

21

・対数関数を含む方程式

(例1) 次の方程式を解け。

(1) $\log_2 x = 3$

(2) $\log_2 x + \log_2(3x+1) = 2\log_2(x+1)$

(3) $\log_3(x+1) = \log_9(5-x)$

point

(真数) > 0 , (底) > 0 , (底) $\neq 1$

底をそろえて, 真数を比較

(1) $\log_2 x = 3$

真数は正であるから

$x > 0 \dots \textcircled{1}$

与えられた方程式より

$\log_2 x = \log_2 2^3$

$\therefore x = 8$ (これは $\textcircled{1}$ を満たす)

(2) $\log_2 x + \log_2(3x+1) = 2\log_2(x+1)$

真数は正であるから

$x > 0, 3x+1 > 0, x+1 > 0$

つまり

$x > 0 \dots \textcircled{1}$

与えられた方程式より

$\log_2 x(3x+1) = \log_2(x+1)^2$

$x(3x+1) = (x+1)^2$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$(2x+1)(x-1) = 0 \therefore x = -\frac{1}{2}, 1$

$\textcircled{1}$ より

$x = 1$ //

(3) $\log_3(x+1) = \log_9(5-x)$

真数は正であるから

$x+1 > 0, 5-x > 0$

つまり

$-1 < x < 5 \dots \textcircled{1}$

与えられた方程式より

$\log_3(x+1) = \frac{\log_3(5-x)}{\log_3 9}$

$\log_3(x+1)^2 = \log_3(5-x)$

$(x+1)^2 = 5-x$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x+4)(x-1) = 0 \therefore x = -4, 1$

$\textcircled{1}$ より

$x = 1$ //

(例2) 次の方程式を解け。

(1) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x = 6$ (2) $\log_2 4x^2 - \log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$

point

(真数) > 0 , (底) > 0 , (底) $\neq 1$

底をそろえて, $\log_a x = t$ とおきかえ

\rightarrow おきかえた文字の範囲に注意

(1) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x = 6$

真数は正であるから

$x > 0 \dots \textcircled{1}$

$\log_3 x = t$ とおくと, t はすべての実数をとる

与えられた方程式は

$t^2 - t - 6 = 0$

と表せる。

よって

$(t+2)(t-3) = 0$

$\therefore t = -2, 3$

つまり

$\log_3 x = -2, 3$

$\therefore x = \frac{1}{9}, 27$ (これは $\textcircled{1}$ を満たす)

(2) $\log_2 4x^2 - \log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$

真数は正で, 底は1でない正の数であるから

$4x^2 > 0, x \neq 1, x > 0$

つまり

$0 < x < 1, 1 < x \dots \textcircled{1}$

与えられた方程式より

$\log_2 4 + \log_2 x^2 - \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{\log_2 x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$

$2 + 2\log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} = -\log_2 x$

$3\log_2 x + 2 - \frac{1}{\log_2 x} = 0$

$3(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 1 = 0 \quad \leftarrow \log_2 x^2$ としない

$(\log_2 x + 1)(3\log_2 x - 1) = 0 \quad \leftarrow \log_2 x$ を1つの固まりと見る

$\log_2 x = -1, \frac{1}{3}$

$\therefore x = \frac{1}{2}, 2^{\frac{1}{3}}$ (これは $\textcircled{1}$ を満たす)

(補足) $\log_a f(x) = k$ のとき, 真数条件は確認不要

なぜか?

$f(x) = a^k > 0$