Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2024/2025

Folha 4 - Recorrência e funções geradoras

1. Determine a soma dos n primeiros números de Fibonacci com índice par e com índice ímpar.

2. Indique quais são os números de Fibonacci pares.

3. Para subir uma certa escada, o Pedro consegue, com um único passo, avançar um, dois ou três degraus. Encontre uma equação de recorrência para a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde a_n é o número de maneiras possíveis em que o Pedro consegue subir n degraus. Apresente as condições iniciais.

4. Uma experiência é executada lançando-se um dado até que apareçam 2 números pares. Determine uma equação de recorrência para o número de experiências que terminam no n-ésimo lançamento ou antes.

5. Determine uma equação de recorrência para o número de sequências binárias de comprimento n com 3 zeros consecutivos. Indique as condições iniciais.

6. Suponha que uma equação de recorrência linear homogénea tem como raízes características 1 e 3 com multiplicidade um, e 2 com multiplicidade dois.

   a) Explicite a equação de recorrência.

   b) Determine a solução geral desta equação de recorrência linear homogénea.

7. Resolva as seguintes equações de recorrência:

   a) $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 6$, $n \geq 0$, com $a_0 = 0$ e $a_1 = 6$;

   b) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2^n$, $n \geq 2$, com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$;

8. Sendo $p(x) = 2x^2 + x$, determine uma fórmula fechada para o cálculo da soma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} p(i)$$

   começando por estabelecer uma equação de recorrência apropriada.

9. Determine a equação de recorrência linear não homogénea com solução geral

$$a_n = (c_1 + c_2 n)2^n + c_3 + 4n,$$

   onde c_1, c_2 e c_3 são constantes reais.

10. Usando transformações adequadas, resolva as seguintes equações de recorrência não lineares:

    a) $a_n = na_{n-1} + n!$, com condição inicial $a_0 = 2$;

    b) $5na_n + 2na_{n-1} = 2a_{n-1}$, $n \geq 3$, com condição inicial $a_2 = -30$;

    c) ${a_n}^3 = {a_{n-1}}^2$, $n \geq 2$, $a_1 = 2$ (assume-se que $a_n \geq 0$, para todo o $n \geq 1$.

    d) $a_n = 2(a_{n-1} + 2(a_{n-2} + \cdots + 2(a_1 + 2(a_0 + a_0)^2)^2 \ldots)^2)^2$, com $a_0 = 2$ e $a_1 = 2(a_0 + a_0)^2$.

11. Seja $h(k, n)$ o número de possibilidades de colocação de k pacientes numa sala de espera com n cadeiras em linha, de tal forma que os pacientes não se sentam em cadeiras vizinhas, deduza uma relação de recorrência para $h(k, n)$.

12. Os números de Lucas são definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

    e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Obtenha uma fórmula fechada para L_n.

13. Defina a série geradora ordinária para a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde a_n é o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$, nos casos em que

    a) $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 3$, $2 \leq x_3 \leq 8$, $0 \leq x_4 \leq 4$;

    b) $0 \leq x_i \leq 8$, para $i = 1, 2, 3, 4$, x_1 é par e x_2 é ímpar.

14. a) Use uma série geradora para modelar o número de diferentes resultados numa eleição (secreta) para eleger o delegado de uma turma com 27 alunos, dos quais 4 são candidatos? Qual é o coeficiente dessa função geradora que nos dá a resposta?

    b) Suponha que cada aluno que é candidato vota em si próprio. Neste caso qual é a série geradora e o coeficiente desejado?

    c) Suponha que nenhum candidato recebe a maioria dos votos. Repita a alínea 14a.

15. Calcule o número de possibilidades de troca de 50 euros em notas de 20 euros, 10 euros e 5 euros e moedas de 2 euros e 1 euro, sabendo que dispõe no máximo de cinco moedas de 1 euro, cinco moedas de 2 euros e cinco notas de 5 euros (não havendo qualquer limitação em relação às restantes notas).

