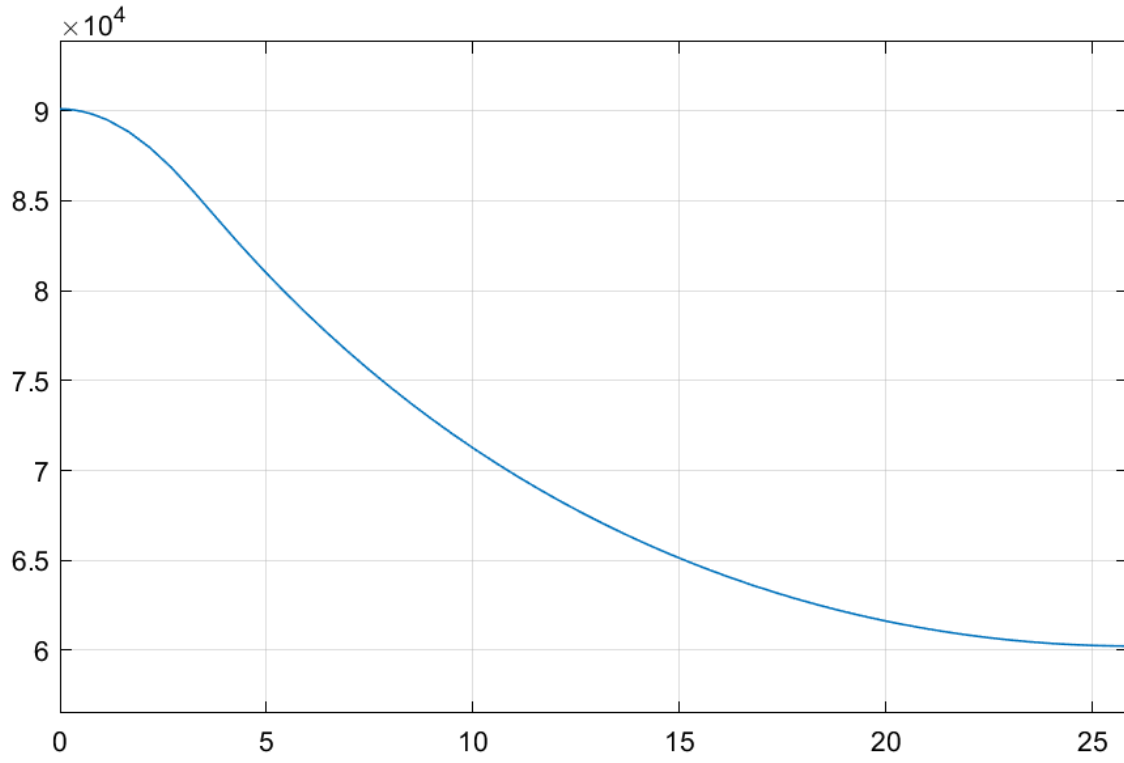


Maksimum mach değeri benzetim sonucunda 0.782 bulunmuştur.

Atmosfer Basıncı – zaman grafiği



Dikey tırmanma hızı (-Z eksenı hızı) – zaman grafiği



REFERANSLAR

- [1] J. Roshanian, Z.Keshavarz, Multidisciplinary design optimization applied to a sounding rocket, J. Indian Inst .of Sci. 86 (2006) 363–375.
- [2] Anderson, J. D., *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, McGraw-Hill, 2003.
- [3] R.C. Hibbeler, Engineering Mechanics: Dynamics, Pearson Prentice Hall , On dördüncü baskı, s. 21