19

・根号を含む式の計算

$a>0,\ b>0,\ k>0$ のとき
1 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
2 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
3 $\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

(ざっくり証明)

$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$ ← $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の平方根

$\sqrt{a}\sqrt{b}>0$ より $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の正の平方根であるから

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ▯

$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\dfrac{a}{b}$ ← $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ は $\dfrac{a}{b}$ の平方根

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}>0$ より $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ は $\dfrac{a}{b}$ の正の平方根であるから

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ▯

$k>0,\ a>0$ より

$\sqrt{k^2a}=\sqrt{k^2}\sqrt{a}$ ← 1より

$=k\sqrt{a}$ ▯

(例) 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt{2}\sqrt{6}=\sqrt{2\cdot6}=\sqrt{2^2\cdot3}=2\sqrt{3}$ //

(2) $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{54}{3}}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot2}=3\sqrt{2}$ //

(3) $\sqrt{72}-2\sqrt{2}+\sqrt{50}=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=9\sqrt{2}$ //

(4) $(\sqrt{2}+3\sqrt{5})(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})=\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{5})+3\sqrt{5}\cdot3\sqrt{2}+3\sqrt{5}\cdot(-2\sqrt{5})$

$=6-2\sqrt{10}+9\sqrt{10}-30$

$=7\sqrt{10}-24$ //

(5) $(\sqrt{2}+2\sqrt{6})^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{6}+(2\sqrt{6})^2=2+8\sqrt{3}+24=26+8\sqrt{3}$ //

(6) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=5-3=2$ //

(7) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$

$=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-5$

$=2+2\sqrt{6}+3-5$

$=2\sqrt{6}$ //