Capítulo 2. – Princípio de Enumeração Combinatória

2.2 O Princípio da Gaiola dos Pombos

Se tivermos n pombos para distribuir por m gaiolas e $n > m$, então uma gaiola receberá pelo menos 2 pombos.

$$\left.\begin{array}{l} A = A_1 \cup \dots \cup A_m \\ |A| = n > m \end{array}\right] \Rightarrow |A_i| > 1 \text{ para algum } i = 1, \dots, m$$

$|A|$ → cardinalidade de A

$$\left.\begin{array}{l} f : A \to B \\ |A| > |B| \end{array}\right] \Rightarrow f \text{ não é injetiva, ou seja, dois objetos têm a mesma imagem}$$

Exemplo 2.2.2

$P = \{\text{pessoas}\}$ → conjunto das pessoas

$M = \{\text{meses}\}$ → conjunto dos meses

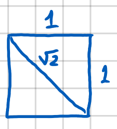
$f : P \to M$

$u \mapsto$ mês de aniversário de u

$|P| = 13 > |M| = 12$ → a função NÃO é injetiva

$\therefore$ f não é injetiva ou seja pelo menos 2 pessoas têm o seu aniversário no mesmo mês.

Exemplo 2.2.3



$P = \{\text{pessoas}\}$

$Q = \{\text{quadrados de } 1\ m^2\}$

$f : P \to Q$

$u \mapsto$ quadrado onde u está

$|P| = 50 > |Q| = 49 \Longrightarrow f$ não é injetiva, logo, pelo menos, 2 pessoas estão no mesmo quadrado, ou seja, a uma distância inferior a 1,5 m.

$\sqrt{2} \approx 1,4$ m

Folha 2

2

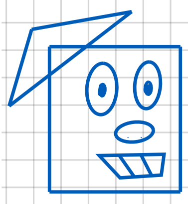
$N = \{\text{números}\}$

$R = \{0, 1, 2, 3\}$ → restos divisão por 4

$f : N \to R$

$u \mapsto$ resto da divisão por 4

$|N| = 5 > |R| = 4 \Longrightarrow f$ não é injetiva, logo, existem pelo menos 2 números com o mesmo resto na divisão por 4



Princípio de Dirichlet

Para todos $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, existem números inteiros p e q com $q \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$

Demonstração

$\alpha \in \mathbb{R}$

$r_k = k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor$, $k = 0, \dots, n$

$\lfloor\ \rfloor$ → truncamento

"$\lfloor\ \rfloor$" the floor

$$r_k \in [0,1[= \underbrace{\overbrace{[0, \tfrac{1}{n}[}^{I_1} \cup \overbrace{[\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}[}^{I_2} \cup \dots \cup \overbrace{[\tfrac{n-1}{n}, 1[}^{I_n}}_{n \text{ subintervalos}}$$

$k \in \{0, \dots, n\}$

$R = \{r_k : k \in \{0, \dots, n\}\}$

$I = \{I_1, \dots, I_n\}$

$f : R \to I$

$r_k \mapsto I$, com $u \in I$

$$\left.\begin{array}{l} |R| = n+1 \\ |I| = n \end{array}\right] \Rightarrow f \text{ não é injetiva, existem } k_1 \text{ e } k_2 \text{ tais que } (k_1 > k_2)$$

$$|r_{k_1} - r_{k_2}| < \frac{1}{n}$$

$$|k_1\alpha - \lfloor k_1\alpha \rfloor - k_2\alpha + \lfloor k_2\alpha \rfloor| < \frac{1}{n}$$

$$|\underbrace{(k_1 - k_2)\alpha}_{q} - (\underbrace{\lfloor k_1\alpha \rfloor - \lfloor k_2\alpha \rfloor}_{p})| < \frac{1}{n}$$

$\in \{1, \dots, n\}$

Exemplo 2.2.5

$u | y$ lê-se u divide y e significado y é múltiplo de u.

$x = 2^a p$, p ímpar, $a \in \mathbb{N}_0$

$I \subseteq \{1, \dots, 2n\}$ ↳ nº ímpares

$N \subseteq \{1, \dots, 2n\}$ $|N| = n + 1$

$f : N \to I$

$u \mapsto p$, que satisfaz a igualdade $x = 2^a p$ para algum $a \in \mathbb{N}_0$

$$\left.\begin{array}{l} |I| = n \\ |N| = n+1 \end{array}\right] \Rightarrow f \text{ não é injetiva, isto é, existem } u \text{ e } y \text{ tais que } x = 2^{a_1} p \text{ e } y = 2^{a_2} p,\ a_1 \neq a_2$$

$u | y$ ou $y | u$

Exemplo 2.2.6

$J = \{0, \dots, n-1\}$ → possibilidades para o nº de jogos realizados por cada equipa

$E = \{\text{equipas}\}$ $|E| = n$

$f : E \to J$

$u \mapsto$ nº de jogos que u joga

Caso 1: Se todas as equipas jogam pelo menos 1 jogo

$f : E \to \{1, \dots, n-1\}$

equipa $\mapsto$ nº de jogos que a equipa fez

$|E| = n > n - 1 \Longrightarrow f$ não é injetiva, ou seja, duas equipas fazem o mesmo nº de jogos.

Caso 2: Uma equipa não joga

$J = \{0, \dots, n-2\}$

$f : E \to \underbrace{\{0, \dots, n-2\}}_{n-1 \text{ elementos}}$

$|E| = n > n - 1$

Duas equipas realizam o mesmo nº de jogos