

21

対数関数を含む方程式

(例1) 次の方程式を解け。

$$(1) \log_2 x = 3$$

$$(2) \log_2 x + \log_2(3x+1) = 2\log_2(x+1)$$

$$(3) \log_3(x+1) = \log_9(5-x)$$

point

(真数) > 0, (底) > 0, (底) ≠ 1

底をそろえて、真数を比較

$$(1) \log_2 x = 3$$

真数は正であるから

$$x > 0 \quad \dots \text{①}$$

与えられた方程式より

$$\log_2 x = \log_2 2^3$$

$$\therefore x = 8 \quad (\text{これは } \textcircled{1} \text{ をみたす})$$

確認しなくてもよい

$$(2) \log_2 x + \log_2(3x+1) = 2\log_2(x+1)$$

真数は正であるから

$$x > 0, \quad 3x+1 > 0, \quad x+1 > 0$$

つまり

$$x > 0 \quad \dots \text{①}$$

与えられた方程式より

$$\log_2 x + \log_2(3x+1) = \log_2(x+1)^2$$

$$x(3x+1) = (x+1)^2$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(2x+1)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}, 1$$

①より

$$x = 1 \quad //$$

$$(3) \log_3(x+1) = \log_9(5-x)$$

真数は正であるから

$$x+1 > 0, \quad 5-x > 0$$

つまり

$$-1 < x < 5 \quad \dots \text{①}$$

与えられた方程式より

$$\log_3(x+1) = \frac{\log_3(5-x)}{\log_3 9}$$

$$\log_3(x+1)^2 = \log_3(5-x)$$

$$(x+1)^2 = 5-x$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -4, 1$$

①より

$$x = 1 \quad //$$

(例2) 次の方程式を解け。

$$(1) (\log_3 x)^2 - \log_3 x = 6 \quad (2) \log_2 4x^2 - \log_2 x = \log_2 \frac{1}{x}$$

point

(真数) > 0, (底) > 0, (底) ≠ 1

底をそろえて、 $\log_2 x = t$ とおきなさい

→ おきなさいの範囲に注意

$$(1) (\log_3 x)^2 - \log_3 x = 6$$

真数は正であるから

$$x > 0 \quad \dots \text{①}$$

$\log_3 x = t$ とおくと、 t はすべての実数をとり

与えられた方程式は

$$t^2 - t - 6 = 0$$

と表せる。

よって

$$(t+2)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -2, 3$$

つまり

$$\log_3 x = -2, 3$$

$$\therefore x = \frac{1}{9} \cdot 27 \quad (\text{これは } \textcircled{1} \text{ をみたす})$$

$$(2) \log_2 4x^2 - \log_2 x = \log_2 \frac{1}{x}$$

真数は正で、底は 1 でない正の数であるから

$$4x^2 > 0, \quad x \neq 1, \quad x > 0$$

つまり

$$0 < x < 1, \quad 1 < x \quad \dots \text{①}$$

与えられた方程式より

$$\log_2 4 + \log_2 x^2 - \frac{\log_2 x}{\log_2 x} = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{x}}$$

$$2 + 2\log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} = -\log_2 x$$

$$3\log_2 x + 2 - \frac{1}{\log_2 x} = 0$$

$$3(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 1 = 0 \quad + \log_2 x^2 \text{ としない}$$

$$(3\log_2 x + 1)(3\log_2 x - 1) = 0 \quad + \log_2 x \text{ を } 1 \text{ の固まりと見る}$$

$$\log_2 x = -1, \frac{1}{3}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, 2^{\frac{1}{3}} \quad (\text{これは } \textcircled{1} \text{ をみたす})$$

(補足) $\log_a f(x) = k$ のとき、真数条件は確認不要

なぜか？

$$f(x) = a^k > 0$$