

・ 3次関数の決定

例1) 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $x=1$ で極大値 0 をとり、
 $x=2$ で極小値 -1 をとるとき、定数 a, b, c, d の値を求めよ。

point

微分可能な関数 $f(x)$ において関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとる $\Rightarrow f'(a) = 0$

※ 逆は成り立たない。

 $f'(1) = 0, f'(2) = 0$ は必要条件にすぎない(少なくとも必要な条件であって、本当に
 $x=1$ や $x=2$ で極値をとるかはわからない)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

 $x=1$ で極大値 0 , $x=2$ で極小値 -1 をとるので

$$f(1) = 0, f'(1) = 0, f(2) = -1, f'(2) = 0$$

つまり

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 8a+4b+2c+d=-1 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$$

$$\therefore a=2, b=-9, c=12, d=-5$$

であるから

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

逆に、この関数が条件を満たすことを示す

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$= 6(x-1)(x-2)$$

よ、増減表は次のようになる。

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗

よって、この関数 $f(x)$ は条件を満たす。

以上より

$$a=2, b=-9, c=12, d=-5$$

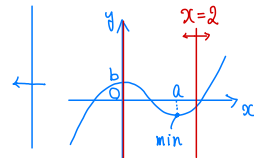
例2) $0 < a < 2$ とする。関数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + b$ ($0 \leq x \leq 2$) の
 最大値が 2 , 最小値が -3 のとき、定数 a, b の値を求めよ。

$$f'(x) = 6x^2 - 6ax$$

$$= 6x(x-a)$$

よ、増減表は次のようになる。

x		0	...	a	...	2
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	\nearrow	b	\searrow	$-a^3+b$	\nearrow	$-12a+b+16$



よって

最大値は $f(0) = b$ または $f(2) = -12a + b + 16$ であり、より大きい方が最大値最小値は $f(a) = -a^3 + b$ ここで、 $f(0)$ と $f(2)$ の大小を比較する

$$f(2) - f(0) = -12a + 16$$

であるから

$$0 < a < \frac{4}{3} \text{ のとき } f(0) < f(2)$$

$$\frac{4}{3} \leq a < 2 \text{ のとき } f(0) \geq f(2)$$

(i) $0 < a < \frac{4}{3}$ のとき、 $f(2) = 2$, $f(a) = -3$ であるから

$$\begin{cases} -12a + b + 16 = 2 \\ -a^3 + b = -3 \end{cases}$$

b を消去して

$$a^3 - 12a + 11 = 0$$

$$(a-1)(a^2+a-11) = 0 \quad \therefore a=1, \frac{-1 \pm \sqrt{45}}{2}$$

よって、 $0 < a < \frac{4}{3}$ を満たすものは

$$a=1$$

このとき、 $-a^3 + b = -3$ より

$$b = -2$$

(ii) $\frac{4}{3} \leq a < 2$ のとき、 $f(0) = 2$, $f(a) = -3$ であるから

$$\begin{cases} b = 2 \\ -a^3 + b = -3 \end{cases}$$

よって

$$a^3 = 5 \quad \therefore a = \sqrt[3]{5}$$

ここで、 $\frac{4}{3} \leq a < 2$ より $\frac{64}{27} \leq a^3 < 8$ であるから $a = \sqrt[3]{5}$ は $\frac{4}{3} \leq a < 2$ を満たす。

以上より

$$(a, b) = (1, -2), (\sqrt[3]{5}, 2)$$