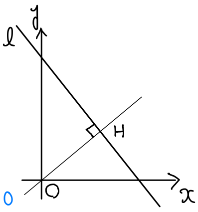
16

・点と直線の距離

> 点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
>
> $$d = \frac{|ax_1+by_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(証明)

まず、原点と直線 l : $ax+by+c=0$ …① の距離を求める。



0から l に垂線 OH を下ろすと、その直線の方程式は

$bx - ay = 0$ …② ← 点 (x_1, y_1) を通り、直線 $ax+by+c=0$ に垂直な直線の方程式は $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

H は l と OH の交点であるから

①.②を連立させて解くと、

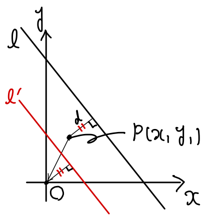
Hの座標は

$$\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}, -\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$$

よって、

$$OH = \sqrt{\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(-\frac{bc}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

次に、点 $P(x_1, y_1)$ と l の距離 d を求める。



Pが原点にくるように、Pと l を x 軸方向に $-x_1$、y 軸方向に $-y_1$ 平行移動させると、l を平行移動させた直線 l' の方程式は

$a\{x-(-x_1)\}+b\{y-(-y_1)\}+c=0$ ← $y=f(x)$ を x 軸方向に p、y 軸方向に q 平行移動 $y-q=f(x-p)$

$ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$

d は原点と l の距離に等しいから

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ← $OH = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を利用

(例) (1) 原点と直線 $x+y-1=0$ の距離

$$\frac{|1\cdot0+1\cdot0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2) 点 $(2, 1)$ と直線 $3x+4y-1=0$ の距離

$$\frac{|3\cdot2+4\cdot1-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{9}{5}$$