Formas normais

Literal é uma variável (proposicional) ou negação de uma variável

$\Rightarrow \neg p \vee p \longrightarrow$ tautologia (sempre verdadeiro)
$\Rightarrow \neg p \wedge p \longrightarrow$ contradição (sempre falso)

$\Rightarrow \dots \vee L_i \vee \dots \vee L_j \boxed{\vee} \dots \longrightarrow$ tautologia
$L_j = \neg L_i$; ↳ disjunção

$\Rightarrow \dots \wedge L_i \wedge \dots \wedge L_j \boxed{\wedge} \dots \longrightarrow$ contradição
$L_j = \neg L_i$; ↳ conjunção

Teorema 1.1.20

São equivalentes as afirmações:

- $\bigwedge_{i \in J} L_i$ é contradição
- $\bigvee_{i \in J} L_i$ é tautologia
- $L_i = \neg L_j$ para alguns $i, j \in J$

L_j e L_i são literais

Uma V-clausula é uma disjunção ($\vee$ = or) de literais.

exemplo: $\neg p \vee q \vee r$

Uma formula está na forma normal conjuntiva (FNC) se é uma conjunção de clausulas

$$\bigwedge_{i \in J} \varphi_i \ , \ \varphi_i \text{ é uma V-clausula}$$

Exemplo 1.1.23:

- $\underbrace{(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r}_{3 \text{ clausulas}}$ FNC
- $p \wedge q \wedge r$ FNC — 3 clausulas (mesmo que não tenha V)
- $\underbrace{p \vee r}_{1 \text{ clausula}}$ FNC
- $(p \wedge (q \vee r)) \vee q$ (not FNC) $\equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \vee q$
  $= p \wedge q \vee p \wedge r \vee q$ — FND

$= p \vee q \wedge q \vee r \vee q$
$= p \vee q \wedge \underbrace{q \vee q}_{q} \vee r$
$= \underbrace{p \vee q \wedge q \vee r}_{2 \text{ clausulas}}$

Teorema 1.1.25

Toda a fórmula proposicional é equivalente a uma FNC (e FND)

Teorema 1.1.26

Uma fórmula na FNC ($\wedge \to$ conjunção) é uma tautologia se todas as suas clausulas são tautologias

Folha 0

2) a) $p \vee (q \wedge \neg p)$
$\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p)$ FNC
$\equiv (p \vee q) \wedge \overset{\text{tautologia}}{T}$ FNC
$\equiv \underbrace{p \vee q}_{1 \text{ clausula}}$ FNC

b) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg\neg p \vee \neg\neg q \equiv p \vee q$ — 1 clausula

c) $\underbrace{(p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))}_{FND} \equiv \underbrace{p \wedge (\underbrace{q \vee \neg q}_{T})}_{FNC} \equiv p \wedge T \equiv p$ — 1 clausula

d) $\underbrace{(q \wedge \neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)}_{FND} \equiv (\neg p \wedge (q \wedge r)) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\equiv \neg p \wedge ((q \wedge r) \vee \neg q)$
$\equiv \neg p \wedge (\underbrace{(q \vee \neg q)}_{T} \wedge (r \vee \neg q))$
$\equiv \neg p \wedge T \wedge (r \vee \neg q)$
$\equiv \underbrace{\neg p \wedge (r \vee \neg q)}_{2 \text{ clausulas}}$

Conjunto de formulas consistente

$\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é consistente se existe uma valoração v tal que $v(\varphi_i) = 1$, $i = 1, \dots, n$.
↳ conjunto fórmulas

(Todas as fórmulas tem que ter valor 1.)

exemplo 1.1.30

$\Gamma = \{\underbrace{\neg p}_{1}, \underbrace{p \to q}_{1}, \underbrace{q}_{1}\}$, $v(p) = 0$ e $v(q) = 1$

ψ é consequência semântica (lógica) de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se ψ é verdadeiro sempre que $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são verdadeiras.

Notação: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ ou $\dfrac{\varphi_1 \ \varphi_2 \dots \varphi_n}{\psi}$

Exemplo 1.1.33

$p \vee q, p \to q \models q \vee \neg p$?

