Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - C **2024/2025**

Ficha de Exercícios 2 - Parte II

Sucessões e Série de Funções; Séries de Potências (revisitadas) e Séries de Fourier

1. Considere a série de funções

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

   (a) Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

   (b) Justifique que a função (soma) $S(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

2. Com base num dos seguintes desenvolvimentos em série de MacLaurin:

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, para $x \in]-1, 1[$,

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, para $x \in \mathbb{R}$,

$\text{sen}\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para $x \in \mathbb{R}$,

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, para $x \in \mathbb{R}$,

obtenha uma representação em série de potências (de MacLaurin) para cada uma das seguintes funções. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

   (a) e^{-x^2}

   (b) $\cosh(x)$

   (c) $\text{senh}(3x)$

   (d) $2\cos^2 x$

   (e) $\frac{1}{4+x^2}$

Nota: As funções cosseno hiperbólico (cosh) e seno hiperbólico (senh) são as funções definidas em $\mathbb{R}$ por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

3. Calcule a (função) soma das séries seguintes:

   (a) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$

   (b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$

4. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\ln(x+1)$.
(Sugestão: desenvolva primeiro a função $\dfrac{1}{x+1}$ em série de MacLaurin).

(b) Calcule a soma da série

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} - \frac{x^5}{5\cdot 4} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

5. Calcule a soma das séries numéricas indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$

6. (a) Verifique que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.

(b) Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n\,, \quad -2 < x < 2$. Explicite $f(x)$.
(Sugestão: use a representação em série de potências de $\frac{1}{1-x}$).

7. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

8. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

(a) Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual a série é absolutamente convergente.

(b) Calcule $f'(4)$, onde $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$ (f definida no domínio de convergência da série).

9. Sabendo que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que esta representação é válida;

(b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^3}\,dx$.

10. Usando a representação em série de MacLaurin da função exponencial, justifique a igualdade

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x\, e^{x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Seja $f(x) = x\,e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Desenvolva $f(x)$ em série de MacLaurin.

   (b) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{n!}$

   (Sugestão: Começar por derivar a série obtida em (a)).

   (c) Usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, obtenha um majorante para o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $T_0^2 f(x)$ no intervalo $]0, 0.1]$.

12. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x + x^2\,, \quad x \in [-\pi, \pi[$;

   (b) $g(x) = e^x\,, \quad x \in [-\pi, \pi[$;

   (c) $h(x) = \begin{cases} -1\,, & -\pi \leq x < 0, \\ 0\,, & x = 0, \\ 1\,, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

13. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de f e represente graficamente as respetivas somas no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

14. Determine a série de Fourier de senos da função f dada $f(x) = \cos x$ em $[0, \pi]$. Qual será a sua série de Fourier de cossenos?

15. Considere a função f, 2π-periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

   (a) Determine a série de Fourier de f.

   (b) Mostre que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)\,, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

   (c) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

   (d) Verifique que a série de Fourier de f é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

   (e) Justifique que

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx)\,, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

16. Seja f a função 2π–periódica tal que $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

   (a) Mostre que a série de Fourier associada a f é

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

   (b) Justifique que a série da alínea anterior é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$ e identifique a sua soma, $S(x)$.

(c) Esboce o gráfico de $S(x)$, no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

(d) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$

Exercícios de revisão

17. Sabendo que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, determine

(a) a série de MacLaurin de $\cosh(x)$.

(b) a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}$

Resolução:

(a) Como $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} x^n .
\end{aligned}$$

Uma vez que, $1 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k+1 \\ 2 & \text{se } n = 2k \end{cases}$, com $k \in \mathbb{N}_0$, então, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k)!} x^{2k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n)!} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} .
\end{aligned}$$

(b) Tendo em conta a alínea anterior, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} = \cosh(1)$.

18. Considere a função 2π–periódica f tal $f(x) = x + |x|$, se $x \in [-\pi, \pi[$.

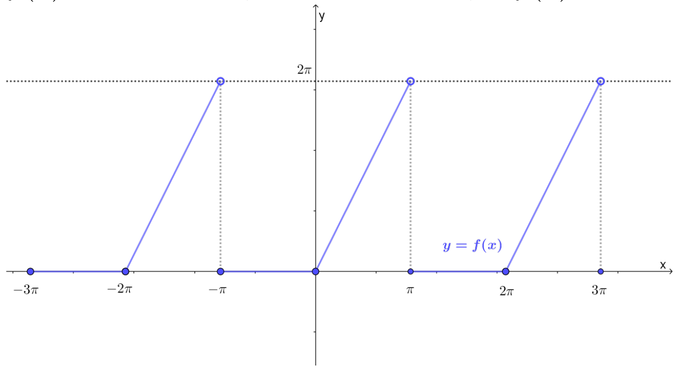
(a) Esboce o gráfico de f em $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Determine a série de Fourier de f.

