

33

三角関数を含む関数の最大・最小③

(例1) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、関数

$$y = \sin \theta + \cos \theta$$

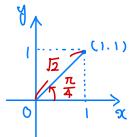
の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

point
合成を用いて、三角関数を統一する
おまけ → おまけた文字の範囲に注意

$$\begin{aligned} y &= \sin \theta + \cos \theta \\ &\textcircled{R} \quad \textcircled{G} \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$\theta + \frac{\pi}{4} = t$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とき

$$\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \quad \text{つまり} \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$$



このとき

$$y = \sqrt{2} \sin t \quad (\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4})$$

であるから

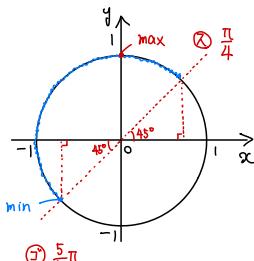
$t = \frac{\pi}{2}$ のとき 最大値 $\sqrt{2}$

$t = \frac{5\pi}{4}$ のとき 最小値 $-\sqrt{2}$

$\theta + \frac{\pi}{4} = t$ であるから

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき 最大値 $\sqrt{2}$

$\theta = \pi$ のとき 最小値 -1 ..

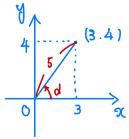


(例2) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、関数

$$y = 3 \sin \theta + 4 \cos \theta$$

の最大値と最小値を求めよ。

$$\begin{aligned} y &= 3 \sin \theta + 4 \cos \theta \\ &\textcircled{R} \quad \textcircled{G} \\ &= 5 \sin \left(\theta + d \right) \quad (\text{ただし}, \sin d = \frac{4}{5}, \cos d = \frac{3}{5}) \end{aligned}$$



$\theta + d = t$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とき

$$d \leq \theta + d \leq \pi + d \quad \text{つまり} \quad d \leq t \leq \pi + d$$

このとき

$$y = 5 \sin t \quad (d \leq t \leq \pi + d) \quad + d \text{は定数}$$

であるから

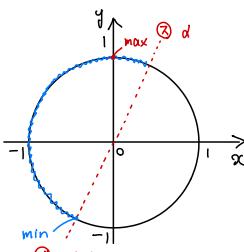
$t = \frac{\pi}{2}$ のとき 最大値 $5 + 5 \cdot 1$

$t = \pi + d$ のとき 最小値 $5 \sin(\pi + d)$

ここで

$$\begin{aligned} 5 \sin(\pi + d) &= 5 \cdot (-\sin d) \\ &= 5 \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \sin(\pi + d) &= 5 \{ \sin \pi \cos d + \cos \pi \sin d \} \\ &= -5 \sin d \quad \text{としてもよい} \end{aligned}$$



以上より

最大値 $5 + 5 \cdot 1$, 最小値 -4 ..