7

・おき換えを利用した展開の工夫

$\boxed{7\ \ (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

(証明)

$$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$$
$$=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2$$
$$\left(=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right)$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \quad \square$$

← a → c → b

(別の証明)

$a+b=A$ とおくと ← おき換えの工夫

$$(\text{与式})=(A+c)^2$$
$$=A^2+2Ac+c^2$$
$$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \quad \square$$

(例1) 次の式を展開せよ。

$$(a-2b+3c)^2$$
$$=\{a+(-2b)+(3c)\}^2$$

← $(\bigcirc+\triangle+\square)^2=\bigcirc^2+\triangle^2+\square^2+2\bigcirc\triangle+2\triangle\square+2\square\bigcirc$

$$=a^2+(-2b)^2+(3c)^2+2a\cdot(-2b)+2(-2b)(3c)+2\cdot(3c)\cdot a$$
$$=a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ca \,_{//}$$

(例2) 次の式を展開せよ。

(1) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$a^2+b^2=A$ とおく

$$(\text{与式})=(A+ab)(A-ab)$$
$$=A^2-(ab)^2$$
$$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2$$
$$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$
$$=a^4+a^2b^2+b^4 \,_{//}$$

(2) $(a+b-c)(a-b+c)$

$b-c=A$ とおく

$$(\text{与式})=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$$
$$=(a+A)(a-A)$$
$$=a^2-A^2$$
$$=a^2-(b-c)^2$$
$$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$$
$$=a^2-b^2+2bc-c^2 \,_{//}$$