

・文字係数を含む方程式・不等式

(例1) 次の方程式・不等式を解け。

(1) $ax = 1$ (2) $ax < 1$

point

(1) $x = \frac{1}{a}$ (2) $x < \frac{1}{a}$

として、本当に大丈夫?

(1)(2) $a = 0$ だとしたら?

(2) $a = -1$ だとしたら?

(1) $ax = 1$

(i) $a \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{a}$$

(ii) $a = 0$ のとき

$$0 \cdot x = 1$$

これを満たす実数 x の値は存在しない。

以上より

$$\begin{cases} a \neq 0 \text{ のとき} & x = \frac{1}{a} \\ a = 0 \text{ のとき} & \text{解はない} \end{cases} //$$

(2) $ax < 1$

(i) $a > 0$ のとき

$$x < \frac{1}{a} \quad \leftarrow \text{不等号の向きはそのまゝ}$$

(ii) $a = 0$ のとき

$$0 \cdot x < 1$$

これはすべての実数 x で成り立つ。

(iii) $a < 0$ のとき

$$x > \frac{1}{a} \quad \leftarrow \text{不等号の向きは逆転}$$

以上より

$$\begin{cases} a > 0 \text{ のとき} & x < \frac{1}{a} \\ a = 0 \text{ のとき} & \text{すべての実数} \\ a < 0 \text{ のとき} & x > \frac{1}{a} \end{cases} //$$

(例2) 次の不等式を解け。

$$ax + 6 < 2x + 3a$$

$$ax - 2x < 3a - 6$$

$$(a-2)x < 3(a-2) \quad \leftarrow x < 3 \text{ として大丈夫?}$$

(i) $a-2 > 0$ つまり $a > 2$ のとき

$$x < 3$$

(ii) $a-2 = 0$ つまり $a = 2$ のとき

$$0 \cdot x < 3 \cdot 0$$

これを満たす実数 x の値は存在しない。

(iii) $a-2 < 0$ つまり $a < 2$ のとき

$$x > 3$$

以上より

$$\begin{cases} a > 2 \text{ のとき} & x < 3 \\ a = 2 \text{ のとき} & \text{解はない} \\ a < 2 \text{ のとき} & x > 3 \end{cases} //$$