10

・条件つきの等式の証明

(例1) $a+b+c=0$ のとき，等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$ を証明せよ。

point
ー文字消去

$a+b+c=0$ より $c=-(a+b)$ であるから

$a^3+b^3+c^3-3abc$ ← Ⅲの方針

$=a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3-3ab\{-(a+b)\}$

$=a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)$

$=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3a^2b+3ab^2$

$=0$

よって

$a^3+b^3+c^3=3abc$ □

※ 以下のような解答はアウト！

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ ← $a^3+b^3+c^3=3abc$ が成り立つか どうかわからないのに「$=0$」としている

$a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3-3ab\{-(a+b)\}=0$

$a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)=0$

$a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3a^2b+3ab^2=0$

$0=0$

よって

$a^3+b^3+c^3=3abc$ □

(例2) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，等式 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ を証明せよ。

point
比の値を文字でおく

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと

$a=bk$，$c=dk$

これらを代入して

(左辺) $=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$

(右辺) $=\frac{bk-dk}{b-d}=\frac{k(b-d)}{b-d}=k$

よって，(左辺)＝(右辺) であるから ← Ⅱの方針

$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ □

(例3) $a:b:c=1:2:3$，$a+b+c=18$ のとき，a,b,c の値を求めよ。

point
$a:b:c=x:y:z$ のとき
$a=xk$，$b=yk$，$c=zk$

$a:b:c=1:2:3$ のとき

$a=k$，$b=2k$，$c=3k$

とおける。$a+b+c=18$ より

$k+2k+3k=18$ $\therefore k=3$

以上より

$a=3$，$b=6$，$c=9$