Folha 3

4 20 cartas idênticas distribuir por 12 envelopes

$20 - 12 = 8$ cartas restantes

distribuir 8 cartas

$\underbrace{\sqcup \; \sqcup \; \sqcup \; \sqcup \; \dots \; \sqcup}_{12 \text{ envelopes}} \rightsquigarrow \underbrace{1101011111000000000}$

$\underbrace{\{1,1,2,3,3,3,3,3\}}_{\text{tamanho } 8}$

tamanho sequência $\Rightarrow 8+12-1 = 19$

$$\left(\!\!\binom{12}{8}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{19}{8}\!\!\right) = \frac{19!}{(19-8)!\,8!} = \frac{19!}{11!\,8!}$$

tamanho da sequência

nº de 1's

5 6 bolas Basquete $=$ / 7 bolas Futebol $\neq$ } por 5 clubes

(B, F)

B

$\underbrace{11\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1}$

tamanho $= 6 + \underbrace{5-1}_{\#0\text{'s}-1} = 10$

$\# 1$'s

$$\left(\!\!\binom{5}{6}\!\!\right) = \binom{10}{6}$$

nº de 1's

F

$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7 = A^n(5,7)$

Resposta: $\binom{10}{6} \times 5^7 = \frac{10!}{5! \times 5!} \times 5^7$

7

$x_1 + x_2 + x_3 = 11$

$2 + 3 + 6$

$\| + ||| + ||||||$

$11 - 3 = 8$ bolas por distribuir

uns $\to 8$ / zeros $\to 3 - 1 = 2$ (caixas) } comprimento $\to 8+3-1 = 10$

$$\binom{10}{8} = \left(\!\!\binom{3}{8}\!\!\right) = \frac{10!}{2 \times 8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 5 \times 9 = 45$$

3.3 Permutações e multinómios

Problema (ver slides)

2 _ _ _ _ _ _ _ _

$$\binom{8}{1} \times \binom{8-1}{4} \times \binom{7-4}{2} \times \binom{3-2}{1} = \frac{8!}{\cancel{7!}\,1!} \times \frac{\cancel{7!}}{4!\,\cancel{3!}} \times \frac{\cancel{3!}}{2!\,1!} \times 1!$$

colocar 2nd "2", colocar 3 "3", colocar 2 "6", colocar o "9"

$$= \frac{8!}{1!\,4!\,2!\,1!} = \binom{8}{1,4,2,1}$$

freq. rep. "2", freq. rep. "3", freq. rep. "6", freq. rep. "9"

Uma permutação c/ repetição é uma sequência de elementos que se repetem.

nº de permutações com repetição n

$$\left.\begin{matrix} m_1 \\ + \\ m_2 \\ + \\ m_3 \\ + \\ \vdots \\ + \\ m_k \end{matrix}\right\} m \qquad \binom{m}{m_1, m_2, \dots, m_k} = \frac{m!}{m_1!\,m_2! \dots m_k!}$$

coeficiente multinomial

- Se $\binom{m}{\underbrace{1,1,1,\dots,1}_{\text{"coisas"} \neq \text{ (não há repetição)}}} = m!$

- Nº de binários de comprimento 10 com 8 uns

$$\binom{10}{8,2} = \frac{10!}{8!\,2!} = \binom{10}{8}$$

Folha 3

10

a) 12 símbolos $\neq$, 45 espaços

$$\binom{\overbrace{12+45}^{57}}{\underbrace{1,1,\dots,1}_{12 \text{ símbolos } \neq}, 45} = \frac{57!}{45!} = 57 \times 56 \times \dots \times 46$$

b) $S_1 \sqcup\sqcup\sqcup \quad S_2 \sqcup\sqcup\sqcup \quad S_3 \sqcup\sqcup\sqcup \dots S_{11} \sqcup\sqcup\sqcup \quad S_{12}$

$(12-1) \times 3 = 33$ espaços já colocados (certos)

$S_1 \sqcup S_2 * S_3 * S_4 \dots \sqcup S_{11} \dots S_{12}$

$45 - 33 = 12$ espaços sobrantes

12 espaços sobrantes + 12 símbolos

$12 + 12 = 24$

$$\binom{24}{\underbrace{1,\dots,1}_{12 \neq}, 12} = \frac{24!}{12!}$$

11

a)

P – 3
A – 2
R – 1
L – 2
E – 3
I – 1
D – 1
O – 1

tamanho 14

$$\binom{14}{3,2,1,2,3,1,1,1} = \frac{14!}{3!\,2!\,2!\,3!}$$

b) PPP – 1

$14 - 3 = 11$ (letras restantes)

PPP

$$\binom{11+1}{1,2,1,2,3,1,1} = \frac{12!}{2!\,3!\,2!} \Longrightarrow \text{Quantos têm os 3 P seguidos}$$

Resposta: Total – tem 3P seguidos

$$\frac{14!}{3!\,2!\,2!\,3!} - \frac{12!}{2!\,2!\,3!}$$

$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$ Binómio Newton

Fórmula Multinomial

$$\sum_{m_1 + \dots + m_k = m} \binom{m}{m_1, \dots, m_k} a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k} = (a_1 + \dots + a_k)^m$$

Exemplo 3.3.11

$(3a + 5b - 2c + d)^7$

$$\sum_{m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \binom{7}{m_1, m_2, m_3, m_4} (3a)^{m_1} (5b)^{m_2} (-2c)^{m_3} (d)^{m_4}$$

$$\left.\begin{matrix} m_1 = 2 \\ m_2 = 4 \\ m_3 = 0 \\ m_4 = 1 \end{matrix}\right\} \text{coeficiente: } \binom{7}{2,4,0,1} \times 3^2 \times 5^4 \times (-2)^0 \times 1^1 = \frac{7!}{2!\,4!\,1!} \times 3^2 \times 5^4$$

Exercício: $(w^2 + 3wyz + z^3)^7$

coeficiente de $w^7 y^3 z^9 = ?$

$$\binom{7}{m_1, m_2, m_3} \times (w^2)^{m_1} \times (3wyz)^{m_2} \times (z^3)^{m_3}$$

$$= \binom{7}{m_1, m_2, m_3} \times 3^{m_2} \times w^{2m_1 + m_2} \times y^{m_2} \times z^{3m_3 + m_2}$$

$$\begin{cases} m_2 = 3 \\ 2m_1 + m_2 = 7 \\ 3m_3 + m_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 2m_1 = 4 \\ 3m_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 3 \\ m_1 = 2 \\ m_3 = 2 \end{cases}$$

coeficiente: $\binom{7}{2,2,3} \times 3^3 = \frac{7!}{2!\,2!\,3!} \times 3^3$

3.4 Identidades Combinatórias

Exemplo 3.4.1

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m+1}{m+2}$$

$\binom{7}{5} =$ nº de subconjuntos de $\{1,\dots,7\}$ com 5 elementos $=$

$=$ nº de subconjuntos $\{1,\dots,7\}$ com valor máximo 5
\+
nº de subconjuntos $\{1,\dots,7\}$ com valor máx. 6
\+
nº de subconjuntos $\{1,\dots,7\}$ com valor máx. 7

$= \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4}$

7	7	7
6	6	6
5	5	5
4	4	4
3	3	3
2	2	2
1	1	1