

MATEMÁTICA DISCRETA

Ano Letivo 2024/2025 (Versão: 4 de Março de 2025)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
<https://elearning.ua.pt/>

CAPÍTULO 2
PRINCÍPIOS DE ENUMERAÇÃO
COMBINATÓRIA

INTRODUÇÃO

Exemplo

- Quantas sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \dots, 9$?
- Quantas maneiras existem de colocar k bolas em n caixas?
- Quantas sequências binárias com k uns e $n - 1$ zeros existem?
- Sejam $k, n \in \mathbb{N}$. A equação $x_1 + \dots + x_n = k$ tem quantas soluções com $x_i \in \mathbb{N}$?
- Sejam 50 pessoas numa sala de $7 \text{ m} \times 7 \text{ m}$. Então, há duas pessoas que estão a uma distância inferior a 1.5 metros entre elas?
- ...

Definição

Seja $f: A \longrightarrow B$ uma função. Então, f diz-se

- **injetiva** quando, para todos os $x, y \in A$: $f(x) = f(y) \implies x = y$.
- **sobrejetiva** quando todo o $y \in B$ é imagem de algum $x \in A$; isto é, para todo o $y \in B$ existe um $x \in A$ com $f(x) = y$.
- **bijetiva** quando f é injetiva e sobrejetiva.

Definição

Uma função $f: A \longrightarrow B$ diz-se **invertível** quando existe uma função $g: B \longrightarrow A$ com $g \circ f = \text{id}_A$ e $f \circ g = \text{id}_B$.

Teorema

$f: A \longrightarrow B$ é invertível se e somente se f é bijetiva.

Nota

Para um conjunto finito A , denota-se por $|A|$ o número de elementos de A .

1. O princípio da gaiola dos pombos
2. O princípio da bijeção
3. Os princípios da adição e da multiplicação
4. Generalizações
5. O princípio da bijeção (outra vez)

1. O PRINCÍPIO DA GAIOLA DOS POMBOS

A ideia

n pombos voam para m gaiolas. Se $n > m$, então pelo menos uma gaiola irá ter mais de um pombo.

Também conhecido como «o princípio das gavetas de Dirichlet». Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), matemático alemão.

Mais formal

Sejam A um conjunto e (A_1, \dots, A_m) uma sequência de subconjuntos de A dois a dois disjunta com

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m.$$

Se $|A| > m$, então $|A_i| > 1$ para algum $1 \leq i \leq m$.

Formulação alternativa

Sejam A e B conjuntos finitos e $f: A \rightarrow B$ uma função. Se $|A| > |B|$, então existem dois elementos $x_1, x_2 \in A$ com $f(x_1) = f(x_2)$ (f não é injetiva).

A contraposição é «mais óbvia»: Se $f: A \rightarrow B$ é injetiva, então $|A| \leq |B|$.

Exemplo

Há duas pessoas aqui na sala que fazem anos no mesmo mês.

Consideremos a função

$$\begin{aligned} f: \{\text{pessoas na sala}\} &\longrightarrow \{\text{janeiro}, \dots, \text{dezembro}\}, \\ p &\longmapsto \text{o mês do nascimento de } p \end{aligned}$$

com

$$|\{\text{janeiro}, \dots, \text{dezembro}\}| = 12$$

e

$$|\{\text{pessoas na sala}\}| > 12 \quad (\text{espero}).$$

Logo, f não é injetiva.

Exemplo

Sejam 50 pessoas numa sala de $7\text{ m} \times 7\text{ m}$. Então, há duas pessoas que estão a uma distância inferior a 1.5 metros entre elas.

Dividimos a sala em quadrados «unitários» e consideremos a função

$$\begin{aligned} f: \{\text{as pessoas na sala}\} &\longrightarrow \{\text{os quadrados}\} \\ p &\longmapsto \text{o quadrado onde } p \text{ está} \end{aligned}$$

(se p está na fronteira, escolhemos um dos quadrados). Como

$$|\{\text{as pessoas na sala}\}| = 50 \quad \text{e} \quad |\{\text{os quadrados}\}| = 49,$$

há duas pessoas p e q no mesmo quadrado (f não é injetiva). Logo:

$$\begin{aligned} \text{«a distância entre } p \text{ e } q\text{»} &\leq \text{o comprimento do diagonal do quadrado} \\ &= \sqrt{2} < 1.5. \end{aligned}$$

Teorema

Para todos os $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, existem números inteiros p e q com $q \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$.

