9

§2 等式と不等式の証明

・等式の証明

> 等式 A=B の証明
>
> I. A か B の一方を変形して、他方を導く
>
> II. A, B それぞれを変形して、同じ式を導く
>
> III. A−B=0 であることを示す

(例1) 等式 $(a+b)^3-3ab(a+b)=a^3+b^3$ を証明せよ。

$(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=a^3+3\cancel{a^2b}+3\cancel{ab^2}+b^3-3\cancel{a^2b}-3\cancel{ab^2}$

$=a^3+b^3$ □ ← I の方針

よって

$(a+b)^3-3ab(a+b)=a^3+b^3$ □

(例2) 等式 $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$ を証明せよ。

(左辺) $=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$

(右辺) $=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-(a^2y^2+2abxy+b^2x^2)$

$=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$

よって、(左辺)=(右辺) であるから ← II の方針

$(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$ □

※ 以下のような解答はアウト!

$(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$ ← 成り立つかどうかわからないのに等号で結んでいる

$a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-(a^2y^2+2abxy+b^2x^2)$

$a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$

よって

$(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$ □