24

・$x^n+\frac{1}{x^n}$ の値

(例) $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$　(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$　(3) $x^4+\frac{1}{x^4}$

point

$\frac{1}{x}=y$ とおくと $x+y=\sqrt{5}$, $xy=1$ となり

(1) x^2+y^2　(2) x^3+y^3　(3) x^4+y^4

→ 基本対称式で表せる

(1)

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x} \quad \leftarrow x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

$$=(\sqrt{5})^2-2\cdot 1$$

$$=3$$

(2)

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad \leftarrow x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$=(\sqrt{5})^3-3\cdot 1\cdot\sqrt{5}$$

$$=2\sqrt{5}$$

(別解)

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \quad \leftarrow x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$=\sqrt{5}(3-1)$$

$$=2\sqrt{5}$$

(3)

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^2} \quad \leftarrow ○^2+△^2=(○+△)^2-2○△$$

$$=3^2-2\cdot 1$$

$$=7$$

(別解)

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) \quad \leftarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^4+\underbrace{\frac{1}{x^2}+x^2}_{\text{余分}}+\frac{1}{x^4}$$

$$=\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}-3$$

$$=7$$