17

・高次方程式の解と係数

(例1) $x^3+2x^2+ax+b=0$ が -1 と 2 を解にもつとき，

a、b の値と他の解を求めよ。

-1，2 が解であるから

$$\begin{cases} (-1)^3+2\cdot(-1)^2+a\cdot(-1)+b=0 \\ 2^3+2\cdot2^2+a\cdot2+b=0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} -a+b=-1 \\ 2a+b=-16 \end{cases}$$

$$\therefore\ a=-5,\ b=-6$$

よって，方程式は

$$x^3+2x^2-5x-6=0$$

この左辺は $(x+1)(x-2)$ を因数にもつので

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x^2-x-2 \,\big)\, \overline{x^3+2x^2-5x-6} \\ \underline{x^3-x^2-2x} \\ 3x^2-3x-6 \\ \underline{3x^2-3x-6} \\ 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x-2)(x+3)=0$$

よって，他の解は

$$x=-3$$

(例2) $x^3+3x^2+ax+b=0$ が $-1+i$ を解にもつとき，

a、b の値と他の解を求めよ。

$-1+i$ が解であるから

$$(-1+i)^3+3(-1+i)^2+a(-1+i)+b=0$$

$$(2-a+b)+(a-4)i=0$$

よって

$$\begin{cases} 2-a+b=0 \\ a-4=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ a=4,\ b=2$$

ゆえに，この方程式は

$$x^3+3x^2+4x+2=0 \quad \cdots (※)$$

つまり

$\leftarrow (-1)^3+3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+2=0$

$\to (x+1)$ を因数にもつ

$$(x+1)(x^2+2x+2)=0$$

1	3	4	2	$\lfloor -1$
	-1	-2	-2	
1	2	2	0	

これを解くと

$$x=-1,\ -1\pm i$$

したがって，他の解は

$$x=-1,\ -1-i$$

> 係数が実数である n 次方程式が $a+bi$ を解にもつとき，
> それと共役な複素数 $a-bi$ もこの方程式の解である。

(別解) (※) まで同じ

この方程式は $-1+i$ と共役な複素数 $-1-i$ も解にもつ。

よって，この方程式は

$$\{x-(-1+i)\}\{x-(-1-i)\}$$

つまり

$$x^2+2x+2$$

を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2+2x+2 \,\big)\, \overline{x^3+3x^2+4x+2} \\ \underline{x^3+2x^2+2x} \\ x^2+2x+2 \\ \underline{x^2+2x+2} \\ 0 \end{array}$$

ゆえに，(※) は

$$(x+1)(x^2+2x+2)=0$$

と変形できる。

これを解くと

$$x=-1,\ -1\pm i$$

したがって，他の解は

$$x=-1,\ -1-i$$