

・1次不定方程式

(例1) 方程式 $2x-5y=0$ の整数解をすべて求めよ。

$$2x-5y=0 \text{ より}$$

$$2x=5y \cdots ①$$

2と5は互いに素であるから、 x は5の倍数である。

よって

$$x=5k \text{ (} k \text{ は整数)}$$

と表せる。これを①に代入して

$$y=2k$$

以上より

$$x=5k, y=2k \text{ (} k \text{ は整数)} \quad \leftarrow \text{無数に存在する}$$

(例2) 方程式 $308x+255y=1$ の整数解をすべて求めよ。

point

整数は積に強い

$$308 = 255 \cdot 1 + 53 \quad \text{より} \quad 53 = 308 - 255 \cdot 1$$

$$255 = 53 \cdot 4 + 43 \quad \text{より} \quad 43 = 255 - 53 \cdot 4$$

$$53 = 43 \cdot 1 + 10 \quad \text{より} \quad 10 = 53 - 43 \cdot 1$$

$$43 = 10 \cdot 4 + 3 \quad \text{より} \quad 3 = 43 - 10 \cdot 4$$

$$10 = 3 \cdot 3 + 1 \quad \text{より} \quad 1 = 10 - 3 \cdot 3 \quad \leftarrow 308 \text{ と } 255 \text{ は互いに素}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 &= 10 - 3 \cdot 3 = 10 - (43 - 10 \cdot 4) \cdot 3 \\ &= 10 \cdot 13 + 43 \cdot (-3) = (53 - 43 \cdot 1) \cdot 13 + 43 \cdot (-3) \\ &= 53 \cdot 13 + 43 \cdot (-16) = 53 \cdot 13 + (255 - 53 \cdot 4) \cdot (-16) \\ &= 53 \cdot 77 + 255 \cdot (-16) = (308 - 255 \cdot 1) \cdot 77 + 255 \cdot (-16) \\ &= 308 \cdot 77 + 255 \cdot (-93) \end{aligned}$$

ゆえに

$$308 \cdot 77 + 255 \cdot (-93) = 1 \cdots ②$$

①-② より

$$308(x-77) + 255(y+93) = 0$$

$$308(x-77) = -255(y+93) \cdots ③ \quad \leftarrow \text{整数は積に強い}$$

ここで 308と255は互いに素であるから、 $x-77$ は255の倍数である。

よって

$$x-77 = 255k \text{ (} k \text{ は整数)}$$

これを③に代入して、整理すると

$$y+93 = -308k$$

以上より

$$x = 255k + 77, y = -308k - 93 \text{ (} k \text{ は整数)}$$

(例3) 方程式 $71x+33y=4$ の整数解をすべて求めよ。

$$71 = 33 \cdot 2 + 5 \quad \text{より} \quad 5 = 71 - 33 \cdot 2$$

$$33 = 5 \cdot 6 + 3 \quad \text{より} \quad 3 = 33 - 5 \cdot 6$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2 \quad \text{より} \quad 2 = 5 - 3 \cdot 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1 \quad \text{より} \quad 1 = 3 - 2 \cdot 1 \quad \leftarrow 71 \text{ と } 33 \text{ は互いに素}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1 \\ &= 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = (33 - 5 \cdot 6) \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \\ &= 33 \cdot 2 + 5 \cdot (-13) = 33 \cdot 2 + (71 - 33 \cdot 2) \cdot (-13) \\ &= 33 \cdot 28 + 71 \cdot (-13) \end{aligned}$$

ゆえに

$$71 \cdot (-13) + 33 \cdot 28 = 1 \cdots ②$$

①-② $\times 4$ より

$$71(x+52) + 33(y-112) = 0$$

$$71(x+52) = -33(y-112)$$

ここで 71と33は互いに素であるから、 $x+52$ は33の倍数である。

よって

$$x+52 = 33k \text{ (} k \text{ は整数)}$$

これを②に代入して、整理すると

$$y-112 = -71k$$

以上より

$$x = 33k - 52, y = -71k + 112 \text{ (} k \text{ は整数)}$$

$0x+by=C$ (①) (a, b は互いに素) を満たす整数 x, y の求め方

1. ①の解を1つ (x_1, y_1) 見つける \leftarrow カンでも互除法でもよい

2. (x_1, y_1) を①に代入した式 $0x_1+by_1=C$ ②として

①-② より

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \cdots ③ \quad \leftarrow \text{整数は積に強い}$$

をつくる。

3. a, b は互いに素であるから

$$x-x_1 = bk \text{ (} k \text{ は整数)}$$

これを③に代入して

$$y-y_1 = -ak$$

ゆえに

$$x = bk + x_1, y = -ak + y_1 \text{ (} k \text{ は整数)}$$