

14

・1次不定方程式

(例1) 方程式 $2x - 5y = 0$ の整数解をすべて求めよ。

$$2x - 5y = 0 \text{ より}$$

$$2x = 5y \cdots ①$$

2 と 5 は互いに素であるから、 x は 5 の倍数である。

よって

$$x = 5k \quad (k \text{ は整数})$$

と表せる。これを①に代入して

$$y = 2k$$

以上より

$$x = 5k, y = 2k \quad (k \text{ は整数}) \quad \leftarrow \text{無数に存在する}$$

(例2) 方程式 $308x + 255y = 1 \cdots ①$ の整数解をすべて求めよ。

point

整数は積に強い

$$308 = 255 \cdot 1 + 53 \quad \text{より} \quad 53 = 308 - 255 \cdot 1$$

$$255 = 53 \cdot 4 + 43 \quad \text{より} \quad 43 = 255 - 53 \cdot 4$$

$$53 = 43 \cdot 1 + 10 \quad \text{より} \quad 10 = 53 - 43 \cdot 1$$

$$43 = 10 \cdot 4 + 3 \quad \text{より} \quad 3 = 43 - 10 \cdot 4$$

$$10 = 3 \cdot 3 + 1 \quad \text{より} \quad 1 = 10 - 3 \cdot 3 \quad \leftarrow 308 \text{ と } 255 \text{ は互いに素}$$

よって

$$1 = 10 - 3 \cdot 3 = 10 - (43 - 10 \cdot 4) \cdot 3$$

$$= (10 \cdot 13 + 43 \cdot (-3)) = (53 - 43 \cdot 1) \cdot 13 + 43 \cdot (-3)$$

$$= 53 \cdot 13 + 43 \cdot (-16) = 53 \cdot 13 + (255 - 53 \cdot 4) \cdot (-16)$$

$$= 53 \cdot 77 + 255 \cdot (-16) = (308 - 255 \cdot 1) \cdot 77 + 255 \cdot (-16)$$

$$= 308 \cdot 77 + 255 \cdot (-93)$$

ゆえに

$$308 \cdot 77 + 255 \cdot (-93) = 1 \cdots ②$$

①-② より

$$308(x - 77) + 255(y + 93) = 0$$

$$308(x - 77) = -255(y + 93) \cdots ③ \quad \leftarrow \text{整数は積に強い}$$

ここで 308 と 255 は互いに素であるから、 $x - 77$ は 255 の倍数である。

よって

$$x - 77 = 255k \quad (k \text{ は整数})$$

これを③に代入して、整理すると

$$y + 93 = -308k$$

以上より

$$x = 255k + 77, y = -308k - 93 \quad (k \text{ は整数}),$$

(例3) 方程式 $71x + 33y = 4 \cdots ①$ の整数解をすべて求めよ。

$$71 = 33 \cdot 2 + 5 \quad \text{より} \quad 5 = 71 - 33 \cdot 2$$

$$33 = 5 \cdot 6 + 3 \quad \text{より} \quad 3 = 33 - 5 \cdot 6$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2 \quad \text{より} \quad 2 = 5 - 3 \cdot 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1 \quad \text{より} \quad 1 = 3 - 2 \cdot 1 \quad \leftarrow 71 \text{ と } 33 \text{ は互いに素}$$

よって

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1$$

$$= 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = (33 - 5 \cdot 6) \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$$

$$= 33 \cdot 2 + 5 \cdot (-13) = 33 \cdot 2 + (71 - 33 \cdot 2) \cdot (-13)$$

$$= 33 \cdot 28 + 71 \cdot (-13)$$

ゆえに

$$71 \cdot (-13) + 33 \cdot 28 = 1 \cdots ②$$

①-② × 4 より

$$71(x + 52) + 33(y - 112) = 0$$

$$71(x + 52) = -33(y - 112)$$

ここで 71 と 33 は互いに素であるから、 $x + 52$ は 33 の倍数である。

よって

$$x + 52 = 33k \quad (k \text{ は整数})$$

これを③に代入して、整理すると

$$y - 112 = -71k$$

以上より

$$x = 33k - 52, y = -71k + 112 \quad (k \text{ は整数}),$$

$ax + by = c \cdots ①$ (a, b は互いに素) を満たす整数 x, y の求め方

1. ①の解を (x_1, y_1) 見つける \leftarrow カンでも互除法でもよい

2. (x_1, y_1) を①に代入した式 $ax_1 + by_1 = c \cdots ②$ として

①-② より

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \cdots ③ \quad \leftarrow \text{整数は積に強い}$$

をくる。

3. a, b は互いに素であるから

$$x - x_1 = bk \quad (k \text{ は整数})$$

これを③に代入して

$$y - y_1 = -ak$$

ゆえに

$$x = bk + x_1, y = -ak + y_1 \quad (k \text{ は整数})$$