17

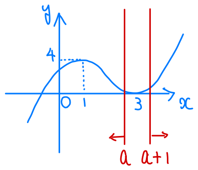
・3次関数の最大・最小 ④

(例) 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ($a \leqq x \leqq a+1$) の最大値 $M(a)$ を求めよ。

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$= 3(x-1)(x-3)$$

より，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



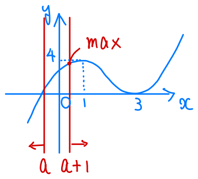
ここで，$f(x) = f(x+1)$ となる x を求める。

$f(x+1) = x^3 - 3x^2 + 4$ より

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x^3 - 3x^2 + 4$$
$$3x^2 - 9x + 4 = 0$$
$$\therefore\ x = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{6}$$

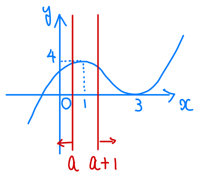
(i) $a+1 < 1$ つまり $a < 0$ のとき

$M(a) = f(a+1) = a^3 - 3a^2 + 4$



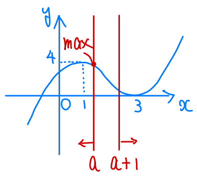
(ii) $a < 1 \leqq a+1$ つまり $0 \leqq a < 1$ のとき

$M(a) = f(1) = 4$



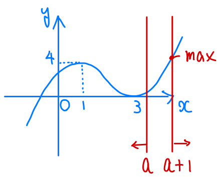
(iii) $1 \leqq a < \frac{9+\sqrt{33}}{6}$ のとき

$M(a) = f(a) = a^3 - 6a^2 + 9a$



(iv) $\frac{9+\sqrt{33}}{6} \leqq a$ のとき

$M(a) = f(a+1) = a^3 - 3a^2 + 4$



以上より

$$M(a) = \begin{cases} a^3 - 3a^2 + 4 & \left(a < 0,\ \frac{9+\sqrt{33}}{6} \leqq a\right) \\ 4 & (0 \leqq a < 1) \\ a^3 - 6a^2 + 9a & \left(1 \leqq a < \frac{9+\sqrt{33}}{6}\right) \end{cases}$$

//