16

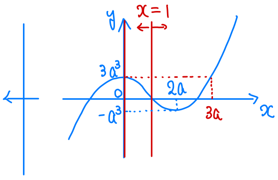
・3次関数の最大・最小 ③

(例) $a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3a^3\ (0\leqq x\leqq 1)$ の最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

$$f'(x)=3x^2-6ax$$
$$=3x(x-2a)$$

より、増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$3a^3$	$\searrow$	$-a^3$	$\nearrow$



ここで、$f(x)=3a^3$ となる x を求める。

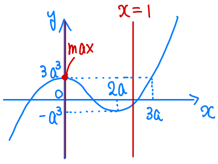
$$x^3-3ax^2+3a^3=3a^3$$

$$x^2(x-3a)=0 \qquad \therefore x=0,\ 3a$$

まず、最大値 $M(a)$ について考える。

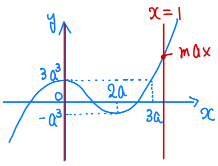
(i) $1<3a$ つまり $\frac{1}{3}<a$ のとき

$$M(a)=f(0)=3a^3$$



(ii) $3a\leqq 1$ つまり $0<a\leqq\frac{1}{3}$ のとき

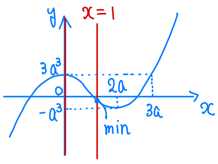
$$M(a)=f(1)=3a^3-3a+1$$



次に、最小値 $m(a)$ について考える。

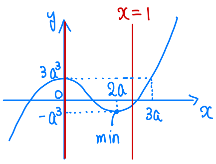
(iii) $1<2a$ つまり $\frac{1}{2}<a$ のとき

$$m(a)=f(1)=3a^3-3a+1$$



(iv) $2a\leqq 1$ つまり $0<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$$m(a)=f(2a)=-a^3$$



以上より

$$M(a)=\begin{cases}3a^3-3a+1 & (0<a\leqq\frac{1}{3})\\ 3a^3 & (\frac{1}{3}<a)\end{cases} \quad //$$

$$m(a)=\begin{cases}-a^3 & (0<a\leqq\frac{1}{2})\\ 3a^3-3a+1 & (\frac{1}{2}<a)\end{cases} \quad //$$