

・除外点を含む軌跡

(例) 2点  $A(3, 0)$ ,  $O(0, 0)$  と円  $x^2 + y^2 = 4$  上を動く点  $Q$  を3つの

頂点とする三角形の重心  $P$  の軌跡を求めよ。

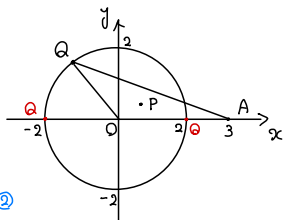
$P(x, y)$ ,  $Q(s, t)$  とする。  $\leftarrow$  I

$Q$  は円  $x^2 + y^2 = 4$  上の点であるから

$$s^2 + t^2 = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$P$  は  $\triangle AOQ$  の重心であるから

$$x = \frac{3+0+s}{3}, \quad y = \frac{0+0+t}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$



つまり

$$s = 3x - 3, \quad t = 3y$$

これを①に代入して

$$(3x-3)^2 + (3y)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$$

$\leftarrow$  II

よって、点  $P$  は円  $(x-1)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$  上  $\dots \textcircled{3}$  にある。

ところが、 $Q$  が点  $(2, 0)$  または点  $(-2, 0)$  のとき、3点  $A, O, Q$  を結ぶ図形は三角形ではないので、重心  $P$  は存在しない。

よって

$$(s, t) \neq (2, 0), (-2, 0)$$

② より

$$(x, y) \neq \left(\frac{5}{3}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

以上より、求める軌跡は

中心  $(1, 0)$ , 半径  $\frac{2}{3}$  の円

ただし、2点  $\left(\frac{5}{3}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right)$  を除く。