Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L2 MIASHS Algèbre linéaire 2

TD4 - Base duale, adjoint et endomorphisme symétrique

Exercice 1

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et pour tout $u = (x, y, z) \in E$,

$$f_1(u) = x + y + z,\ f_2(u) = x - y + z,\ f_3(u) = x + z.$$

   (a) Montrer que f_1, f_2, f_3 sont des formes linéaires sur E.
   (b) Déterminer la base duale $\mathscr{B}_0^*$ de la base canonique $\mathscr{B}_0$ de E.
   (c) Déterminer les coordonnées de f_1, f_2, f_3 dans $\mathscr{B}_0^*$.

2. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ et pour tout $P \in E$,

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P'(0).$$

   Montrer que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ est la base duale de la base canonique de E.

3. Montrer que les familles suivantes sont des bases de E et trouver leurs bases duales
   (a) $e_1 = (1, 0, -1),\ e_2 = (-1, -1, 2),\ e_3 = (-2, 1, -2)$ pour $E = \mathbb{R}^3$
   (b) $P_1(X) = 1,\ P_2(X) = X - 1,\ P_3(X) = X^2 - X$ pour $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2 Soient $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_i \neq a_j$ pour tout $i \neq j$. On pose

$$\forall P, Q \in E,\ \varphi(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i) \quad \text{et} \quad L_i(X) = \frac{\prod_{j\neq i}(X - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)},\ i = 1, \dots, n$$

Les polynômes $L_1, \dots, L_n$ sont appelés **polynômes de Lagrange** pour les $a_1, \dots, a_n$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $\{L_1, \dots, L_n\}$ est une base orthonormée de E pour le produit scalaire φ.
3. On pose $F_i(P) = P(a_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout $P \in E$. Que peut-on dire de la famille $\{F_1, \dots, F_n\}$? En déduire la décomposition de n'importe quel polynôme P de E dans la base $\{L_1, \dots, L_n\}$.
4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $a_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ pour $i = 1, \dots, n$. Montrez qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus $n - 1$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pout tout $i = 1, \dots, n$.

Exercice 3

1. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien classique $< \cdot, \cdot >$. Soit f l'application définie, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E$, par $f(x_1, \dots, x_n) = x_{n-1} - 2x_n$. Montrer qu'il existe un unique $\overline{u} \in E$ tel que $f(u) =< u, \overline{u} >$ pour tout $u \in E$. Que vaut $\overline{u}$?
2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in E$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait $P(1) - 2P(0) = \int_{-1}^{1} P_0(t)P(t)dt$. Calculer P_0 dans le cas où $n = 1$.

Exercice 4 Soit $(E, <\cdot, \cdot>)$ un espace euclidien. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est une **isométrie** si

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Soit f un endomorphisme de E. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes.

1. f est une isométrie.

2. Pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. $f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire f bijective et $f^{-1} = f^*$.
4. La matrice de f dans une base orthonormée est orthogonale.
5. f transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.

Exercice 5 Soit $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$(\mathrm{Imf})^\perp = \ker \mathrm{f}^*, \quad (\ker \mathrm{f})^\perp = \mathrm{Imf}^*.$$

Indications : on pourra commencer par montrer que $\mathrm{Imf} \subset (\ker \mathrm{f}^*)^\perp$, puis que $\mathrm{Imf}^* \subset (\ker \mathrm{f})^\perp$, et conclure en utilisant les dimensions.

Exercice 6 Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(P) = Q$, avec $Q(x) = P(x) - P'(x)$ pour tout $P \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer u^* pour le produit scalaire $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ puis pour le produit scalaire $< P, Q >= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0)$.

Exercice 7 Soient les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces matrices,

(i) Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres orthonormaux associés.

(ii) Déterminer P orthogonale et D diagonale telle que $A = PDP^\top$.

Exercice 8 Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une matrice symétrique réelle de taille n et de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Exercice 9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que $A^3 + A = 0$. Montrer qu'alors $A = 0$.

Exercice 10 Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ un vecteur colonne non nul de $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $A = aa^\top$.

1. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A. En déduire le rang de la matrice A.
2. En déduire les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.
3. Calculer de deux façons différentes A^k pour $k \in \mathbb{N}$.