

22

・平方根と次数下げ

(例) $a = 1 - \sqrt{2}$ のとき次の式の値を求めよ。

(1) $a^2 - 2a - 1$ (2) $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$

point

普通に代入しても良いが少し大変

→ 次数下げを利用

(1) $a = 1 - \sqrt{2}$ より

$$a - 1 = -\sqrt{2}$$

両辺を2乗して

$$(a-1)^2 = (-\sqrt{2})^2 \quad \leftarrow \text{√が消える}$$

$$\therefore a^2 - 2a + 1 = 0,$$

(2) (1) より

$$a^2 = 2a + 1 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{2次式(左辺)を1次式(右辺)にできる。} \\ \rightarrow \text{次数下げ} \end{array}$$

であるから

$$a^3 = a^2 \cdot a = (2a+1)a = 2a^2 + a = 2(2a+1) + a = 5a + 2$$

$$a^4 = a^3 \cdot a = (5a+2)a = 5a^2 + 2a = 5(2a+1) + 2a = 12a + 5$$

よって

$$a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$$

$$= (12a+5) + (5a+2) + (2a+1) + a + 1$$

$$= 20a + 9$$

$$= 20(1-\sqrt{2}) + 9$$

$$= 29 - 20\sqrt{2}$$