13

・平方の差を利用した不等式の証明

(例1)　$a>0,\ b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ を証明せよ。

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)-(a+b)$$
$$=2\sqrt{ab}$$
$$>0$$

よって

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$　← いきなり $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ としない

ここで，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a+b}>0$ であるから

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ ▯　← $X\geqq 0,\ Y\geqq 0$ のとき $X>Y \Leftrightarrow X^2>Y^2$

(例2)　不等式 $|a|+|b|\geqq|a+b|$ を証明せよ。

また等号が成り立つのはどのようなときか。

$$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2 \quad \leftarrow |x|^2=x^2$$
$$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2) \quad \leftarrow |x||Y|=|xY|$$
$$=2(|ab|-ab)$$
$$\geqq 0 \quad \leftarrow |x|\geqq x$$

よって

$(|a|+|b|)^2\geqq|a+b|^2$

ここで，$|a|+|b|\geqq 0$，$|a+b|\geqq 0$ であるから

$|a|+|b|\geqq|a+b|$

等号が成り立つのは

$|ab|=ab$

つまり

$ab\geqq 0$

のときである。▯　← $|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$