17

・$\sqrt{2}$が無理数であることの証明

(例1) nを整数とするとき、n^2が偶数ならばnは偶数であることを証明せよ。

命題X

point

Ⅰ 命題Xの否定を仮定する

Ⅱ 矛盾を導く

Ⅲ 命題Xは正しいと結論づける（矛盾が生じたのは、Ⅰが原因）

n^2が偶数で、nが奇数であると仮定すると ←Ⅰ

$$n = 2k+1 \quad (k\text{は整数})$$

と表せる。

このとき

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$$

n^2は奇数であるから、n^2が偶数であることに矛盾する。←Ⅱ

よって、n^2が偶数ならばnは偶数である。□ ←Ⅲ

(例2) $\sqrt{2}$は無理数であることを証明せよ。

命題X

$\sqrt{2}$が無理数でない、つまり$\sqrt{2}$が有理数であると仮定すると、←Ⅰ

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad (a, b\text{は互いに素である自然数})$$ ← aとbの最大公約数が1 つまり$\frac{a}{b}$は既約分数

と表せる。

整理すると

$$a = \sqrt{2}b \qquad \therefore a^2 = 2b^2 \cdots ①$$

よって、a^2は偶数であるから、aも偶数である。

ゆえに

$$a = 2c \quad (c\text{は自然数})$$

これを①に代入して

$$(2c)^2 = 2b^2 \qquad \therefore b^2 = 2c^2$$

よって、b^2は偶数であるから、bも偶数である。

ゆえに、aとbはともに偶数であり、公約数2をもつ。

これは、a, bが互いに素であることに矛盾する。←Ⅱ

したがって、$\sqrt{2}$は無理数である。□ ←Ⅲ