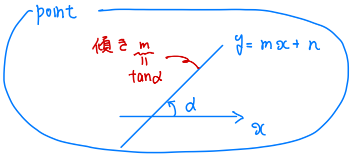
24

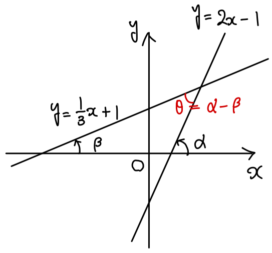
・2直線のなす角

(例1) 次の2直線のなす角を求めよ。ただし、なす角は鋭角であるとする。

(1) $y = 2x - 1$, $y = \frac{1}{3}x + 1$

(2) $2x - \sqrt{3}y + 1 = 0$, $x + 3\sqrt{3}y - 3 = 0$





(1) 右の図のように, 角 α, β, θ をとると

$\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = \frac{1}{3}$, $\theta = \alpha - \beta$

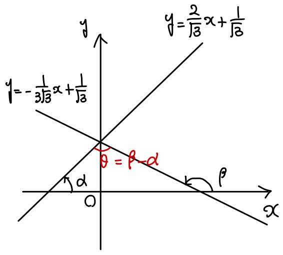
であるから

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2\cdot\frac{1}{3}} = 1$$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$ ($\because\ 0 < \theta < \pi$)

よって, なす角は

$\frac{\pi}{4}$ // ← $\frac{\pi}{4}$ は鋭角なのでそのまま



(2) 2直線は

$y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{1}{3\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

と表せる。

右の図のように, 角 α, β, θ をとると

$\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\tan\beta = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $\theta = \beta - \alpha$

であるから

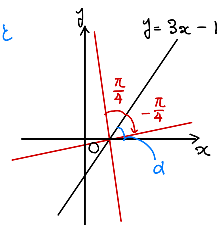
$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{-\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$$

$\therefore\ \theta = \frac{2}{3}\pi$ ($\because\ 0 < \theta < \pi$)

よって, なす角は

$\frac{\pi}{3}$ // ← $\frac{2}{3}\pi$ は鈍角なので, なす角は $\pi - \frac{2}{3}\pi$

(例2) $y = 3x - 1$ と $\frac{\pi}{4}$ の角をなす直線の傾きを求めよ。



直線 $y = 3x - 1$ と x軸の正方向とのなす角を α とすると

$\tan\alpha = 3$

求める直線の傾きは

$$\tan\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\frac{\pi}{4}}{1 \mp \tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{3 \pm 1}{1 \mp 3\cdot 1} = -2,\ \frac{1}{2}$$ // (複号同順)