

指数関数を含む不等式

(例1) 次の不等式を解け。

$$(1) 4^x < 8 \quad (2) \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$$

point

底をそろえて、指数を比較

底が1より大きい小さいかに注意

$$(1) 4^x < 8$$

$$2^{2x} < 2^3 \quad \leftarrow \text{底2でそろえる}$$

よって、底2は1より大きいから

$$2x < 3 \quad \therefore x < \frac{3}{2} //$$

$$(2) \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x+1)} \quad \leftarrow \text{底}\frac{1}{3}\text{でそろえる}$$

よって、底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから

$$x \leq 2(x+1) \quad \leftarrow \text{不等号の向き逆転}$$

$$\therefore x \geq -2 //$$

(例2) 次の不等式を解け。

$$(1) 2 \cdot 4^x - 2^x - 6 > 0 \quad (2) \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - 10\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 \leq 0$$

point

$a^x = t$  とおきかえ

→ おきかえた文字の範囲に注意

$$(1) 2 \cdot (2^x)^2 - 2^x - 6 > 0$$

ここで、 $2^x = t$  とおくと

$$t > 0$$

この不等式は

$$2t^2 - t - 6 > 0$$

$$(2t+3)(t-2) > 0$$

$2t+3 > 0$  であるから

$$t-2 > 0 \quad \therefore t > 2$$

つまり

$$2^x > 2 \quad \therefore x > 1 //$$

$$(2) 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 \leq 0 \quad \leftarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x^2$$

ここで、 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$  とおくと

$$t > 0$$

この不等式は

$$4t^2 - 10t + 1 \leq 0$$

$$(4t-1)(t-1) \leq 0 \quad \therefore \frac{1}{4} \leq t \leq 1$$

これは、 $t > 0$  をみたす。

よって

$$\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

ゆえに、底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから

$$0 \leq x \leq 2 \quad \leftarrow \text{不等号の向き逆転}$$