18

指数に対数を含む式の値

$a > 0,\ a \neq 1,\ M > 0$ のとき

$$a^{\log_a M} = M$$

一致

(ざっくり証明)

対数の定義

$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

$$a^{\log_a M} = M$$

(1) $2^{\log_2 3} = 3$ //

(別解)

$2^{\log_2 3} = A$ とおく, 2を底とする両辺の対数をとると

$$\log_2 2^{\log_2 3} = \log_2 A$$

$$\log_2 3 \cdot \log_2 2 = \log_2 A$$

$$\therefore A = 3 \text{ //}$$

(2) $9^{\log_3 4} = (3^2)^{\log_3 4} = 3^{2\log_3 4} = 3^{\log_3 4^2} = 16$ //

(別解)

$9^{\log_3 4} = A$ とおく, 3を底とする両辺の対数をとると

$$\log_3 9^{\log_3 4} = \log_3 A$$

$$(\log_3 4) \cdot (\log_3 9) = \log_3 A$$

$$2\log_3 4 = \log_3 A$$

$$\log_3 4^2 = \log_3 A$$

$$\therefore A = 16 \text{ //}$$

誤

$$\log_3 4 \cdot 2 = \log_3 A$$

$$\log_3 8 = \log_3 A$$

$$\therefore A = 8 \text{ //}$$

(3) $3^{\log_9 4} = 3^{\frac{\log_3 4}{\log_3 9}} = 3^{\frac{1}{2}\log_3 4} = 3^{\log_3 4^{\frac{1}{2}}} = 2$ //

(別解)

$3^{\log_9 4} = A$ とおく, 3を底とする両辺の対数をとると

$$\log_3 3^{\log_9 4} = \log_3 A$$

$$\log_9 4 \cdot \log_3 3 = \log_3 A$$

$$\frac{\log_3 4}{\log_3 9} = \log_3 A$$

$$\frac{1}{2}\log_3 4 = \log_3 A$$

$$\log_3 4^{\frac{1}{2}} = \log_3 A$$

$$\therefore A = 2 \text{ //}$$