11

・累乗の大小比較

$a>1$ のとき

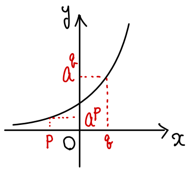
$p \le q \iff a^p \le a^q$　一致

$0<a<1$ のとき

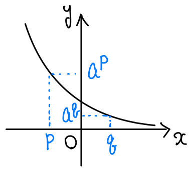
$p \le q \iff a^p \ge a^q$　逆転

(ざっくり証明)

$a>1$



$0<a<1$



(例) 次の数の大小を調べよ。

(1) $2^{\frac{1}{2}},\ 4^{\frac{1}{4}},\ 8^{\frac{1}{8}}$　　(2) $\sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt[8]{\frac{1}{4}},\ \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$

(3) $2^{15},\ 3^{9},\ 5^{6}$　　(4) $\sqrt[4]{2},\ \sqrt[6]{3},\ \sqrt[12]{5}$

point
・底をそろえる　・指数をそろえる

(1)
$2^{\frac{1}{2}}$

$4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$

$8^{\frac{1}{8}} = (2^3)^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{3}{8}}$

底2は1より大きいから，$\frac{3}{8} < \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ より

$2^{\frac{3}{8}} < 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$ つまり $8^{\frac{1}{8}} < 2^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}}$ //

(2)
$\sqrt{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[8]{\frac{1}{4}} = \sqrt[8]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

$\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから，$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ より

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$ つまり $\sqrt[8]{\frac{1}{4}} > \sqrt{\frac{1}{2}} > \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$ //

(3)
$2^{15} = (2^5)^3 = 32^3$

$3^9 = (3^3)^3 = 27^3$

$5^6 = (5^2)^3 = 25^3$

$25 < 27 < 32$ より

$25^3 < 27^3 < 32^3$

つまり

$5^6 < 3^9 < 2^{15}$ //

(4)
$\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{12}} = 8^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{6}} = (3^2)^{\frac{1}{12}} = 9^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[12]{5} = 5^{\frac{1}{12}}$

$5 < 8 < 9$ より

$5^{\frac{1}{12}} < 8^{\frac{1}{12}} < 9^{\frac{1}{12}}$

つまり

$\sqrt[12]{5} < \sqrt[4]{2} < \sqrt[6]{3}$ //