

22

対数関数を含む不等式①

(例1) 次の不等式を解け。

$$(1) \log_2 x < 3$$

$$(2) \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} (3x-2)$$

$$(3) \log_2(x-2) < 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$$

point

(真数) > 0, 底) > 0, (底) ≠ 1

底をそろえて、真数を比較

底が 1 より大きいか小さいかに注意

(例2) 次の不等式を解け。

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 3x^3 + 1 > 0$$

point

(真数) > 0, (底) > 0, (底) ≠ 1

底をそろえて, $\log_a x = 1$ とおきえ

→ おきえた文字の範囲に注意

真数は正であるから

$$x > 0, 3x^3 > 0$$

つまり

$$x > 0 \cdots ①$$

与えられた不等式より

$$(\log_3 x)^2 - \frac{\log_3 3x^3}{\log_3 9} + 1 > 0$$

$$(\log_3 x)^2 - \frac{1}{2}(\log_3 3 + \log_3 x^3) + 1 > 0$$

$$(\log_3 x)^2 - \frac{1}{2}(1 + 3\log_3 x) + 1 > 0$$

$$2(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 1 > 0$$

$(2\log_3 x - 1)(\log_3 x - 1) > 0$ + $\log_3 x$ を 1 つ因みと見る

$$\log_3 x < \frac{1}{2}, 1 < \log_3 x$$

$$\log_3 x < 3^{\frac{1}{2}}, 3^1 < \log_3 x$$

底 3 は 1 より大きいから

$$x < \sqrt{3}, 3 < x \cdots ②$$

①, ② より

$$0 < x < \sqrt{3}, 3 < x,,$$

$$(1) \log_2 x < 3$$

真数は正であるから

$$x > 0 \cdots ①$$

与えられた不等式より

$$\log_2 x < \log_2 2^3$$

底 2 は 1 より大きいから

$$x < 8 \cdots ②$$

①, ② より

$$0 < x < 8,,$$

$$(2) \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} (3x-2)$$

真数は正であるから

$$x > 0, 3x-2 > 0$$

つまり

$$x > \frac{2}{3} \cdots ①$$

与えられた不等式より, 底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから

$$x \geq 3x-2 \quad + \text{不等号の向きを逆転}$$

$$\therefore x \leq 1 \cdots ②$$

①, ② より

$$\frac{2}{3} < x \leq 1,,$$

$$(3) \log_2(x-2) < 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$$

真数は正であるから

$$x-2 > 0, x-4 > 0$$

つまり

$$x > 4 \cdots ①$$

与えられた不等式より

$$\log_2(x-2) < \log_2 2 + \frac{\log_2(x-4)}{\log_2 \frac{1}{2}}$$

$$\log_2(x-2) < \log_2 2 - \log_2(x-4)$$

$$\log_2(x-2) < \log_2 \frac{2}{x-4}$$

底 2 は 1 より大きいから

$$x-2 < \frac{2}{x-4}$$

$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

$$\therefore 3-\sqrt{3} < x < 3+\sqrt{3} \cdots ②$$

①, ② より

$$4 < x < 3+\sqrt{3},,$$