34

・放物線の弦の中点の軌跡

(例) 放物線 $y=x^2$ …① と直線 $\underbrace{y=m(x-1)}_{\text{点}(1,0)\text{を通り、傾き }m}$ …② は異なる
2点 A.B で交わっている。

(1) mの取りうる値の範囲を求めよ。

(2) mの値が(1)で求めた範囲で動くとき、線分ABの中点Pの軌跡を求めよ

(1) ①.②より y を消去して整理すると

$$x^2-mx+m=0 \quad \cdots ③$$

この式の判別式をDとすると

$$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot m$$

$$=m(m-4)$$

放物線①と直線②が異なる2点で交わるとき、$D>0$ であるから

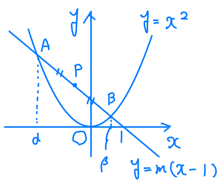
$$m(m-4)>0 \qquad \therefore \quad m<0,\ 4<m$$

(2) $P(x, y)$ とする。

③の解を α, β とすると、これらは2点A.Bのx座標を表す。

このとき、中点Pのx座標は

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \cdots ④$$



ここで、③式において解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=m$$

であるから、④は

$$x=\frac{m}{2} \quad \cdots ⑤$$

となる。

Pは直線①上にあるから

$$y=m\left(\frac{m}{2}-1\right)=\frac{1}{2}m^2-m \quad \cdots ⑥$$

ここで、⑤より

$$m=2x$$

これを⑥に代入して整理すると

$$y=2x^2-2x$$

また、(1)と⑤より

$$2x<0,\ 4<2x \qquad \therefore \quad x<0,\ 2<x$$

以上より、求める軌跡は

放物線 $y=2x^2-2x \quad (x<0,\ 2<x)$