15

・3次関数の最大・最小 ②

(例) $a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ $(0\leqq x\leqq a)$ の

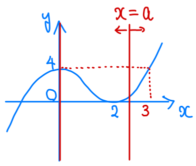
最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

$f'(x)=3x^2-6x$

$=3x(x-2)$

より，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



ここで，$f(x)=4$ となる x を求める。

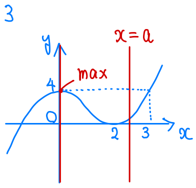
$x^3-3x^2+4=4$

$x^2(x-3)=0$ $\therefore x=0,3$

まず，最大値 $M(a)$ について考える。

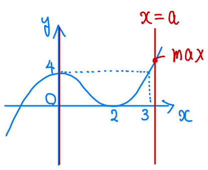
(i) $0<a<3$ のとき

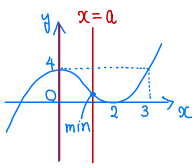
$M(a)=f(0)=4$



(ii) $3\leqq a$ のとき

$M(a)=f(a)=a^3-3a^2+4$





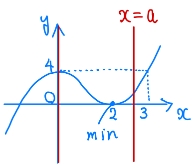
次に，最小値 $m(a)$ について考える。

(iii) $0<a<2$ のとき

$m(a)=f(a)=a^3-3a^2+4$

(iv) $2\leqq a$ のとき

$m(a)=f(2)=0$



以上より

$$M(a)=\begin{cases} 4 & (0<a<3) \\ a^3-3a^2+4 & (3\leqq a) \end{cases}$$ //

$$m(a)=\begin{cases} a^3-3a^2+4 & (0<a<2) \\ 0 & (2\leqq a) \end{cases}$$ //