

・相互関係 ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

1. $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
2. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
3. $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

(例1) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta = \frac{2}{5}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta \\ &= 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \\ &= \frac{21}{25} \end{aligned}$$

よって

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{21}{25}} = \pm \frac{\sqrt{21}}{5} \quad (+ \ 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき}, -1 \leq \cos \theta \leq 1)$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ のとき}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{21}}{5} \text{ のとき}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{21}}$$

よって

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{21}}{5}, \tan \theta = \frac{2}{\sqrt{21}} \quad \text{また} \quad \cos \theta = -\frac{\sqrt{21}}{5}, \tan \theta = -\frac{2}{\sqrt{21}}$$

(例2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\cos \theta = -\frac{1}{4}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

$\sin \theta \geq 0$ であるから $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $0 \leq \sin \theta \leq 1$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

また

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$$

(例3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\tan \theta = -3$ のとき、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値を求めよ。

$$\tan \theta = -3 \text{ より, } 90^\circ < \theta < 180^\circ \text{ である。}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta} &= 1 + (-3)^2 \\ &= 1 + 9 \\ &= 10 \end{aligned}$$

よって

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{10}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき $-1 < \cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{また, } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = -3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$