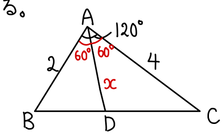
18

・いろいろな図形の計量

(例1) △ABCにおいて、$b=4$、$c=2$、$A=120°$とする。

∠Aの二等分線とBCの交点をDとするとき、

ADの長さを求めよ。



point

面積を２通りで表す。

△ABC = △ABD + △ACD

AD = xとおく。

△ABC = △ABD + △ACDであるから

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot 2\cdot 4\sin\cancel{1}20° = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot 2\cdot x\sin\cancel{6}0° + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot 4\cdot x\sin\cancel{6}0° \quad \leftarrow \sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$8 = 2x + 4x$$

$$x = \frac{4}{3}$$

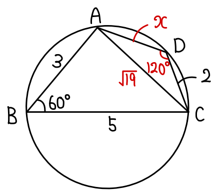
よって

$$AD = \frac{4}{3} \,_{//}$$

(例2) 円に内接する四角形ABCDにおいて

$AB=3$、$BC=5$、$CD=2$、$∠B=60°$

とする。ACの長さ、ADの長さ、四角形ABCDの面積を求めよ。



△ABCにおいて余弦定理より

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot \underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}}$$

$$= 19$$

よって、

$$AC = \sqrt{19} \,_{//}$$

四角形ABCDは円に内接するから

$$∠D = 180° - ∠B = 180° - 60° = 120°$$

AD = xとして、△DACにおいて余弦定理より

$$(\sqrt{19})^2 = x^2 + 2^2 - 2\cdot x\cdot 2\underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}}$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x+5)(x-3) = 0$$

$$x = -5,\ 3$$

よって

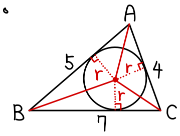
$$AD = 3 \,_{//}$$

また、四角形ABCD = △ABC + △DAC より

$$\text{四角形ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\underbrace{\sin 60°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\underbrace{\sin 120°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

(例3) 右の図の△ABCにおいて、内接円の半径rを求めよ。



point

・面積を２通りで表す

・$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c)$

余弦定理より

$$7^2 = 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cos A$$

$$\cos A = -\frac{1}{5}$$

$\sin A > 0$ より

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} \quad \leftarrow \sin^2 A = 1-\cos^2 A$$

$$= \sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A = \frac{1}{2}5\cdot 4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$$

ここで、$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$であるから

$$4\sqrt{6} = \frac{1}{2}r(5+7+4)$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{2} \,_{//}$$