10

・関数の極大・極小

連続な関数 $f(x)$ において，$x=a$ を含む十分小さい開区間で

$x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$ が成り立つとき，

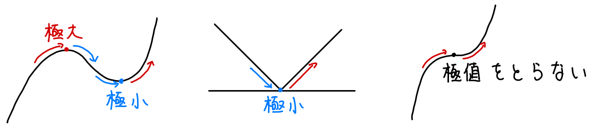
($x=a$ を境にして，増加から減少に変わるとき)

$f(x)$ は $x=a$ で極大，$f(a)$ を極大値 という。

$x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a)$ が成り立つとき，

($x=a$ を境にして，減少から増加に変わるとき)

$f(x)$ は $x=a$ で極小，$f(a)$ を極小値 という。



(例) 次の関数に極値があれば，それを求めよ。

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x-1)(x-3)$

より，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって

$\begin{cases} x=1 \text{ で極大値 } 4 \\ x=3 \text{ で極小値 } 0 \end{cases}$ //

(2) $y = -x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

$y' = -3x^2 - 6x - 3$

$= -3(x+1)^2$

より，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	$\searrow$	2	$\searrow$

よって

極値は存在しない //

微分可能な関数 $f(x)$ において

$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる $\Rightarrow f'(a) = 0$

※逆は成り立たない。

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$