§2 余り

・商と余り

$19 \div 5 = 3 \cdots 4 \Rightarrow 19 = 5 \times \underset{商}{3} + \underset{余}{4}$

$-19 \div 5 = ?$ $\Rightarrow -19 = 5 \times \underset{商}{(-4)} + \underset{余}{1}$ $\nLeftarrow$ $-19 = 5 \times (-3) + (-4)$ X

$0 \leqq r < 5$ でない

整数 a と正の整数 b に対して

$$a = b\underset{商}{q} + \underset{余}{r} \quad 0 \leqq r < b$$

を満たす整数 q、r がただ1通りに定まる。

m、k を正の整数とし、整数 a、b を m で割ったときの余りを r、r' とすると、次のことが成り立つ。

$a+b$ を m で割った余りは、$r+r'$ を m で割った余りに等しい

$a-b$ を m で割った余りは、$r-r'$ を m で割った余りに等しい

ab を m で割った余りは、rr' を m で割った余りに等しい

a^k を m で割った余りは、r^k を m で割った余りに等しい

(例1) a、b は整数とする。

a を4で割ると余り2、b を4で割ると余り3であるとき、

$a+b$、$a-b$、ab をそれぞれ4で割ったときの余りを求めよ。

$a = 4k + 2$
$b = 4l + 3$ (k、l は整数)

と表せる。

$a+b = (4k+2) + (4l+3)$

$= 4k + 4l + 5$

$= 4(k+l+1) + 1$

よって、$a+b$ を4でわったときの余りは1である。

$a-b = (4k+2) - (4l+3)$

$= 4k - 4l - 1$

$= 4(k-l-1) + 3$

よって、$a-b$ を4でわったときの余りは3である。

$ab = (4k+2)(4l+3)$

$= 16kl + 12k + 8l + 6$

$= 4(4kl + 3k + 2l + 1) + 2$

よって、ab を4でわったときの余りは2である。

この(例1)において、4で割ったときの余りについて考える。

a	b	$a+b$	$a-b$	ab
2	3	1	3	2

2+3を4でわった余り　2−3を4でわった余り　2·3を4でわった余り

(例2) 37^{100} を6で割ったときの余りを求めよ。

37を6でわった余りは1である。

よって 37^{100} を6でわった余りと 1^{100} を6でわった余りは等しいので

求める余りは1である。