13

・3次関数の極値をもつ条件

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a \neq 0)$ において

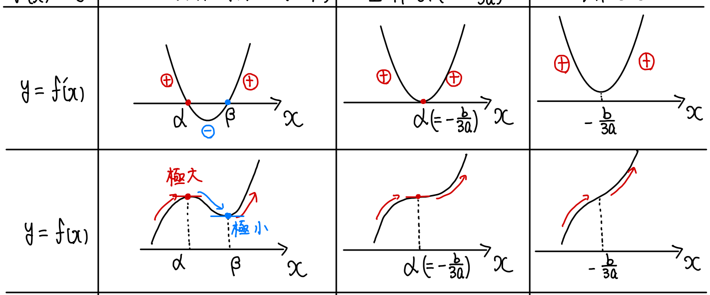
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$D/4=b^2-3ac$

$a>0$ のとき

D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$f'(x)=0$	2つの実数解 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$	重解 $\alpha\ (=-\frac{b}{3a})$	解なし



増減表

$D>0$

x	…	α	…	β	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$D=0$

x	…	α	…
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

$D<0$

x	…	$-\frac{b}{3a}$	…
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗		↗

> 3次関数 $f(x)$ が極値をもつ
> $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ の符号が変わる点がある
> $\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつ
> $\Leftrightarrow$ ($f'(x)=0$ の判別式) >0

(例1) 関数 $f(x)=x^3+ax^2$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

$f'(x)=3x^2+2ax$

$f(x)$ が極値をもつとき, $f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつ。

つまり, $f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$D>0$

ここで

$D/4=a^2-3\cdot 0=a^2$

であるから

$a^2>0 \quad \therefore\ a \neq 0$

(例2) 関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$ が極値をもたないような定数 a の値の範囲を求めよ。

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

$f(x)$ が極値をもたないとき, $f'(x)=0$ が重解をもつかまたは実数解をもたない。つまり, $f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$D \leqq 0$

ここで

$D/4=a^2-3a=a(a-3)$

であるから

$a(a-3) \leqq 0 \quad \therefore\ 0 \leqq a \leqq 3$