



Roket Yarışması
Orta irtifa Kategorisi
Kritik Tasarım Raporu Aşaması

TESSERACT
Uçuş Benzetim Raporu



TEKNOFEST 2022

İçindekiler

I.	Kinematik ve Dinamik Denklemler	2
•	Dinamik Denklemler:	2
•	İvme Denklemleri:	2
•	Hız Denklemleri:	2
•	Konum Denklemleri:	2
•	Uçuş Yolu Açısı Denklemi:	2
II.	Atmosfer Modeli	3
	Hava Yoğunluğu – Deniz Seviyesi Yüksekliği Grafiği (0 m – 10000 m).....	4
	Ses Hızı – Deniz Seviyesi Yüksekliği Grafiği (0 m – 10000 m)	5
III.	Motor Modeli	5
	Zamana Bağlı Atılan Kütle (Harcanan Yakıt Kütlesi) Modeli	6
	İtke Kuvveti – Zaman Grafiği.....	7
	Atılan Kütle – Zaman Grafiği.....	7
IV.	Aerodinamik Model	8
	Mach Sayısı - Cd Grafiği	12
V.	Benzetim Yapısı	13
	Python Kodu	13
VI.	Benzetim Doğrulanması	16
	Çıktı Tablosu	16
	Yörünge Grafiği.....	16
VII.	Benzetim Sonuçları	17
	Çıktı ve Karşılaştırma Tablosu.....	17
	Yörünge Grafiği.....	18
	Uçuş Yolu Açısı – Zaman Grafiği	18
	Mach – Zaman Grafiği	19
	Dinamik Basınç – Zaman Grafiği	19
	Dikey Tırmanma Hızı (-Z) – Zaman.....	20
VIII.	Referanslar	21

I. Kinematik ve Dinamik Denklemler

Dinamik Denklemler:

$$F_{drag} = \frac{1}{2} \rho v^2 C_d S_{ref}$$

$$F_g = mg$$

$$F_{net,x} = (F_{itki} - F_{drag}) \cos \theta$$

$$F_{net,z} = (F_{itki} - F_{drag}) \sin \theta - F_g$$

İvme Denklemleri:

$$a_x = \frac{F_{net,x}}{m}$$

$$a_z = \frac{F_{net,z}}{m}$$

Hız Denklemleri:

$$v_x = v_{0,x} + a_x t$$

$$v_z = v_{0,z} + a_z t$$

Konum Denklemleri:

$$s_x = s_{0,x} + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$s_z = s_{0,z} + v_{0,z} t + \frac{1}{2} a_z t^2$$

Uçuş Yolu Açısı Denklemi:

$$\theta = \tan^{-1}(v_z/v_x)$$

II. Atmosfer Modeli

Benzetimde Dünya atmosferinin sıcaklık, basınç, yoğunluk, viskozite gibi özelliklerinin irtifaya bağlı olarak değişimini gösteren Uluslararası Standart Atmosfer Modeli (ISA) kullanılmıştır. Çok yüksek irtifalara çıkılmadığı için model sadece atmosferin troposfer katmanını (0 – 11km) için hazırlanmıştır.

ISA Modeli Deniz Seviyesi Başlangıç Koşulları	
Sıcaklık	$T_0 = 15^\circ\text{C}$ veya 288.15°K
Basınç	$P_0 = 101\,325\text{ N/m}^2, Pa$
Yoğunluk	$\rho_0 = 1.225\text{ kg/m}^3$
Ses Hızı	$a_0 = 340.294\text{ m/s}$

Tablo 1

Bu katmanda sıcaklık sabit bir şekilde her 1000 metrede 6.5°C azalmaktadır. Hava ideal gaz yasasına uygun olarak modellenmiştir. Denklemler oluşturulurken havanın ısı kapasitesi ($\gamma = 1.4$) ve spesifik gaz sabiti ($R = 287.0531$) alınmıştır.

$$T = T_0 - 0.0065 h$$

$$P = P_0 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5.2561}$$

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

$$a = \sqrt{\gamma RT}$$

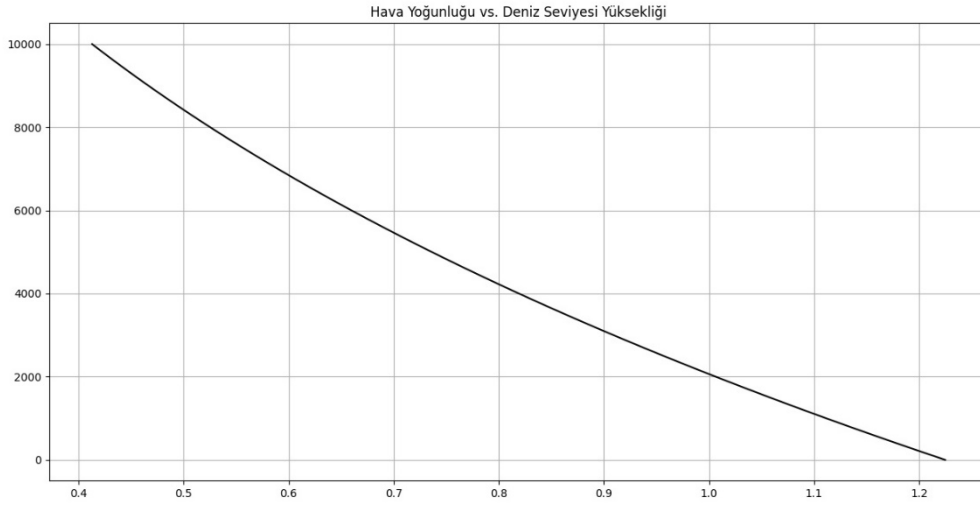
```

29  ##ATMOSFER MODELİ
30  g = 9.801 # yer çekimi
31  z0 = 980 # [m], Başlangıç İrtifası
32  P0 = 101325 # [N/m^2,Pa] Basınç
33  T0 = 15 # [celcius] Sıcaklık
34  K = 1.4 # Isı Kapasitesi
35  R = 287.0531 # J/kgK, Spesifik Gaz Sabiti
36  def isa(z):
37      global P, T
38      H = z+z0
39      if z+z0 < 11000: # troposfer
40          T = T0 - 0.0065 * H
41          P = P0 * ((T + 273.15) / (T0 + 273.15))**5.2561
42
43          rho = P/(R * (T + 273.15)) # [kg/m^3] Hava Yoğunluğu
44          c = np.sqrt(K*R*(273.15+T)) # [m/s] Ses Hızı
45          return rho, c, P, T+273.15

