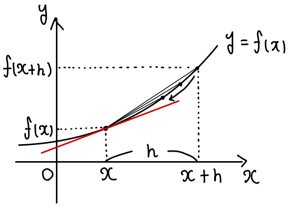
5

・極限値と導関数

微分係数 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

導関数 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$



(例) 次の関数を導関数の定義にしたがって微分せよ。

(1) $f(x)=x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0} 1$$
$$=1 \,//$$

(2) $f(x)=x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)$$
$$=2x \,//$$

(3) $f(x)=c$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0} 0$$
$$=0 \,//$$

(4) $f(x)=x^n$ (nは自然数)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

ここで、二項定理より

$$(x+h)^n={}_nC_0\,x^n+{}_nC_1\,x^{n-1}h+{}_nC_2\,x^{n-2}h^2+\cdots+{}_nC_n\,h^n$$
$$=x^n+nx^{n-1}h+{}_nC_2\,x^{n-2}h^2+\cdots+{}_nC_n\,h^n$$

であるから、$h\neq 0$ のとき

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}+\underbrace{{}_nC_2\,x^{n-2}h+\cdots+{}_nC_n\,h^{n-1}}_{\text{すべてhを含む}}$$

よって

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=nx^{n-1} \,//$$