

# 12

「すべて」「ある」の否定

$\forall x$ に関する条件とする

$$\text{すべての } x \text{ について } \neg p \Leftrightarrow \text{ある } x \text{ について } \neg p$$

$$\text{ある } x \text{ について } \neg p \Leftrightarrow \text{すべての } x \text{ について } \neg p$$

(ざっくり証明)

たとえば、自然数か1つ書かれたカードが3枚あるとする。

「すべてのカードに書かれた数は偶数である」の否定は？

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{ぐ} \\ \text{ぐ} \\ \text{ぐ} \\ \text{ぎ} \\ \text{ぎ} \\ \text{ぎ} \end{array} \left. \begin{array}{c} \text{ぐ} \\ \text{ぎ} \\ \text{ぎ} \end{array} \right\} \text{すべてのカードは偶数} \\ \left. \begin{array}{c} \text{ぎ} \\ \text{ぎ} \\ \text{ぎ} \end{array} \right\} \text{あるカードは奇数} \end{array}$$

「すべての  $x$  について  $\neg p$ 」の言い換え

「任意の  $x$  について  $\neg p$ 」

「どんな  $x$  についても  $\neg p$ 」

「常に  $\neg p$ 」

「ある  $x$  について  $\neg p$ 」の言い換え

「適当な  $x$  について  $\neg p$ 」

「少なくとも1つの  $x$  について  $\neg p$ 」

「 $\neg p$ となる  $x$  が存在する」

(例) 次の命題とその否定の真偽を調べよ。

(1) すべての実数  $x$  について、 $x^2 \geq 0$  真,,

否定：ある実数  $x$  について、 $x^2 < 0$  假,,

(2) ある素数  $n$  について、 $n$  は偶数である。真,,

否定：すべての素数  $n$  について、 $n$  は奇数である。假,,

(3) 任意の実数  $x, y$  について、 $x^2 - 2xy + y^2 > 0$  假,,

否定：ある実数  $x, y$  について  $x^2 - 2xy + y^2 \leq 0$  真,,

(4)  $n^2 = 2n$  を満たす自然数  $n$  が存在する。真,,

否定：すべての自然数  $n$  について、 $n^2 \neq 2n$  である。假,,