18

・ 3次方程式の解と係数の関係

$a x^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α, β, γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$
$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

(証明) $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α, β, γ とすると

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

が成り立つ。これを整理して

$$ax^3+bx^2+cx+d$$
$$=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

よって、

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a} \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a} \quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a} \quad \square$$

(例1) $x^3+2x^2+ax+b=0$ が -1 と 2 を解にもつとき、

a, b の値と他の解を求めよ。

他の解を α とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+(-1)+2=-2 \\ \alpha\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+2\alpha=a \\ \alpha\cdot(-1)\cdot 2=-b \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} \alpha=-3 \\ \alpha-2=a \\ 2\alpha=b \end{cases}$$

よって

$\alpha=-3,\quad a=-5,\ b=-6$ //

(例2) $x^3+3x^2+ax+b=0$ が $-1+i$ を解にもつとき、

a, b の値と他の解を求めよ。

この方程式は $-1+i$ と共役な複素数 $-1-i$ も解にもつ。

他の解を α とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+(-1+i)+(-1-i)=-3 \\ \alpha\cdot(-1+i)+(-1+i)(-1-i)+(-1-i)\cdot\alpha=a \\ \alpha(-1+i)(-1-i)=-b \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} \alpha=-1 \\ -2\alpha+2=a \\ 2\alpha=-b \end{cases}$$

よって

$\alpha=-1,\ a=4,\ b=2$ //

(例3) $x^3+x^2-x+2=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

の値をそれぞれ求めよ

point

対称式は I が基本発想, 状況に応じて II または III

I, 基本対称式 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ で表す。

II, $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ を利用

III, $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$ を利用して次数下げ

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-1 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1 \\ \alpha\beta\gamma=-2 \end{cases}$$

であるから

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=(-1)^2-2\cdot(-1)$$
$$=3 \text{ //}$$

$$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=\alpha+\beta+\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma-1$$
$$=-1-(-1)+(-2)-1$$
$$=-3 \text{ //}$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$$
$$=-1\cdot\{3-(-1)\}+3\cdot(-2)$$
$$=-10 \text{ //}$$

($(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$ の別解)

$x^3+x^2-x+2=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ であるから、$x=1$ を代入して ← II を利用

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1^3+1^2-1+2=3$$

つまり

$$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=-3 \text{ //}$$

($\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ の別解)

$$\begin{cases} \alpha^3+\alpha^2-\alpha+2=0 \\ \beta^3+\beta^2-\beta+2=0 \\ \gamma^3+\gamma^2-\gamma+2=0 \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} \alpha^3=-\alpha^2+\alpha-2 \\ \beta^3=-\beta^2+\beta-2 \\ \gamma^3=-\gamma^2+\gamma-2 \end{cases} \quad \text{← III を利用}$$

であるから

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(-\alpha^2+\alpha-2)+(-\beta^2+\beta-2)+(-\gamma^2+\gamma-2)$$
$$=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha+\beta+\gamma)-6$$
$$=-3+(-1)-6$$
$$=-10 \text{ //}$$