10

・余りによる分類

整数

偶数	奇数
2でわって余り0	2でわって余り1
$2k$	$2k+1$

整数

3で割って余り0	3で割って余り1	3で割って余り2
$3k$	$3k+1$	$3k+2$

一般に、正の整数 m に対して、すべての整数は

$mk,\ mk+1,\ mk+2,\ \cdots,\ mk+(m-1)$ （kは整数）

のいずれかの形で表せる。

※ 適切な m で割った余りで分類して考える。

(例) nは整数とする。n^2を3で割ったときの余りが0または1であることを証明せよ。

point
3でわったときの余り → 3でわったときの余りで分類する

すべての整数 n は

$n=3k,\ n=3k+1,\ n=3k+2$ （kは整数）

のいずれかで表される。

(i) $n=3k$ のとき

$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot 3k^2$

(ii) $n=3k+1$ のとき

$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

(iii) $n=3k+2$ のとき

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

よって、n^2 を3でわったときの余りは0または1である。□

連続2整数の積は2の倍数
連続3整数の積は6の倍数

(証明)

連続2整数を $n,\ n+1$ とする。

すべての整数 n は

$n=2k,\ n=2k+1$ （kは整数）

のいずれかで表される。

(i) $n=2k$ のとき

$n(n+1)=2k(2k+1)$

(ii) $n=2k+1$ のとき

$n(n+1)=(2k+1)(2k+1+1)=2(2k+1)(k+1)$

よって、$n(n+1)$ は2の倍数である。□

連続3整数を $n,\ n+1,\ n+2$ とする

すべての整数 n は

$n=3k,\ n=3k+1,\ n=3k+2$ （kは整数）

のいずれかで表される。

(i) $n=3k$ のとき

$n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)$

(ii) $n=3k+1$ のとき

$n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+1+1)(3k+1+2)$

$=3(3k+1)(3k+2)(k+1)$

(iii) $n=3k+2$ のとき

$n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+2+1)(3k+2+2)$

$=3(3k+2)(k+1)(3k+4)$

よって、$n(n+1)(n+2)$ は3の倍数である。

また、連続2整数の積は2の倍数であるから

$n(n+1)(n+2)$ は2の倍数でもある。

したがって、$n(n+1)(n+2)$ は6の倍数である。