(c) Justifique que essa série é convergente pontualmente em $\mathbb{R}$ e esboce o gráfico da sua soma, no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Resolução:

(a) $f(x) = x - x = 0$, se $-\pi \leq x < 0$, e $f(x) = x + x = 2x$, se $0 \leq x < \pi$.



(b)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}\,(nx)\right)\,, \qquad \text{onde}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[x^2\right]_0^{\pi} \quad = \quad \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(nx) x\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\text{sen}\,(nx)x\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\text{sen}\,(nx)\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) \quad = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,(nx) f(x)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \text{sen}\,(nx) x\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi n}\left[\cos(nx)x\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi n}(\cos(n\pi)\pi + \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{1}{n}\text{sen}\,(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{n}\cos(n\pi) \quad = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Assim,

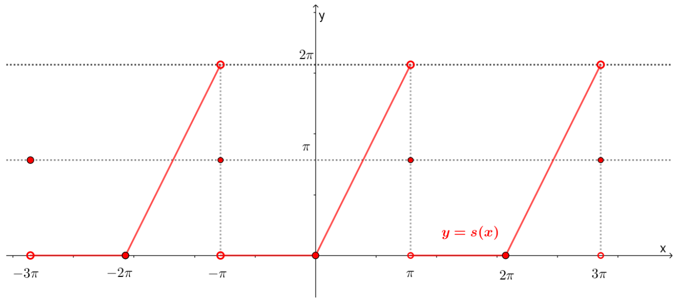
$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-2}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen}\,(nx\,)\right).$$

(c) A derivada de f é a função 2π-periódica, não definida em $-\pi, 0$ e π, tal que

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

que é seccionalmente contínua. Assim, f é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ e, portanto, pelo Teorema de Dirichlet, f converge pontualmente em $\mathbb{R}$. A sua soma $S(x)$ é 2π–periódica e, tendo em conta esse teorema,

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(-\pi^+)+f(-\pi^-)}{2} & \text{se } x = -\pi \\ 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases} = \begin{cases} \pi & \text{se } x = -\pi \\ 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



19. Prove que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4n^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(Teste 1 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

20. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Determine a série de MacLaurin da função $xf'(x)$, indicando o respetivo intervalo de convergência. (Nota: $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, |x| < 1$).

(Exame de Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

21. Seja f a função 2π-periódica, definida em $[-\pi, \pi[$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

Determine a série de Fourier de f e esboce o gráfico da sua soma no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.
(Exame de Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

22. Seja f a função 2π-periódica, definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|(3\pi - |x|)$.

(a) Justifique que a série de Fourier associada a f é uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n \in \mathbb{R}$$

e determine o valor de a_0.

(b) Calcule, justificando, a soma da série de Fourier de f no ponto $x = 3\pi$.

(Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

Questões de escolha múltipla:

23. Com base num dos seguintes desenvolvimentos em série de MacLaurin

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, para $x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para $x \in \mathbb{R}$

$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, para $x \in]-1, 1[$

podemos concluir que a série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$ tem soma igual a:

(a) 1 (b) -1 (c) 4 (d) -4

(Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

24. Sabendo que $\frac{1}{4+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^n$, $-4 < x < 4$, qual das seguintes séries é a série de MacLaurin da função $f(x) = \ln(4+x)$?

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$

(b) $\ln(4) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1} n} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$

(c) $\ln(4) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^n, \quad -4 < x < 4$

(Exame Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)

25. Seja f uma função 2π-periódica tal que $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$ para $x \in [-\pi, \pi[$. Qual o valor do coeficiente a_0 da série de Fourier de f?

(a) $\frac{2\pi^2}{3}$ (b) $\frac{\pi^2}{3}$ (c) $\frac{5\pi^2}{6}$ (d) $\frac{5\pi^2}{12}$

(Teste 1 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

26. Sabendo que a série de Fourier da extensão 2π-periódica da função $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x < \pi$, é

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x),\ x \in \mathbb{R},$$

podemos concluir que a soma da série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ é

(a) $-\frac{4}{\pi}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi^2}{8}$

(Teste 1 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)

Soluções

1. Aplicar o Critério de Weierstrass (alínea (a)) e as propriedades da convergência uniforme (alínea (b)).

2. (a) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (c) $\operatorname{senh}(3x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x + \frac{3^3}{3!} x^3 + \cdots + \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots\ , \ x \in \mathbb{R}.$

   (d) $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

   $= 2 - \frac{4}{2!} x^2 + \frac{2^4}{4!} x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (e) $\frac{1}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} + \cdots, \quad x \in]-2, 2[.$

3. (a) $e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (b) $\frac{1}{1+x^3}, \quad x \in]-1, 1[.$

4. (a) $\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{t+1}\, dt = \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in]-1, 1[.$

   (Observação: a igualdade é também válida no ponto $x = 1$; a justificação pode ser encontrada nos Textos de Apoio).

