6

・積の微分と累乗の微分

1, $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
2, $[\{f(x)\}^n]' = n\{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x)$ (nは自然数)

(1の証明)

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$
$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \square$$

(2の証明)

$$[\{f(x)\}^n]' = n\{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x) \quad \cdots (※)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する

[1] $n=1$ のとき

$$\{f(x)\}' = f'(x)$$

よって、$n=1$のとき, (※)は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, (※)が成立, すなわち

$$[\{f(x)\}^k]' = k\{f(x)\}^{k-1} \cdot f'(x)$$

と仮定すると, $n=k+1$ のとき

ゴールの確認: $[\{f(x)\}^{k+1}]' = (k+1)\{f(x)\}^k \cdot f'(x)$

$$[\{f(x)\}^{k+1}]' = [\{f(x)\}^k \cdot f(x)]'$$
$$= [\{f(x)\}^k]' f(x) + \{f(x)\}^k \cdot f'(x)$$
$$= k\{f(x)\}^{k-1} \cdot f'(x) \cdot f(x) + \{f(x)\}^k \cdot f'(x)$$
$$= (k+1)\{f(x)\}^k \cdot f'(x)$$

よって, $n=k+1$ のときにも, (※)は成り立つ。

[1][2]からすべての自然数 n について(※)は成り立つ。□

(例) 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x+1)(x^2+1)$

$$y' = (x+1)'(x^2+1)+(x+1)(x^2+1)'$$
$$= 1\cdot(x^2+1)+(x+1)\cdot 2x$$
$$= 3x^2+2x+1 \;//$$

(2) $y=(2x+1)^3$

$$y' = 3(2x+1)^2\cdot(2x+1)'$$

$y'=3(2x+1)^2$ としない!

$$= 6(2x+1)^2 \;//$$