Nota

Logo, $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn} \leq \frac{1}{n}$.

Notação

Para $x \in \mathbb{R}$, denota-se por $\lfloor x \rfloor$ o maior número inteiro a com $a \leq x$.

Teorema

Para todos os $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, existem números inteiros p e q com $q \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$.

Demonstração.

- Para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, consideremos $r_k = k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor \in [0, 1[$.
- Consideremos a função

$$f: \{0, 1, \dots, n\} \longrightarrow \left\{ \left[0, \frac{1}{n}[, \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[, \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right[\right\}$$

$$k \longmapsto \text{o intervalo } \mathcal{I} \text{ com } r_k \in \mathcal{I}$$

- Pelo princípio da gaiola dos pombos, existem números l e k em $\{0, 1, \dots, n\}$ (digamos $l < k$) tal que $|r_l - r_k| < \frac{1}{n}$.
- Portanto,

$$\frac{1}{n} > |k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor - l\alpha + \lfloor l\alpha \rfloor| = |(k-l)\alpha - (\lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor l\alpha \rfloor)|$$

e escolhemos $q = k - l \in \{1, \dots, n\}$ e $p = \lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor l\alpha \rfloor$.



Exemplo

Num torneio em que participam $n \geq 2$ equipas de futebol, todas as equipas jogam uma vez umas com as outras. Mostre que em cada jornada pelo menos duas equipas realizaram o mesmo número de jogos até esta jornada.

Fixamos uma jornada, e consideremos

$$N: \{\text{as } n \text{ equipas}\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, n-2, n-1\}.$$

$$e \longmapsto \text{o número total de jogos de } e$$

Caso 1: Cada equipa realizou pelo menos um jogo. Então, podemos considerar acima o conjunto de chegada $\{1, \dots, n-1\}$; pelo princípio da gaiola dos pombos, N não é injetiva.

Caso 2: Pelo menos uma equipa não realizou nenhum jogo. Logo, nenhuma equipa realizou $n-1$ jogos e por isso (ver acima), pelo princípio da gaiola dos pombos, N não é injetiva.

Ideia

Suponhamos que temos m caixas. Se em cada caixa há no máximo k bolas, então temos no máximo mk bolas.

Contraposição: Se temos mais do que mk bolas, então uma caixa tem mais do que k bolas.

Mais formal

Sejam A um conjunto e (A_1, \dots, A_m) uma sequência de subconjuntos de A dois a dois disjunta com

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m.$$

Se $km < |A|$, então, $|A_i| > k$ para algum $1 \leq i \leq m$.

Formulação alternativa

Sejam A e B conjuntos finitos e $f: A \rightarrow B$ uma função.

Se $k|B| < |A|$, então existem $k + 1$ elementos em A com a mesma imagem.

Exemplo

Na área metropolitana de Lisboa, há pelo menos 15 pessoas com o mesmo número de fios de cabelo na cabeça.

(Cada pessoa tem no máximo 200000 fios de cabelo na cabeça e na área metropolitana de Lisboa residem 2,870,208 pessoas^a.)

Agora consideremos a função «número de fios de cabelo na cabeça»:

$$f: \{\text{Lisboetas}\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, 200000\}.$$

Como $14 \cdot 200001 < 2870208$, existem pelo menos 15 Lisboetas com «a mesma imagem», isto é, com o mesmo número de fios de cabelo na cabeça.

^afonte: Wikipédia.

2. O PRINCÍPIO DA BIJEÇÃO

O princípio da bijecção

Sejam A e B conjuntos (finitos). Se existe uma **função bijetiva** $f: A \rightarrow B$ entre A e B , então A e B têm o mesmo número de elementos.

Nota

Tipicamente utilizamos este princípio quando é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

Exemplo

Existe uma bijecção entre o conjunto C dos números naturais de 4 algarismos em $A = \{1, 2, \dots, 9\}$ e o conjunto A^4 .