```

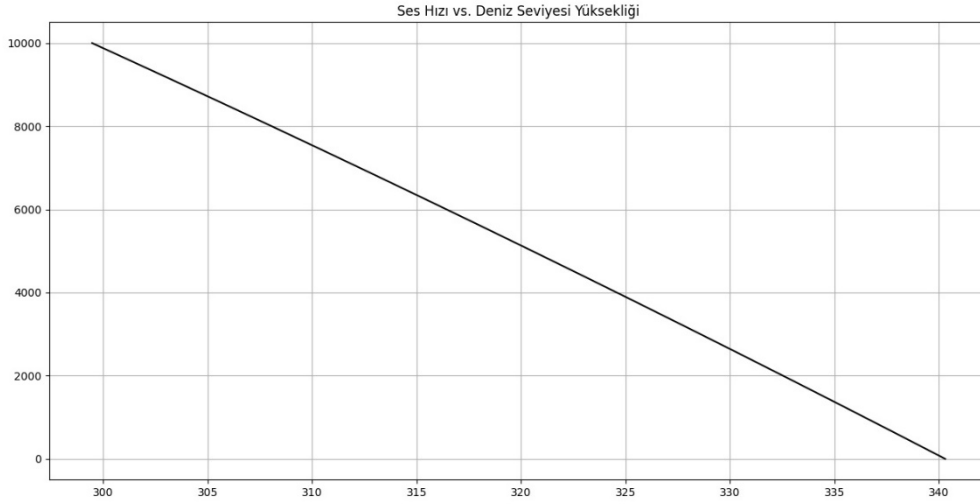
Figür 1

Hava Yoğunluğu – Deniz Seviyesi Yüksekliği Grafiği (0 m – 10000 m)



Figür 2

Ses Hızı – Deniz Seviyesi Yüksekliği Grafiği (0 m – 10000 m)



Figür 3

III. Motor Modeli

Motor modelinde, kullanılacak motorun (Cesaroni M2020) zamana bağlı itki verisi ve diğer teknik özellikleri kullanılarak zamana bağlı itki kuvveti ve atılan kütle hesaplaması yapılmıştır.

Cesaroni M2020 Teknik Özellikleri

Yakıt Kütlesi	$m_{yakıt} = 4.349kg$
Toplam Impuls	$I_T = 8429.4 Ns$
Yanma Süresi	$t_{yanma} = 4.2s$
Yer Çekimi İvmesi	$g = 9.801 m/s^2$

Tablo 2

Zamana Bağlı İtki Kuvveti Modeli

Benzetimde kullanılan zaman aralığına göre itki verisinin eksik olduğu kısımlar interpolasyon yöntemiyle hesaplanmıştır. İnterpolasyon Python yazılımında *InterpolatedUnivariateSpline* kodu ile yapılmıştır.

Zamana Bağlı Atılan Kütle (Harcanan Yakıt Kütle) Modeli

Motorun atılan kütle debisi (\dot{m}); spesifik impals (I_{sp}) ile yer çekimi ivmesiyle elde edilen çıkış hızı ve itki kuvveti (F_{itki}) verisi kullanılarak aşağıdaki formüller ile hesaplanmıştır.

$$I_{sp} = \frac{I_T}{m_{yakıt} g} = 197.75s$$

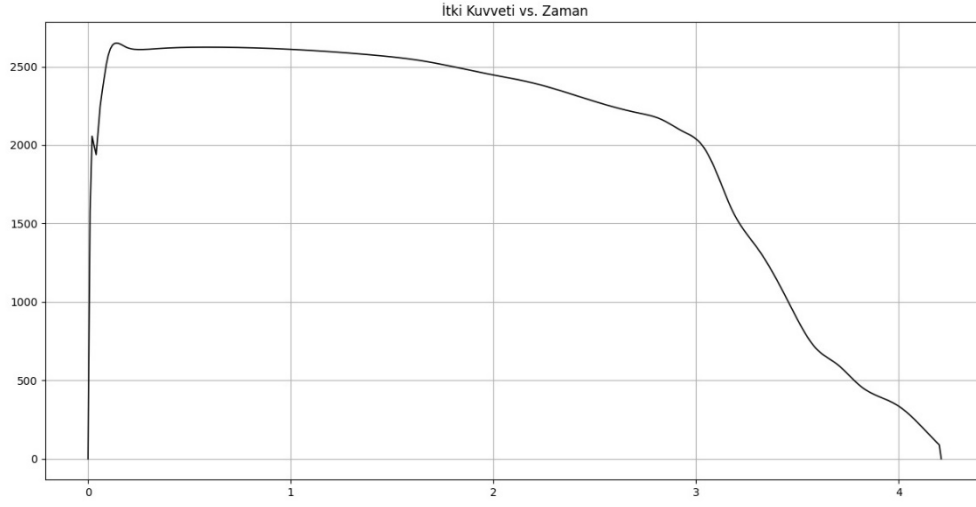
$$v_{çıkış} = I_{sp} g$$

$$\dot{m} = -\frac{F_{itki}}{v_{çıkış}}$$

```
49  ##MOTOR
50  engTime_engThrust = veriler.time1, veriler.thrust1
51  t_yanma = engTime[-1] # 4.2s
52  m_yakit = 4.349
53  Impulse = 8429.4
54  Isp = 8429.4/(m_yakit*g)
55  ve = Isp*g
56  def eng(t):
57      if t <= t_yanma:
58          itki = InterpolatedUnivariateSpline(engTime, engThrust)(t)
59          mdot = (itki*dt)/ve
60      else:
61          itki = 0
62          mdot = 0
63      return itki, mdot
```

