

18

・有理数と無理数の関係

(例1) a, b が有理数、 \sqrt{x} が無理数で、 $a+b\sqrt{x}=0$ ならば " $a=b=0$ " である
命題 X

これを証明せよ。

$a+b\sqrt{x}=0$ で、 $b \neq 0$ であると仮定すると $\leftarrow 'a=b=0'$ の否定は ' $a \neq 0$ または $b \neq 0$ '
 $\sqrt{x} = -\frac{a}{b}$

と表せる。

$-\frac{a}{b}$ は有理数であるから、 \sqrt{x} が無理数であることに矛盾する。

よって、

$$b=0$$

これを、 $a+b\sqrt{x}=0$ に代入して

$$a=0$$

以上より

$$a=b=0 \quad \square$$

a, b, c, d が有理数、 \sqrt{x} が無理数のとき

$$a+b\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow a=b=0$$

$$a+b\sqrt{x}=c+d\sqrt{x} \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$$

(例2) 等式 $(1+2\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})=3-\sqrt{2}$ を満たす有理数 a, b の値を求める。

$$(1+2\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})=3-\sqrt{2}$$

$$(a+4b)+(2a+b)\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$$

より

$$\begin{cases} a+4b=3 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

よって

$$a=-1, b=1$$