

対数の大小比較

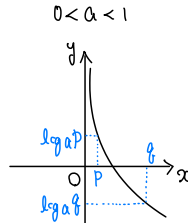
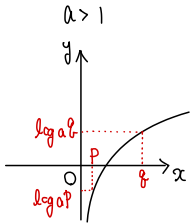
 $a > 1$ のとき

$$P < Q \iff \log_a P < \log_a Q \quad \text{一致}$$

 $0 < a < 1$ のとき

$$P < Q \iff \log_a P > \log_a Q \quad \text{逆転}$$

(ざっくり証明)



(例) 次の数の大きさを調べよ。

(1) $2 \log_2 3$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 3, \log_{\frac{1}{4}} 5$

(3) $\log_3 2, \log_5 2$

(4) $\log_3 0.5, \log_5 0.5$

point

底をそろえる

(1) $2 = \log_2 2^2 = \log_2 4$

$\log_2 3$

底 2 は 1 より大きいから, $3 < 4$ より

$\log_2 3 < \log_2 4$ つまり $\log_2 3 < 2$,,

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$

$\log_{\frac{1}{4}} 5 = \frac{\log_{\frac{1}{2}} 5}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 5 = \log_{\frac{1}{2}} 5^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから, $\sqrt{5} < 3$ より

$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5} > \log_{\frac{1}{2}} 3$ つまり $\log_{\frac{1}{4}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 3$,,

(3) $\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3}$

$\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}$

底 2 は 1 より大きいから, $3 < 5$ より

$0 < \log_2 3 < \log_2 5$ つまり $\frac{1}{\log_2 3} > \frac{1}{\log_2 5}$

よって

$\log_3 2 > \log_5 2$,,

(4) $\log_3 0.5 = \frac{1}{\log_{0.5} 3}$

$\log_5 0.5 = \frac{1}{\log_{0.5} 5}$

底 0.5 は 1 より小さいから, $3 < 5$ より

$0 > \log_{0.5} 3 > \log_{0.5} 5$ つまり $\frac{1}{\log_{0.5} 3} < \frac{1}{\log_{0.5} 5}$

よって

$\log_3 0.5 < \log_5 0.5$,,