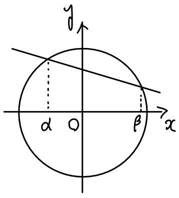
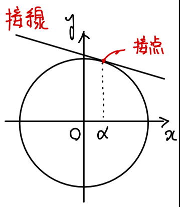
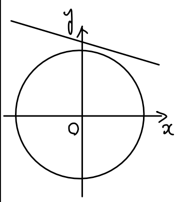
22

・円と直線の共有点の個数と判別式

図形の世界：共有点の個数　　式の世界：連立方程式の解の個数

$$\begin{cases} 円 & x^2+y^2=r^2 \\ 直線 & sx+ty+u=0 \end{cases} \xrightarrow{y\text{消去}} ax^2+bx+c=0$$

これの判別式を D とする

Dの符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる2つの実数解 $x=\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$	重解 $x=\alpha$	解なし
円と直線の位置関係			
共有点の個数	2個	1個	0個

(例1) 次の方程式で表される円と直線の共有点の個数を求めよ。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots ① \\ y=x+1 & \cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して整理すると

$$2x^2+2x-1=0$$

この2次方程式の判別式をDとすると

$$D/4 = 1^2-2\cdot(-1)=3>0$$

であるから，共有点の個数は

2個

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=4 & \cdots ① \\ x-2y+5=0 & \cdots ② \end{cases}$

①，②より，xを消去して整理すると

$$5y^2-20y+21=0$$

この2次方程式の判別式をDとすると

$$D/4=(-10)^2-5\cdot 21=-5<0$$

であるから，共有点の個数は

0個

(例2) 円 $x^2+y^2=5 \cdots ①$ と直線 $x+y=k \cdots ②$ が接するとき，

kの値と接点の座標を求めよ。

①，②より，yを消去して整理すると

$$2x^2-2kx+k^2-5=0 \quad \cdots ③$$

この2次方程式の判別式をDとすると

$$D/4=(-k)^2-2\cdot(k^2-5)$$
$$=-k^2+10$$

円と直線が接するとき，$D=0$ であるから

$$-k^2+10=0 \qquad \therefore\ k=\pm\sqrt{10}$$

また，$D=0$ のとき，③の解は

$$x=-\frac{-2k}{2\cdot 2}=\frac{k}{2}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{2a}$$

よって

$k=\sqrt{10}$ のとき $x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　②より $y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$k=-\sqrt{10}$ のとき $x=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　②より $y=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

ゆえに，接点の座標は

$k=\sqrt{10}$ のとき $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$，$k=-\sqrt{10}$ のとき $\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2}, -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$