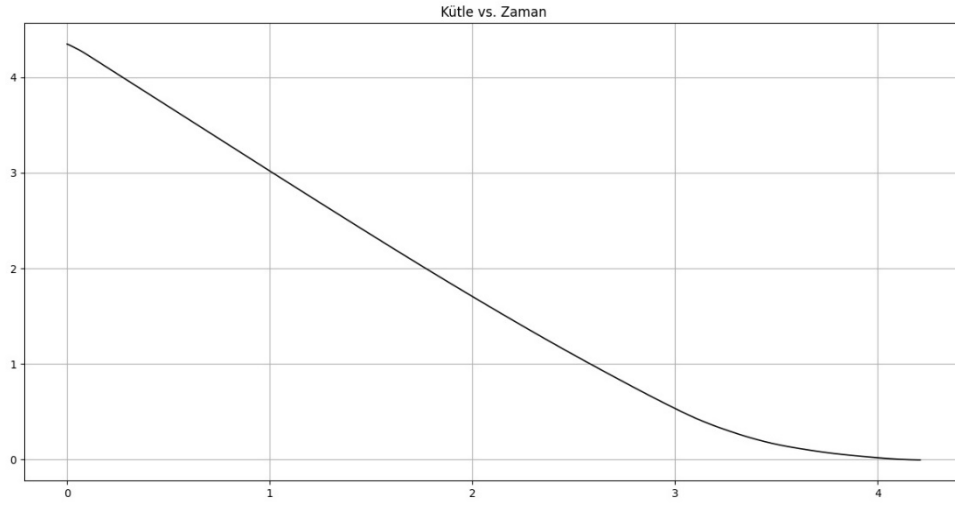
Figür 4

İtki Kuvveti – Zaman Grafiği



Figür 5

Atılan Kütle – Zaman Grafiği

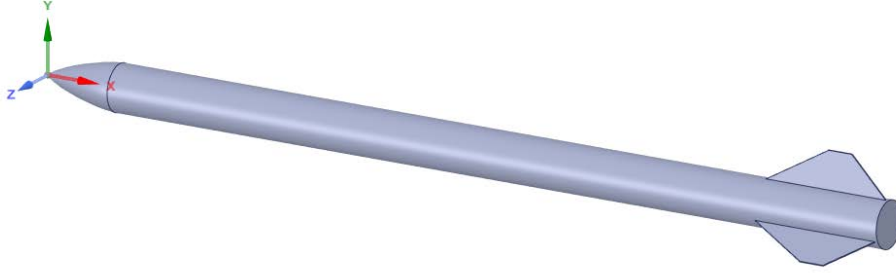


Figür 6

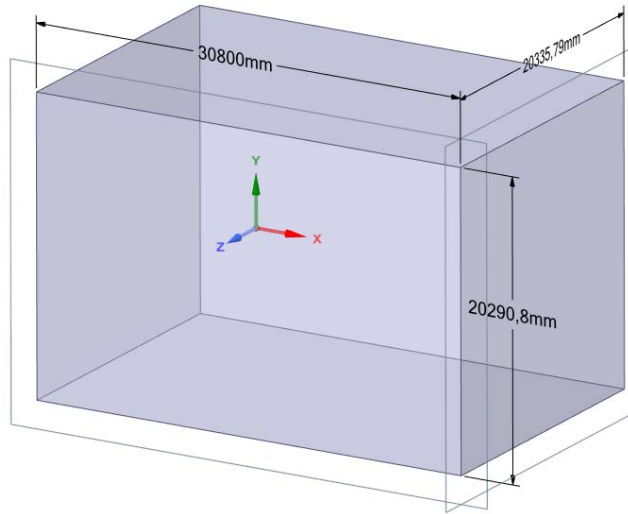
IV. Aerodinamik Model

Bu kısımda ANSYS 2020R2 yazılımında Fluent modülü kullanılarak CFD (Hesaplamalı Akışkanlar Yöntemi) yöntemiyle roketin 0 ve 3000 *metre* irtifalarında 0.1 – 0.8 *mach* hız aralığında etkisi altında kaldığı sürüklenme aerodinamik kuvveti incelenmiştir. Roketin hücum açısı veya taşıma kuvvetinin olmadığı varsayılmıştır. Analiz sonucunda benzetim modelinde kullanmak üzere farklı hız ve yükseklik girdileri ile sürüklenme katsayıları (C_D) elde edilmiştir.

Analizi bütün hız girdileri için tek bir irtifa değeriyle koşturmak yerine roketin başlangıç ve hedeflenen apogee noktasındaki sıcaklık, basınç, viskozite gibi değerler ile analiz yapılmıştır. Bu yöntemin daha gerçekçi sonuç vereceği düşünülmüştür. Analiz akışkanın (hava) sıkıştırılabilir (compressible) olduğu durumda ideal gaz yasasına uygun bir şekilde modellenmiştir. Bu yüzden roket için bu tarz analizlerde yaygın olarak kullanılan Pressure Far-Field akış hacmi oluşturulmuştur.



Figür 7: Roketin SpacClaim'e Aktarılması

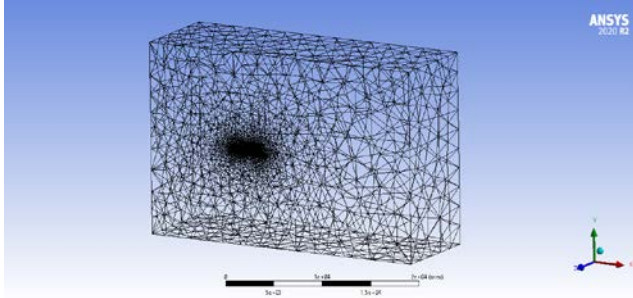


Figür 8: Akış Hacmi

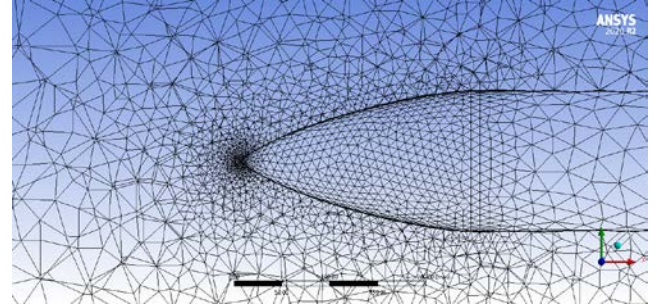
1	Çözüm Yöntemi	Pressure Based
2	Enerji Denklemi	Açık
3	Viskoz Modeli	SST k- ϵ Türbülans
4	Akışkanın Durumu	Hava / İdeal Gaz
5	Roketin İrtifası	1500m
6	Ortamin Sıcaklığı / Basıncı	272.03K / -26456Pa
7	Viskozite	$1.7105 * 10^{-5}$
8	Hız	0.8mach
9	Reynold Sayısı	$4.2 * 10^7$
10	Referans Alanı	$0.01674154725m^2$
11	Referans Uzunluk	2.8m
12	Sınır Koşulları	Pressure Far-Field (Bütün Yüzeyler)

Tablo 3

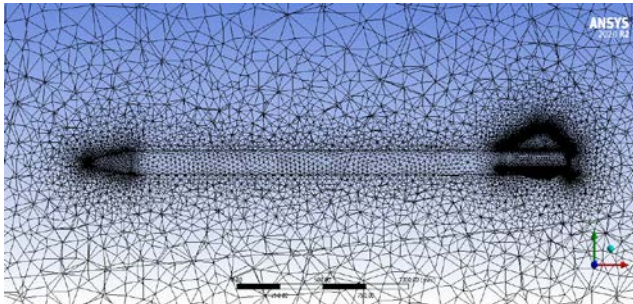
Mesh bilgisayarın performansına bağlı olarak en iyi olacak şekilde ayarlanmıştır. Seçilen $y^+ = 160$ değerine göre meshin ilk katmanının kalınlığı 0.034mm'dir. Toplam node sayısı 1219105, element sayısı 4140817'dir.