16. Determine as séries geradoras das seguintes sucessões:

    a) $b_n = nk^n$, para $n \in \mathbb{N}$;

    b) $c_n = k + 2k^2 + 3k^3 + \cdots + nk^n$, para $n \in \mathbb{N}$;

    c) $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2}$, com $a_0 = -1$ e $a_1 = 2$, onde C_1 e C_2 são constantes.

17. Determine as sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associadas às seguintes séries geradoras:

    a) $(2 + x)^4$;

    b) $\frac{6x}{(1+2x)^2} + 2 - x^2$

18. Resolva as equações seguintes utilizando o método da série geradora:

    a) $a_n = na_{n-1}$, $n \geq 2$, com $a_1 = 1$;

    b) $a_n = a_{n-1} + n$, $n \geq 1$, com $a_0 = 1$;

    c) $a_n = 3a_{n-1}$, para $n \geq 1$, com $a_0 = 2$;

    d) $u_n = u_{n-1} + n^2$, para $n \geq 1$, com $u_0 = 2$;

    e) $u_{n+1} = 3u_n - 1$, para $n \geq 0$, com $u_0 = 1$;

    f) $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$, $n \geq 0$, com $u_0 = 0$ e $u_1 = 1$.

19. Considere a relação de recorrência $u_n - 2u_{n-1} = 4^n$, $n \geq 1$, $u_0 = 1$.

    a) Mostre que a série geradora da sucessão (u_n) é $\frac{1}{(1-2x)(1-4x)}$.

    b) Determine uma fórmula não recursiva para u_n, $n \geq 0$.

20. a) Obtenha a série geradora ordinária $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ como um quociente de polinómios (função racional) para a sucessão dos números naturais $a_n = n$.

    b) Mostre que $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ é a série geradora da sucessão definida por $a_n = n^2$.

    c) Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $a_0 = 0$, $a_1 = \alpha$ e

    $$a_n = a_{n-2} - n^2, \ n \geq 2.$$

    Obtenha a função geradora ordinária desta sucessão como soma de funções racionais. Use as respostas das questões anteriores.

    d) Obtenha uma fórmula fechada para a sucessão dada na alínea anterior.

21. Determine os números binomiais generalizados $\binom{\frac{1}{2}}{3}$ e $\binom{-2}{3}$.

22. Determine todos os números reais x para os quais o número binomial generalizado $\binom{x}{2}$ é 28.

23. a) Mostre que, para todos os $n, r \in \mathbb{N}$,

    $$\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

    b) Mostre que $(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$

    Sugestão. Recorra ao desenvolvimento em série de $(1+x)^\alpha$.

24. Partindo da série geradora dos números de Fibonacci, mostre que os números de Fibonacci F_n são determinados pela expressão

    $$F_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n-j}{j}.$$

25. Resolva o sistema de equações de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$$

com condições iniciais $a_0 = b_0 = 1$.

Algumas soluções

1 F_{2n-1} e $F_{2n} - 1$.

2 F_{3n-1}, $n \geq 1$.

3 Tenha em conta que podemos partir o número de maneiras de subir n degraus em três conjuntos disjuntos. O conjunto X_1 de todas as subidas possíveis em que no primeiro passo se avança apenas um degrau (cuja cardinalidade é a_{n-1}), o conjunto X_2 de todas as subidas possíveis em que no primeiro passo se avançam dois degraus (cuja cardinalidade é a_{n-2}) e o conjunto X_3 de todas as subidas possíveis em que no primeiro passo se avançam três degraus (cuja cardinalidade é a_{n-3}).

4 $a_0 = 0, a_1 = 0$ e $a_n = a_{n-1} + (n-1) \times 3 \times 3^{n-2} \times 3$, para $n \geq 2$.

5 Note que o número de sequências que terminam em 1 é a_{n-1}, o número de sequências que terminam em 10 é a_{n-2}, o número de sequências que terminam em 100 é a_{n-3} e o número de sequências que terminam em 000 é 2^{n-3}.

6
1. $a_n - 8a_{n-1} + 23a_{n-2} - 28a_{n-3} + 12a_{n-4} = 0$.
2. $a_n = A + B3^n + C2^n + Dn2^n$, para todo $n \geq 0$, com A, B, C e D constantes.

