25

・円の接線の方程式

中心 $C(a,b)$ の円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $P(x_1,y_1)$ における

この円の接線 ℓ の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

特に、原点中心のとき、接線 ℓ の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

(証明)

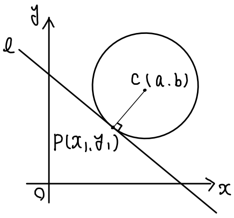
i) $x_1 \neq a$ かつ $y_1 \neq b$ のとき

CP の傾きは $\dfrac{y_1-b}{x_1-a}$ であるから、接線 ℓ の傾きは

$-\dfrac{x_1-a}{y_1-b}$ ← $CP \perp \ell$ より 傾きの積 -1

よって、ℓ の方程式は

$$y-y_1=-\frac{x_1-a}{y_1-b}(x-x_1)$$



$(x_1-a)(x-x_1)+(y_1-b)(y-y_1)=0$ ← これでも良いが覚えにくい

$(x_1-a)(x-a+a-x_1)+(y_1-b)(y-b+b-y_1)=0$

$(x_1-a)(x-a)+(x_1-a)(a-x_1)+(y_1-b)(y-b)+(y_1-b)(b-y_1)=0$

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$ …①

また、P は円周上の点であるから

$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$ …②

①.② より

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$ …③

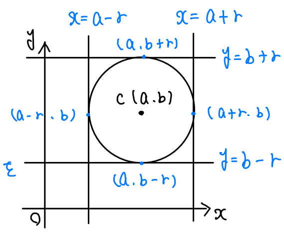
ii) $x_1=a$ または $y_1=b$ のとき

ℓ の方程式は、右の図のように

$x=a+r$、$x=a-r$

$y=b+r$、$y=b-r$

これらは、③で表される。← ③に接点の座標を代入すればよい。



以上より、接線 ℓ の方程式は

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$ ∎

(例1) 次の円の、円周上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2+y^2=5$, $P(-1,2)$

$-1\cdot x+2\cdot y=5$

$\therefore\ x-2y+5=0$ //

(2) $(x-2)^2+(y+1)^2=10$, $P(3,-4)$

$(3-2)(x-2)+(-4+1)(y+1)=10$

$\therefore\ x-3y-15=0$ //

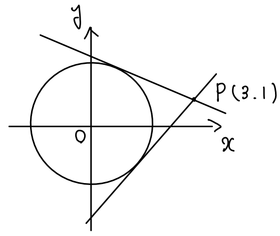
(例2) 点 $P(3,1)$ を通り $x^2+y^2=5$ に接する直線の方程式を求めよ。

point

接線の方程式は

$3x+y=5$

ではない!



接点を $Q(x_1,y_1)$ とすると

$x_1^2+y_1^2=5$ …①

また、Q における接線の方程式は

$x_1x+y_1y=5$ …②

これが、点 $P(3,1)$ を通るので

$3x_1+y_1=5$ …③

①.③を連立させて解くと

$(x_1,y_1)=(1,2)(2,-1)$

これを②に代入して

$x+2y=5$　$2x-y=5$ //