

16

背理法

命題 X を背理法で証明する

I 命題 X の否定を仮定する

II 矛盾を導く

III 命題 X は正しいと結論づける (矛盾が生じたのは、I が原因)

(例1) $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、 $1+3\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

命題 X

$1+3\sqrt{2}$ が無理数でない、つまり $1+3\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると、 \neg I

$$1+3\sqrt{2}=r \quad (r \text{ は有理数})$$

と表せる。

整理すると

$$\sqrt{2} = \frac{r-1}{3}$$

$\frac{r-1}{3}$ は有理数であるから、 $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。 \neg II

よって、 $1+3\sqrt{2}$ は無理数である。 \square \neg III

(例2) $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて、 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。

命題 X

$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が無理数でない、つまり $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が有理数であると仮定すると、 \neg I

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}=r \quad (r \text{ は有理数})$$

$$\therefore \sqrt{5} = r - \sqrt{3}$$

と表せる。

両辺を2乗して

$$5 = r^2 - 2\sqrt{3}r + 3$$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{r^2 - 2}{2r}$$

$\frac{r^2 - 2}{2r}$ は有理数であるから、 $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。 \neg II

よって、 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ は無理数である。 \square \neg III