6

・最大公約数と最小公倍数

> 2つ以上の整数に共通な約数を、公約数といい
>
> このうち最大のものを最大公約数という。
>
> 2つ以上の整数に共通な倍数を、公倍数といい
>
> このうち最小のものを最小公倍数という。

(例1) 36と120の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

最大公約数

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \quad (5^0 = 1)$$
$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$
$$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$$

指数の小さい方をえらぶ

最小公倍数

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \quad (5^0 = 1)$$
$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$
$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$$

指数の大きい方をえらぶ

> 公約数は最大公約数の約数である。
>
> 公倍数は最小公倍数の倍数である。

(例2) nは自然数とする。nと12の最小公倍数が

180であるようなnをすべて求めよ。

12, 180を素因数分解すると

$$12 = 2^2 \cdot 3$$
$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

より

$$12 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^0$$
$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$$
$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 180$$

指数の大きい方をえらぶ

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \quad (a = 0, 1, 2 \quad b = 2 \quad c = 1)$$

よって

$$n = 45, 90, 180 \,//$$

(例3) nは自然数とする。n+5は7の倍数であり、n+7は5の倍数であるとき、

n+12は35の倍数であることを示せ。

$$n+5 = 7k, \quad n+7 = 5l \quad (k, l\text{は整数})$$

と表せる。

ここで

$$n+12 = (n+5)+7 = 7k+7 = 7(k+1)$$
$$n+12 = (n+7)+5 = 5l+5 = 5(l+1)$$

であるから、n+12は7の倍数でもあり、5の倍数でもある。

よって、n+12は5と7の最小公倍数35の倍数である。