8

・2次方程式の解と係数の関係

$ax^2+bx+c=0$ の2解を α, β とすると

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(証明) $ax^2+bx+c=0$ の2解を α, β とすると

$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

とすると

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=-\frac{2b}{2a}$$
$$=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

← $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-b)^2-D}{4a^2}$

$$=\frac{4ac}{4a^2}$$
$$=\frac{c}{a}\quad\square$$

(例1) $x^2-x+2=0$ の2解を α, β とするとき

$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$ の値をそれぞれ求めよ

point
対称式は基本対称式 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ で表せる。

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1$$
$$\alpha\beta=\frac{2}{1}=2$$

であるから

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=1^2-2\cdot2$$
$$=-3_{\,/\!/}$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

← $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
$=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=1^3-3\cdot2\cdot1$$
$$=-5_{\,/\!/}$$

(例2) 2次方程式 $x^2-4x+m=0$ において、1つの解が

他の解の3倍であるとき、m の値と2つの解を求めよ。

2つの解を α、3α とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+3\alpha=4\\ \alpha\cdot3\alpha=m\end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases}4\alpha=4\\ 3\alpha^2=m\end{cases}$$

よって

$\alpha=1$, $m=3$

以上より

2つの解は 1, 3 　$m=3_{\,/\!/}$