17

・底の変換公式

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1,\ c\neq 1$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(証明)

$\log_a b = p$ とすると

$a^p = b$

$c>0,\ c\neq 1$ である c を底とする両辺の対数をとると

$\log_c a^p = \log_c b$　← 両辺に $\log_c$ をつける

$p\log_c a = \log_c b$

$a\neq 1$ より $\log_c a \neq 0$ であるから

$p = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　$\therefore\ \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ □

(例1)

(1) $\log_9 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 9} = \dfrac{1}{2}$ //

(2) $\log_{25}\sqrt{\frac{1}{5}} = \dfrac{\log_5\sqrt{\frac{1}{5}}}{\log_5 25} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2} = -\dfrac{1}{4}$ //

(3) $\log_2 3\cdot\log_3 4 = \cancel{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 4}{\cancel{\log_2 3}} = 2$ //

(4) $(\log_2 25 + \log_4 5)(\log_5 4 + \log_{25} 2)$

$= \left(\log_2 25 + \dfrac{\log_2 5}{\log_2 4}\right)\left(\dfrac{\log_2 4}{\log_2 5} + \dfrac{\log_2 2}{\log_2 25}\right)$

$= \left(2\log_2 5 + \dfrac{\log_2 5}{2}\right)\left(\dfrac{2}{\log_2 5} + \dfrac{1}{2\log_2 5}\right)$

$= \dfrac{5}{2}\log_2 5\cdot\dfrac{5}{2\log_2 5}$

$= \dfrac{25}{4}$ //

(例2) 次の等式を証明せよ。

一致

(1) $\log_a b\cdot\log_b \boxed{c} = \log_a \boxed{c}$

(2) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a = 1$

(1) $\log_a b\cdot\log_b c = \cancel{\log_a b}\cdot\dfrac{\log_a c}{\cancel{\log_a b}} = \log_a c$ □

(2) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a = \log_a c\cdot\log_c a = 1$ □