

12

§3 ユークリッドの互除法

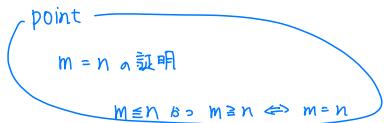
割り算と最大公約数

自然数 a, b について、 a を b で割ったときの商を q 、余りを r とすると

$$(a \text{ と } b \text{ の最大公約数}) = (b \text{ と } r \text{ の最大公約数})$$

$$a = bq + r \quad \text{最大公約数等しい}$$

(証明)



$$a = bq + r \dots \text{① おり}$$

$$r = a - bq \dots \text{②}$$

ここで、 a と b の最大公約数を m 、 b と r の最大公約数を n とすると

$$m \text{ は } r \text{ の約数} (\because \text{②}) \quad + \quad r = a - bq = m \times \square$$

よって

m は b と r の公約数

であるから

$$m \leq n \dots \text{③} \quad + \quad b \text{ と } r \text{ の最大公約数を } n$$

また

$$n \text{ は } a \text{ の約数} (\because \text{①}) \quad + \quad a = bq + r = n \times \square$$

よって

n は a と b の公約数

であるから

$$n \leq m \dots \text{④} \quad + \quad a \text{ と } b \text{ の最大公約数を } m$$

③ ④ おり

$$m = n \quad \square$$