   (b) $(x+1)\ln(x+1) - x, \quad x \in]-1, 1[$

   (por integração termo a termo da série da alínea anterior).

5. (a) 1; (b) $-3\ln(2/3)$; (c) $2\sqrt{e}$.

6. (a) —

   (b) $f(x) = \frac{2x}{(2-x)^2}.$

7. —

8. (a) $]1, 5[$.

   (b) $f'(4) = 1$.

9. (a) $xe^{x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\int_0^1 xe^{x^3}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)\, n!}.$

10. Sugestão: representar e^{x^2} em série de MacLaurin e derivar a série termo a termo.

11. (a) $xe^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)2^n}{n!} = -1 - e^{-2}$.

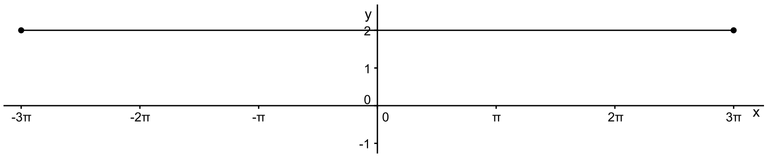
(c) $|R_0^2 f(x)| < \dfrac{1}{2} \times 10^{-3}$.

12. (a) $\displaystyle f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) \right]$;

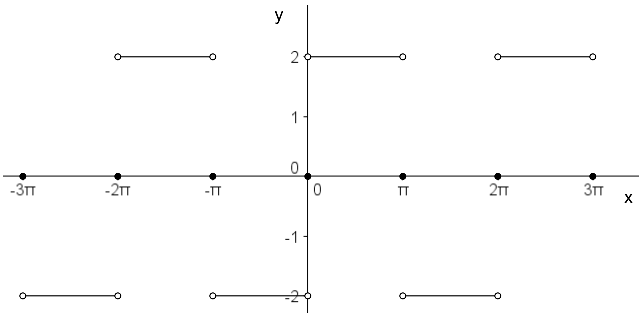
(b) $\displaystyle g(x) \sim \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1} \operatorname{sen}(nx) \right]$;

(c) $\displaystyle h(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{1-(-1)^n}{\pi n} \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \operatorname{sen}((2n-1)x)$.

13. Soma da série de cossenos: $S(x) = 2$;



Soma da série de senos: $S(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[\\ 0 & , \quad x = k\pi \\ 2 & , \quad x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[\end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$.



14. Série de Fourier de senos: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi} \frac{k}{4k^2-1} \operatorname{sen}(2kx)$.

A série de Fourier de cossenos reduz-se à função $\cos x$.

15. (a) $\displaystyle f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \qquad x \in \mathbb{R}$.

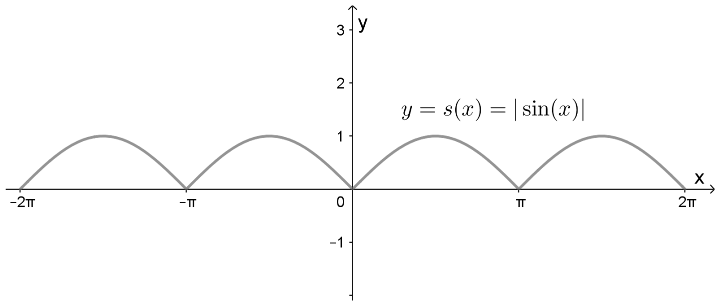
(b) A função f é contínua e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$. Portanto, a soma da série coincide com a própria função f (em $\mathbb{R}$). Notar que $f(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi]$.

(c) Tomar, em particular, $x = 0$ na representação indicada na alínea (b).

(d) Sugestão: aplique o Critério de Weierstrass.

(e) Integrar ambos os membros da igualdade em (b), tendo em conta o resultado indicado em (d).

16. (a)—
    (b) $S(x) = |\mathrm{sen}\,(x)|$, $x \in \mathbb{R}$
    (c)



    (d) $\frac{2-\pi}{4}$

17. Resolvido.

18. Resolvido.

19. — (Sugestão: Usar o Critério de Weierstrass).

20. $xf'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$, $x \in]-1,1[$.

21. $\dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1}\mathrm{sen}\,((2n-1)x)$, $x \in \mathbb{R}$.

22. (a) f é uma função par, logo a sua série de Fourier é uma série de cossenos. $a_0 = \frac{7\pi^2}{3}$.
    (b) Como f é contínua e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$, podemos concluir pelo Teorema de Dirichlet que $S(x) = f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, onde S denota a soma da série de Fourier. Logo, $S(3\pi) = 2\pi^2$.

23. -1

24. $\ln(4) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$

25. $\frac{2\pi^2}{3}$

26. $\frac{\pi^2}{8}$