10

・2数を解とする2次方程式

$\boxed{\begin{array}{l}\alpha, \beta \text{ を解とする2次方程式 の1つは} \\ \quad x^2 - px + q = 0 \quad (\text{ただし. } p = \alpha+\beta \quad q = \alpha\beta)\end{array}}$

(証明) α, β を解とする2次方程式 は

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \quad (\text{ただし. } a \neq 0)$$

特に, x^2 の係数 が1であるものは. $a=1$ として

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

つまり

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 - px + q = 0 \quad (\text{ただし. } p = \alpha+\beta \quad q = \alpha\beta) \ \square$$

(例1) $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$ を解とする 2次方程式を1つ作れ.

point

単純な発想として

$$\{x-(1+\sqrt{3}i)\}\{x-(1-\sqrt{3}i)\} = 0$$

を計算すればよいが、タイヘン…

2解の和と積は

和; $(1+\sqrt{3}i) + (1-\sqrt{3}i) = 2$

積; $(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) = 1-(\sqrt{3}i)^2 = 4$

であるから

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \ _{//}$$

(例2) たして 3 , かけて 5 になる 2数を求めよ。

2数を α, β とおくと

$$\alpha+\beta = 3 \ , \ \alpha\beta = 5$$

であるから. α, β は

$$x^2 - 3x + 5 = 0$$

の解である。これを解くと

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

よって, 求める2数は

$$\frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2} \ _{//}$$

(例3) $2x^2 - 2x + 5 = 0$ の2解を α, β とするとき

$\alpha-1, \beta-1$ を解とする2次方程式を1つ作れ.

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta = 1 \ , \ \alpha\beta = \frac{5}{2}$$

であるから, $\alpha-1$ と $\beta-1$ の和と積は

$$(\alpha-1)+(\beta-1) = \alpha+\beta-2 = 1-2 = -1$$

$$(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1 = \frac{5}{2}-1+1 = \frac{5}{2}$$

よって

$$x^2 + x + \frac{5}{2} = 0 \quad \leftarrow \text{これを答えとしても可}$$

つまり

$$2x^2 + 2x + 5 = 0 \ _{//}$$