

媒介変数と軌跡

点 $P(x, y)$ が、実数 t によって

$$x = t + 1, y = t^2$$

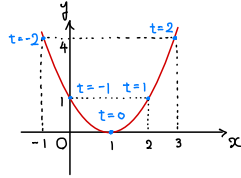
で表されるとする。

たとえば、 $t = -2, -1, 0, 1, 2$ を代入すると、 P の座標は

$$(-1, 4) (0, 1) (1, 0) (2, 1) (3, 4)$$

このように、 t の値に応じて P が 1 つに定まる

じゃあ、 P が描く軌跡は？



$$x = t + 1 \text{ より}$$

$$t = x - 1$$

これを、 $y = t^2$ に代入して

$$y = (x - 1)^2$$

よって、求める軌跡は

$$\text{放物線 } y = (x - 1)^2$$

point

$$x = \textcircled{t} + 1, y = \textcircled{t}^2 \text{ (パラメータ)}$$

これを、媒介変数表示という。

軌跡を求めるには、パラメータを消去すればよい。

(例1) 放物線 $y = x^2 + (2t - 2)x + t + 1$ の頂点を P とする。

t が 0 以上の値をとって変化するとき、 P の軌跡を求めよ。

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (2t - 2)x + t + 1 \\ &= \{x + (t - 1)\}^2 - (t - 1)^2 + t + 1 \\ &= \{x + (t - 1)\}^2 - t^2 + 3t \end{aligned}$$

よって、頂点 P の座標を (x, y) とすると

$$x = -t + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = -t^2 + 3t \quad \dots \textcircled{2}$$

← 媒介変数表示

① より

$$t = -x + 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

③ を ② に代入して

$$\begin{aligned} y &= -(-x + 1)^2 + 3(-x + 1) \\ &= -x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

また、 $t \geq 0$ であるから ③ より

$$-x + 1 \geq 0 \quad \therefore x \leq 1$$

← 定義域の確認

よって、求める軌跡は

$$\text{放物線 } y = -x^2 - x + 2 \quad (x \leq 1)$$