12

## §3 剰余の定理

・剰余の定理

> 整式 $P(x)$ を1次式 $x-k$ でわったときの余りは　$P(k)$
>
> 整式 $P(x)$ を1次式 $ax+b$ でわったときの余りは　$P(-\frac{b}{a})$

(証明) $P(x)$ を $x-k$ でわったときの商を $Q_1(x)$、余りを $R_1$ とすると　← $R_1$ は定数

$$P(x)=(x-k)Q_1(x)+R_1$$

とおける。両辺 $x=k$ を代入して　← 波線部が消えるように

$$P(k)=(k-k)Q_1(k)+R_1$$

$$\therefore R_1=P(k)$$

同様に、$P(x)$ を $ax+b$ でわったときの商を $Q_2(x)$、余りを $R_2$ とすると　← $R_2$ は定数

$$P(x)=(ax+b)Q_2(x)+R_2$$

とおける。両辺 $x=-\frac{b}{a}$ を代入して　← 波線部が消えるように

$$P(-\tfrac{b}{a})=\{a\cdot(-\tfrac{b}{a})+b\}Q_2(-\tfrac{b}{a})+R_2$$

$$\therefore R_2=P(-\tfrac{b}{a}) \ \square$$

(例1) $P(x)=4x^3-x^2+1$ を次の1次式でわった余りを求めよ。

(1) $x-1$　(2) $2x+1$

(1)　$P(1)=4\cdot1^3-1^2+1=4$ //　← $P(x)=\underbrace{(x-1)Q(x)}_{x=1\text{代入}}+R$

(2)　$P(-\frac{1}{2})=4\cdot(-\frac{1}{2})^3-(-\frac{1}{2})^2+1=\frac{1}{4}$ //　← $P(x)=\underbrace{(2x+1)Q(x)}_{x=-\frac{1}{2}\text{代入}}+R$

(例2) $P(x)=x^3+ax^2+1$ を $x-2$ でわったときの余りが1

であるとき、$a$ の値を求めよ。

$P(x)$ を $x-2$ でわったときの余りは $P(2)$ であるから　← $P(x)=\underbrace{(x-2)Q(x)}_{x=2\text{代入}}+1$

$$P(2)=1$$

つまり

$$2^3+a\cdot2^2+1=1 \qquad \therefore a=-2 \ //$$

(例3) $P(x)$ を $x+1$ でわると余りが5、$2x-1$ でわると余りが $-1$ であるとき

$P(x)$ を $2x^2+x-1$ でわったときの余りを求めよ。

$P(x)$ を $2x^2+x-1$ つまり $(x+1)(2x-1)$ でわったときの

商を $Q(x)$ 余りを $ax+b$ とおくと　← 2次式でわったときの余りは1次式以下

$$P(x)=(x+1)(2x-1)Q(x)+ax+b \ \cdots①$$

ここで、剰余の定理より

$$P(-1)=5,\quad P(\tfrac{1}{2})=-1$$

であるから①より

$$\begin{cases}-a+b=5\\ \frac{1}{2}a+b=-1\end{cases} \qquad \therefore a=-4,\ b=1$$

よって求める余りは

$$-4x+1 \ //$$