15

§4 高次方程式

・高次方程式

(例1) $x^3=8$ を解け。 ← $x=2$ だけではない

$x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i$

(例2) $x^3+x^2-x+2=0$ を解け。

point
因数定理を利用

$P(x)=x^3+x^2-x+2$ とおくと

$P(-2)=(-2)^3+(-2)^2-(-2)+2$

$=0$

であるから，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ & -2 & 2 & -2 & \\ \hline \underset{x^2}{1} & \underset{x}{-1} & \underset{1}{1} & \underset{余}{0} & \end{array}$$

つまり，

$P(x)=(x+2)(x^2-x+1)$

であるから

$(x+2)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-2,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(例3) $2x^4+3x^3-x^2-8x-6=0$ を解け。

point
$P(k)=0$ となる k の候補は

$$k=\pm\frac{定数項の係数の約数}{最高次の項の係数の約数}$$

$P(x)=2x^4+3x^3-x^2-8x-6$ とおくと

$P(-1)=2\cdot(-1)^4+3\cdot(-1)^3-(-1)^2-8\cdot(-1)-6$

$=0$

であるから，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & -8 & -6 & -1 \\ & -2 & -1 & 2 & 6 & \\ \hline \underset{x^3}{2} & \underset{x^2}{1} & \underset{x}{-2} & \underset{1}{-6} & \underset{余}{0} & \end{array}$$

つまり，

$P(x)=(x+1)(2x^3+x^2-2x-6)$

また，$Q(x)=2x^3+x^2-2x-6$ とおくと

$Q\left(\frac{3}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}-6$ ← 候補は $\pm\frac{1\ or\ 2\ or\ 3\ or\ 6}{1\ or\ 2}$

$=0$

つまり $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}$

であるから，$Q(x)$ は $x-\frac{3}{2}$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -6 & \frac{3}{2} \\ & 3 & 6 & 6 & \\ \hline \underset{x^2}{2} & \underset{x}{4} & \underset{1}{4} & \underset{余}{0} & \end{array}$$

つまり，

$Q(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)(2x^2+4x+4)$

$=(2x-3)(x^2+2x+2)$

であるから

$(x+1)(2x-3)(x^2+2x+2)=0$

$\therefore x=-1,\ \frac{3}{2},\ -1\pm i$ //

※ $(x-1)^2(x+2)=0$ の解 $x=1$ を 2重解 という。

$(x-1)^3(x+2)=0$ の解 $x=1$ を 3重解 という。

2重解を重なった2つの解，3重解を重なった3つの解と考えることとすると

一般に，n 次方程式は複素数の範囲で，つねに n 個の解をもつ。