28

・2つの円の共有点を通る図形の方程式

2つの円

$x^2+y^2=3$ …①

$x^2+y^2-3x+4y-1=0$ …②

方程式　①を「= 0」にした形

$k(x^2+y^2-3)+(x^2+y^2-3x+4y-1)=0$ …③

の表す図形について考える。

③がkに関する恒等式となるとき ← kにどんな値を代入しても成立

$$\begin{cases} x^2+y^2-3=0 \\ x^2+y^2-3x+4y-1=0 \end{cases}$$

円①,②の共有点の座標

が成り立つ。つまり、③はこの連立方程式の解に対してつねに成り立つ。

したがって、③の表す図形は、円①,②の2つの共有点をつねに通る。

(i) $k \neq -1$のとき，③は

$(k+1)x^2+(k+1)y^2-3x+4y-3k-1=0$

となり、この方程式が表す図形は円である。

(ii) $k=-1$のとき，③は

$-3x+4y+2=0$

となり、この方程式が表す図形は直線である。

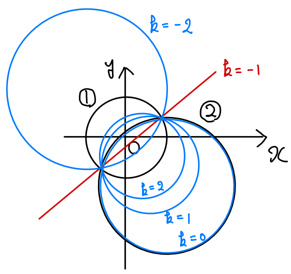
以上より，③の表す図形は

$k \neq -1$のとき

2つの円①,②の共有点を通る円

$k=-1$のとき

2つの円①,②の共有点を通る直線



※ $k(x^2+y^2-3)+(x^2+y^2-3x+4y-1)=0$ で表される図形は

円 $x^2+y^2-3=0$ を表さない。

※ $(x^2+y^2-3)+k(x^2+y^2-3x+4y-1)=0$ で表される図形は

2つの円①,② の共有点を通る図形を表す。

これは，円 $x^2+y^2-3x+4y-1=0$ を表さない。

(例) 2つの円 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2+3x-y-6=0$ について

2円の共有点と点(0,1)を通る円の方程式を求めよ。

2つの円の共有点を通る図形の方程式は，kを定数として

$k(x^2+y^2-4)+x^2+y^2+3x-y-6=0$ …①

とおける。図形①が点(0,1)を通るので

$-3k-6=0$

∴ $k=-2$

よって，求める図形の方程式は，①に$k=-2$を代入して整理すると

$x^2+y^2-3x+y-2=0$。