

## ・3次関数の決定

例1) 関数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  が  $x=1$  で極大値 0 をとり、  
 $x=2$  で極小値 -1 をとるととき、定数  $a, b, c, d$  の値を求めよ。

point

微分可能な関数  $f(x)$  において関数  $f(x)$  が  $x=a$  で極値をとる  $\Rightarrow f'(a)=0$ 

※逆は成り立たない。

 $f'(1) = 0, f'(2) = 0$  は必要条件にすぎない

(少なくとも必要な条件であって、本当に

 $x=1$  や  $x=2$  で極値をとるとはわからぬ)

$$f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

 $x=1$  で極大値 0,  $x=2$  で極小値 -1 をとるので

$$f(1) = 0, f'(1) = 0, f(2) = -1, f'(2) = 0$$

つまり

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ 3a+2b+c = 0 \\ 8a+4b+2c+d = -1 \\ 12a+4b+c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a=2, b=-9, c=12, d=-5$$

であるから

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

逆に、この関数が条件を満たすことを示す

$$f(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$= 6(x-1)(x-2)$$

より、増減表は次のようになる。

$x$	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	0	/	-1	/

よって、この関数  $f(x)$  は条件を満たす。

以上より

$$a=2, b=-9, c=12, d=-5$$

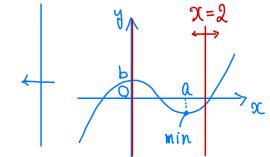
例2)  $0 < a < 2$  とする。関数  $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + b$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) の最大値が 2、最小値が -3 のとき、定数  $a, b$  の値を求めよ。

$$f(x) = 6x^2 - 6ax$$

$$= 6x(x-a)$$

より、増減表は次のようになる。

$x$	0	...	$a$	...	2
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	b	/	$-a^3 + b$	/



よって

最大値は  $f(0) = b$  または  $f(2) = -12a + b + 16$  より大きい方が最大値最小値は  $f(a) = -a^3 + b$ ここで、 $f(0)$  と  $f(2)$  の大小を比較する

$$f(2) - f(0) = -12a + 16$$

であるから

$$0 < a < \frac{4}{3} \text{ のとき } f(0) < f(2)$$

$$\frac{4}{3} \leq a < 2 \text{ のとき } f(0) \geq f(2)$$

(i)  $0 < a < \frac{4}{3}$  のとき、 $f(2) = 2, f(a) = -3$  であるから

$$\begin{cases} -12a + b + 16 = 2 \\ -a^3 + b = -3 \end{cases}$$

bを消去して

$$a^3 - 12a + 11 = 0$$

$$(a-1)(a^2 + a - 11) = 0 \quad \therefore a = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{45}}{2}$$

さて、 $0 < a < \frac{4}{3}$  を満たすものは

$$a = 1$$

このとき、 $-a^3 + b = -3$  より

$$b = -2$$

(ii)  $\frac{4}{3} \leq a < 2$  のとき、 $f(0) = 2, f(a) = -3$  であるから

$$\begin{cases} b = 2 \\ -a^3 + b = -3 \end{cases}$$

よって

$$a^3 = 5 \quad \therefore a = \sqrt[3]{5}$$

ここで、 $\frac{4}{3} \leq a < 2$  より  $\frac{64}{27} \leq a^3 < 8$  であるから $a = \sqrt[3]{5}$  は  $\frac{4}{3} \leq a < 2$  を満たす。

以上より

$$(a, b) = (1, -2), (\sqrt[3]{5}, 2)$$