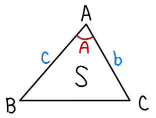
16

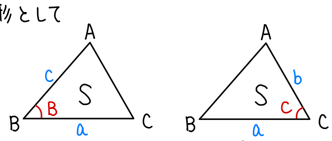
・三角形の面積

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

2つの辺その間の角



他の形として



$S=\frac{1}{2}ca\sin B$　　$S=\frac{1}{2}ab\sin C$

(証明)

$S=\frac{1}{2}ca\sin B$ が成り立つことを

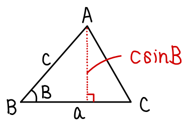
(i) $B<90°$, (ii) $B=90°$, (iii) $B>90°$

の場合に分けて考える。

(i) $B<90°$ のとき

AからBCに垂線AHを下ろすと

$AH=c\sin B$



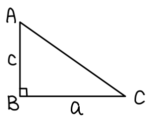
であるから

$S=\frac{1}{2}a\cdot c\sin B=\frac{1}{2}ca\sin B$

(ii) $B=90°$ のとき

$\sin B=1$ であるから

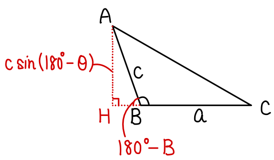
$S=\frac{1}{2}ca\sin B$



(iii) $B>90°$ のとき

AからBCに垂線AHを下ろすと

$AH=c\sin(180°-B)=c\sin B$



であるから

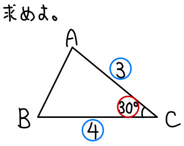
$S=\frac{1}{2}a\cdot c\sin B=\frac{1}{2}ca\sin B$

(i)〜(iii)より $S=\frac{1}{2}ca\sin B$ が成立する。□

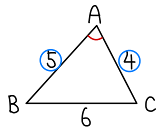
(例1) 右の図の△ABCの面積Sを求めよ。

$S=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\underbrace{\sin30°}_{\frac{1}{2}}$

$=3$



(例2) 右の図の△ABCの面積Sを求めよ。



point

逆算して考える

$\sin A \leftarrow \cos A \leftarrow$ 余弦

余弦定理より

$6^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos A$

$\therefore \cos A=\frac{1}{8}$

$\sin^2A+\cos^2A=1$ であるから

$\sin^2A=1-\cos^2A=1-\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{63}{64}$

$\sin A>0$ より

$\sin A=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

よって

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$