$A, B \models C \Longrightarrow C$ é consequência semântica de A e B

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \to q$	$q \vee \neg p$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1 ✓
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1 ✓

as duas tem que ser verdadeiras para avaliar a fórmula "final"

$\therefore p \vee q, p \to q \models q \vee \neg p$

Teorema 1.1.34

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ se $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \longrightarrow \psi$ é tautologia

ψ é consequência sintática de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se é possível deduzir (por regras de inferência) ψ a partir de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_n$$

Teorema (completude e correção)

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \iff \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$$

Teorema 1.1.42 (método resolução)

$\Gamma \models \psi$ se $\Gamma \cup \{\neg \psi\}$ é inconsistente

$\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$\Gamma \cup \{\neg\psi\} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi\}$ é inconsistente

Regra de resolução

cancela

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}$$

$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ é inconsistente

$\underbrace{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi}_{\text{é falso}} \vdash \bot$ — contradição

$\therefore \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$

Exemplo 1.1.46 (Verificar [ver slides])

$p \to q, q \to r \models p \to r$

negar

$p \to q \qquad q \to r \qquad \neg(p \to r) \equiv \neg(\neg p \vee r)$
$\equiv \underbrace{\neg p \vee q}_{1 \text{ clausula}} \quad \equiv \underbrace{\neg q \vee r}_{1 \text{ clausula}} \quad \equiv \underbrace{p \wedge \neg r}_{2 \text{ clausulas}}$ — separa as clausulas

$\Gamma = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$

1	$\neg p \vee q$	Hipóteses (tentar deduzir + formulas através do método resolução)
2	$\neg q \vee r$	
3	p	
4	$\neg r$	
5	q	Resol (1,3)
6	$\neg q$	Resol (4,2)
7	$\bot$	Resol (5,6) ↳ $q \vee \neg q \Rightarrow \bot$

Exemplo 1.1.47

$p, p \to q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$

negar

$\Gamma = \{p, \neg p \vee q, \neg r \vee q, \neg r\}$

$\neg(r \wedge \neg q) \equiv \neg r \vee \neg\neg q \equiv \neg r \vee q$

1	p	Hipótese
2	$\neg p \vee q$	
3	$\neg r \vee q$	
4	$\neg r$	
5	q	Resol (1,2)

r não é consequência lógica de $p, p \to q, \neg(r \wedge \neg q)$

Folha 0

3) a) $p, p \to q \models q$

negar

$\Gamma = \{p, \neg p \vee q, \neg q\}$

1	p	Hipótese
2	$\neg p \vee q$	
3	$\neg q$	
4	$\neg p$	Resol (3,2)
5	$\bot$	Resol (1,4)

$\therefore p, p \to q \models q$

b) $p \vee q, p \to r, q \to r \models r$

negar

$\Gamma = \{p \vee q, \neg p \vee r, \neg q \vee r, \neg r\}$

1	$p \vee q$	
2	$\neg p \vee r$	
3	$\neg q \vee r$	
4	$\neg r$	
5	$\neg q$	Resol (3,4
6	$\neg p$	Resol (2,4)
7	q	Resol (1,6)
8	$\bot$	Resol (5,7)

$\therefore p \vee q, p \to r, q \to r \models r$

4) c = "chove"
g = "devo guarda-chuva"

se $\longrightarrow$
só se
se e só se $\longleftrightarrow$

a) $c \leftrightarrow g, \neg g \models \neg c$?

desfazer $\leftrightarrow$; "logo" ; negar

$\equiv c \to g \wedge g \to c$
desfazer
$\equiv \underbrace{(\neg c \vee g) \wedge (\neg g \vee c)}_{2 \text{ clausulas}}$

$\Gamma = \{\neg c \vee g, \neg g \vee c, \neg g, c\}$

1	$\neg c \vee g$	
2	$\neg g \vee c$	
3	$\neg g$	
4	c	
5	g	Resol (1,4)
6	$\bot$	Resol (3,5)

$\therefore c \leftrightarrow g, \neg g \models \neg c$

- $c \to g, \neg g \models \neg c \Longrightarrow$ Modus Tollens
- $c \to g, c \models g \Longrightarrow$ Modus Ponens

b) $g \to c, \neg g \models \neg c$?
$\equiv \neg g \vee c$

negar

$\Gamma = \{\neg g \vee c, \neg g, c\}$

1	$\neg g \vee c$
2	$\neg g$
3	c

Não se verifica
$\neg c$ não é consequência semântica de $g \to c, \neg g$.