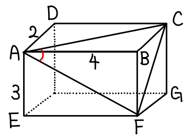
19

・三角比と空間図形

(例1) 右の図の直方体ABCD−EFGHにおいて

△AFCの面積を求めよ。



三平方の定理より

$AC^2 = 2^2 + 4^2 = 20$

$AF^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

$FC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

△AFCにおいて，余弦定理より

$FC^2 = AC^2 + AF^2 - 2AC \cdot AF \cos\angle CAF$

$13 = 20 + 25 - 2\sqrt{20}\sqrt{25}\cos\angle CAF$

$\therefore \cos\angle CAF = \frac{8}{5\sqrt{5}}$

$\sin\angle CAF > 0$ であるから

$\sin\angle CAF = \sqrt{1 - \cos^2\angle CAF}$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{8}{5\sqrt{5}}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{61}}{5\sqrt{5}}$

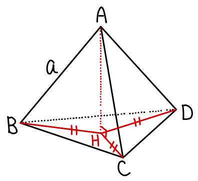
よって

$\triangle AFC = \frac{1}{2} AC \cdot AF \sin\angle CAF$

$= \frac{1}{2}\, 2\sqrt{5}\ 5\ \frac{\sqrt{61}}{5\sqrt{5}}$

$= \sqrt{61}$ 〃

(例2) 一辺の長さがaの正四面体の体積を求めよ。



Aから△BCDに垂線AHを下ろすと

△ABH≡△ACH≡△ADH ← それぞれ直角三角形で AH共通，AB=AC=AD

であるから，

$BH = CH = DH$

よって，Hは△BCDの外接円の中心である。

つまり，BHは△BCDの外接円の半径であるから

$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2BH \quad \therefore BH = \frac{a}{\sqrt{3}}$

△ABHにおいて，三平方の定理より

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}$

$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{3} a$

また，△BCDの面積は

$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

よって，四面体ABCDの体積は

$\frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \cdot AH$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a$

$= \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ 〃

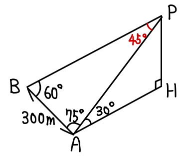
一辺の長さがaの正三角形の面積	$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
一辺の長さがaの正四面体の体積	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

(例3) 300m離れた2地点A,Bから山頂Pを見ると

∠PAB = 75°、∠PBA = 60°

であった。また，AからPを見た仰角は30°であった。

このとき，山頂Pと地点Aの標高差PHを求めよ。



$\angle APB = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$

△ABPにおいて，正弦定理より

$\frac{300}{\sin 45^\circ} = \frac{AP}{\sin 60^\circ}$

$AP = \frac{300}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 60^\circ$

$= \frac{300}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 150\sqrt{6}$

よって，△PAHに着目すると

$PH = AP \sin 30^\circ$

$= 150\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}$

$= 75\sqrt{6}$ (m) 〃