17

§4 分数

・分数と有限小数・循環小数

> mは整数、nは0でない整数
>
> 有理数 $\frac{m}{n}$ $\begin{cases} \text{整数} & \frac{14}{7}\ (=2) \\ \text{有限小数} & \frac{6}{5}\ (=1.2) \\ \text{循環小数} & \frac{1}{3}\ (=0.\dot{3}) \end{cases}$

> mは整数、nは0でない整数
>
> mとnが互いに素である分数 $\frac{m}{n}$ を既約分数という。

> mは整数、nは0でない整数として、整数でない既約分数 $\frac{m}{n}$ について
>
> $\frac{m}{n}$ の分母nの素因数が2、5だけからなる
>
> $\Leftrightarrow$ $\frac{m}{n}$ は有限小数
>
> $\frac{m}{n}$ の分母nの素因数が2、5以外のものがある
>
> $\Leftrightarrow$ $\frac{m}{n}$ は循環小数

($\Rightarrow$ の証明)

分母 n の素因数が 2、5 だけからなるとすると、

$\frac{m}{n}$ の分母分子に 2 または 5 を何回かけることにより

$\frac{\text{整数}}{10^k}$ ← 有限小数

の形になる。

よって、$\frac{m}{n}$ は有限小数である。□

($\Leftarrow$ の証明)

$\frac{m}{n}$ が、小数第k位までの有限小数であるとすると

$\frac{m}{n}$ に 10^k をかけた

$\frac{10^k m}{n}$

は整数である。

ここで、m.n は互いに素であるから ← $\frac{m}{n}$ は既約分数

10^k は n の倍数

である。

よって、分母 n の素因数が 2、5 だけからなる。

(例1) $\frac{7}{20}$ は有限小数 ← $20 = 2^2 \cdot 5$

$\frac{7}{30}$ は循環小数 ← $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

(例2) $\frac{n}{210}$ の分子を分母で割ると、有限小数となるような

最小の自然数 n を求めよ。

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

であるから、最小の自然数 n は

$n = 3 \cdot 7 = 21$ //

← 分母の素因数が 2.5 だけになるように

$\frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{2 \cdot 5} = 0.1$