

・相加相乗平均を利用した最小問題

(例1) $x > 0$ のとき、 $x + \frac{1}{x}$ の最小値を求めよ。

① $x > 0, \frac{1}{x} > 0$ であるから

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= 2 \quad \leftarrow \text{どんな } x \text{ を代入しても } x + \frac{1}{x} \text{ は } 2 \text{ より小さくならない}$$

よって、 $x + \frac{1}{x}$ の最小値は \Rightarrow 最小値が 2 であるとは限らない

2 //

すべての実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 1$

$x^2 + 1$ の値域は $x^2 + 1 \geq 1$

すべての実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 0$

$x^2 + 1$ の値域は $x^2 + 1 \geq 0$

○

○

○

×

同じ不等式でも、文脈によって正誤が変わる。

とりうる値の範囲 $\rightarrow x^2 + 1 = 0$ となる x は存在しない

② $x > 0, \frac{1}{x} > 0$ であるから

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= 2$$

等号が成り立つのは

$$x = \frac{1}{x}$$

つまり

$$x = 1 \quad (\because x > 0) \quad \leftarrow \text{確かに } x + \frac{1}{x} = 2 \text{ となる } x \text{ が存在する。}$$

のときである。

よって、 $x + \frac{1}{x}$ の最小値は

2 //

point

値域を求める問題で相加相乗平均を

使うときは、等号成立条件を必ずチェック!

(例2) $x > 0, y > 0$ のとき $(x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x})$ の最小値を求めよ。

① $x > 0, \frac{1}{y} > 0, y > 0, \frac{4}{x} > 0$ であるから

$$(x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x}) \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{y}} \cdot 2\sqrt{y \cdot \frac{4}{x}}$$

$$= 4\sqrt{x \cdot \frac{1}{y} \cdot y \cdot \frac{4}{x}}$$

$$= 8$$

よって、 $(x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x})$ の最小値は

8 //

(なぜ?)

等号が成り立つのは

$$x = \frac{1}{y} \quad \text{かつ} \quad y = \frac{4}{x} \quad \text{のとき}$$

つまり

$$xy = 1 \quad \text{かつ} \quad xy = 4 \quad \text{のとき}$$

これをみたす x, y は存在しない

$$\textcircled{2} \quad (x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x}) = xy + \frac{4}{xy} + 5$$

ここで、 $xy > 0, \frac{4}{xy} > 0$ であるから

$$xy + \frac{4}{xy} + 5 \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{4}{xy}} + 5$$

$$= 9$$

等号が成り立つのは

$$xy = \frac{4}{xy}$$

つまり

$$xy = 2 \quad (\because xy > 0)$$

のときである。

よって、最小値は

9 //