EVN

TD 1

E muni de N

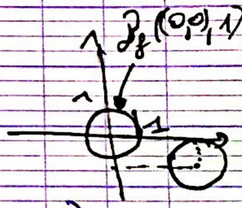
$\mathcal{B}_f(a,\rho) = \{x \in E,\ N(x-a) \le \rho\}$.

$\mathcal{B}_f(0,\rho) = \{x \in E,\ N(x) \le \rho\}$

$x \in \mathcal{B}_f \iff N(x-a) \le \rho$

$\iff x-a \in \mathcal{B}_f(0,\rho)$.

<u>Remarque</u> : $\mathcal{B}(a,\rho)$ est l'image de $\mathcal{B}_f(0,\rho)$ par la translation de vecteur a.



<u>Ex 1</u> :

Si $\mathbb{R}^2$ est de la norme 2 (norme euclidienne).

$\|(x_1,x_2)\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$

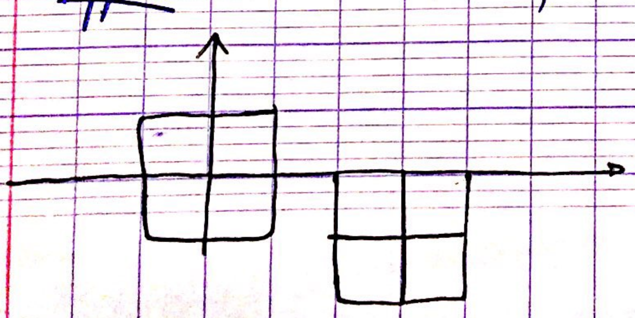
$\mathcal{B}_{f,2}((0,0),1) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \sqrt{x_1^2+x_2^2} \le 1\}$.

$\mathcal{B}_{f,\infty}((0,0),1) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x_1,x_2)\|_\infty \le 1\}$

$= \{ \underline{\qquad\qquad},\ \max(|x_1|,|x_2|) \le 1\}$

$= \{ \underline{\qquad\qquad},\ -1 \le x_1 \le 1 \text{ et } -1 \le x_2 \le 1\}$

<u>Rappel</u> : Soit $a > 0$, $|x| \le a \iff -a \le x \le a$.



1. $\mathcal{B}_f((0,0),1) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \|(x_1,x_2)\|_1 \leq 1$

$= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1|+|x_2| \leq 1\}$

$= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1|+|x_2| \leq 1\}.$

$\cancel{|x_1| \leq 1-|x_2|}$

Quand $|x_1||x_2| > 0.$

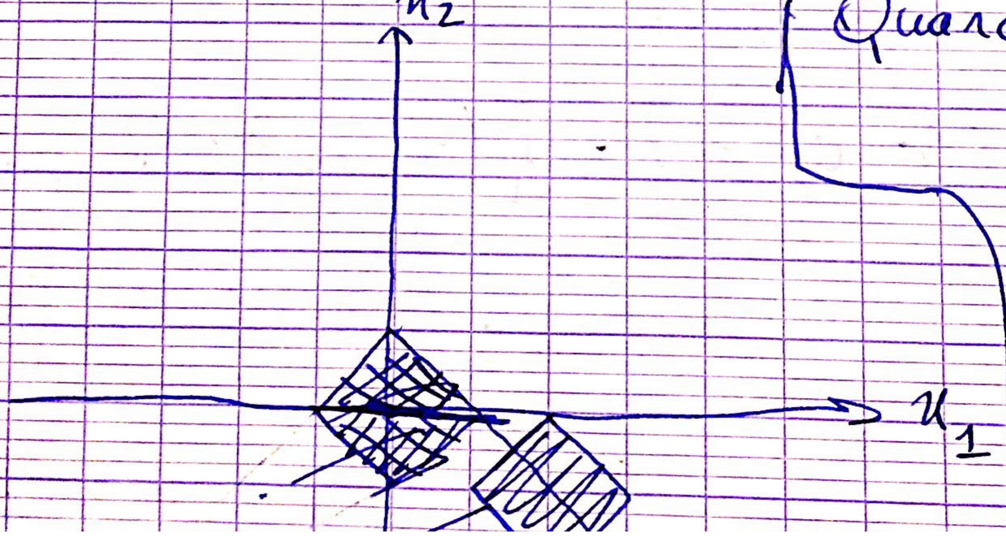
$-1-x_2 \leq x_1 \leq 1-x_2$

$-1-x_1 \leq x_2 \leq 1-x_1$

$-1 \leq x_1 \leq 1$

$-1 \leq x_2 \leq 1.$

Quand $|x_1| > 0, |x_2| < 0$



$2 \to \|(x_1, x_2)\|_\infty \leq \|(x_1, x_2)\|_1$ car $\|(x_1, x_2)\|_\infty = |x_1|$ ou $|x_2| \geq 0$.

