18

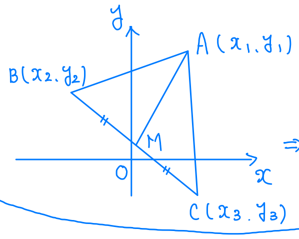
・図形の性質の証明

(例1) △ABCにおいて辺BCの中点をMとする。このとき

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ が成り立つことを証明せよ。

point

座標のとり方を工夫する



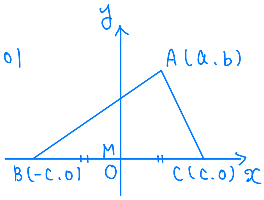
タイヘン

⇒ { 0をつくり出す / 対称性を利用

右の図のように，3点A，B，Cを

$A(a, b)$，$B(-c, 0)$，$C(c, 0)$ $(a \neq 0)$

と定める。



AB^2+AC^2

$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$

$=c^2+2ca+a^2+b^2+c^2-2ca+a^2+b^2$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

また

$2(AM^2+BM^2)=2\{(a^2+b^2)+c^2\}$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

よって

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

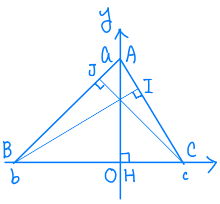
(例2) △ABCの3つの頂点からそれぞれの対辺またはその延長に

下ろした垂線AH，BI，CJは1点で交わることを証明せよ

右の図のように，3点A，B，Cを

$A(0, a)$，$B(b, 0)$，$C(c, 0)$ $(a \neq 0)$

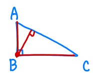
と定める。



(i) $b=0$ または $c=0$ のとき ← 分母に文字がくる → 場合分け

△ABCは直角三角形となり

3つの垂線は原点で交わる。



(ii) $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ のとき

直線ABおよびACの傾きは $-\frac{a}{b}$，$-\frac{a}{c}$ であるから，

直線CJおよびBIの方程式は

CJ：$y=\frac{b}{a}(x-c)$ つまり $y=\frac{b}{a}x-\frac{bc}{a}$

BI：$y=\frac{c}{a}(x-b)$ つまり $y=\frac{c}{a}x-\frac{bc}{a}$

← いずれもy切片 $-\frac{bc}{a}$

よって，この2直線CJ，BIは点 $(0, -\frac{bc}{a})$ で交わり

直線AHもこの点を通る。

ゆえに，垂線AH，BI，CJは1点で交わる。