8

・$\sin\theta$, $\cos\theta$ の対称式・交代式の値

(例) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ ($0 < \theta < \pi$) のとき

$\sin\theta\cos\theta$, $\sin^3\theta + \cos^3\theta$, $\cos\theta - \sin\theta$ の値をそれぞれ求めよ

point

隠れた条件 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用する

$\sin^3\theta + \cos^3\theta$: 対称式 ($\sin\theta$ と $\cos\theta$ を入れかえても変わらない式)

基本対称式 $\sin\theta + \cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$ で表せる

$\cos\theta - \sin\theta$: 交代式 ($\sin\theta$ と $\cos\theta$ を入れかえると正負が逆になる式)

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ の両辺を2乗して

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$ ← $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$$

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$$ ← $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right\}$$

$$= \frac{11}{16}$$

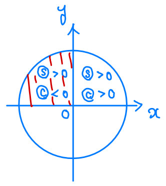
$$(\cos\theta - \sin\theta)^2 = \cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta$$ ← $(\cos\theta - \sin\theta)^2$ は対称式なので基本対称式で表せる。

$$= 1 - 2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$= \frac{7}{4}$$

ここで, $0 < \theta < \pi$, $\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8} < 0$ より

$\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$



つまり

$\cos\theta - \sin\theta < 0$ ← 負 − 正 = 負

よって

$$\cos\theta - \sin\theta = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$