Or $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2| \geq \cancel{\leq} |x_1|$
et $|x_1| + |x_2| \geq |x_2|$.

$\to \sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2} = \sqrt{2x_1^2+2x_2^2}$
$= \sqrt{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2+x_1^2}$
$= \sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_1-x_2)^2}$
$= \sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_2-x_1)^2}$.

Or d'après le cours $\|X+Y\|_2 \geq \|X+Y\|_\infty$.

donc : $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_2-x_1)^2} \geq \mathrm{Max}((x_1+x_2), (x_2-x_1))$.

$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_2-x_1)^2} \geq \dfrac{x_1+x_2+x_2-\cancel{x_1} + |x_1+x_2-(x_2-x_1)|}{2}$

$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_2-x_1)^2} \geq x_2 + |x_1|$.

Mais $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_2-x_1)^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_1-x_2)^2}$ donc.

donc x_1 et x_2 ont le même signe

$x_2 + |x_1| = |x_2| + \cancel{\leq} x_1$ ~~$= |x_1| + |x_2|$~~.

$\Rightarrow |x_2| + |x_1| = x_2 + |x_1| = |x_1| + |x$

donc $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_2-x_1)^2} \geq |x_1| + |x_2|$.

donc $\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2} \geq \|(x_1, x_2)\|_1$.
$\sqrt{2}\,\|(x_1, x_2)\|_2$

$\to \sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_2-x_1)^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_1-x_2)^2}$

D'après le cours $\|X+Y\|_2 \leq \|X+Y\|_1 \leq 2\|X+Y$

Exo2 :

On veut montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$ tels que.
$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, $C_1 \leq \dfrac{\|(x_1, x_2)\|_1}{\|(x_1, x_2)\|_\infty} \leq C_2$.

i.e. $C_1 \|(x_1, x_2)\|_\infty \leq \|(x_1, x_2)\|_1 \leq C_2 \|(x_1, x_2)\|_\infty$

D'après Ex 1.2 / Cours :

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ $\|(x_1, x_2)\|_\infty \leq \|(x_1, x_2)\|_1 \leq 2\|(x_1, x_2)\|_\infty$

Donc $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $1 \leq \dfrac{\|(x_1, x_2)\|_1}{\|(x_1, x_2)\|_\infty} \leq 2$.

A est minorée par 1 et majorée par 2.

$(1,1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc $\dfrac{\|(1,1)\|_1}{\|(1,1)\|_\infty} \in A$ $= \dfrac{1+1}{1} = 2 \in A$

A étant non vide A admet une borne inf. et une borne sup.
2 est un majorant de A qui $\in A$ donc c'est le plus grand élément de A, il est donc sa borne supérieure.

$$(1,0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\quad \frac{\|(1,0)\|_1}{\|(1,0)\|_\infty}=\frac{1+0}{1}\in A.$$

Donc $1\in A$. 1 étant un minorant de A et il app $\in A$, donc c'est le + petit élément de A, enfin, il est la borne inférieure de A.

<u>Exo 3</u>

- Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $N(x_1,x_2)=\underbrace{|x_1+x_2|}_{\geq 0}+\underbrace{|x_1|}_{\geq 0}\geq 0$.
- $N(0,0)=|0+0|+|0|=0$.
- Si $N(x_1,x_2)=0 \Rightarrow |x_1+x_2|+|x_1|=0$.

$$\Rightarrow |x_1+x_2|=-|x_1|$$
$$\Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=0\\ x_1=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=0$$

- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $N(\lambda(x_1,x_2))(=N(\lambda x_1,\lambda x_2))$
$=|\lambda x_1+\lambda x_2|+|\lambda x_1|$.

$$=|\lambda(x_1+x_2)|+|\lambda x_1|$$
$$=|\lambda||(x_1+x_2)|+|\lambda||x_1|$$
$$=|\lambda|\,N(x_1,x_2).$$

- Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ et $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$N((x_1,x_2)+(y_1;y_2))=\cancel{N(x_1+y_1;x_2+y_2)}=N(x_1+y_1,x_2+y_2)$$
$$=|x_1+y_1+x_2+y_2|+|x_1+y_1|$$
$$\leq|x_1+x_2|+|y_1+y_2|+|x_1|+|y_1|$$
$$\leq N(x_1,x_2)+N(y_1,y_2).$$

N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$

* On a $\forall (x_1, x_2)$ $N(x_1, x_2) = |x_1 + x_2| + |x_1| \leq |x_1| + |x_2| + |x_1|$

$\leq 2|x_1| + 2|x_2|.$

$\leq 2\|(x_1, x_2)\|_1.$

Aussi: $|x_1 + x_2| + |x_1| \leq |x_1| + |x_2| + |x_1|$

$\leq 3\|(x_1, x_2)\|_\infty.$