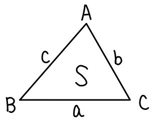
17

・ヘロンの公式

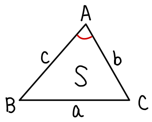
$$S=\sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)}$$

$$\left(ただし、t=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

3ではない



(証明)



余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \leftarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

また，$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ であるから

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A$$

$$=(1+\cos A)(1-\cos A)$$

$$=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{1}{4b^2c^2}\underbrace{(b+c+a)}_{2t}\underbrace{(b+c-a)}_{2t-2a}\underbrace{(a+b-c)}_{2t-2c}\underbrace{(a-b+c)}_{2t-2b}$$

ここで，$a+b+c=2t$ とおくと

$$\sin^2 A=\frac{4}{b^2c^2}t(t-a)(t-b)(t-c)$$

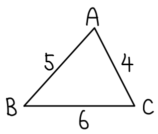
$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)} \quad \left(ただし，t=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

(例2)′ 右の図の△ABCの面積 S を求めよ。



$$t=\frac{a+b+c}{2}=\frac{6+4+5}{2}=\frac{15}{2}$$

とすると、ヘロンの公式より

$$S=\sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)}$$

$$=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-6\right)\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)}$$

$$=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$ 。