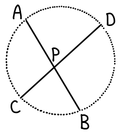
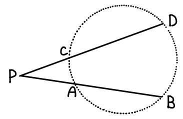
15

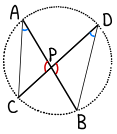
・方べきの定理の逆

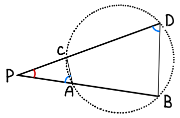
2つの線分ABとCD、またはABの延長とCDの延長が点Pで交わるとき、$PA\cdot PB=PC\cdot PD$ が成り立つならば4点A.B.C.Dは1つの円周上にある。





(証明)





$PA\cdot PB=PC\cdot PD$ より

$$PA:PD=PC:PB$$

また

$$\angle APC=\angle DPB$$

よって、2組の辺の比とその間の角が等しいから

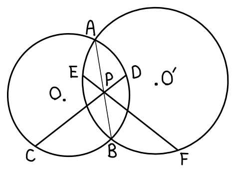
$$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$$

よって

$$\angle PAC=\angle PDB$$

ゆえに、4点A.B.C.Dは1つの円周上にある。□

(例) 2点A.Bで交わる2つの円O.O′がある。円Oの弦CDと円O′の弦EFの交点が、線分AB上の点Pで交わるとき、4点C.D.E.Fは1つの円周上にあることを証明せよ。



円Oにおいて、方べきの定理より

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

円O′において、方べきの定理より

$$PA\cdot PB=PE\cdot PF$$

よって、

$$PC\cdot PD=PE\cdot PF$$

ゆえに、方べきの定理の逆により、4点C.D.E.Fは1つの円周上にある。□