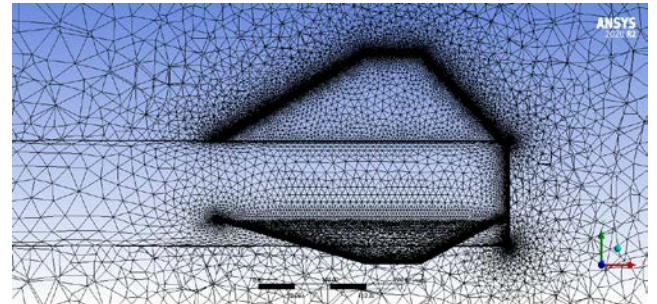
Figür 9



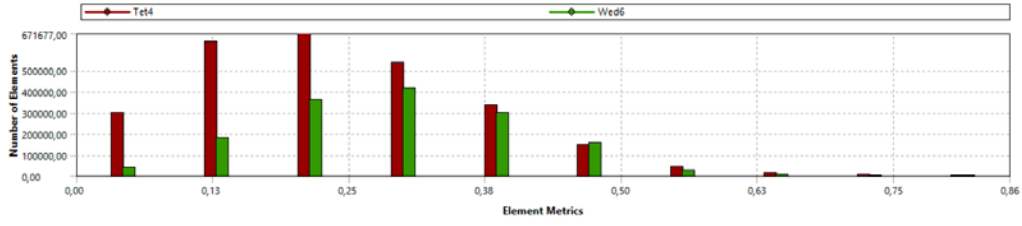
Figür 10



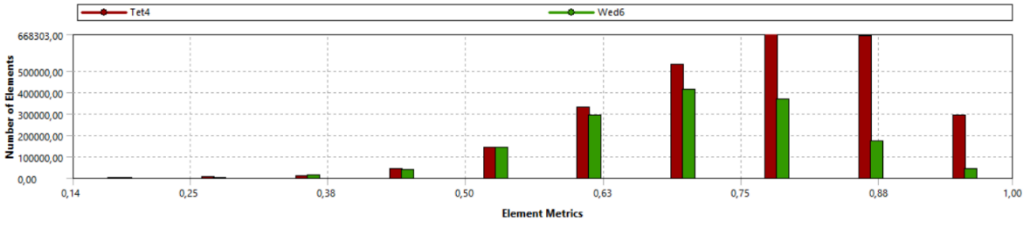
Figür 11



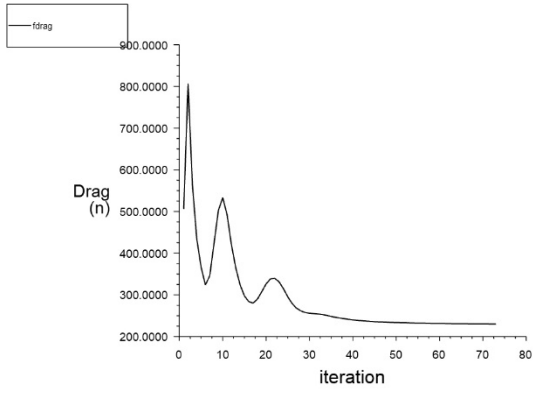
Figür 12



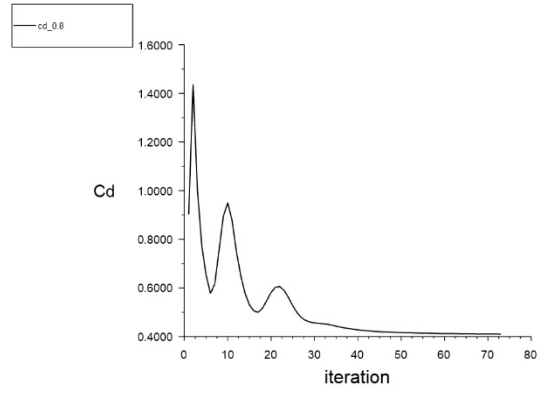
Figür 13: Max Skewness Değeri 0.85659'dur.



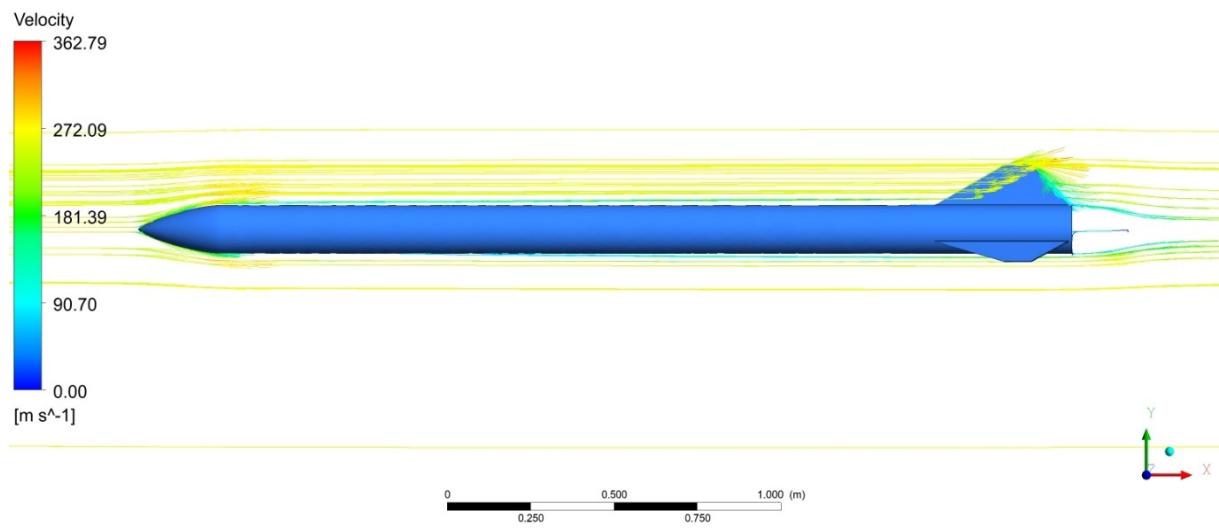
Figür 14: Min Orthogonal Kalite Değeri 0.14341'dir.



