

12

「すべて」「ある」の否定

p は x に関する条件とする

$\overline{\text{すべての } x \text{ について } p} \iff \text{ある } x \text{ について } \bar{p}$

$\overline{\text{ある } x \text{ について } p} \iff \text{すべての } x \text{ について } \bar{p}$

(ざっくり証明)

たとえば、自然数 x 1つ書かれたカードが3枚あるとする。

「すべてのカードに書かれた数は偶数である」の否定は？

$\{ \text{偶} \text{ 偶} \}$ すべてのカードは偶数

$\left. \begin{array}{l} \text{偶} \text{ 奇} \\ \text{奇} \text{ 奇} \\ \text{奇} \text{ 偶} \end{array} \right\}$ あるカードは奇数

「すべての x について p 」の言い換え

「ある x について \bar{p} 」の言い換え

「任意の x について p 」

「適当な x について \bar{p} 」

「どんな x についても p 」

「少なくとも1つの x について \bar{p} 」

「常に p 」

「 p となる x が存在する」

(例) 次の命題とその否定の真偽を調べよ。

(1) すべての実数 x について、 $x^2 \geq 0$ 真

否定: ある実数 x について、 $x^2 < 0$ 偽

(2) ある素数 n について、 n は偶数である。真

否定: すべての素数 n について、 n は奇数である。偽

(3) 任意の実数 x, y について、 $x^2 - 2xy + y^2 > 0$ 偽

否定: ある実数 x, y について $x^2 - 2xy + y^2 \leq 0$ 真

(4) $n^2 = 2n$ を満たす自然数 n が存在する。真

否定: すべての自然数 n について、 $n^2 \neq 2n$ である。偽