5

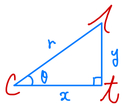
・相互関係（$0° < \theta < 90°$）

$$\boxed{\begin{aligned} &1.\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &2.\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ &3.\ 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \end{aligned}}$$

（証明）

右の図の直角三角形において

$y = r\sin\theta$ ，$x = r\cos\theta$



であるから

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ← 1 証明終

次に，三平方の定理より，$x^2 + y^2 = r^2$ であるから

$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$ ← $(\cos\theta)^2$，$(\sin\theta)^2$，$(\tan\theta)^2$ は $\cos^2\theta$，$\sin^2\theta$，$\tan^2\theta$ とかく

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ← 2 証明終

両辺を $\cos^2\theta$ でわると

$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ← $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ← 3 証明終

（例1）θは鋭角とする。$\cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= \frac{8}{9}$

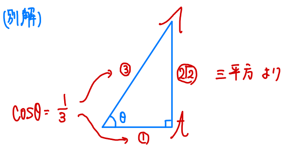
$\sin\theta > 0$ であるから

$\sin\theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ //

また

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3}{\frac{1}{3} \times 3} = 2\sqrt{2}$ //

（別解）



$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，$\tan\theta = 2\sqrt{2}$ //

（例2）θは鋭角とする。$\sin\theta = \frac{1}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$= 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$

$= \frac{24}{25}$

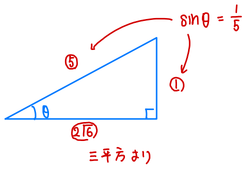
$\cos\theta > 0$ であるから

$\cos\theta = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ //

また

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{5} \times 5}{\frac{2\sqrt{6}}{5} \times 5} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ //

（別解）



$\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ，$\tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ //

（例2）θは鋭角とする。$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$

$= 1 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$

$= \frac{9}{5}$

よって

$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$

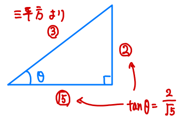
$\cos\theta > 0$ であるから

$\cos\theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ //

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}$ //

（別解）



$\sin\theta = \frac{2}{3}$ ，$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ //