

27

最高位の値と小数首位の値

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 1 &= 0 \\
 \log_{10} 2 &= 0.3010 \\
 \log_{10} 3 &= 0.4771 \\
 \log_{10} 4 &= 0.6020 + 2\log_{10} 2 \\
 \log_{10} 5 &= 0.6990 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\
 \log_{10} 6 &= 0.7781 + \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\
 \log_{10} 7 &= 0.84495 + \text{あとで説明} \\
 \log_{10} 8 &= 0.9030 + 3\log_{10} 2 \\
 \log_{10} 9 &= 0.9542 + 2\log_{10} 3 \\
 \log_{10} 10 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= 10^0 \\
 2 &= 10^{0.3010} \\
 3 &= 10^{0.4771} \\
 4 &= 10^{0.6020} \\
 5 &= 10^{0.6990} \\
 6 &= 10^{0.7781} \\
 7 &= 10^{0.84495} \\
 8 &= 10^{0.9030} \\
 9 &= 10^{0.9542} \\
 10 &= 10^1
 \end{aligned}$$

(補足) $\log_{10} 7$ の近似値(小数第2位まで)

$48 < 49 < 50$ より、7を底とする対数をとると

$$\log_{10} 48 < \log_{10} 49 < \log_{10} 50$$

$$\log_{10} 2^4 \times 3 < \log_{10} 7^2 < \log_{10} \frac{100}{2}$$

$$4\log_{10} 2 + \log_{10} 3 < 2\log_{10} 7 < \log_{10} 100 - \log_{10} 2$$

$$1.6811 < 2\log_{10} 7 < 1.6990$$

$$0.84055 < \log_{10} 7 < 0.8495$$

よって

$$\log_{10} 7 \approx 0.84$$

$10^{3.14}$ の最高位の値は?

$$10^3 < 10^{3.14} < 10^{0.3010} \cdot 10^3$$

$$10^3 < 10^{3.14} < 2 \cdot 10^3$$

∴ 3 //

$$300 < 321 < 400$$

$$3 \times 10^2 < 321 < 4 \times 10^2$$

(例1) 12^{20} の最高位の数を求めよ。

ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 12^{20} &= 20 \log_{10} 12 \\
 &= 20(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\
 &= 21.582
 \end{aligned}$$

であるから

$$12^{20} = 10^{21.582} = 10^{0.582} \cdot 10^{21}$$

よって, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 4 = 0.6020$ であるから

$$10^{0.4771} < 10^{0.582} < 10^{0.6020}$$

$$10^{0.4771} \cdot 10^{21} < 10^{0.582} \cdot 10^{21} < 10^{0.6020} \cdot 10^{21}$$

$$3 \cdot 10^{21} < 12^{20} < 4 \cdot 10^{21}$$

ゆえに, 最高位の値は

3 //

(例2) $(\frac{1}{6})^{20}$ の小数首位の数を求めよ。

ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$$\begin{aligned}
 \log_{10} (\frac{1}{6})^{20} &= \log_{10} 6^{-20} \\
 &= -20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\
 &= -15.562
 \end{aligned}$$

であるから

$$(\frac{1}{6})^{20} = 10^{-15.562} = 10^{0.438} \cdot 10^{-16} \leftarrow 10^{0.438} \cdot 10^{-16} \text{ としない}$$

よって $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから

$$10^{0.3010} < 10^{0.438} < 10^{0.4771}$$

$$10^{0.3010} \cdot 10^{-16} < 10^{0.438} \cdot 10^{-16} < 10^{0.4771} \cdot 10^{-16}$$

$$2 \cdot 10^{-16} < (\frac{1}{6})^{20} < 3 \cdot 10^{-16}$$

ゆえに, 小数首位の値は

2 //