Espaces Vectoriels Normés
Fonctions à plusieurs variables

Lundi 15 janvier 2018

Soit E un espace vectoriel.
Le but de cette partie est de définir la notion de distance entre deux vecteurs de E.
Ex : – $E = \mathbb{R}$: On peut définir la distance entre deux réels a et a' par $d(a, a') = |a - a'|$.
– $E = \mathbb{C}$: On peut poser z, $z' \in \mathbb{C}$, $d(z, z') = |z - z'|$. Si on écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors $d(z, z') = |x - x' + i(y - y')| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.
– $E = \mathbb{R}^2$: Si (x, y), $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on peut définir $d((x, y), (x', y'))= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

1 Normes et distances sur un espace vectoriel

Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une norme sur E est par définition une application $N : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto N(x)$ vérifiant :
– $\forall\, x \in E$, $N(x) \geqslant 0$, et $(N(x) = 0 \iff x = 0)$,
– $\forall\, x \in E$, $\forall\, \lambda \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
– (Inégalité triangulaire) $\forall\, x, y \in E$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Définition : Un espace vectoriel normé (e.v.n) est un couple (E, N) où E est un e.v et N une norme sur E.

Propriétés :
– Soient x_1, x_2, $x_3 \in E$ avec (E, N) un e.v.n. Alors,
$N(x_1 + x_2 + x_3) = N((x_1 + x_2) + x_3) \leqslant N(x_1 + x_2) + N(x_3) \leqslant N(x_1) + N(x_2) + N(x_3)$
– Si $x_1, ..., x_p \in E$, $N(x_1, ..., x_p) \leqslant N(x_1) + ... + N(x_p)$.
– Si $x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$.

Démo :
$N(x) = N((x - y) + y) \leqslant N(x - y) + N(y)$, $N(x) - N(y) \leqslant N(x - y)$.
Aussi $N(y) - N(x) \leqslant N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1| N(x - y) = N(x - y)$.
Finalement, $|N(x) - N(y)| = \mathrm{Max}(N(x) - N(y), N(y) - N(x)) \leqslant N(x - y)$.

Ex :
– $E = \mathbb{R}$: Posons $N(x) = |x|$ (Valeur absolue).
N est une norme sur $\mathbb{R}$, car $|x| \geqslant 0$, $(|x| = 0 \iff x = 0)$,
$\forall\, \lambda \in E$, $|\lambda x| = |\lambda||x|$, et $\forall\, x, y \in E$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
– $E = \mathbb{C}$: Posons $N(x) = |x|$ (Module).
N est une norme sur $\mathbb{C}$, car $|z| \geqslant 0$, $(|z| = 0 \iff z = 0)$,
$\forall\, \lambda \in E$, $|\lambda z| = |\lambda||z|$, et $\forall\, z, z' \in E$, $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
– Espaces euclidiens :
Soit E un e.v. Une forme bilinéaire est une application $B : E \times E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto B(x, y)$ telle qu'elle est

linéaire en chacune de ses variables.

Un produit scalaire sur un e.v E est une forme bilinéaire symétrique sur E définie positive au sens suivant : $\forall\ x \in E$, $B(x,x) \geqslant 0$, et $B(x,x) = 0 \iff x = 0$. Un espace euclidien est un e.v muni d'un produit scalaire.

On pose $B(x,\, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$. B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ avec $(x,\, y \in \mathbb{R}^n)$.

On pose maintenant : $N(x) = \sqrt{B(x,x)}$. Alors, N est une norme sur E.

Démo :

$i/$ Par définition, $N(x) \geqslant 0$, et $N(x) = 0 \iff B(x,x) = 0 \iff x = 0$

$ii/$ Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $N(\lambda x) = \sqrt{B(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 B(x,x)} = |\lambda|\sqrt{B(x,x)} = |\lambda| N(x)$,

$iii/$ On va utiliser le lemme : $\forall\ x,\, y \in E$, posons $p(\lambda) = B(x + \lambda y, x) + \lambda B(x + \lambda y, y)$. Si on pose $z = x + \lambda y$ fixé, et $u(\omega) = B(z, \omega)$, on a écrit que $(u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y))$.

