10

・2直線の関係

2直線 $y=m_1x+n_1 \cdots ①$, $y=m_2x+n_2 \cdots ②$ において
2直線①,②が平行 $\Longleftrightarrow$ $m_1=m_2$
2直線①,②が垂直 $\Longleftrightarrow$ $m_1m_2=-1$

点(x_1, y_1)を通り,直線 $ax+by+c=0$ に平行な直線
垂直な直線の方程式は
平行 $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$
垂直 $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

⇒ 覚えなくてよい

(⇒の証明)

2直線①,②が垂直のとき,それらを平行移動した2直線

$y=m_1x$　$y=m_2x$

も垂直である。

右の図のように $P(1, m_1)$, $Q(1, m_2)$ をとると

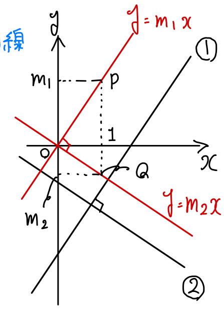
$\triangle OPQ$は直角三角形であるから,三平方の定理より

$OP^2+OQ^2=PQ^2$

よって

$(1^2+m_1^2)+(1^2+m_2^2)=(m_1-m_2)^2$

$\therefore\ m_1m_2=-1 \cdots ③$



(⇐の証明)

$m_1m_2=-1$ が成り立つとき,③が成り立つということなので

(⇒の証明)の逆を辿ることで,2直線①,②が垂直であるといえる。

(例1) 次の2直線は平行,垂直のいずれであるか。

(1) $y=2x+1$, $y=-\frac{1}{2}x+1$

垂直　← $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

(2) $x+2y-1=0$, $2x+4y+3=0$

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$\therefore$ 平行

(3) $x+3y+1=0$, $6x-2y-1=0$

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \\ y=3x-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 垂直 // ← $-\frac{1}{3}\cdot 3=-1$

(例2) 点$(2, 1)$を通り $3x+2y+1=0$ に

平行な直線,垂直な直線の方程式を求めよ

$3x+2y+1=0$ より

$y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

平行な直線の方程式は

$y-1=-\frac{3}{2}(x-2)$

$y=-\frac{3}{2}x+4$ //　← $3x+2y-8=0$ でも可

垂直な直線の方程式は

$y-1=\frac{2}{3}(x-2)$　← $-\frac{3}{2}\cdot m=-1$　$\therefore\ m=\frac{2}{3}$

$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$　← $2x-3y-1=0$ でも可