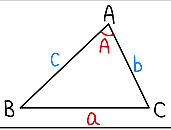
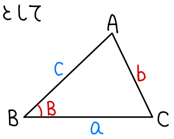
13

・余弦定理 (cos)

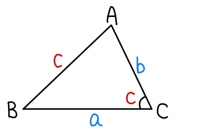
$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \cdots (☆)}$



他の形として



$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

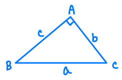


$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

ちなみに (☆) 式において $A = 90°$ とすると

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\underbrace{\cos A}_{0}$

$a^2 = b^2 + c^2$ (三平方の定理)



※ 余弦定理は三平方の定理を一般化したもの

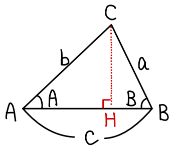
(証明)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \cdots (☆)$ が成り立つことを

(i) A.B ともに鋭角　(ii) A が鈍角　(iii) B が鈍角　(iv) A または B が 90°

の場合に分けて考える。

(i) A.B ともに鋭角のとき



C から AB に垂線 CH を下ろす。

三平方の定理より

$BC^2 = CH^2 + BH^2 \cdots ①$

	i	ii	iii	iv	
A	え	ど	え	90°	え
B	え	え	ど	え	90°

ここで

$BC = a$, $CH = b\sin A$, $BH = AB - AH = c - b\cos A$

これらを、① に代入して

$a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$

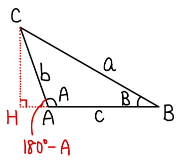
$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

$= b^2\underbrace{(\sin^2 A + \cos^2 A)}_{1} + c^2 - 2bc\cos A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

よって、(☆) が成立する。

(ii) A が鈍角のとき



C から AB に垂線 CH を下ろす。

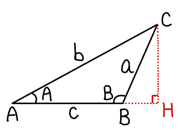
i) と同様に ① が成立し

$BC = a$, $CH = b\sin(180° - A) = b\sin A$

$BH = AB + AH = c + b\cos(180° - A) = c - b\cos A$

これらを、① に代入して計算すると (☆) が成立する。

(iii) B が鈍角のとき



C から AB に垂線 CH を下ろす。

i) と同様に ① が成立し

$BC = a$, $CH = b\sin A$, $BH = AH - AB = b\cos A - c$

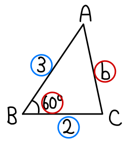
これらを、① に代入して計算すると (☆) が成立する。

(iv) A または B が 90° のとき

このときも (☆) が成立する

(i) ~ (iv) より (☆) が成立する。□

(例1) 右の図の△ABC において、b を求めよ。



余弦定理より

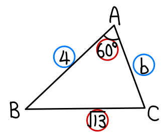
$b^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}}$

$= 7$

よって

$b = \sqrt{7}$

(例2) 右の図の△ABC において、b を求めよ。



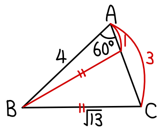
余弦定理より

$(\sqrt{13})^2 = 4^2 + b^2 - 2\cdot 4\cdot b\underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}}$

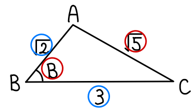
$b^2 - 4b + 3 = 0$

$\therefore b = 1, 3$

※ b = 1, 3 と 2 通り値が出る理由



(例3) 右の図の△ABC において、B を求めよ。



余弦定理より

$(\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cos B$

$\cos B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore B = 45°$