7

・変量の変換

> 変量 x のデータから $y=ax+b$ によって
>
> 新しい変量 y についてのデータが得られるとき
>
> $\bar{y}=a\bar{x}+b$、 $s_y^2=a^2s_x^2$、 $s_y=|a|s_x$

(証明)

変量 x についてのデータの値が $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ と n 個あるとする。

$y=ax+b$ によって新たな変量 y をつくる。

このとき、y のデータは

$$y_1=ax_1+b,\ y_2=ax_2+b\ \cdots\ y_n=ax_n+b$$

の n 個ある。

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)\\&=\frac{1}{n}\{(ax_1+b)+(ax_2+b)+\cdots+(ax_n+b)\}\\&=\frac{1}{n}\{a(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nb\}\\&=a\cdot\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+b\\&=a\bar{x}+b\end{aligned}$$

次に、ある k 番目のデータ y_k について、

$$\begin{aligned}y_k-\bar{y}&=ax_k+b-(a\bar{x}+b)\\&=a(x_k-\bar{x})\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}s_y^2&=\frac{1}{n}\{(y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+\cdots+(y_n-\bar{y})^2\}\\&=\frac{1}{n}\{a^2(x_1-\bar{x})^2+a^2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+a^2(x_n-\bar{x})^2\}\\&=a^2\cdot\frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\}\\&=a^2s_x^2\end{aligned}$$

よって、$s_x>0$, $s_y>0$ であるから

$$s_y=|a|s_x \quad \blacksquare$$

(例) スキージャンプは飛距離 x m に応じて得点 y 点が決まる。

その関係式は $y=1.8\times(x-125)+60$ であるという。

いま、10人の選手がそれぞれ1回ずつ行い

飛距離の平均 $\bar{x}$ と標準偏差 s_x が120と10であるとき、

得点の平均 $\bar{y}$ と標準偏差 s_y を求めよ。

$$\begin{aligned}y&=1.8\times(x-125)+60\\&=1.8x-165\end{aligned}$$

であるから

$$\bar{y}=1.8\bar{x}-165=1.8\times120-165=51\text{(点)}$$

$$s_y=1.8\cdot10=18\text{(点)}$$