

15

・相加相乗平均を利用した最小問題

(例1) $x > 0$ のとき, $x + \frac{1}{x}$ の最小値を求めよ。

④ $x > 0, \frac{1}{x} > 0$ であるから

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

$= 2$ \neq どんな x を代入しても $x + \frac{1}{x}$ は 2 より小さくならない
よって、 $x + \frac{1}{x}$ の最小値は

Q,,

すべての実数 x に対して, $x^2 + 1 \geq 1$ $x^2 + 1$ の値域は $x^2 + 1 \geq 1$ すべての実数 x に対して, $x^2 + 1 \geq 0$ $x^2 + 1$ の値域は $x^2 + 1 \geq 0$	\textcircled{O} \textcircled{O} \textcircled{O} \textcircled{X}	同じ不等式でも、文脈によって正誤が変わる。

とりうる値の範囲 $\rightarrow x^2 + 1 = 0$ となる x は存在しない

④ $x > 0, \frac{1}{x} > 0$ であるから

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

$= 2$

等号が成り立つのは

$$x = \frac{1}{x}$$

つまり

$$x = 1 \quad (\because x > 0) \quad \leftarrow \text{確かに } x + \frac{1}{x} = 2 \text{となる } x \text{ が存在する。}$$

のときである。

よって、 $x + \frac{1}{x}$ の最小値は

Q,,

point

値域を求める問題で相加相乗平均を
使うときは、等号成立条件を必ず4つ!

(例2) $x > 0, y > 0$ のとき $(x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x})$ の最小値を求めよ。

④ $x > 0, \frac{1}{y} > 0, y > 0, \frac{4}{x} > 0$ であるから

$$\begin{aligned} (x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x}) &\geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{y}} \cdot 2\sqrt{y \cdot \frac{4}{x}} \\ &= 4\sqrt{x \cdot \frac{1}{y} \cdot y \cdot \frac{4}{x}} \\ &= 8 \end{aligned}$$

よって、 $(x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x})$ の最小値は

Q,,

(ダメな理由)

等号が成り立つのは

$$x = \frac{1}{y} \quad \text{かつ} \quad y = \frac{4}{x} \quad \text{のとき}$$

つまり

$$xy = 1 \quad \text{かつ} \quad xy = 4 \quad \text{のとき}$$

これを満たす x, y は存在しない

$$\begin{aligned} \textcircled{R} \quad (x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x}) &= xy + \frac{4}{xy} + 5 \\ \text{ここで}, xy > 0, \frac{4}{xy} > 0 &\text{であるから} \\ xy + \frac{4}{xy} + 5 &\geq 2\sqrt{\frac{4}{xy}} + 5 \\ &= 9 \end{aligned}$$

等号が成り立つのは

$$xy = \frac{4}{xy}$$

つまり

$$xy = 2 \quad (\because xy > 0)$$

のときである。

よって、最小値は

Q,,