8

・最大公約数と最小公倍数の性質

> 2つの自然数 a, b の最大公約数を g、最小公倍数を l とする。
>
> $a = ga'$, $b = gb'$ (a' と b' は互いに素である自然数)
>
> $l = ga'b'$
>
> $ab = gl$

(ざっくり証明)

$a = ga'$, $b = gb'$ (a', b' は自然数)

g は約数の中で最大

→ a', b' は互いに素

つまり

$a = a' \cdot g$

$b = \quad g \cdot b'$

$l = a' \cdot g \cdot b'$ ← a', b' は共通の素因数をもたない

$gl = \underbrace{a' \cdot g}_{a} \cdot \underbrace{b' g}_{b}$

(例1) 最大公約数が12、最小公倍数が180である

2つの自然数の組 a, b をすべて求めよ。ただし、$a<b$ とする。

a, b は互いに素である自然数 a', b' ($a'<b'$) を用いて

$a = 12a'$, $b = 12b'$

と表せる。また, a, b の最小公倍数は $12a'b'$ であるから

$180 = 12a'b'$ $\therefore a'b' = 15$

よって

$(a', b') = (1, 15)(3, 5)$ ← $a'<b'$, a' と b' は互いに素

ゆえに

$(a, b) = (12, 180)(36, 60)$ //

(例2) 最大公約数が8、和が96である

2つの自然数の組 a, b をすべて求めよ。ただし、$a<b$ とする。

a, b は互いに素である自然数 a', b' ($a'<b'$) を用いて

$a = 8a'$, $b = 8b'$

と表せる。また, $a+b=96$ であるから

$8a' + 8b' = 96$ $\therefore a' + b' = 12$

よって

$(a', b') = (1, 11)(5, 7)$ ← $a'<b'$, a' と b' は互いに素

よって

$(a, b) = (8, 88)(40, 56)$ //