16

・$ax+by$で表せる整数

> 整数a、nが互いに素であるとき
> $a, 2a, \cdots, na$をnで割った余りはすべて異なる

(例) x、yは整数とする

$\underbrace{2x+101y}_{\text{互いに素}}$はすべての整数を表すことができる。

$\underbrace{2x+4y}_{2(x+2y)\text{は偶数}}$はすべての整数を表すことができない。

(証明)

任意の異なる2数ka、la (k、lは$1 \leqq k < l \leqq n$をみたす整数)
について考える。 ← $a, 2a \cdots ka \cdots la \cdots na$

いま、ka、laをnでわったときの余りが等しいと仮定すると、

$$la - ka = a(l-k)$$

はnの倍数である。

一方、$0 < l-k < n$でありaとnは互いに素であるから

$a(l-k)$はnの倍数ではない。これは矛盾である。

よって

$a, 2a, \cdots, na$をnでわった余りはすべて異なる。□

> 整数a、bが互いに素
> $\iff$ $ax+by=1$を満たす整数x、yが存在する。

($\Rightarrow$の証明)

aとbは互いに素であるから

$a, 2a, \cdots, ba$をbでわった余りはすべて異なる

つまり、この中にbでわると余りが1である数が存在する。← 余りは$0 \sim b-1$の整数bコ

その数をxa (xは$1 \leqq x \leqq b$をみたす整数)、商を$-y$とすると

$$xa = b \cdot (-y) + 1$$

$$\therefore xa + by = 1 \quad \square$$

($\Leftarrow$の証明)

a、bの最大公約数をgとすると、互いに素である整数a' b'を用いて

$$a = ga', \quad b = gb'$$

と表せる。

このとき、$ax+by=1$は

$$ga'x + gb'y = 1$$

$$\therefore g(a'x+b'y) = 1$$

gは正の整数であるから

$$g = 1$$

よって、a、bは互いに素である。□

> 整数a、bが互いに素であるならば、どんな整数cについても
> $aX+bY=c$ ← $ax+by=1$より $a\underbrace{(cx)}_{X}+b\underbrace{(cy)}_{Y}=c$
> を満たす整数X、Yが存在する。