

15

・1次不定方程式の特殊解

$ax+by=c \cdots ①$ (a, b は互いに素) を満たす整数 x, y の求め方

1. ①の解を (x_1, y_1) 見つける \leftarrow カンでも互除法でもよい
特殊解

2. (x_1, y_1) を ①に代入した式 $ax_1+by_1=c \cdots ②$ として

①-②より

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \cdots ③ \leftarrow \text{整数は積に強い}$$

をくる。

3. a, b は互いに素であるから

$$x-x_1=bk \quad (k \text{ は整数})$$

これを ③に代入して

$$y-y_1=-ak$$

ゆえに

$$x=bk+x_1, y=-ak+y_1 \quad (k \text{ は整数})$$

(例1) 等式 $71x+33y=4$ を満たす整数 x, y の組を 1つ求めよ。

$$(33 \cdot 2 + 5)x + 33y = 4$$

$$5x + 33(2x+y) = 4$$

$$2x+y = z \quad \text{---} ① \text{ とおくと}$$

$$5x + 33z = 4$$

これを満たす整数 x, z の組の 1つは

$$(x, z) = (14, -2)$$

おいて、これらを ①に代入して

$$2 \cdot 14 + y = -2 \quad \therefore y = -30$$

以上より

$$(x, y) = (14, -30), \quad \text{前回の } x = 33k - 52, y = -71k + 112 \text{ において} \\ (x, y) = (14, -30), \quad \text{が } k=2 \text{とした場合である}$$

(例2) 等式 $308x+255y=1$ を満たす整数 x, y の組を 1つ求めよ。

$$(255 \cdot 1 + 53)x + 255y = 1$$

$$53x + 255(x+y) = 1$$

$$x+y = z \quad \text{---} ① \text{ とおくと}$$

$$53x + 255z = 1$$

$$53(5z+4) + 43z = 1$$

$$x+4z = v \quad \text{---} ② \text{ とおくと}$$

$$53v + 43z = 1$$

$$43(1+10)v + 43z = 1$$

$$10v + 43(v+z) = 1$$

$$v+z = w \quad \text{---} ③ \text{ とおくと}$$

$$10v + 43w = 1$$

これを満たす整数 v, w の組の 1つは

$$(v, w) = (19, -3)$$

おいて、これらを ③に代入して

$$13+z = -3 \quad \therefore z = -16$$

ゆえに、②より

$$x+4(-16) = 13 \quad \therefore x = 77$$

さらに、①より

$$77+y = -16 \quad \therefore y = -93$$

以上より

$$(x, y) = (77, -93)$$