14

・相加相乗平均を利用した不等式の証明

> $a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき
>
> 相加平均　相乗平均
>
> $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　（$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ の形でよく用いられる）
>
> 等号は $a=b$ のとき成り立つ。

（証明）
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2) - ab$$
$$= \frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2-4ab)$$
$$= \frac{1}{4}(a^2-2ab+b^2)$$
$$= \frac{1}{4}(a-b)^2$$
$$\geqq 0$$

よって
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqq (\sqrt{ab})^2$$

ここで、$\dfrac{a+b}{2} \geqq 0$，$\sqrt{ab} \geqq 0$ であるから
$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは、$a=b$ のときである。□

（例1）$a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{1}{a} \geqq 2$ を証明せよ。

また等号が成り立つのはどのようなときか。

$a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ であるから
$$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}$$
$$=2$$

等号が成り立つのは
$$a=\frac{1}{a}$$

つまり
$$a=1 \quad (\because a>0)$$

のときである。□

（例2）$a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{4}{a+1} \geqq 3$ を証明せよ。

point

相加相乗平均は

$\bigcirc+\dfrac{1}{\bigcirc}$ や $\dfrac{\triangle}{\bigcirc}+\dfrac{\bigcirc}{\triangle}$

に強い。（かけて定数になる）

$a+1>0$，$\dfrac{4}{a+1}>0$ であるから
$$a+\frac{4}{a+1} = a+1+\frac{4}{a+1}-1$$
$$\geqq 2\sqrt{(a+1)\frac{4}{a+1}}-1$$
$$=3 \quad □$$

等号が成り立つのは
$$a+1=\frac{4}{a+1}$$

つまり
$$a=1 \quad (\because a>0)$$

のときである。

等号について問われていないときは

必ずしも等号条件を述べる必要はない！