De facto, a função

$$f: A^4 \rightarrow C, \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto a_1 10^3 + a_2 10^2 + a_3 10 + a_4$$

é bijetiva.

O princípio da bijecção

Sejam A e B conjuntos (finitos). Se existe uma **função bijetiva** $f: A \rightarrow B$ entre A e B , então A e B têm o mesmo número de elementos.

Nota

Tipicamente utilizamos este princípio quando é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

Exemplo

Determinamos o número de subconjuntos de $X = \{1, \dots, n\}$.

A função

$$P(X) \rightarrow \{\text{as sequências binárias de comprimento } n\}$$

$$A \mapsto a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

é bijetiva (porque é invertível).

Falta determinar o número de tais sequências ...

3. OS PRINCÍPIOS DA ADIÇÃO E DA MULTIPLICAÇÃO

O princípio da adição

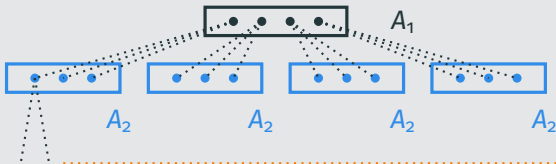
Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos finitos **dois a dois disjuntos** (isto é, tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$). Então

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

O princípio da multiplicação

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos finitos. Então

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Ilustração

Exemplo

- O número de sequências binárias de comprimento n é 2^n .

Contamos os elementos de $\underbrace{\{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}}_{n \text{ vezes}}$.

- Logo, para um conjunto X com n elements: $|P(X)| = 2^n$.
- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $1, \dots, 9$?

Determinamos o tamanho do conjunto

$$\{1, \dots, 9\}^4;$$

ou seja, existem $9^4 = 6561$ tais números.

- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $0, \dots, 9$ e que são divisíveis por 5?

O conjunto

$$\{1, \dots, 9\} \times \{0, 1, \dots, 9\}^2 \times \{0, 5\}$$

tem 1800 elementos.

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos «a», «b», «c», «(», «)» de modo que

- o número de «(» é igual ao número de «)»,
- em cada parte inicial da palavra, o número de «(» é maior ou igual ao número de «)»,
- entre os símbolos «(» e «)» está pelo menos um dos símbolos «a,b,c».

Seja S o conjunto destas palavras, e consideremos

- $S_0 = \{p \in S \mid p \text{ não tem nenhuma parêntese}\},$
- $S_1 = \{p \in S \mid p \text{ tem exatamente uma vez o símbolo «(»}\},$
- $S_2 = \{p \in S \mid p \text{ tem exatamente duas vezes o símbolo «(»}\},$

logo $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ (dois a dois disjunto), e por isso

$$|S| = |S_0| + |S_1| + |S_2|.$$

Exemplo

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$.
- $S_1 = S_1^{1,3} \cup S_1^{1,4} \cup S_1^{1,5} \cup S_1^{2,4} \cup S_1^{2,5} \cup S_1^{3,5}$ (dois a dois disjunto).

Aqui o primeiro número indica a posição de «(», o segundo número indica a posição de «)».

Portanto: $|S_1^{i,j}| = 3^3 = 27$, logo $|S_1| = 6 \cdot 27 = 162$.

- $S_2 = \{\langle\langle(a)\rangle\rangle, \langle\langle(b)\rangle\rangle, \langle\langle(c)\rangle\rangle\}$, logo $|S_2| = 3$.

Conclusão: $|S| = 243 + 162 + 3 = 408$.

4. GENERALIZAÇÕES

O princípio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (o número de escolhas é independente da primeira escolha),
- ...
- r_n possibilidades para a última escolha (o número de escolhas é independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{os números com 4 algarismos distintos}\}| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.
- Para $A = \{\text{os números com 4 algarismos distintos em } 1, \dots, 9, \text{ um deles igual a } 5\}$,

$$|A| = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1344.$$

Nota

O princípio da adição é apenas válido quando os conjuntos A_1, \dots, A_n são **dois a dois disjuntos**. Mais geral, temos:

O princípio de **inclusão-exclusão**

- Para os conjuntos finitos A_1 e A_2 :

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Para os conjuntos finitos A_1, A_2 e A_3 :

$$\begin{aligned} |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - \\ &\quad (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Teorema

Em geral, para os conjuntos finitos A_1, A_2, \dots, A_n :

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right).$$

Abraham de Moivre (1718), Daniel da Silva (1854), James Joseph Sylvester (1883), ...

