Несимметричная проблема собственных значений

Случай квадратных комплексных матриц общего вида: $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.

- Собственные числа λ_k суть нули характеристического многочлена:
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda) = 0.$$
- Спектр образован n собственными значениями $\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_k \colon k = 1 \ldots n\} \subset \mathbb{C}$.
- Правый собственный вектор $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$.
- Левый собственный вектор $y^T A = \lambda y^T$, $y \neq 0$.
- Вообще говоря $x \neq y$.

- Пространство S называют инвариантным для A, если $x \in S \Rightarrow Ax \in S$.
- Правое собственные подпространства инвариантно для A, левое для A^T.
- Число собственных векторов вообще говоря меньше $n = \dim A$.
- Алгебраическая кратность λ - такое d, что $p(z) = (z - \lambda)^d \tilde{p}(z)$, $p(\lambda) \neq 0$.
- Геометрическая кратность λ равна $\dim \ker(A - \lambda)$.

- Матрицы A и B подобны, если найдется невырожденное X, такое что $B = X^{-1}AX$. Для подобных матриц $\mathrm{spec}(A) = \mathrm{spec}(B)$.
- Если для матриц $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, $B \in \mathrm{Mat}(k \times k)$ найдется $X \in \mathrm{Mat}(n \times k)$, то $\mathrm{Ran}\, X$ инвариантно для A и B. Если $\mathrm{ran}\, X = k$, то $\mathrm{spec}\, B \subset \mathrm{spec}\, A$.

Теорема (Разложение Шура). Если $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, то существует унитарная матрица Q, такая что

$$Q^* A Q = T = D + N,$$

где $D = \mathrm{diag}_k \lambda_k$, N – строго верхняя треугольная матрица. Выбором Q собственные значения λ_k можно расположить в любом порядке.

- Если $Q = (q_1|\dots|q_n)$, q_k - вектора Шура. q_k - правый собственный вектор $\Leftrightarrow$ столбец $N_{\cdot,k}$ равен нулю.
- Матрица нормальна, если $A^*A = AA^*$. Матрица нормальна $\Leftrightarrow$ найдется такое Q, что в разложении Шура $N = 0$.
- Разложение Шура не единственно. Отклонение от нормальности $\|N\|_F^2$ не зависит от Q:

$$\|N\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \|D\|_F^2.$$

Неунитарные преобразования

Теорема (Блочно-диагональное разложение). Пусть дано разложение Шура с квадратными блоками T_{kk}:

$$Q^*AQ = T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ 0 & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если $\operatorname{spec} T_{kk} \cap \operatorname{spec} T_{jj} = \varnothing$ для всех $k \neq j$, то существует невырожденная матрица Y, такая что

$$(QY)^{-1}A(QY) = \operatorname{diag}_k T_{kk}.$$

- Если все собственные числа матрицы A простые, то матрица A подобна диагональной матрице, но матрица подобия общего вида.
- Блоки T_{kk} можно выбрать так, что все элементы диагонали равны, а сами T_{kk} верхнетреугольные.
- Жорданова нормальная форма дает такое разложение, где T_{kk} - Жордановы клетки.

Теория возмущений.

Теорема (О кругах Гершгорина). Если $X^{-1}AX = D + F$, где $D = \operatorname{diag}_k d_k$ и все элементы диагонали F равны нулю, то

$$\operatorname{spec} A \subset \bigcup_{k=1}^{N} D_k, \quad D_k = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - d_k| \le \sum_{j=1}^{n} |f_{kj}|\}.$$

Теорема (Бауэр-Файк). Если μ – собственное значение матрицы $A+E \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ и $X^{-1}AX = \mathrm{diag}_k\, \lambda_k$, то

$$\min_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} |\lambda - \mu| \leq \kappa_p(X) \|E\|_p,$$

в любой выбранной p-норме с подходящей константой $\kappa_p(X)$..

Обусловленность собственного значения.

Пусть λ – простое собственное значение матрицы $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ с нормированными собственными векторами $Ax = \lambda x$, $A^T y = \lambda y$, $x^2 = y^2 = 1$. Пусть F некоторая матрица возмущения с $\|F\|_2 = 1$. Тогда для малого параметра $\epsilon \to 0$ собственное число $\lambda(\epsilon)$ и правый собственный вектор $x(\epsilon)$ возмущенной матрицы аналитически зависят от ϵ:

$$(A + \epsilon F)x(\epsilon) = \lambda(\epsilon)x(\epsilon), \quad x(0) = x, \quad \lambda(0) = \lambda$$

Тогда $\frac{d}{d\epsilon}\lambda(0) \leq \frac{1}{y \cdot x}$. Правую часть неравенства называют обусловленностью собственного значения λ.

- Собственные значения плохо обусловлены, если левые и правые вектора почти ортогональны. Так часто бывает, когда матрица A близка к имеющей кратные собственные значения.
- Чувствительность собственных вектор к возмущению тем больше, чем ближе собственные значения:

$$x_k(\epsilon) = x_k + \sum_{k \neq j} \frac{y_j \cdot F x_k}{(\lambda_k - \lambda_j) y_j \cdot x_k} x_j(0) + O(\epsilon^2),$$

где $Ax_k = \lambda_k x_k$, а $x_k(\epsilon)$ собственные вектора возмущения $A + \epsilon F$.

Степенной метод.

for $k = 1, 2, \ldots$ **do**
  $z^{(k)} = Aq^{(k-1)}$
  $q^{(k)} = z^{(k)}/\|z^{(k)}\|$
  $\lambda^{(k)} = q^{(k)} \cdot Aq^{(k)}$
end for

Алгоритм генерирует последовательность чисел $\lambda^{(k)}$, сходящихся к $|\lambda_1| = \max|\operatorname{spec} A|$. Если $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ второе по величине модуля собственное значение A, то скорость сходимости

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = O\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k.$$

Ортогональные итерации.

Пусть $Q_0 \in \mathrm{Mat}(n \times p)$ для $p \neq n$.

for $k = 1, 2, \ldots$ **do**
  $Z_k = AQ_{k-1}$
  $Q_k R_k = Z_k$ (QR-разложение).
end for

Упорядочим собственные значения по абсолютной величине:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Матрицы Q_k сходятся к собственному базису в собственном подпространстве, отвечающему числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Скорость сходимости пропорциональна $|\lambda_{p+1}/\lambda_p|^k$.