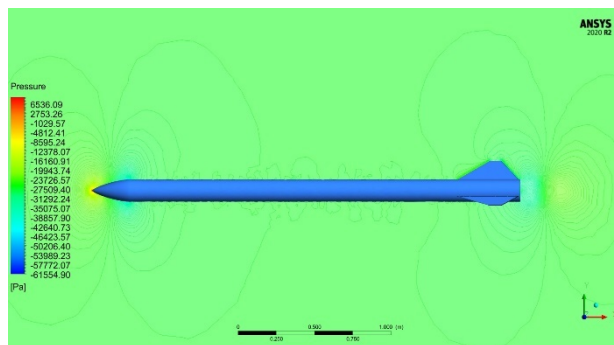
Figür 15: Sürüklenme Kuvveti



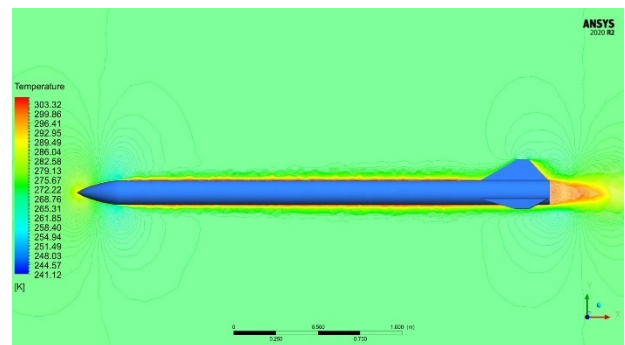
Figür 16: Sürüklenme Katsayısı



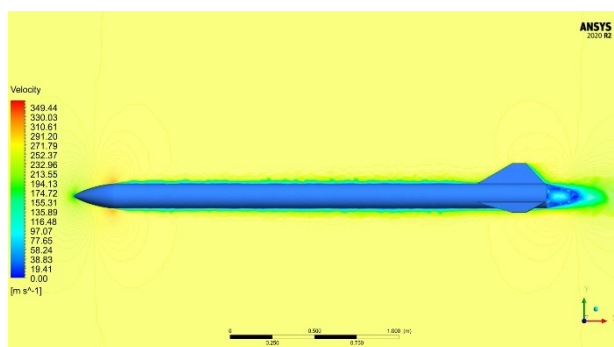
Figür 17



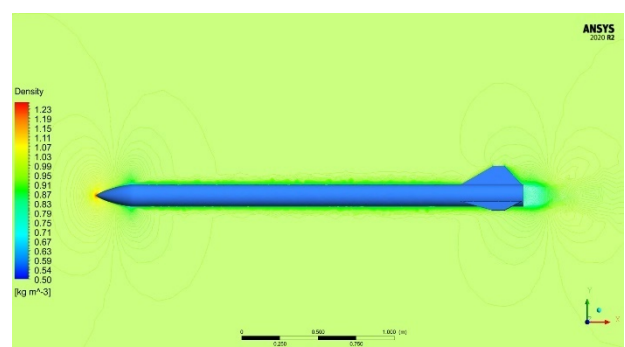
Figür 18



Figür 19



Figür 20

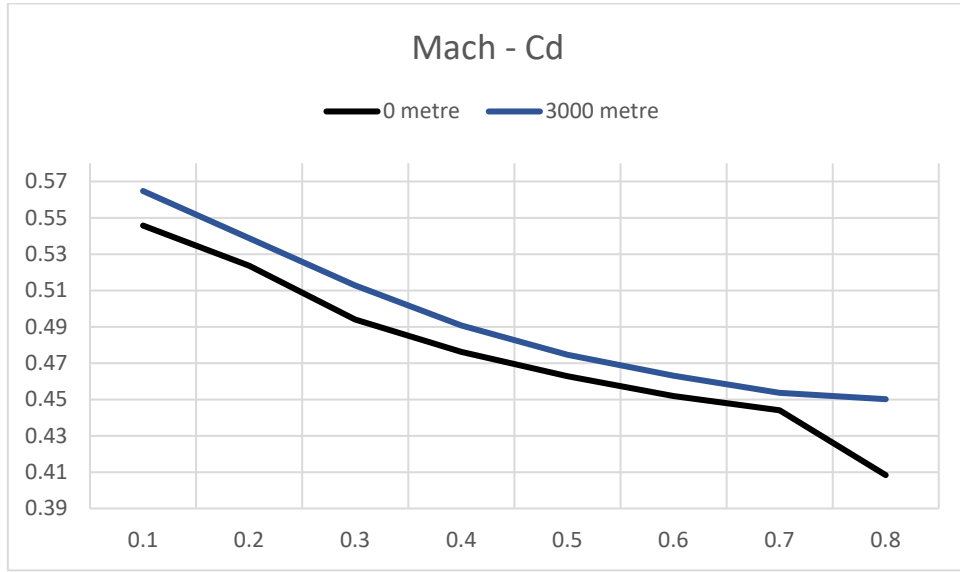


Figür 21

0 Metre		3000 Metre	
Mach	Cd	Mach	Cd
0.1	0.5457352	0.1	0.564758
0.2	0.5236117	0.2	0.538758
0.3	0.4940539	0.3	0.512758
0.4	0.4761792	0.4	0.49078
0.5	0.4627866	0.5	0.474587
0.6	0.4519083	0.6	0.463043
0.7	0.4440486	0.7	0.453693
0.8	0.4083638	0.8	0.450168

Tablo 4

Mach Sayısı - Cd Grafiği



Figür 22

Yükseklığe ve mach sayısı olmak üzere iki değişkene bağlı olan sürüklenme katsayısını (C_D) bulmak için benzetimde 2 boyutlu doğrusal interpolasyon yöntemi uygulanmıştır.

```

22  ##AERO
23  mach = np.arange(0.1,0.9,0.1)
24  Z = [0,3000]
25  cd_0 = [0.54573522, 0.52361169, 0.4940539, 0.47617924, 0.46278657, 0.45190832, 0.44404863, 0.40836384]
26  cd_3000 = [0.56475818, 0.53875818, 0.51275818, 0.49078026, 0.4745871, 0.46304276, 0.45369259, 0.45016841]
27  cd = interp2d(mach, Z, [cd_0, cd_3000], kind='linear', fill_value=cd_3000[0])

```

Figür 23

V. Benzetim Yapısı

Python Kodu

İki (2) serbestlik dereceli benzetim için ateşleme noktası eksen takımı esas alınarak roket için noktasal kütle varsayımı yapılmıştır. Bütün kuvvetlerin roketin kütle merkezine uygulandığı varsayılmıştır. Model Python Yazılımı üzerinden *While* döngüsü kullanılarak 0.01 zaman adımı ile roketin tepe noktasına kadar oluşturulmuştur.

