11

・3次関数のグラフ

(例) 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=2x^3-3x^2$

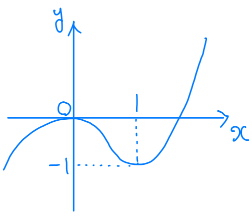
$y'=6x^2-6x$

$=6x(x-1)$

より，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	0	↘	−1	↗

よって，グラフは右の図のようになる。



(2) $y=(x-1)^3$

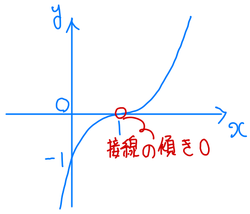
$y'=3(x-1)^2(x-1)'$

$=3(x-1)^2$

より，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	+
y	↗	0	↗

よって，グラフは右の図のようになる。



(3) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-1$

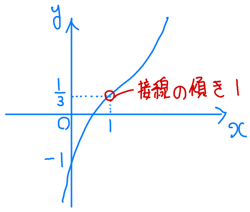
$y'=x^2-2x+2$

$=(x-1)^2+1$ ← すべての実数 x で $y'>0$

より，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	1	+
y	↗	$\frac{1}{3}$	↗

よって，グラフは右の図のようになる。



※ 3次関数のまとめ

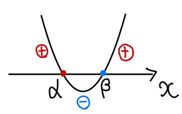
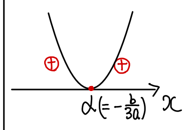
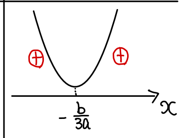
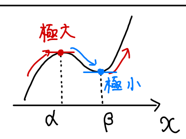
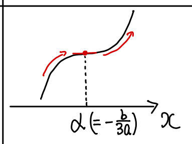
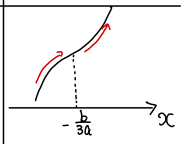
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ において

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

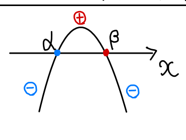
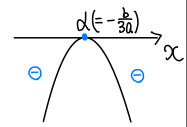
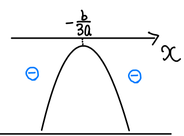
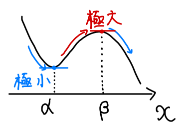
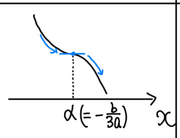
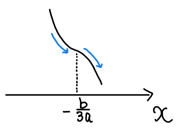
$f'(x)=0$ の判別式をDとすると

$D/4=b^2-3ac$

① $a>0$ のとき

<table>
<tr><td>D</td><td>D > 0</td><td>D = 0</td><td>D < 0</td></tr>
<tr><td>$f'(x)=0$</td><td>2つの実数解 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$</td><td>重解 $\alpha\left(=-\frac{b}{3a}\right)$</td><td>解なし</td></tr>
<tr><td>$y=f'(x)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$y=f(x)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>増減表</td><td><table><tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>α</td><td>$\cdots$</td><td>β</td><td>$\cdots$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>極大</td><td>↘</td><td>極小</td><td>↗</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>α</td><td>$\cdots$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td></td><td>↗</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>$-\frac{b}{3a}$</td><td>$\cdots$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td></td><td>↗</td></tr></table></td></tr>
</table>

② $a<0$ のとき

<table>
<tr><td>D</td><td>D > 0</td><td>D = 0</td><td>D < 0</td></tr>
<tr><td>$f'(x)=0$</td><td>2つの実数解 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$</td><td>重解 $\alpha\left(=-\frac{b}{3a}\right)$</td><td>解なし</td></tr>
<tr><td>$y=f'(x)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$y=f(x)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>増減表</td><td><table><tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>α</td><td>$\cdots$</td><td>β</td><td>$\cdots$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>極小</td><td>↗</td><td>極大</td><td>↘</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>α</td><td>$\cdots$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>−</td><td>0</td><td>−</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td></td><td>↘</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>$-\frac{b}{3a}$</td><td>$\cdots$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>−</td><td></td><td>−</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td></td><td>↘</td></tr></table></td></tr>
</table>