On aura $p(\lambda) = B(x,\, x) + \lambda B(y,\, x) + \lambda B(x,\, y) + \lambda^2 B(y,\, y)$ donc $p(\lambda) = B(x,\, x) + 2\lambda B(y,\, x) + \lambda^2 B(y,\, y)$ donc $\lambda \mapsto p(\lambda)$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$ et $p(\lambda) = B(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqslant 0$.

Or, si un polynôme de degré $\leqslant 2$ ne change pas de signe, son discriminant est $\leqslant 0$.

$(2B(x,\, y))^2 - 4B(x,\, x)B(y,\, y) \leqslant 0$, donc $|B(x,\, y)| \leqslant \sqrt{B(x,x)}\sqrt{B(y,y)}$. On a donc $N(x + y)^2 = B(x + y,\, x + y) = B(x,\, x + y) + B(y,\, x + y) = B(x,\, x) + B(y,\, x) + B(x,\, y) + B(y,\, y) = B(x,\, x) + 2B(x,\, y) + B(y,\, y) \leqslant N(x)^2 + N(x)N(y) + N(y)^2$.

On a obtenu $N(x + y)^2 \leqslant (N(x) + N(y))^2$ soit $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

$-$ $E = \mathbb{R}^n$: $B(x,\, y) = \Sigma\ x_i y_i$. La norme obtenue se note $||..||_2$ et pour $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ est donnée par

$||\mathrm{x}||_2 \overset{def}{=} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

$-$ Autre exemple de normes : Soient E, E' deux e.v et $\varphi : E \to E'$ linéaire injective.

Soit N' une norme sur E'. Pour $x \in E$, posons $N(x) \overset{def}{=} N'(\varphi(x))$. Alors N est une norme sur E :

$i/$ $N(x) \geqslant 0$ de plus $N(x) = 0 \Longrightarrow N'(\varphi(x)) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = 0$ (car N' est une norme) $\Longrightarrow x = 0$. (puisque φ est injective).

$ii/$ $N(\lambda x) = N'(\varphi(\lambda x)) = N'(\lambda\varphi(x)) = |\lambda| N'(\varphi(x)) = |\lambda| N(x)$

$iii/$ $N(x + y) = N'(\varphi(x + y)) = N'(\varphi(x) + \varphi(y)) \leqslant N'(\varphi(x)) + N'(\varphi(y)) = N(x) + N(y)$

1.1 Normes usuelles de $\mathbb{R}^p$

Soit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$, les normes usuelles de $\mathbb{R}^p$ sont définies par :

$$\boxed{||x||_1 \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{p} |x_j|, \qquad ||x||_2 \overset{def}{=} (\sum_{j=1}^{p} x_j^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad ||x||_\infty \overset{def}{=} \operatorname*{Max}_{j \in \{0,\, \ldots,\, p\}} [|x_j|].}$$

Propriété : $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$, sont des normes de $\mathbb{R}^p$.

Démo :

$-$ Pour $||..||_2$: voir plus haut.

$-$ Pour $||..||_1$:

Soit $x \in E$, $||x||_1 = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| \geqslant 0$, et $\sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| = 0 \iff \forall\ j\ x_j = 0 \iff x = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x||_1 = \sum\limits_{j=1}^{p} |\lambda x_j| = |\lambda|(\sum\limits_{j=1}^{p} |x_j|) = |\lambda|||x||_1$.

Soient $x,\, y \in \mathbb{R}^p$, $||x + y||_1 = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j + y_j| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p} (|x_j| + |y_j|) = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| + \sum\limits_{j=1}^{p} |y_j| = ||x||_1 + ||y||_1$

– Pour $||..||_\infty$:

$||x||_\infty = 0 \Longrightarrow \underset{j\in\{0,\ ...,\ p\}}{\text{Max}}[|x_j|] = 0. \Longrightarrow \forall\ j\ x_j = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Vérifions l'inégalité triangulaire : $|x_j + y_j| \leqslant |x_j| + |y_j| = ||x_j||_\infty + ||y_j||_\infty$ donc $\underset{j\in\{0,\ ...,\ p\}}{\text{Max}}[|x_j| + |y_j|] \leqslant ||x_j||_\infty + ||y_j||_\infty$.