Motor itki-zaman verisi gibi çok fazla satır kaplayan veriler “veriler” isimli bir python dosyasında oluşturulup *veriler.py* şeklinde import edilmiştir. Benzetimde grafik oluşturabilmek için *matplotlib.python*, sayısal işlemleri yapabilmek için *numpy* kütüphaneleri import edilmiştir.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import interp2d, InterpolatedUnivariateSpline
import veriler
```

Atmosfer, motor ve aerodinamik modeller döngünün dışarısında oluşturulmuştur. Atmosfer ve motor modelleri fonksiyon olarak tanımlanmıştır. İstenilen parametreler (itki, kütle debisi, ses hızı veya hava yoğunluğu) fonksiyonlardan döngüye çekilebilmektedir. Aerodinamik model ise irtifa ve mach sayısı girdilerine denk gelen sürüklenme katsayısını bulmak için oluşturulmuştur. Bunun için *scipy.interpolate* modülü kullanılarak 2 boyutlu interpolasyon yapılmıştır.

```
##BAŞLANGIÇ KOŞULLARI
m = 27.449
d = 0.146
S = np.pi * (d/2)**2
v = 2
theta = np.radians(85) # [radyan]

ax,az = 0,0
vx,vz = v*np.cos(theta),v*np.sin(theta)
Ma = 0
maxMa = 0
maxq = 0
x,z = 0,0
t = 0 # [s]
dt = 0.01 # simülasyon zaman adımı [s]

##AERO
mach = np.arange(0.1,0.9,0.1)
Z = [0,3000]
cd_0 = [0.54573522, 0.52361169, 0.4940539, 0.47617924, 0.46278657,
0.45190832, 0.44404863, 0.40836384]
cd_3000 = [0.56475818, 0.53875818, 0.51275818, 0.49078026,
```

```

0.4745871, 0.46304276, 0.45369259, 0.45016841]
cd = interp2d(mach, Z, [cd_0, cd_3000], kind='linear',
fill_value=cd_3000[0])

##ATMOSFER MODELİ
g = 9.801 # yer çekimi
z0 = 980 # [m], Başlangıç İrtifası
P0 = 101325 # [N/m^2,Pa] Basınç
T0 = 15 # [celcius] Sıcaklık
K = 1.4 # Isı Kapasitesi
R = 287.0531 # J/kgK, Spesifik Gaz Sabiti
def isa(z):
    global P, T
    H = z+z0
    if z+z0 < 11000: # troposfer
        T = T0 - 0.0065 * H
        P = P0 * ((T + 273.15) / (T0 + 273.15))**5.2561

    rho = P/(R * (T + 273.15)) # [kg/m^3] Hava Yoğunluğu
    c = np.sqrt(K*R*(273.15+T)) # [m/s] Ses Hızı
    return rho, c, P, T+273.15

##MOTOR
engTime,engThrust = veriler.time1, veriler.thrust1
t_yanma = engTime[-1] # 4.2s
m_yakit = 4.349
Impulse = 8429.4
Isp = 8429.4/(m_yakit*g)
ve = Isp*g
def eng(t):
    if t <= t_yanma:
        itki = InterpolatedUnivariateSpline(engTime, engThrust)(t)
        mdot = (itki*dt)/ve
    else:
        itki = 0
        mdot = 0
    return itki, mdot

##Listeler
xout = []
zout = []
tout = []
mout = []
Tout = []
Maout = []
thetaout = []
qout = []
rhoout = []
cout = []
vout = []
vzout = []

```

Döngü içerisinde kinematik kısım; ivmenin integre edilmesiyle hız, hızın integre edilmesiyle konum verileri elde ederek oluşturulmuştur. Dinamik kısım ise roket e etki eden itki, sürüklenme ve yer çekimi kuvvetleri ile elde edilmiş, x ve z-eksenlerindeki net kuvvetler bulunmuştur.


```

while True:
    ##KÜTLE
    mdot = eng(t)[1]
    m = m - mdot
    ##YER ÇEKİMİ KUVVETİ
    fg = m*g

    ##İTKİ-KÜTLE MODELİ
    itki = eng(t)[0]

    ##AERODİNAMİK MODÜL
    rho = isa(z)[0]

    q = 0.5 * rho * v**2
    drag = q * cd(Ma,z) * S

    ##NET KUVVET
    fx, fz = (itki-drag) * np.cos(theta), (itki-drag) * np.sin(theta) - m*g

    ##KİNEMATİK MODÜL
    #ivme
    ax,az = (fx/m, fz/m)
    a = np.hypot(ax,az)
    #hiz
    vx, vz = (vx + ax*dt, vz + az*dt)
    v = np.hypot(vx,vz)
    c = isa(z)[1]
    Ma = v/c
    #konum
    x,z = x + vx * dt + 0.5 * ax * dt**2, z + vz * dt + 0.5 * az * dt**2
    ##AÇI
    aci = np.degrees(np.arctan(vz/vx))
    thetaout.append(aci)

    if Ma >= maxMa:
        maxMa = Ma
        zMa = z    ## Maksimum mach yüksekliği
    if q >= maxq:
        maxq = q
        zq = z    ## Maksimum dinamik basınç yüksekliği

    t += dt

    xout.append(x), zout.append(z), tout.append(t)
    mout.append(m), Tout.append(itki)
    Maout.append(Ma), vout.append(v), vzout.append(vz)
    qout.append(q), rhoout.append(rho), cout.append(c)

    if vz<0:
        break

```

Döngü *if* komutu ile z- eksenindeki hızın negatif olduğu durumda sonlanmaktadır. Bu nokta roketin tepe noktasına denk gelmektedir.

VI. Benzetim Doğrulanması

```
6  ##BAŞLANGIÇ KOŞULLARI
7  m = 25 # [m], Roket Kütlesi
8  d = 0.14 # [m], Roket Çapı
9  z0 = 980 # [m], Atış Noktası Rakımı
10 theta = np.radians(85) # [radyan], Fırlatma Açısı
11 v = 2 # [m/s] Başlangıç Bileşke Hız
```

Figür 24

