15

・対偶を利用した証明

> 命題 $p \Rightarrow q$ を対偶を利用して証明する
>
> Ⅰ その対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を証明する
>
> Ⅱ もとの命題は正しいと結論づける
>
> (命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する)

(例1) n を整数とするとき、n^2 が3の倍数ならば n は3の倍数であることを証明せよ。

$p \Rightarrow q$

与えられた命題の対偶

「n が3の倍数でないならば、n^2 は3の倍数でない」← $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

について証明する。

n が3の倍数でないとき、k を整数として

$$n = 3k+1 \text{ または } n = 3k+2$$

と表せる。

(i) $n = 3k+1$ のとき

$$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$$

よって、n^2 は3の倍数でない。

(ii) $n = 3k+2$ のとき

$$n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$$

よって、n^2 は3の倍数でない。

(i),(ii) より、対偶が真であるから、もとの命題も真である。□

(例2) m、n を整数とするとき、mn が偶数ならば、m または n は偶数であることを証明せよ。

$p \Rightarrow q$

与えられた命題の対偶

「m.n がともに奇数ならば、mn は奇数である」← $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

について証明する。

m.n がともに奇数であるとき、k、l を整数として

$$m = 2k+1,\ n = 2l+1$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned} mn &= (2k+1)(2l+1) \\ &= 4kl+2k+2l+1 \\ &= 2(2kl+k+l)+1 \end{aligned}$$

よって、mn は奇数である。

以上より、対偶が真であるから、もとの命題も真である。□