23

・接線と重解

> x についての整式 $f(x)$ において
> $f(\alpha)=f'(\alpha)=0 \iff f(x)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもつ

(証明)

$f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ でわった余りを $ax+b$ とすると

$$f(x)=(x-\alpha)^2P(x)+ax+b \quad \cdots ①$$

両辺 x で微分して

$$f'(x)=2(x-\alpha)P(x)+(x-\alpha)^2P'(x)+a \quad \cdots ② \quad \leftarrow \text{積の微分}$$

①, ② に $x=\alpha$ を代入して

$$f(\alpha)=a\alpha+b,\ f'(\alpha)=a \quad \cdots ③$$

$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ つまり $a\alpha+b=a=0$ のとき

$$a=b=0$$

このとき、① は

$$f(x)=(x-\alpha)^2P(x)$$

と表せるので

$f(x)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもつ

逆に、$f(x)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもつとき、① より

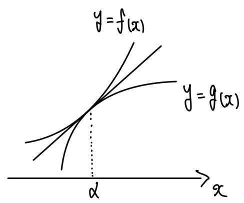
$$a=b=0$$

このとき、③ は

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$$

以上より題意は示された。

> 2曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が $x=\alpha$ で接する
> $\iff f(\alpha)=g(\alpha),\ f'(\alpha)=g'(\alpha)$
> $\iff h(\alpha)=h'(\alpha)=0 \quad (h(x)=f(x)-g(x))$
> $\iff h(x)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもつ



(例) 曲線 $y=x^3$ 上の点 $(1, 1)$ における接線と曲線の共有点のうち点 $(1, 1)$ 以外の点の座標を求めよ。

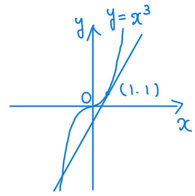
$f(x)=x^3$ とおくと

$$f'(x)=3x^2$$

よって、点 $(1, 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=f'(1)(x-1)$$

$$y=3x-2$$



であるから、求める共有点の x 座標は

$$x^3=3x-2 \quad \text{つまり} \quad x^3-3x+2=0 \quad \cdots ①$$

の $x=1$ 以外の解である。

(解法1) $x^3-3x+2=0$ を $x-1$ でわる。

$$(x-1)(x^2+x-2)=0$$

$$(x-1)^2(x+2)=0$$

(解法2) $x^3-3x+2=0$ を $(x-1)^2$ でわる。 $\leftarrow$ 接するので $(x-1)^2$ を因数にもつ

$$(x-1)^2(x+2)=0$$

(解法3) 解と係数の関係を利用する

① は $x=1$ を重解にもち、もう1つの解を α とすると

解と係数の関係より

$$1+1+\alpha=0 \quad \therefore \alpha=-2$$

ゆえに、求める共有点の座標は

$$(-2, -8)$$