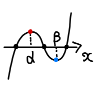
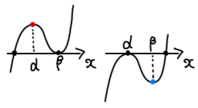
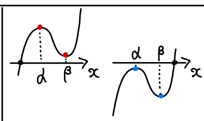
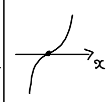
20

・3次方程式の実数解の個数②

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$ において

$f'(x)=0$ の判別式を D，2つの実数解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とする。

D	$D>0$			$D \leqq 0$
$y=f(x)$				
$f(\alpha)f(\beta)$	$f(\alpha)f(\beta)<0$	$f(\alpha)f(\beta)=0$	$f(\alpha)f(\beta)>0$	×
$f(x)=0$ の異なる実数解の個数	3個	2個	1個	

(例) 方程式 $x^3-6ax^2+9a^2x-a=0$ が異なる3個の実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^3-6ax^2+9a^2x-a$ とおく。$f(x)=0$ が異なる3個の実数解をもつとき，関数 $y=f(x)$ が極値をもち，極大値と極小値が異符号になる。

ここで

$$f'(x)=3x^2-12ax+9a^2$$
$$=3(x-a)(x-3a)$$

$f'(x)=0$ は異なる2個の実数解をもつので

$$a \fallingdotseq 3a \qquad \therefore\ a \fallingdotseq 0$$

このとき，$f(a)f(3a)<0$ であるから

$$(4a^3-a)\cdot(-a)<0$$
$$-a^2(4a^2-1)<0$$
$$4a^2-1>0 \qquad (\because\ -a^2<0)$$
$$\therefore\ a<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<a$$ //