14

・指数関数を含む関数の最大・最小

(例1) 関数 $y=4^x-2^{x+1}-1$ $(x\leqq 2)$ の最大値と最小値を求めよ。

また,そのときの x の値を求めよ。

point
$a^x=t$ とおきかえ
→ おきかえた文字の範囲に注意.

$$y=4^x-2^{x+1}-1=(2^x)^2-2\cdot 2^x-1$$

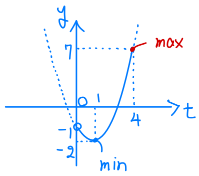
ここで, $2^x=t$ とおくと, $x\leqq 2$ より

$$0<t\leqq 4$$

y は

$$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$$

と表せる。



ゆえに

$t=4$ のとき最大値 7

$t=1$ のとき最小値 -2

$2^x=t$ であるから

$x=2$ のとき最大値 7

$x=0$ のとき最小値 -2 //

(例2) 関数 $y=4^x+4^{-x}-(2^x+2^{-x})$ の最小値を求めよ。

また,そのときの x の値を求めよ。

point
$a^x+a^{-x}=t$ とおきかえ
→ おきかえた文字の範囲に注意.

$$y=4^x+4^{-x}-(2^x+2^{-x})$$
$$=(2^x)^2+(2^{-x})^2-(2^x+2^{-x})$$
$$=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}-(2^x+2^{-x}) \quad \leftarrow x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=(2^x+2^{-x})^2-(2^x+2^{-x})-2$$

ここで, $2^x+2^{-x}=t$ とおくと, $2^x>0$, $2^{-x}>0$ であるから

$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}} \quad \leftarrow \text{相加・相乗平均}$$
$$=2$$

よって

$$t\geqq 2$$

また,等号は

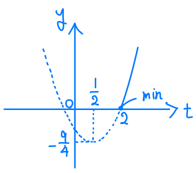
$2^x=2^{-x}$ つまり $x=0$

のとき成り立つ。

y は

$$y=t^2-t-2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

と表せる。



ゆえに

$t=2$ のとき最小値 0

したがって

$x=0$ のとき最小値 0 //