

13

・ユークリッドの互除法

(例1) 8177と3315の最大公約数を求めよ。↓ おむな素因数分解できない

a, b の最大公約数を (a, b) と表すこととする。

$$\begin{aligned} 8177 &= 3315 \cdot 2 + 1547 \quad \text{より } (8177, 3315) = (3315, 1547) \\ 3315 &= 1547 \cdot 2 + 221 \quad \text{より } (3315, 1547) = (1547, 221) \\ 1547 &= 221 \cdot 7 + 0 \quad \text{より } (1547, 221) = 221 \quad \text{↓ 0で終了} \end{aligned}$$

よって

$$(8177, 3315) = 221,$$

$$\begin{array}{r} \text{最大公約数} \\ (221) \end{array} \begin{array}{r} 7 \\ 1547 \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ 3315 \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ 8177 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1547 \\ 3094 \\ \hline 0 \end{array} \begin{array}{r} 221 \\ 1547 \end{array}$$

↓ 残り

(例2) $275x+61y=1$ を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

$$\begin{aligned} 275 &= 61 \cdot 4 + 31 \quad \text{より } 31 = 275 - 61 \cdot 4 \\ 61 &= 31 \cdot 1 + 30 \quad \text{より } 30 = 61 - 31 \cdot 1 \\ 31 &= 30 \cdot 1 + 1 \quad \text{より } 1 = 31 - 30 \cdot 1 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 &= 31 - 30 \cdot 1 = 31 - (61 - 31 \cdot 1) \cdot 1 \\ &= 31 \cdot 2 + 61 \cdot (-1) = (275 - 61 \cdot 4) \cdot 2 + 61 \cdot (-1) \\ &= 275 \cdot 2 + 61 \cdot (-9) \end{aligned}$$

ゆえに

$$(x, y) = (2, -9),$$

(例3) $53x+41y=3$ を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

$$\begin{aligned} 53 &= 41 \cdot 1 + 12 \quad \text{より } 12 = 53 - 41 \cdot 1 \\ 41 &= 12 \cdot 3 + 5 \quad \text{より } 5 = 41 - 12 \cdot 3 \\ 12 &= 5 \cdot 2 + 2 \quad \text{より } 2 = 12 - 5 \cdot 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \quad \text{より } 1 = 5 - 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 = 5 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 5 + 12 \cdot (-2) = (41 - 12 \cdot 3) \cdot 5 + 12 \cdot (-2) \\ &= 41 \cdot 5 + 12 \cdot (-17) = 41 \cdot 5 + (53 - 41 \cdot 1) \cdot (-17) \\ &= 41 \cdot 32 + 53 \cdot (-17) \end{aligned}$$

ゆえに

$$53 \cdot (-17) + 41 \cdot 32 = 1$$

$$\therefore 53 \cdot (-51) + 41 \cdot 66 = 3$$

$$(x, y) = (-51, 66)$$