12

§3 ユークリッドの互除法

・割り算と最大公約数

> 自然数 a, b について、a を b で割ったときの
>
> 商を q、余りを r とすると
>
> (a と b の最大公約数) = (b と r の最大公約数)
>
> $a = bq + r$　最大公約数等しい

(証明)

point

$m = n$ の証明

$m \leqq n$ かつ $m \geqq n \iff m = n$

$a = bq + r$ …① より

$r = a - bq$ …②

ここで、a と b の最大公約数を m、b と r の最大公約数を n とすると

m は r の約数 (∵②)　← $r = a - bq = m \times \square$

よって

m は b と r の公約数

であるから

$m \leqq n$ …③　← b と r の最大公約数を n

また

n は a の約数 (∵①)　← $a = bq + r = n \times \square$

よって

n は a と b の公約数

であるから

$n \leqq m$ …④　← a と b の最大公約数を m

③④より

$m = n$ □