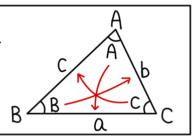
12

§2 正弦定理と余弦定理

・正弦定理 (sin)

> △ABCの外接円の半径をRとすると
>
> $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



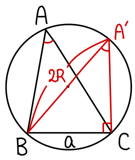
(証明)

$\frac{a}{\sin A} = 2R$ が成り立つことを

(i) $A < 90°$, (ii) $A = 90°$, (iii) $A > 90°$

の場合に分けて考える。

(i) $A < 90°$のとき



Bを通る直径をBA′とすると

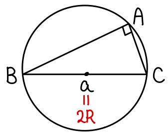
$\angle BA'C = A$ ← 円周角の定理

$\angle BCA' = 90°$ ← 直径に対する円周角は90°

であるから

$\sin A = \frac{a}{2R}$ $\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$

(ii) $A = 90°$のとき

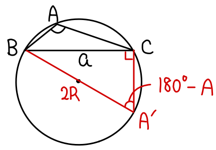


$a = 2R = 2R\sin A$ ← $A = 90°$のとき, $\sin A = 1$

であるから

$\frac{a}{\sin A} = 2R$

(iii) $A > 90°$のとき



Bを通る直径をBA′とすると

$\angle BA'C = 180° - A$ ← 円に内接する四角形の向かい合う角の和は180°

$\angle BCA' = 90°$ ← 直径に対する円周角は90°

であるから

$\sin(180° - A) = \frac{a}{2R}$

$\sin A = \frac{a}{2R}$ ← $\sin(180° - A) = \sin A$

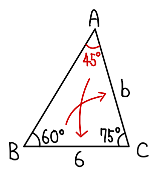
$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$

(i)〜(iii)より, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ が成り立つ。

同様に, $\frac{b}{\sin B} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$ も成り立つので

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ∎

(例) 右の図の△ABCにおいて、bおよび外接円の半径を求めよ。



$A = 180° - (B + C)$

$= 180° - (60° + 75°)$

$= 45°$

正弦定理より

$\frac{6}{\sin 45°} = \frac{b}{\sin 60°}$

よって

$b = \frac{6}{\sin 45°} \times \sin 60° = \frac{6}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$ //

また, 正弦定理より

$\frac{6}{\sin 45°} = 2R$

よって

$R = \frac{6}{2\sin 45°} = \frac{6}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2}$ //