```
66  ##"veri_itki_F_2022.xlsx"
67  time2, thrust2 = [...], [...]
914  ##"veri_aero_Cd_2022.xlsx"
915  cd = np.array([(....), (....), (....), (....)])
```

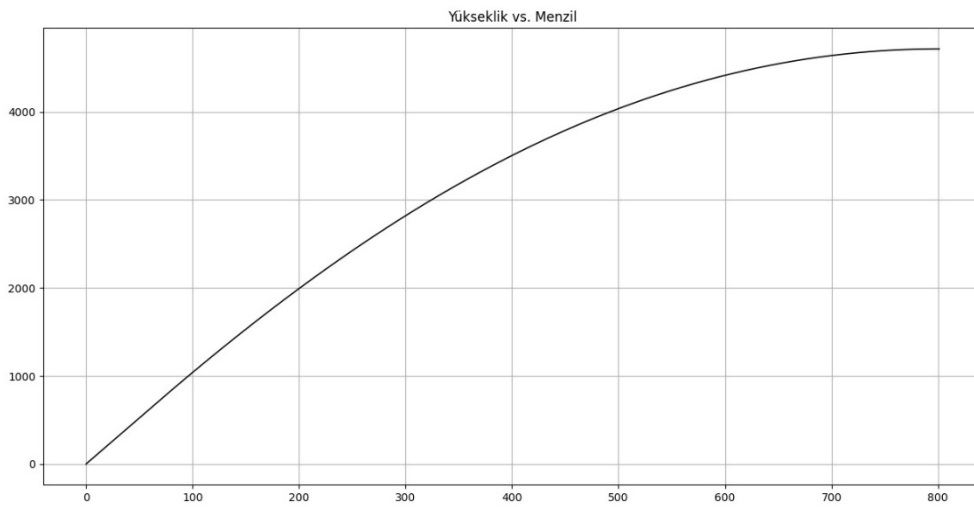
Figür 25

Çıktı Tablosu

	Değer
Maksimum Mach Sayısı [-]	1.09
Tepe Noktası Pozisyonu [m]	[801.22, 0, 4715.11]
Tepe Noktası Hızı (Bileşke) [m/s]	25.81
Tepe Noktası Mach Sayısı [-]	0.08
Tepe Noktası Zamanı [s]	30.09

Tablo 5

Yörünge Grafiği



Figür 26

VII. Benzetim Sonuçları

	Değer
Pozisyon [m]	[0,0,0]
Hız (bileşke) [m/s]	2
Uçuş Yolu Açısı [derece]	85
Başlangıç Kütlesi [kg]	27.449
Atış Noktası Rakımı [m]	980

Tablo 6: Başlangıç Koşul Değerleri

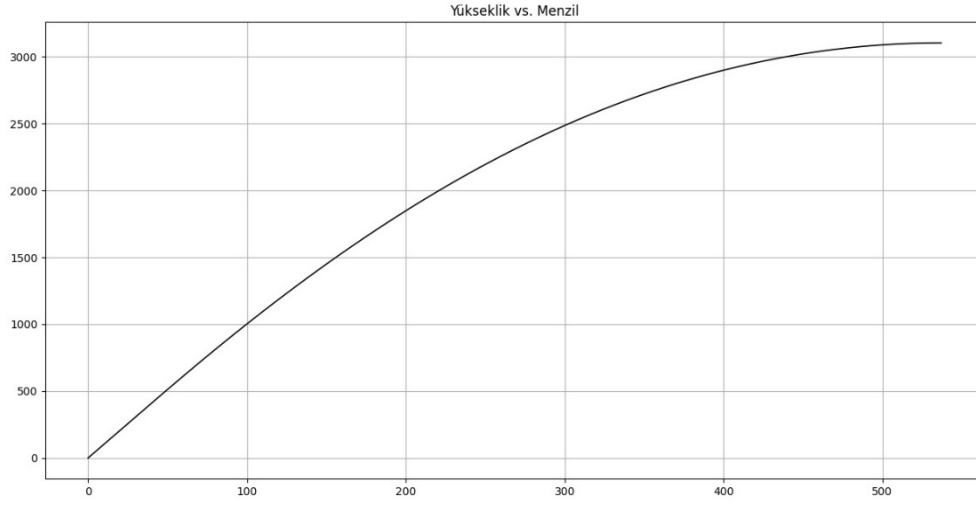
Çıktı ve Karşılaştırma Tablosu

	OpenRocket Değeri	Benzetim Değeri	Yüzdece Fark (%)
Maksimum Mach Sayısı [-]	0.8	0.81	1.25
Tepe Noktası Pozisyonu [m]	[213,0,3040]	[537.1, 0, 3103.15]	[152,0,2.07]
Tepe Noktası Hızı (bileşke) [m/s]	8.4	21.33	153.9
Tepe Noktası Mach Sayısı [-]	0.01	0.07	600
Tepe Noktası Zamanı [s]	24.88	24.87	0.04

Tablo 7

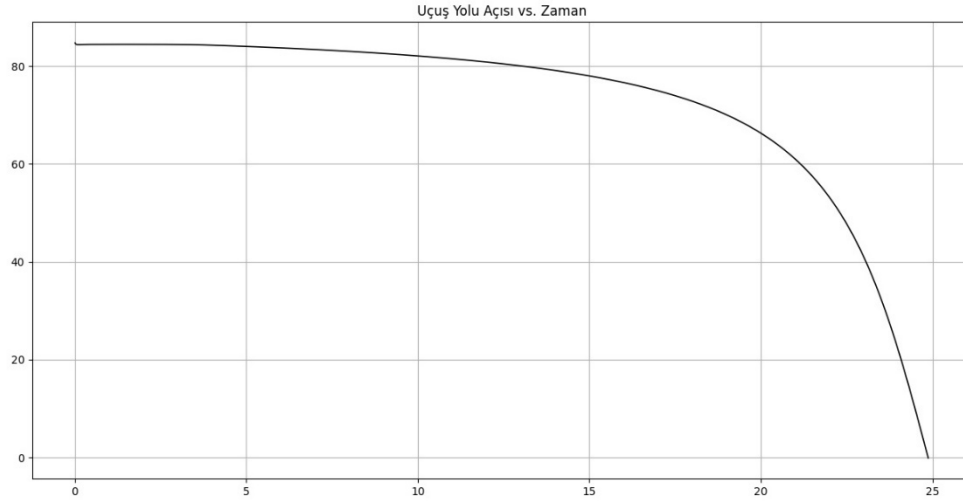
Roketin x-ekseninde aldığı yolda ve tepe noktasındaki bileşke hızında hata oranları yüksek çıkmıştır. Bu benzetimde hücum açısı sıfır kabul edilmiş herhangi bir rüzgar modeli varsayımı yapılmamıştır. Bu yüzden roketin hızı x-ekseninde OpenRocket verisine göre yüksek çıkmaktadır. Ayrıca OpenRocket'in altı (6) serbestlik dereceli bir çözüm yapması da hata payının oluşmasını sağlamaktadır. Ancak tepe noktasındaki irtifa, zaman bilgilerini elde etmede oluşturulmuş model iyi bir iş çıkarmaktadır.

Yörünge Grafiği



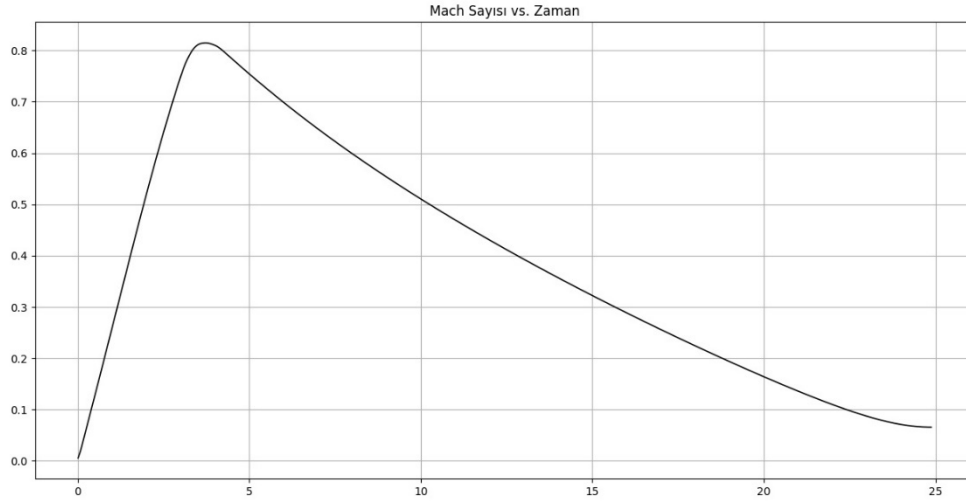
Figür 27

Uçuş Yolu Açısı – Zaman Grafiği



Figür 28

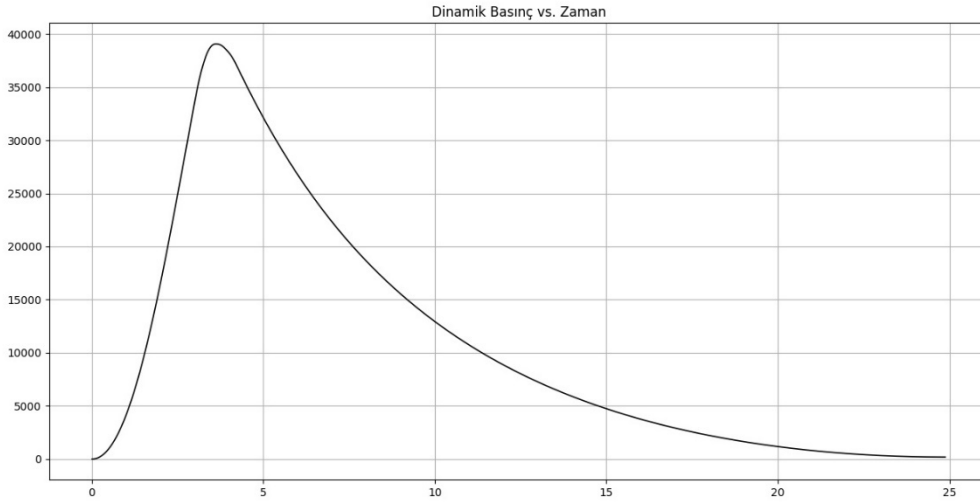
Mach – Zaman Grafiği



