16

・1の3乗根

$\boxed{\text{3乗して } a \text{ になる数 つまり } x^3 = a \text{ の解を } a \text{ の3乗根という。}}$

1の3乗根のうち虚数であるものの1つを ω（オメガ）とすると

Ⅰ 1の3乗根は $1, \omega, \omega^2$

Ⅱ $\omega^3 = 1$

Ⅲ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

(Ⅰの証明)

$x^3 = 1$ より

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \cdots ①$

$\therefore \ x = 1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

よって、1の3乗根は $1, \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である。

(i) $\omega = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき

$\omega^2 = \left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき

$\omega^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

(i),(ii) より、いずれの場合についても ω^2 は 1の3乗根である。

ゆえに、1の3乗根は

$1, \omega, \omega^2$ □

(Ⅱの証明)

ω は1の3乗根であるから

$\omega^3 = 1$ □

(Ⅲの証明)

① より ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解であるから

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ □

(例) 次の値を求めよ

point

ω の計算は $\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を利用

ω の多項式は ω の1次式 $A\omega + B$ という形まで変形できる。

$(\omega^2 = -\omega - 1)$

(1) $\omega^4 + \omega^5 = \omega \cdot \underbrace{\omega^3}_{1} + \omega^2 \cdot \underbrace{\omega^3}_{1}$

$= \omega + \omega^2$

$= -1$ // ← $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

(2) $1 + \dfrac{1}{\omega} + \dfrac{1}{\omega^2} = \dfrac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2}$

$= 0$ // ← $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

(3) $(\underbrace{1+\omega}_{-\omega^2} - \omega^2)(\underbrace{1}_{} - \omega + \underbrace{\omega^2}_{-\omega})(\underbrace{-1+\omega+\omega^2}_{-1})$

$= (-\omega^2 - \omega^2)(-\omega - \omega)(-1-1)$

$= -2\omega^2 \cdot (-2\omega) \cdot (-2)$

$= -8\underbrace{\omega^3}_{1}$

$= -8$ //