15

・三角形の形状の決定

(例1) $\triangle ABC$において、$\sin A : \sin B : \sin C = 3:5:7$ が成り立つとき

最も大きい角の大きさを求めよ。

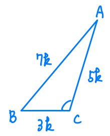
point

正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ であるから

$a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C$

正弦定理より、$a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C$ であるから

$a:b:c = 3:5:7$



よって、正の数 k を用いて

$a = 3k,\ b = 5k,\ c = 7k$

と表せる。

ここで、c が最大の辺であるから、C が求める最大の角である。

余弦定理より

$(7k)^2 = (3k)^2 + (5k)^2 - 2\cdot 3k\cdot 5k\cos C$

$\cos C = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore C = 120^\circ$

(例2) $\triangle ABC$において、$\sin A = \cos B \sin C$ が成り立つとき、

この三角形はどのような形状をしているか。

point

等式に含まれる三角比を長さ a, b, c を使って表す

正 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ $\quad\therefore \sin A = \dfrac{a}{2R},\ \sin B = \dfrac{b}{2R}\ \ \sin C = \dfrac{c}{2R}$

余 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $\quad\therefore \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ $\quad\therefore \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ $\quad\therefore \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\sin A = \cos B \sin C$ より

$\dfrac{a}{\cancel{2R}} = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2\cancel{c}a}\cdot\dfrac{\cancel{c}}{\cancel{2R}}$

$2a^2 = c^2 + a^2 - b^2$

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$

よって、$\triangle ABC$ は $C = 90^\circ$ の直角三角形である。