6

・展開の公式

1　$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$　　$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

2　$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$　← 和と差の積が平方の差

3　$(x+a)(x+b) = x^2+\underbrace{(a+b)}_{和}x+\underbrace{ab}_{積}$

人 4　$(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd$

5　$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

6　$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$　　$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

(5の証明)

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

← $(a+b)^2(a+b)$
$= (a^2+2ab+b^2)(a+b)$
⋮
としてもよい。

よって

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

また、この式のbを−bにおき換えると

$\{a+(-b)\}^3 = a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ □

(6の証明)

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$

$= a^3+b^3$

よって

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

また、この式のbを−bにおき換えると

$\{a+(-b)\}\{a^2-a\cdot(-b)+(-b)^2\} = a^3+(-b)^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ □

(例) 次の式を展開せよ。

(1)　$(2x-3)^2 = (2x)^2+2\cdot 2x\cdot(-3)+(-3)^2$　← $\{2x+(-3)\}^2$と捉える　$(\bigcirc+\triangle)^2 = \bigcirc^2+2\bigcirc\triangle+\triangle^2$

$= 4x^2-12x+9$ //

(2)　$(3a+2b)(3a-2b) = (3a)^2-(2b)^2$　← $(\bigcirc+\triangle)(\bigcirc-\triangle) = \bigcirc^2-\triangle^2$

$= 9a^2-4b^2$ //

(3)　$(x+1)(x+3) = x^2+(1+3)x+1\cdot 3$　← $(x+a)(x+b) = x^2+和x+\boxed{積}$

$= x^2+4x+3$ //

(4)　$(x+2y)(x-3y) = x^2+\{2y+(-3y)\}x+2y\cdot(-3y)$　← $(x+a)(x+b) = x^2+和x+\boxed{積}$

$= x^2-xy-6y^2$ //

(5)　$(2x+1)(3x+4) = 6x^2+8x+3x+4$

$= 6x^2+11x+4$ //

(6)　$(x+2)^3 = x^3+3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2+2^3$　← $(\bigcirc+\triangle)^3 = \bigcirc^3+3\bigcirc^2\triangle+3\bigcirc\triangle^2+\triangle^3$

$= x^3+6x^2+12x+8$ //

(7)　$(2a-b)^3 = (2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot(-b)+3\cdot 2a\cdot(-b)^2+(-b)^3$　← $\{2a+(-b)\}^3$と捉える　$(\bigcirc+\triangle)^3 = \bigcirc^3+3\bigcirc^2\triangle+3\bigcirc\triangle^2+\triangle^3$

$= 8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$ //

(8)　$(x+2)(x^2-2x+4) = (x+2)(x^2-2\cdot x+2^2)$

$= x^3+2^3$

$= x^3+8$ //

(9)　$(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2) = (3a-2b)\{(3a)^2+3a\cdot 2b+(2b)^2\}$

$= (3a)^3-(2b)^3$

$= 27a^3-8b^3$ //