

・円の方程式の一般形

円の方程式

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

を展開して整理すると

$$x^2 + y^2 - \underbrace{2ax}_l - \underbrace{2by}_m + \underbrace{a^2 + b^2 - r^2}_n = 0$$

つまり、 l, m, n を定数として

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

と表せる。これを、円の方程式の一般形という。

(例1) 次の方程式で表される図形はどのような図形を表すか。

(1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$$

∴ 中心 $(1, -2)$ 半径 3 の円。

(2) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 = 0$

$$(x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 10 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 0$$

∴ 点 $(-3, 1)$ 。

(3) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$

$$x^2 + y^2 - x + 3y + \frac{2}{2} = 0$$

$$(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{2}{2} = 0$$

$$(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = -2$$

∴ この方程式が表す図形は存在しない。

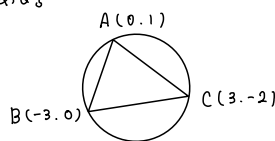
(例2) 3点 $A(0, 1)$ 、 $B(-3, 0)$ 、 $C(3, -2)$ を頂点とする

$\triangle ABC$ の外心の座標と外接円の半径を求めよ。

$\triangle ABC$ の外接円の方程式を

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

と置く。



これから、3点 $A(0, 1)$ 、 $B(-3, 0)$ 、 $C(3, -2)$ を通るので

$$\begin{cases} 0^2 + 1^2 + l \cdot 0 + m \cdot 1 + n = 0 \\ (-3)^2 + 0^2 + l \cdot (-3) + m \cdot 0 + n = 0 \\ 3^2 + (-2)^2 + l \cdot 3 + m \cdot (-2) + n = 0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} m + n = -1 \\ -3l + n = -9 \\ 3l - 2m + n = -13 \end{cases} \quad \therefore l = 1, m = 5, n = -6$$

よって、円の方程式は

$$x^2 + y^2 + x + 5y - 6 = 0$$

$$\therefore (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = (\frac{\sqrt{26}}{2})^2$$

ゆえに、

外心の座標 $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ 、外接円の半径 $\frac{\sqrt{26}}{2}$