25

・オイラーの多面体定理

$$(\text{辺}) = (\text{頂点}) + (\text{面}) - 2$$

※辺は頂面に引け

正多面体が5種類しかない理由

凸多面体について

① 1つの頂点に集まる面の数は3以上である。

② 1つの頂点に集まる角の大きさの和は360°より小さい。

つまり、正多面体の面になる正多角形の1つの内角の大きさは

$360 \div 3 = 120°$

より小さい。つまり、正多面体の面になる正多角形は

正三角形、正方形、正五角形

以外にはない。

以下、頂点、辺、面の数を、v, e, f とする。

vertex
edge
face

(I) 各面が正三角形である正多面体が存在するとき

1つの頂点に集まる正三角形の数は

3、4、5 ← ①より2以下はx ②より6以上はx

の場合がある。

(i) 1つの頂点に集まる面の数が3のとき

$v = \frac{3f}{3} = f$, $e = \frac{3f}{2}$

よって、これらを $e = v + f - 2$ に代入して

$\frac{3f}{2} = f + f - 2$ $\quad \therefore f = 4$

(ii) 1つの頂点に集まる面の数が4のとき

$v = \frac{3f}{4}$, $e = \frac{3f}{2}$

よって、これらを $e = v + f - 2$ に代入して

$\frac{3f}{2} = \frac{3f}{4} + f - 2$ $\quad \therefore f = 8$

(iii) 1つの頂点に集まる面の数が5のとき

$v = \frac{3f}{5}$, $e = \frac{3f}{2}$

よって、これらを $e = v + f - 2$ に代入して

$\frac{3f}{2} = \frac{3f}{5} + f - 2$ $\quad \therefore f = 20$

(II) 各面が正方形である正多面体が存在するとき

1つの頂点に集まる正方形の数は

3 ← ①より2以下はx ②より4以上はx

の場合がある。

このとき

$v = \frac{4f}{3}$, $e = \frac{4f}{2} = 2f$

よって、これらを $e = v + f - 2$ に代入して

$2f = \frac{4f}{3} + f - 2$ $\quad \therefore f = 6$

(III) 各面が正五角形である正多面体が存在するとき

1つの頂点に集まる正五角形の数は

3 ← ①より2以下はx ②より4以上はx

の場合がある。

このとき

$v = \frac{5f}{3}$, $e = \frac{5f}{2}$

よって、これらを $e = v + f - 2$ に代入して

$\frac{5f}{2} = \frac{5f}{3} + f - 2$ $\quad \therefore f = 12$

以上より、正多面体は

正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体

しか存在しない。□