24

・対数関数を含む関数の最大・最小

(例1) $1 \leqq x \leqq 8$ のとき，関数

$$y=\left(\log_2 \frac{2}{x}\right)\left(\log_2 \frac{x}{8}\right)$$

の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

point
底をそろえて，$\log_a x = t$ とおきかえ
→ おきかえた文字の範囲に注意

$y=\left(\log_2 \frac{2}{x}\right)\left(\log_2 \frac{x}{8}\right)$

$=(\log_2 2-\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 8)$

$=(1-\log_2 x)(\log_2 x-3)$

$=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x-3$

$\log_2 x = t$ とおくと，$1 \leqq x \leqq 8$ より

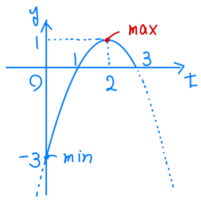
$0 \leqq t \leqq 3$

よって，y は

$y=-t^2+4t-3$

$=-(t-2)^2+1$

と表せる。



ゆえに

$t=2$ のとき最大値 1

$t=0$ のとき最小値 -3

ここで

$t=2$ つまり $\log_2 x=2$ のとき $x=4$

$t=0$ つまり $\log_2 x=0$ のとき $x=1$

なので

$x=4$ のとき最大値 1

$x=1$ のとき最小値 -3 //

(例2) 関数

$$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2\log_{\frac{1}{4}}(2-x)$$

の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

point
底をそろえて，真数の最大・最小について考える
底が1より大きいか小さいかに注意

真数は正であるから

$x-1>0$，$2-x>0$

つまり

$1<x<2$ …①

また

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2\log_{\frac{1}{4}}(2-x)$

$=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}$

$=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$

$=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(2-x)$

ここで

$(x-1)(2-x)=-x^2+3x-2$
$=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

← 真数が最大になるとき y が最小になる。

①の範囲において，$(x-1)(2-x)$ は

$x=\frac{3}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$

よって，底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから，y は

$x=\frac{3}{2}$ のとき最小値 2 // ← $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$