31

・三角関数の合成（暗記＋導出）

$$\boxed{\begin{array}{l} a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha) \\ \text{ただし、} \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}}$$

（ざっくり証明）

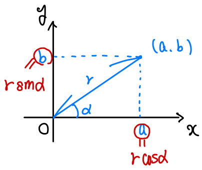
$\underbrace{a}_{x座標}\sin\theta + \underbrace{b}_{y座標}\cos\theta$

$= r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta$

$= r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)$

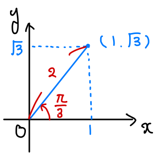
$= \underbrace{r}_{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\theta+\alpha)$

αは $\sin\alpha=\frac{b}{r}$, $\cos\alpha=\frac{a}{r}$ をみたす角

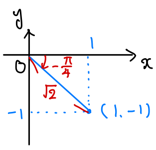


（例）次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし, $r>0$, $-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする。

(1) $1\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ //

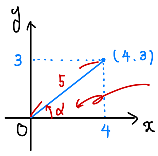


(2) $1\sin\theta-1\cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$



(3) $4\sin\theta+3\cos\theta = 5\sin(\theta+\alpha)$

（ただし, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$）



具体的に定まらない