Propriété : $\forall\ x \in \mathbb{R}^p,\ ||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant p||x||_\infty$.

Démo : $\forall\ j \in j \in \{0,\ ...,\ p\},\ |x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{p} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ donc $||x||_\infty = \underset{j\in\{0,\ ...,\ p\}}{\text{Max}}[|x_j|] \leqslant ||x||_2$.

Pour montrer que $||x||_2 \leqslant ||x||_1$, il suffit de vérifier que $||x||_2^2 \leqslant ||x||_1^2$

Soit $\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{p}|x_j||x_i|\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} |x_j||x_i|$. Or, $\sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} |x_j||x_i| \geqslant 0$, donc

$||x||_2^2 \leqslant ||x||_1^2$, enfin $||x||_2 \leqslant ||x||_1$.

$||x||_1 = \sum_{j=1}^{p}|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{p}||x||_\infty = ||x||_\infty \sum_{j=1}^{p} 1 = p||x||_\infty$

Remarque :

Si E est un e.v de dimension finie p, et si $(e_1,\ ...,\ e_p)$ est une base de E, alors $\forall\ x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. On peut donc définir des normes N_1, N_2, N_∞ sur E en posant

$$N_\ell \overset{def}{=} \left|\left|\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right|\right|_\ell,\ \ell \in [1,\ 2,\ \infty]$$

1.2 Norme produit

Soient $(E_1,\ N_1)$,$(E_2,\ N_2)$ deux e.v.n. Soit $E_1 \times E_2 = \{x = (x_1, x_2),\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$.

Définition : $N(x) \overset{def}{=} \text{Max}[N_1(x_1),\ N_2(x_2)]$ est une norme sur E, et est appelée norme produit.

1.3 Distance associée à une norme

Définition : Soit $(E,\ N)$ un e.v.n. la distance $d(x,\ y)$ entre $x \in E$ et $y \in E$, associée à N est par définition $d(x,\ y) = N(x - y)$.

Propriété : La distance précédente est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$i/\ \forall\ (x,\ y) \in E \times E\ d(x,\ y) \geqslant 0$ et $(d(x,\ y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$

$ii/$ (symétrie) $\forall\ x,\ y \in E,\ d(x,\ y) = d(y,\ x)$

$iii/$ (Inégalité triangulaire) $\forall\ x,\ y,\ z \in E,\ d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$

Démo :

$ii/\ d(x,\ y) = N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1|N(x - y) = N(x - y) = d(y,\ x)$

$iii/\ d(x,\ z) = N(x - z) = N((x - y) + (y - z)) \leqslant N(x - y) + N(y - z) = d(x,\ y) + d(y,\ z)$

Remarque :

De manière générale, si E est une ensemble, on définit une d distance sur E comme une application vérifiant $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant $i/$, $ii/$, $iii/$.

C'est une notion de distance plus générale de la distance associée à une norme. Si $d(x,\ y) = N(x - y)$. On peut prendre par exemple pour tout $a \in E$, $d(x + a,\ y + a) = N((x + a) - (y + a)) = N(x - y) = d(x,\ y)$. Cette propriété n'est pas toujours vraie pour une distance "normale".

Soit $(E,\ N)$ un e.v.n. Soit $a \in E$.

Définition :

i/ Soit $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est par définition $B(a,\, r) = \{x \in E,\, N(x - a) < r\} = \{x \in E,\, d(x,\, a) < r\}$

ii/ Soit $r \geqslant 0$, la boule fermée de centre a et de rayon r est par définition $\bar{B}(a,\, r) = \{x \in E,\, N(x - a) \leqslant r\} = \{x \in E,\, d(x,\, a) \leqslant r\}$

Remarque :

- Soit $r > 0$, alors $a \in B(a,\, r) \subset \bar{B}(a,\, r)$
- $\bar{B}(a,\, 0) = \{a\}$
- Si $r < r'$ $B(a,\, r) \subset B(a,\, r')$, $\bar{B}(a,\, r) \subset \bar{B}(a,\, r')$