

対数関数を含む不等式①

(例1) 次の不等式を解け。

(1) $\log_2 x < 3$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} (3x-2)$

(3) $\log_2 (x-2) < 1 + \log_{\frac{1}{2}} (x-4)$

point

(真数) > 0 , (底) > 0 , (底) $\neq 1$

底をそろえて, 真数を比較

底が1より大きいとき小さいかに注意

(例2) 次の不等式を解け。

$$(\log_3 x)^2 - \log_9 3x^3 + 1 > 0$$

point

(真数) > 0 , (底) > 0 , (底) $\neq 1$

底をそろえて, $\log_a x = t$ とおきかえ

→ おきかえた文字の範囲に注意

真数は正であるから

$$x > 0, \quad 3x^3 > 0$$

つまり

$$x > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

与えられた不等式より

$$(\log_3 x)^2 - \frac{\log_3 3x^3}{\log_3 9} + 1 > 0$$

$$(\log_3 x)^2 - \frac{1}{2}(\log_3 3 + \log_3 x^3) + 1 > 0$$

$$(\log_3 x)^2 - \frac{1}{2}(1 + 3\log_3 x) + 1 > 0$$

$$2(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 1 > 0$$

$$(2\log_3 x - 1)(\log_3 x - 1) > 0 \quad \leftarrow \log_3 x \text{ を } t \text{ の変数と見る}$$

$$\log_3 x < \frac{1}{2}, \quad 1 < \log_3 x$$

$$\log_3 x < 3^{\frac{1}{2}}, \quad 3^1 < \log_3 x$$

底3は1より大きいから

$$x < \sqrt{3}, \quad 3 < x \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$0 < x < \sqrt{3}, \quad 3 < x, //$$

(1) $\log_2 x < 3$

真数は正であるから

$$x > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

与えられた不等式より

$$\log_2 x < \log_2 2^3$$

底2は1より大きいから

$$x < 8 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$0 < x < 8, //$$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} (3x-2)$

真数は正であるから

$$x > 0, \quad 3x-2 > 0$$

つまり

$$x > \frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

与えられた不等式より, 底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから

$$x \geq 3x-2 \quad \leftarrow \text{不等号の向き逆転}$$

$$\therefore x \leq 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\frac{2}{3} < x \leq 1, //$$

(3) $\log_2 (x-2) < 1 + \log_{\frac{1}{2}} (x-4)$

真数は正であるから

$$x-2 > 0, \quad x-4 > 0$$

つまり

$$x > 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

与えられた不等式より

$$\log_2 (x-2) < \log_2 2 + \frac{\log_2 (x-4)}{\log_2 \frac{1}{2}}$$

$$\log_2 (x-2) < \log_2 2 - \log_2 (x-4)$$

$$\log_2 (x-2) < \log_2 \frac{2}{x-4}$$

底2は1より大きいから

$$x-2 < \frac{2}{x-4}$$

$$x^2 - 6x + 6 < 0$$

$$\therefore 3-\sqrt{3} < x < 3+\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$4 < x < 3+\sqrt{3}, //$$