24

・円の弦の長さ

(例) 直線 $3x+2y=1 \cdots ①$ が円 $x^2+y^2=7 \cdots ②$ によって

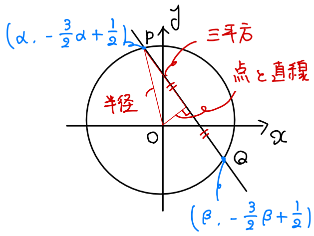
切り取られる弦 PQ の長さを求めよ

point

交点の座標が複雑

→ うらがありそう

→ 交点を求めずに導く方法を考える



(方針1)

①.② より y を消去して整理すると

$$13x^2-6x-27=0$$

$$\therefore x=\frac{3\pm6\sqrt{10}}{13}$$

これを① に代入して交点の座標を求めると

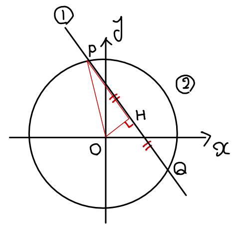
$$(x, y)=\left(\frac{3+6\sqrt{10}}{13}, \frac{2-9\sqrt{10}}{13}\right), \left(\frac{3-6\sqrt{10}}{13}, \frac{2+9\sqrt{10}}{13}\right)$$

よって、弦 PQ の長さは

$$PQ=\sqrt{\left(\frac{3+6\sqrt{10}}{13}-\frac{3-6\sqrt{10}}{13}\right)^2+\left(\frac{2-9\sqrt{10}}{13}-\frac{2+9\sqrt{10}}{13}\right)^2}$$

$$=\frac{6\sqrt{130}}{13}$$

(方針2)



原点O から PQ に垂線 OH を下ろすと

$$OH=\frac{|-1|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

△OPH は直角三角形であるから、三平方の定理より

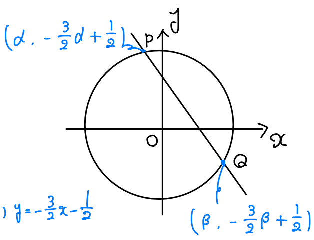
$$PH=\sqrt{(\sqrt{7})^2-\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2} \quad ← OP=\sqrt{7}\ (半径)$$

$$=\frac{3\sqrt{130}}{13}$$

H は弦 PQ の中点であるから、弦 PQ の長さは

$$PQ=2PH=\frac{6\sqrt{130}}{13}$$ //

(方針3)



①.② より y を消去して整理すると

$$13x^2-6x-27=0 \cdots ③$$

ここで、2点 P.Q の座標を

$\left(\alpha, -\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\right), \left(\beta, -\frac{3}{2}\beta+\frac{1}{2}\right)$ ← ① より $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

とすると、α.β は ③ の解であるから解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{6}{13} \\ \alpha\beta=-\frac{27}{13} \end{cases}$$

よって、弦 PQ の長さは

$$PQ=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+\left\{\left(-\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2}\beta+\frac{1}{2}\right)\right\}^2}$$

$$=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+\frac{9}{4}(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{13}{4}(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\sqrt{\left(\frac{6}{13}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{27}{13}\right)}$$

$$=\frac{6\sqrt{130}}{13}$$ //