7
1. $a_n = \frac{3^{n+1}}{5} + \frac{(-2)^{n+3}}{5} + 1$, para $n \geq 0$.
2. $a_n = (-4 + \frac{3}{2}n)2^n + n^2 2^{n-1} + 4 + n$, para $n \geq 0$.

8 $S_1 = 3$ e $S_n = S_{n-1} + 2n^2 + n$, $n \geq 2$.

$$S_n = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}, \; n \geq 1.$$

9 $a_n - 5a_{n-1} + 8a_{n-2} - 4a_{n-3} = 4$.

10
(a) Substituição: $a_n = b_n \times n!$. Fórmula fechada: $a_n = (n+2) \cdot n!$, para todo $n \geq 0$.

(b) Substituição: $a_n = b_n / n$. Fórmula fechada: $a_n = \frac{-3 \times (-2)^n}{n 5^{n-3}}$, para todo $n \geq 2$. 5Fórmula fechada:

(c) Substituição: $b_n = \log_2 a_n$. Fórmula fechada: $a_n = 2^{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$, para todo $n \geq 1$.

(d) Substituição: $b_n = \log_2 a_n$. Fórmula fechada: $a_n = 2^{2^{n+2}-3}$ para $n \geq 0$.

11 $h(k,n) = h(k,n-1) + kh(k-1,n-2)$, para $k \geq 1$ e $n \geq 1$.

12 $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

13
1. $(1+x+\cdots+x^5)(1+x+x^2+x^3)(x^2+x^3+\cdots+x^8)(1+x+\cdots+x^4)$.
2. $(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(x+x^3+x^5+x^7)(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^8)^2$.

14
1. $(1+x+x^2+\cdots+x^{27})^4$, coeficiente de x^{27}, dado por $\binom{30}{3}$.
2. $(x+x^2+\cdots+x^{24})^4$, coeficiente de x^{27}, dado por $\binom{26}{3}$.
3. $(1+x+x^2+\cdots+x^{13})^4$, coeficiente de x^{27}, dado por $\left[\binom{30}{3} - 4\binom{16}{3}\right]$.

15 Coeficiente de x^{50} na série geradora

$$(1+x+\cdots+x^5)(1+x^2+\cdots x^{10})(1+x^5+\cdots+x^{25})(1+x^{10}+\cdots+x^{50})(1+x^{20}+x^{40})$$
$$= \frac{(1-x^6)(1-x^{12})(1-x^{30})(1-x^{60})^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})}.$$

16
1. $\frac{kx}{(1-kx)^2}$.
2. $\frac{kx}{(1-x)(1-kx)^2}$.
3. $\frac{-1+(2+C_1)x}{1-C_1x-C_2x^2}$.

17
1. $a_0 = 16$, $a_1 = 32$, $a_2 = 24$, $a_3 = 8$, $a_4 = 1$, $a_n = 0$, para todo $n \geq 5$.
2. $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, $a_2 = -25$, $a_n = -3(-2)^n n$, para $n \geq 3$.

18
1. $a_n = n!$, para todo $n \geq 1$.
2. $a_n = 1 + \binom{n+1}{2}$, para todo $n \geq 0$.
3. $a_n = 2(3)^n$, para todo $n \geq 0$.
4. $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2$, para todo $n \geq 0$.
5. $u_n = \frac{1+3^n}{2}$, para todo $n \geq 0$.
6. $u_n = -2^n + 3^n$, para todo $n \geq 0$.

19 (b) $u_n = 2^{2n+1} - 2^n$, para todo $n \geq 0$.

20 (a) $\frac{x}{(1-x)^2}$.

(c) $(\alpha+1)\frac{x}{1-x^2} - \frac{x}{(1-x)^4}$.

(d) $a_n = \frac{\alpha+1}{2} - \frac{\alpha+1}{2}(-1)^n - \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$, para todo $n \geq 0$.

21 $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{16}$ e $\binom{-2}{3} = -4$.

22 $\{\text{-}7, 8\}$

25 $a_n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n + \frac{1-\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^n$ e $b_n = \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right)$, para todo $n \geq 0$.