

13

・ユークリッドの互除法

(例1) 8177と3315の最大公約数を求めよ。 \downarrow 色々な素因数分解できない

a, b の最大公約数を (a, b) と表すこととする。

$$8177 = 3315 \cdot 2 + 1547 \quad \text{より} \quad (8177, 3315) = (3315, 1547)$$

$$3315 = 1547 \cdot 2 + 221 \quad \text{より} \quad (3315, 1547) = (1547, 221)$$

$$1547 = 221 \cdot 7 + 0 \quad \text{より} \quad (1547, 221) = 221 \quad \downarrow \quad 0 \text{で終了}$$

よって

$$(8177, 3315) = 221 \quad \text{,,}$$

$$\begin{array}{r} \text{最大公約数} \\ (221) \overline{) 8177} \quad \begin{array}{r} 7 \quad 2 \quad 2 \\ 1547 \quad 6630 \end{array} \\ \underline{1547} \quad \underline{3094} \quad \underline{6630} \\ 0 \quad 221 \quad 1547 \\ \text{終了} \end{array}$$

(例2) $275x + 61y = 1$ を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

$$275 = 61 \cdot 4 + 31 \quad \text{より} \quad 31 = 275 - 61 \cdot 4$$

$$61 = 31 \cdot 1 + 30 \quad \text{より} \quad 30 = 61 - 31 \cdot 1$$

$$31 = 30 \cdot 1 + 1 \quad \text{より} \quad 1 = 31 - 30 \cdot 1$$

よって

$$1 = 31 - 30 \cdot 1 = 31 - (61 - 31 \cdot 1) \cdot 1$$

$$= 31 \cdot 2 + 61 \cdot (-1) = (275 - 61 \cdot 4) \cdot 2 + 61 \cdot (-1)$$

$$= 275 \cdot 2 + 61 \cdot (-9)$$

ゆえに

$$(x, y) = (2, -9) \quad \text{,,}$$

(例3) $53x + 41y = 3$ を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

$$53 = 41 \cdot 1 + 12 \quad \text{より} \quad 12 = 53 - 41 \cdot 1$$

$$41 = 12 \cdot 3 + 5 \quad \text{より} \quad 5 = 41 - 12 \cdot 3$$

$$12 = 5 \cdot 2 + 2 \quad \text{より} \quad 2 = 12 - 5 \cdot 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \quad \text{より} \quad 1 = 5 - 2 \cdot 2$$

よって

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2$$

$$= 5 \cdot 5 + 12 \cdot (-2) = (41 - 12 \cdot 3) \cdot 5 + 12 \cdot (-2)$$

$$= 41 \cdot 5 + 12 \cdot (-17) = 41 \cdot 5 + (53 - 41 \cdot 1) \cdot (-17)$$

$$= 41 \cdot 22 + 53 \cdot (-17)$$

ゆえに

$$53 \cdot (-17) + 41 \cdot 22 = 1$$

$$\therefore 53 \cdot (-51) + 41 \cdot 66 = 3$$

$$(x, y) = (-51, 66)$$