22

§2 加法定理

・正弦・余弦の加法定理（暗記＋導出）

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \cdots ①$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \cdots ②$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \cdots ③$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \cdots ④$$

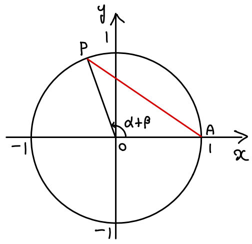
（③の証明）

$A(1,0)$ とする。

右の図のように

$\alpha+\beta$ の動径、β の動径、$-\alpha$ の動径

と単位円との交点をそれぞれ P, Q, R とおく。



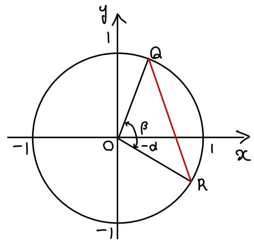
このとき、3点 P, Q, R の座標は

$P(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$

$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$

$R(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$ ← $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

と表せる。



ここで、$PA=QR$ つまり $PA^2=QR^2$ であるから

$$\{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta+\sin\alpha)^2$$

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \cdots ③ \quad \square$$

（④の証明）

③の β を $-\beta$ でおきかえると

$$\cos\{\alpha+(-\beta)\}=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \cdots ④ \quad \square$$ ← $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$

（①の証明）

④の α を $\frac{\pi}{2}-\alpha$ でおきかえると

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \cdots ① \quad \square$$ ← $\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\sin(\alpha+\beta)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

（②の証明）

①の β を $-\beta$ でおきかえると

$$\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \cdots ② \quad \square$$

（例1）

(1) $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)$

$=\sin30^\circ\cos45^\circ+\cos30^\circ\sin45^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}+\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}$

$=\frac{1+\sqrt3}{2\sqrt2}$

$=\frac{\sqrt2+\sqrt6}{4}$ //

(2) $\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}$

$=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$ //

(3) $\cos105^\circ=\cos(45^\circ+60^\circ)$

$=\cos45^\circ\cos60^\circ-\sin45^\circ\sin60^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}$

$=\frac{1-\sqrt3}{2\sqrt2}$

$=\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$ //

（例2） $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{5}{13}$ のとき

$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ

point

$$\cos(\alpha-\beta)=\underbrace{\cos\alpha}_{?}\ \underbrace{\cos\beta}_{?}+\underbrace{\sin\alpha}_{\frac{4}{5}}\ \underbrace{\sin\beta}_{\frac{5}{13}}$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より

$\cos\alpha>0$, $\cos\beta<0$

であるから、

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$

この段階から
$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$
$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
と素早く変形して欲しい

よって

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}$

$=-\frac{16}{65}$ //