

・三角関数を含む関数の最大・最小③

(例1) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、関数

$$y = \sin \theta + \cos \theta$$

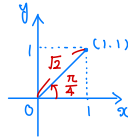
の最大値と最小値を求めよ。また、そのとき θ の値を求めよ。

point

合成を用いて、三角関数を統一する

おまかせ → おまかせた文字の範囲に注意

$$\begin{aligned} y &= 1 \sin \theta + 1 \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$



$$\theta + \frac{\pi}{4} = t \text{ とおくと, } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ のとき}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \quad (\text{つまり}) \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$$

このとき

$$y = \sqrt{2} \sin t \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \right)$$

であるから

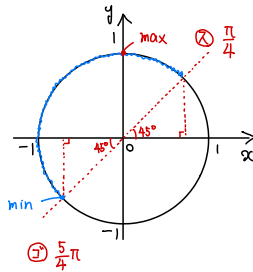
$$t = \frac{\pi}{2} \text{ のとき 最大値 } \sqrt{2} \leftarrow \sqrt{2} \times 1$$

$$t = \frac{5\pi}{4} \text{ のとき 最小値 } -1 \leftarrow \sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = t \text{ であるから}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき 最大値 } \sqrt{2}$$

$$\theta = \pi \text{ のとき 最小値 } -1,,$$



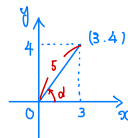
(例2) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、関数

$$y = 3 \sin \theta + 4 \cos \theta$$

の最大値と最小値を求めよ。

$$\begin{aligned} y &= 3 \sin \theta + 4 \cos \theta \\ &= 5 \sin (\theta + d) \end{aligned}$$

$$\left(\text{ただし, } \sin d = \frac{4}{5}, \cos d = \frac{3}{5} \right)$$



$$\theta + d = t \text{ とおくと, } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ のとき}$$

$$d \leq t \leq \pi + d \quad (\text{つまり}) \quad d \leq t \leq \pi + d$$

このとき

$$y = 5 \sin t \quad (d \leq t \leq \pi + d) \quad \leftarrow d \text{ は定数}$$

であるから

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ のとき 最大値 } 5 \leftarrow 5 \cdot 1$$

$$t = \pi + d \text{ のとき 最小値 } 5 \sin (\pi + d)$$

ここで

$$\begin{aligned} 5 \sin (\pi + d) &= 5 \cdot (-\sin d) \\ &= 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= -4 \end{aligned} \quad \leftarrow \begin{aligned} 5 \sin (\pi + d) &= 5 \{ \sin \pi \cos d + \cos \pi \sin d \} \\ &= -5 \sin d \\ &= -4 \end{aligned}$$

以上より

$$\text{最大値 } 5, \text{ 最小値 } -4,,$$

