7

・恒等式

> 等式に含まれる各文字にどのような値を代入しても
> 両辺の値が存在する限り成り立つ式を恒等式という。

(例1) 恒等式の例

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)}$$

展開、因数分解
式の計算

恒等式でない例

$$x^2-3x+2=0$$

方程式

> xについての整式 P, Q において
>
> $P=Q \iff$ PとQの次数は等しく、両辺の同じ次数の項の係数は、それぞれ等しい
>
> $P=0 \iff$ Pの各項の係数はすべて0である。

(例2) xについての恒等式となるように、a, b, cの値を定めよ。

$$x^2+x+1 = a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

係数比較法

展開して整理すると

$$x^2+x+1 = ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$$

係数比較して

$$\begin{cases} 1=a \\ 1=-2a+b \\ 1=a-b+c \end{cases}$$

よって

$a=1,\ b=3,\ c=3$〃

数値代入法

与式に $x=0, 1, 2$ をそれぞれ代入して

$$\begin{cases} 1=a-b+c \\ 3=c \\ 7=a+b+c \end{cases}$$

よって

$a=1,\ b=3,\ c=3$

これで答えとしない
$x=0, 1, 2$ で成立することしかいえてない

逆に、$a=1, b=3, c=3$ とすると

(右辺) $=(x-1)^2+3(x-1)+3$
$=x^2+x+1$

となり、与えられた等式は恒等式となる。

したがって

$a=1,\ b=3,\ c=3$

(例3) xについての恒等式となるように、a, bの値を定めよ。

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+3}$$

係数比較法

両辺に$(x+1)(x+3)$をかけた等式

$$1 = a(x+3)+b(x+1)$$

も恒等式であるから、整理して

$$1 = (a+b)x+3a+b$$

係数比較して

$$\begin{cases} 0=a+b \\ 1=3a+b \end{cases}$$

よって

$a=\frac{1}{2}\quad b=-\frac{1}{2}$〃

数値代入法

両辺に$(x+1)(x+3)$をかけた等式

$$1 = a(x+3)+b(x+1)$$

も恒等式であるから、$x=-3, -1$ を代入して

$$\begin{cases} 1=-2b \\ 1=2a \end{cases}$$

よって

$a=\frac{1}{2}\quad b=-\frac{1}{2}$〃

逆に、$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ とすると

(右辺) $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)(x+3)}$
$=\frac{1}{(x+1)(x+3)}$

となり、与えられた等式は恒等式となる。

したがって

$a=\frac{1}{2}\quad b=-\frac{1}{2}$〃