7

・三角関数の相互関係

1. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
2. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
3. $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

} 三角比のときと同じ

(例1) $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$ のとき, $\sin\theta$ と $\tan\theta$ は?

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ より

$\sin\theta < 0$

よって, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$= -\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}$

$= -\frac{5}{13}$ //

また

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$ //

(例2) $\tan\theta = 3$ のとき, $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は? ← θに制限なし

$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta$

$= 1+3^2$

$= 10$

よって

$\cos^2\theta = \frac{1}{10}$ $\quad\therefore \cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

また, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ のとき

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ のとき

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

以上より

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ または $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ // ← $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$ としない!

$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$ (複号同順) なら○

(例3) 等式 $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ を証明せよ。

(左辺) $= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ← $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ ← $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

$=$(右辺) □