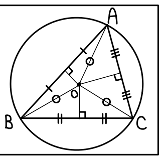
6

・三角形の五心

　└→ 外心、垂心、重心、内心、傍心

① 外心

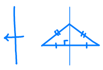
三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わり、
その交点を外心という。また、外心を中心として
三角形の各頂点を通る外接円が存在する。

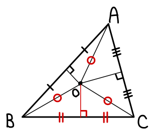


(証明)

線分AB、ACの垂直二等分線の交点をOとすると

OA=OB
OA=OC ←





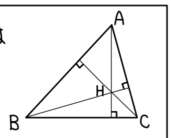
よって、OB=OCとなるから、Oは線分BCの垂直二等分線上にも存在する。

ゆえに、三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わる。

また、OA=OB=OCであるから、Oを中心として三角形の各頂点を通る外接円が存在する

② 垂心

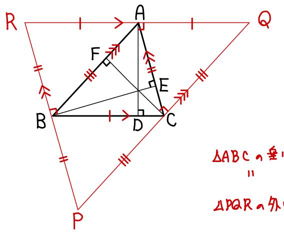
三角形の各頂点から、向かい合う辺または
その延長に下ろした垂線は1点で交わり、
その交点を垂心という。



(証明)

△ABCの各頂点から、向かい合う辺または、その延長に下ろした垂線をAD、BE、CFとする。

次に、△ABCの各頂点を通り、それぞれの対辺に平行な直線を引き、その交点を右の図のように、P、Q、Rとする。



△ABCの垂心
＝
△PQRの外心

ここで、四角形ABCQとACBRは平行四辺形であるから

AQ=BC、　RA=BC　　∴ AQ=RA

また、AD⊥BC、RQ//BCであるから

AD⊥RQ

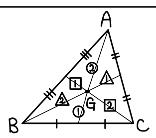
よって、ADは線分RQの垂直二等分線である。

同様に、BE、CFはそれぞれ、線分RP、PQの垂直二等分線である。

よって、AD、BE、CFは△PQRの外心で1点で交わる。

③ 重心

三角形の3つの中線は1点で交わり、
その交点を重心という。また、重心は
各中線を2:1に内分する。

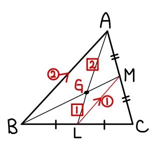


(証明)

△ABCにおいて、BC、CA、ABの中点をそれぞれL、M、Nとする。

右の図において、L、Mはそれぞれ辺BC、CAの中点であるから、

AB//ML、AB:ML=2:1 ← 中点連結定理

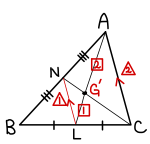


よって、ALとBMの交点をGとすると

AG:GL=AB:ML=2:1

右の図において、同様に考える。ALとCNの交点をG'とすると

AG':G'L=AC:NL=2:1



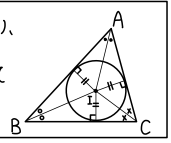
よって、GとG'はALを2:1に内分する点であるからこの2点は一致する。

ゆえに、3つの中線は1点Gで交わり、中線ALを2:1に内分する。

同様に、BG:GM=2:1、CG:GN=2:1であるから、Gは3つの中線を2:1に内分する。

④ 内心

三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わり、
その交点を内心という。また、内心を中心として
三角形の各辺に接する内接円が存在する。

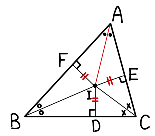


(証明)

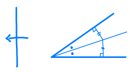
∠Bと∠Cの二等分線の交点をIとし、Iから

△ABCの各辺に下ろした垂線を、右の図のように

D、E、Fとすると



IF=ID
IE=ID ←



よって、IF=IEとなるから、Iは∠Aの二等分線上にも存在する。

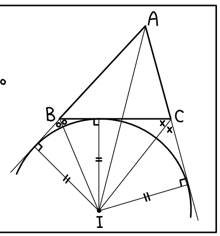
ゆえに、三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。

また、ID=IE=IF、ID⊥BC、IE⊥CA、IF⊥ABであるから

Iを中心として三角形の各辺に接する内接円が存在する。

⑤ 傍心

三角形の2つの外角の二等分線と1つの外角の
二等分線は1点で交わり、その交点を傍心という。
また、傍心を中心として、三角形の各辺または
その延長に接する傍接円が存在する。
※傍接円は3つ存在する。

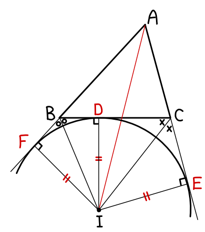


(証明)

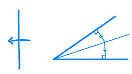
∠Bと∠Cの二等分線の交点をIとし、Iから

△ABCの各辺およびその延長線上に下ろした

垂線を、右の図のようにD、E、Fとすると



IF=ID
IE=ID ←



よって、IF=IEとなるから、Iは∠Aの二等分線上にも存在する。

ゆえに、三角形の2つの外角の二等分線と1つの内角の二等分線は1点で交わる。

また、ID=IE=IF、ID⊥BC、IE⊥AC、IF⊥ABであるから

Iを中心として三角形の各辺に接する内接円が存在する。