

・ 3次方程式の実数解の個数①

(例) (1) 方程式 $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(2) a を実数の定数とする。方程式 $x^3 - 3x^2 + 3 - a = 0$ の

異なる実数解の個数を求めよ。

(1)

point

$f(x) = 0$ の異なる実数解の個数

$\Leftrightarrow y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の個数

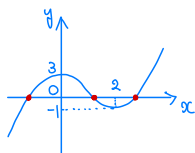
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \text{ とおく}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$= 3x(x-2)$$

より、増減表は次のようになる。

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	3	\searrow	-1	\nearrow



よって、 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり

x 軸との共有点の個数は3個であるから、

$f(x) = 0$ の異なる実数解の個数は

3個 //

(2) $x^3 - 3x^2 + 3 = a$ \downarrow 定数分離

この方程式の異なる実数解の個数は

$y = x^3 - 3x^2 + 3$ と $y = a$ のグラフの共有点の個数と一致する。

右の図より、異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} a < -1, 3 < a \text{ のとき } 1\text{個} \\ a = -1, 3 \text{ のとき } 2\text{個} \\ -1 < a < 3 \text{ のとき } 3\text{個} \end{cases} //$$