Figür 29

Roketin maksimum mach sayısına ulaştığı anda ki irtifası 579.5'dir.

Dinamik Basınç – Zaman Grafiği



Figür 30

Maksimum dinamik basınç yüksekliği 555 metredir.

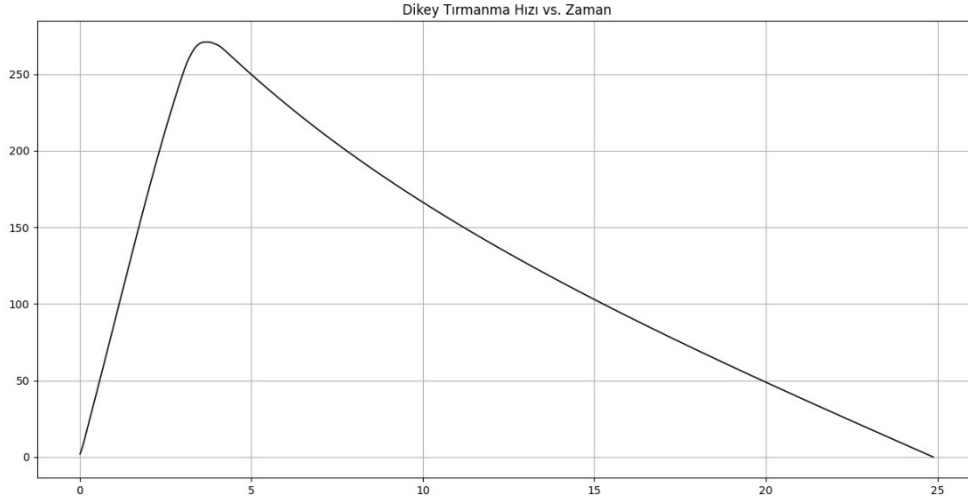
Dinamik basınç, q , matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir:

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2$$

ρ yerel hava yoğunluğunu ve v aracın hızını temsil etmektedir. Fırlatmadan sonra roketin hızı ve irtifası artmaya başlar ancak artan irtifayla birlikte hava yoğunluğu azalır. Hızın dinamik basınç üzerindeki etkisi hava yoğunluğuna göre daha fazladır ve bir noktadan sonra roket maksimum dinamik basınca ($maks q$) ulaşır. Bu değer roketin yapısal tasarımını etkileyen bir faktördür. Çünkü hava içinde hareket halinde olan rokete etki eden aerodinamik kuvvetler, dinamik basınçla doğru orantılıdır.

Dikey Tırmanma Hızı (-Z) – Zaman

Not: Hız Değerleri anlaşılır olması açısından pozitif gösterilmiştir.



Figür 31

VIII. Referanslar

- [1] Tan Han Boon, “CFD Comparative Study of 3-D Compressible Flow Over Seamless and Canard Aerodynamic Flying Bodies”, 2016
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Equations_of_motion
- [3] <https://www.simscale.com/forum/t/what-is-y-yplus/82394>
- [4] <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/dynpress.html>
- [5] <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/specimp.html>
- [6] <https://www.thrustcurve.org/motors/Cesaroni/8429M2020-P/>
- [7] <https://www.numeric-gmbh.ch/posts/standard-atmosphere-calculations.html>
- [8] <https://www.cfd-online.com/Tools/yplus.php>
- [9] <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/ug/node238.htm#ke-params>
- [10] <https://openrocket.info/index.html>