

対数関数を含む不等式②

(例1) (i) $\log x \cdot 3x < \log x (2-x)$

point

(真数) > 0 , (底) > 0 , (底) $\neq 1$

底をそろえて, 真数を比較

底が1より大きいのか小さいかに注意

真数は正で, 底は1でない正の数であるから

$$3x > 0, 2-x > 0, x > 0, x \neq 1$$

つまり

$$0 < x < 1, 1 < x < 2$$

(i) $1 < x < 2$ のとき

与えられた不等式より

$$3x < 2-x$$

$$\therefore x < \frac{1}{2}$$

これは, $1 < x < 2$ をみたさないので不適

(ii) $0 < x < 1$ のとき

与えられた不等式より

$$3x > 2-x \quad \text{※ 不等号の向き逆転}$$

$$\therefore x > \frac{1}{2}$$

これと, $0 < x < 1$ との共通部分は

$$\frac{1}{2} < x < 1$$

(i), (ii) より

$$\frac{1}{2} < x < 1, //$$

(2) $2\log_2 x + \log_2 8 - 5 < 0$

point

(真数) > 0 , (底) > 0 , (底) $\neq 1$

底をそろえて, $\log_a x = t$ とおきかえ

→ おきかえた文字の範囲に注意

$\log_a x$ を両辺にかけるときに注意

真数は正で, 底は1でない正の数であるから

$$0 < x < 1, 1 < x$$

与えられた不等式より

$$2\log_2 x + \frac{\log_2 8}{\log_2 2} - 5 < 0$$

(i) $1 < x$ のとき, $\log_2 x > 0$ であるから

$$2(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 3 < 0$$

$$(\log_2 x - 1)(2\log_2 x - 3) < 0$$

$$1 < \log_2 x < \frac{3}{2}$$

$$\log_2 2^1 < \log_2 x < \log_2 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore 2 < x < 2\sqrt{2} \quad (\text{これは, } 1 < x \text{ をみたす})$$

(ii) $0 < x < 1$ のとき, $\log_2 x < 0$ であるから

$$2(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 3 > 0$$

$$(\log_2 x - 1)(2\log_2 x - 3) > 0$$

$$\log_2 x < 1, \frac{3}{2} < \log_2 x$$

$$\log_2 x < \log_2 2^1, \log_2 2^{\frac{3}{2}} < \log_2 x$$

$$\therefore x < 2, 2\sqrt{2} < x$$

これと, $0 < x < 1$ との共通部分は

$$0 < x < 1$$

(i), (ii) より

$$0 < x < 1, 2 < x < 2\sqrt{2}, //$$