

32

・除外点を含む軌跡

(例) 2点 $A(3,0)$, $O(0,0)$ と円 $x^2+y^2=4$ 上を動く点 Q を 3 つ

頂点とする三角形の重心 P の軌跡を求めよ。

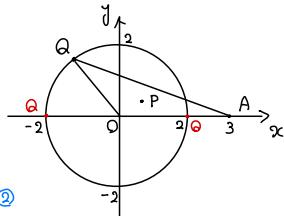
$P(x, y)$, $Q(s, t)$ とする。 Ⅳ Ⅰ

Q は円 $x^2+y^2=4$ 上の点であるから

$$s^2+t^2=4 \quad \dots \text{①}$$

P は $\triangle AOP$ の重心であるから

$$x = \frac{3+0+s}{3}, \quad y = \frac{0+0+t}{3} \quad \dots \text{②}$$



つまり

$$s = 3x - 3, \quad t = 3y$$

これらを ① に代入して

$$(3x-3)^2 + (3y)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$$

よって、点 P は円 $(x-1)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$ 上 … ③ にある。



ところが、 Q が点 $(2,0)$ または点 $(-2,0)$ のとき、3 点 A, O, Q を

結ぶ图形は三角形ではないので、重心 P は存在しない。

よって

$$(s, t) \neq (2, 0), (-2, 0)$$

② より

$$(x, y) \neq \left(\frac{5}{3}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

以上より、求める軌跡は

中心 $(1, 0)$, 半径 $\frac{2}{3}$ の円

ただし、2 点 $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ を除く。