Exemplo

Determinarmos o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

- Seja $A_k = \{n \in \{1, \dots, 1000\} \mid k \text{ divide } n\}$ ($k = 1, 2, \dots$).
- Assim,

$$\begin{aligned} |A_3 \cup A_5| &= |A_3| + |A_5| - |A_3 \cap A_5| \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor \\ &= 333 + 200 - 66 = 467. \end{aligned}$$

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \dots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais («a,e,i,o,u»)?

Sejam A_a, \dots, A_u os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem «a», ..., «u», respetivamente. Então, procuramos $|A_a \cup \dots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \dots = |A_u| = 22^{10}$.
- $|A_a \cap A_e| = \dots = |A_o \cap A_u| = 21^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i| = \dots = |A_i \cap A_o \cap A_u| = 20^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o| = \dots = |A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 19^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 18^{10}$.

Há 10 intersecções de 2 conjuntos, 10 intersecções de 3 conjuntos e 5 intersecções de 4 conjuntos. Logo,

$$|A_a \cup \dots \cup A_u| = 5 \cdot 22^{10} - 10 \cdot 21^{10} + 10 \cdot 20^{10} - 5 \cdot 19^{10} + 18^{10}.$$

Subconjuntos vs. propriedades

Sejam X um conjunto finito, p_1, \dots, p_n propriedades aplicável aos elementos de X e $N(i_1, i_2, \dots, i_k)$ o número de elementos de X que têm pelo menos as propriedades p_{i_1}, p_{i_2}, \dots e p_{i_k} .

O número de elementos de X que têm pelo menos uma das propriedades p_1, \dots, p_n é dado por

$$\begin{aligned} |A| = & N(1) + \dots + N(n) \\ & - N(1, 2) - \dots - N(n-1, n) \\ & + N(1, 2, 3) + \dots + N(n-2, n-1, n) \\ & - \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & + (-1)^{n+1} N(1, \dots, n). \end{aligned}$$

Nota: Sendo $A_i = \{x \in X \mid p_i(x)\}$,

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n, \quad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = N(i_1, i_2, \dots, i_k).$$

Subconjuntos vs. propriedades

Sejam X um conjunto finito, p_1, \dots, p_n propriedades aplicável aos elementos de X e $N(i_1, i_2, \dots, i_k)$ o número de elementos de X que têm pelo menos as propriedades p_{i_1}, p_{i_2}, \dots e p_{i_k} .

O número de elementos de X que têm nenhuma das propriedades p_1, \dots, p_n é dado por

$$\begin{aligned} |X \setminus A| &= |X| - N(1) - \dots - N(n) \\ &\quad + N(1, 2) + \dots + N(n-1, n) \\ &\quad - N(1, 2, 3) - \dots - N(n-2, n-1, n) \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + (-1)^n N(1, \dots, n). \end{aligned}$$

Nota: Sendo $A_i = \{x \in X \mid p_i(x)\}$,

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n, \quad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = N(i_1, i_2, \dots, i_k).$$

5. O PRINCÍPIO DA BIJEÇÃO (OUTRA VEZ)

Exemplo

O número das soluções da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ (com $x_i, k, n \in \mathbb{N}$) coincide com o número de maneiras de colocar k bolas indistinguíveis em n caixas numeradas.

Exemplo

O número de maneiras de colocar k bolas indistinguíveis em $n > 0$ caixas numeradas coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n - 1$ zeros.

**Exemplo**

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k + m$ elementos.

Exemplo

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k + m$ elementos.

De facto, com $X = \{1, \dots, k + m\}$, a função

$$\{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_{k+m} \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

tem a função inversa

$$\{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\} \longrightarrow \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$$

$$a_1 a_2 \dots a_{k+m} \longmapsto \{i \in X \mid a_i = 1\}.$$

Voltaremos a estas questões no

Capítulo 3: Agrupamentos e Identidades Combinatórias.