

# ・ 3次関数のグラフ

(例) 次の関数のグラフをかけ。

(1)  $y = 2x^3 - 3x^2$

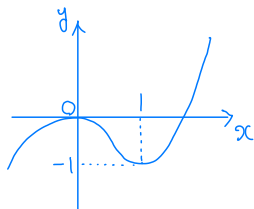
$$y' = 6x^2 - 6x$$

$$= 6x(x-1)$$

お、増減表は次のようになる。

$x$	...	0	...	1	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	0	↘	-1	↗

よて、グラフは右の図のようになる。



(2)  $y = (x-1)^3$

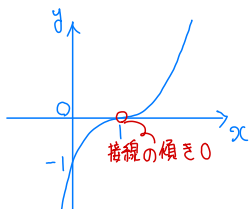
$$y' = 3(x-1)^2(x-1)'$$

$$= 3(x-1)^2$$

お、増減表は次のようになる。

$x$	...	1	...
$y'$	+	0	+
$y$	↗	0	↗

よて、グラフは右の図のようになる。



(3)  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 1$

$$y' = x^2 - 2x + 2$$

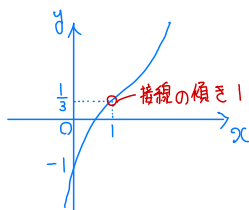
$$= (x-1)^2 + 1$$

よて、すべての実数  $x$  で  $y' > 0$

お、増減表は次のようになる。

$x$	...	1	...
$y'$	+	1	+
$y$	↗	$\frac{1}{3}$	↗

よて、グラフは右の図のようになる。



※ 3次関数のまとめ

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0) \text{ において}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$f'(x) = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D/4 = b^2 - 3ac$$

①  $a > 0$  のとき

D	D > 0	D = 0	D < 0																																										
f'(x) = 0	2つの実数解 $\alpha, \beta$ ( $\alpha < \beta$ )	重解 $\alpha (= -\frac{b}{3a})$	解なし																																										
y = f(x)																																													
y = f(x)																																													
増減表	<table><tr><th>x</th><th>...</th><th><math>\alpha</math></th><th>...</th><th><math>\beta</math></th><th>...</th></tr><tr><th>f'(x)</th><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><th>f(x)</th><td>↗</td><td>極大</td><td>↘</td><td>極小</td><td>↗</td></tr></table>	x	...	$\alpha$	...	$\beta$	...	f'(x)	+	0	-	0	+	f(x)	↗	極大	↘	極小	↗	<table><tr><th>x</th><th>...</th><th><math>\alpha</math></th><th>...</th></tr><tr><th>f'(x)</th><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><th>f(x)</th><td>↗</td><td></td><td>↗</td></tr></table>	x	...	$\alpha$	...	f'(x)	+	0	+	f(x)	↗		↗	<table><tr><th>x</th><th>...</th><th><math>-\frac{b}{3a}</math></th><th>...</th></tr><tr><th>f'(x)</th><td>+</td><td></td><td>+</td></tr><tr><th>f(x)</th><td>↗</td><td></td><td>↗</td></tr></table>	x	...	$-\frac{b}{3a}$	...	f'(x)	+		+	f(x)	↗		↗
x	...	$\alpha$	...	$\beta$	...																																								
f'(x)	+	0	-	0	+																																								
f(x)	↗	極大	↘	極小	↗																																								
x	...	$\alpha$	...																																										
f'(x)	+	0	+																																										
f(x)	↗		↗																																										
x	...	$-\frac{b}{3a}$	...																																										
f'(x)	+		+																																										
f(x)	↗		↗																																										

②  $a < 0$  のとき

D	D > 0	D = 0	D < 0																																										
f'(x) = 0	2つの実数解 α, β (α < β)	重解 α (= -b/3a)	解なし																																										
y = f(x)																																													
y = f(x)																																													
増減表	<table><tr><th>x</th><th>...</th><th>α</th><th>...</th><th>β</th><th>...</th></tr><tr><th>f'(x)</th><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><th>f(x)</th><td>↘</td><td>極小</td><td>↗</td><td>極大</td><td>↘</td></tr></table>	x	...	α	...	β	...	f'(x)	-	0	+	0	-	f(x)	↘	極小	↗	極大	↘	<table><tr><th>x</th><th>...</th><th>α</th><th>...</th></tr><tr><th>f'(x)</th><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><th>f(x)</th><td>↘</td><td></td><td>↘</td></tr></table>	x	...	α	...	f'(x)	-	0	-	f(x)	↘		↘	<table><tr><th>x</th><th>...</th><th>-b/3a</th><th>...</th></tr><tr><th>f'(x)</th><td>-</td><td></td><td>-</td></tr><tr><th>f(x)</th><td>↘</td><td></td><td>↘</td></tr></table>	x	...	-b/3a	...	f'(x)	-		-	f(x)	↘		↘
x	...	α	...	β	...																																								
f'(x)	-	0	+	0	-																																								
f(x)	↘	極小	↗	極大	↘																																								
x	...	α	...																																										
f'(x)	-	0	-																																										
f(x)	↘		↘																																										
x	...	-b/3a	...																																										
f'(x)	-		-																																										
f(x)	↘		↘																																										