12

・差を利用した不等式の証明

> 不等式 $A>B$ の証明
>
> Ⅰ. $A-B>0$ であることを示す
>
> Ⅱ. $A\geqq 0$, $B\geqq 0$ であれば $A^2-B^2>0$ であることを示す
>
> Ⅲ. (相加平均)≧(相乗平均) の関係を利用

(例1) $a>1$, $b>1$ のとき, 不等式 $ab+1>a+b$ を証明せよ。

$$ab+1-(a+b)=ab+1-a-b$$
$$=a(b-1)-(b-1)$$
$$=(a-1)(b-1)$$

ここで、$a>1$, $b>1$ より $a-1>0$, $b-1>0$ であるから

$$(a-1)(b-1)>0$$

よって

$ab+1>a+b$ □ ← $ab+1-(a+b)>0$

(例2) 不等式 $a^2+ab+b^2\geqq 0$ を証明せよ。

また等号が成り立つのはどのようなときか。

$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+b^2$ ← a について平方完成

$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

$\geqq 0$ ← $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\geqq 0$, $\frac{3}{4}b^2\geqq 0$

等号が成り立つのは

$a+\frac{b}{2}=0$ かつ $b=0$ ← $X^2+Y^2\geqq 0$, 等号は $X=Y=0$ のとき成立

つまり

$$a=b=0$$

のときである。□

(例3) 不等式 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$ を証明せよ。 コーシー・シュワルツの不等式

また等号が成り立つのはどのようなときか。

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$=(ay-bx)^2$

$\geqq 0$

よって

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$$

等号が成り立つのは

$$ay=bx$$

のときである。□