

30

場合分けが必要な絶対値を含む方程式・不等式

(例1) 次の方程式・不等式を解け。

$$(1) |x-1| = 2x \quad (2) |2x-1| < x+1$$

point

$2x$ や $x+1$ は負になる可能性があるため

$$x-1 = \pm 2x \text{ や } -(x+1) < 2x-1 < x+1$$

とはできない。

$$|\theta| = \begin{cases} \theta & (\theta \geq 0) \\ -\theta & (\theta < 0) \end{cases}$$

を利用して場合分け。

$$(1) |x-1| = 2x$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -(x-1) & (x < 1) \end{cases}$$

(i) $x \geq 1$ のとき

$$x-1 = 2x \quad \therefore x = -1$$

これは、 $x \geq 1$ を満たさない。

(ii) $x < 1$ のとき

$$-(x-1) = 2x \quad \therefore x = \frac{1}{3}$$

これは、 $x < 1$ を満たす。

以上より、求める解は

$$x = \frac{1}{3}$$

$$(2) |2x-1| < x+1$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & (x \geq \frac{1}{2}) \\ -(2x-1) & (x < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

(i) $x \geq \frac{1}{2}$ のとき

$$2x-1 < x+1 \quad \therefore x < 2$$

これと $x \geq \frac{1}{2}$ の共通範囲は

$$\frac{1}{2} \leq x < 2$$



(ii) $x < \frac{1}{2}$ のとき

$$-(2x-1) < x+1 \quad \therefore x > 0$$

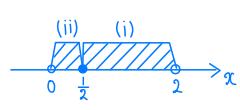
これと $x < \frac{1}{2}$ の共通範囲は

$$0 < x < \frac{1}{2}$$



以上より、求める解は

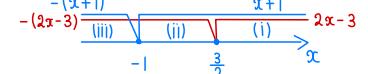
$$0 < x < \frac{1}{2}$$



(例2) 次の不等式を解け。

$$|x+1| + |2x-3| > 7$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & (x \geq -1) \\ -(x+1) & (x < -1) \end{cases}$$



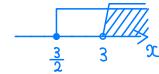
$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & (x \geq \frac{3}{2}) \\ -(2x-3) & (x < \frac{3}{2}) \end{cases}$$

(i) $x \geq \frac{3}{2}$ のとき

$$(x+1) + (2x-3) > 7 \quad \therefore x > 3$$

これと $x \geq \frac{3}{2}$ の共通範囲は

$$x > 3$$

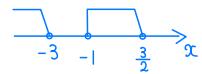


(ii) $-1 \leq x < \frac{3}{2}$ のとき

$$(x+1) - (2x-3) > 7 \quad \therefore x < -3$$

これと $-1 \leq x < \frac{3}{2}$ の共通範囲は

存在しない

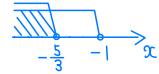


(iii) $x < -1$ のとき

$$-(x+1) - (2x-3) > 7 \quad \therefore x < -\frac{5}{3}$$

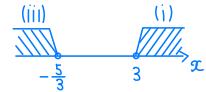
これと $x < -1$ の共通範囲は

$$x < -\frac{5}{3}$$



以上より、求める解は

$$x < -\frac{5}{3} \quad \text{または} \quad x > 3$$



$$(2) |2x-1| < x+1$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & (x \geq \frac{1}{2}) \\ -(2x-1) & (x < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

(i) $x \geq \frac{1}{2}$ のとき

$$2x-1 < x+1 \quad \therefore x < 2$$

これと $x \geq \frac{1}{2}$ の共通範囲は

$$\frac{1}{2} \leq x < 2$$



(ii) $x < \frac{1}{2}$ のとき

$$-(2x-1) < x+1 \quad \therefore x > 0$$

これと $x < \frac{1}{2}$ の共通範囲は

$$0 < x < \frac{1}{2}$$



以上より、求める解は

$$0 < x < \frac{1}{2}$$

