Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - C **2024/2025**

Ficha de Exercícios 3 - Parte II
Funções reais de várias variáveis reais (Parte II):
Extremos globais, extremos locais e extremos condicionados

1. Sejam $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ e $f(x, y, z) = z^2$. O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos globais de f em $\mathcal{S}$? Porquê?

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = -x^2$. Justifique que f possui uma infinidade de maximizantes.

3. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
   (a) O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos globais de f? Justifique.
   (b) Justifique, usando diretamente a definição, que $(0, 0, 0)$ é minimizante de f.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.
   (a) Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$.
   (b) Justifique que $(0, 0)$ é maximizante global de f.

5. Considere a função $g(x, y) = y$ e os conjuntos $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (a) Justifique que g possui extremos globais em $\mathcal{B}$.
   (b) Identifique os extremantes globais de g em $\mathcal{B}$.
   (c) A função g possui extremantes globais em $\mathcal{A}$? Justifique.

6. Mostre que a função $h(x, y) = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ não atinge o seu máximo global na origem.

7. Determine os pontos críticos das seguintes funções:
   (a) $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$;
   (b) $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y)$;
   (c) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

8. Mostre que a função $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1$ tem apenas um mínimo local e que este ocorre apenas no ponto $(1, 2)$.

9. Considere a função $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4(x - 2y)$ definida em $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 2]$.
   (a) Diga, justificando, se f possui pontos críticos no interior de $\mathcal{D}$.
   (b) Prove a existência de extremos globais e determine-os.

10. Determine os extremantes locais, e respetivos extremos, das seguintes funções:
   (a) $f(x, y) = xy\, e^{-x-y}$;
   (b) $g(x, y) = x^3 - 2x^2y - x^2 + 4y^2$;

(c) $h(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$;

(d) $w(x, y, z) = xy - x + 2z - x^2 - y^2 - z^2$.

11. Verifique que $(-2, 0)$ e $(0, 0)$ são os pontos críticos da função $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$, mas que só o primeiro é extremante de f.

12. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x - y^3)^2 - x^3$.

    (a) Verifique que $(0, 0)$ é ponto crítico de f.

    (b) Mostre que $(0, 0)$ não é extremante local de f.

13. Determine os extremos globais da função f definida por $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ no círculo $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

14. Calcule os extremos globais da função f definida por $f(x, y) = xy$ no semicírculo $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$.

15. Determine os pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 80$ que estão à menor distância do ponto $(1, 2)$ e os pontos da mesma circunferência que estão à maior distância do mesmo ponto.

16. Determine o ponto do plano $x + 2y + z = 4$ que se encontra mais próximo do ponto da origem, usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Qual é essa distância?

17. Determine os pontos da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximo e mais distante do ponto $(3, 1, -1)$.

18. Suponha que a temperatura num determinado ponto (x, y, z) da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é dada pela função $T(x, y, z) = 30 + 5(x + z)$. Calcule, justificando, os valores extremos da temperatura.

19. Seja f a função definida em $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$ por $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

    (a) Represente geometricamente o domínio $\mathcal{D}$.

    (b) Determine os pontos críticos da função f no interior do seu domínio.

    (c) Determine os extremos globais da função f em $\mathcal{D}$.

20. O lucro anual de uma empresa é estimado através da expressão

    $$L(x, y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102,$$

    onde x representa o montante gasto em investigação e y o montante gasto em publicidade (em milhões de euros). O orçamento anual da empresa prevê um investimento global de 20 milhões de euros para investigação e publicidade. Determine quanto a empresa deve alocar a cada uma dessas atividades de forma a maximizar o lucro. Com estes pressupostos, qual é o lucro máximo?

Exercícios de revisão

21. Determine os extremantes locais da função f definida por $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 + 3y^2$.
    (Exame Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)

22. Determine os extremos globais da função f definida por $f(x, y) = x^2 + x + y^2 + y - 1$, restringida ao conjunto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$.
    (Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

23. O quadrado da distância de um ponto de coordenadas (x, y) à origem é representado pela função

    $$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

    Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, determine o(s) ponto(s) da curva $y = x^2 - 1$ mais próximo(s) da origem.
    (Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)

Questões de escolha múltipla:

24. Considere a função $f(x,y) = 1 + x^2$, definida no conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x \leq 2 \ \wedge \ -3 < y < 3\}.$$

Podemos afirmar que:
(a) a função não admite máximo ou mínimo globais.
(b) a função admite máximo e mínimo globais.
(c) a função admite mínimo global mas não máximo global.
(d) a função admite máximo global mas não mínimo global.
(Exame Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)

25. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^2y^3$. Podemos afirmar que:
(a) f não tem pontos críticos
(b) $(0,0)$ é maximizante local de f
(c) $(0,0)$ é minimizante local de f
(d) $(0,0)$ é ponto de sela de f
(Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)

Soluções

1. Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque $\mathcal{S}$ não é fechado.

2. Como $f(x,y) = -x^2 \leq 0 = f(0,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então todos os pontos da forma $(0,y)$, com $y \in \mathbb{R}$, são maximizantes da função.

3. (a) Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque $\mathbb{R}^3$ não é limitado.
   (b) Como $f(0,0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 = f(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então $(0,0,0)$ é (o único) minimizante global de f.

4. (a) f não é diferenciável em $(0,0)$, porque não existe $f'_x(0,0)$.
   (b) Tem-se $f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2} \leq 0 = f(0,0)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, $(0,0)$ é (o único) maximizante global de f.

5. (a) Como g é contínua e o conjunto $\mathcal{B}$ é fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos globais de g em $\mathcal{B}$.
   (b) g é diferenciável e não possui pontos críticos no interior de $\mathcal{B}$, logo os extremantes situam-se na fronteira. Claramente $(0,-1)$ é minimizante global e $(0,1)$ é maximizante global.
   (c) Não, pois g é diferenciável no aberto $\mathcal{A}$ e não possui pontos críticos nesse conjunto (notar que $\nabla g(x,y) = (0,1) \neq (0,0)$). Portanto, g não tem extremantes globais em $\mathcal{A}$ (nem em $\mathbb{R}^2$).

6. Na origem a função h vale $\frac{1}{2}$, enquanto que, por exemplo, em $(\sqrt{3\pi/2}, 0)$ vale $\frac{3}{2}$ que é um valor maior.

7. (a) $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$;
   (b) $(2,3)$ e todos os pontos situados nos eixos coordenados;
   (c) $(0,0,0)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(1,1,1)$.

8. Como $(x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 0$ então $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 \geq -1$. Ora $f(1,2) = -1$ e para todo $(x,y) \neq (1,2)$ tem-se $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1$.

9. (a) O gradiente de f, se considerado no seu domínio de definição, anula-se apenas em $(-4,6)$. No entanto, $(-4,6) \notin \text{int}(\mathcal{D})$. Consequentemente, f não possui pontos críticos em $\text{int}(\mathcal{D}) =]0,1[\times]0,2[$.

(b) A existência de extremos globais é garantida pelo Teorema de Weierstrass, uma vez que $\mathcal{D}$ é fechado e limitado e f é contínua neste conjunto. Os extremos são então atingidos na fronteira (recordar a conclusão obtida na alínea anterior).
O máximo global de f em $\mathcal{D}$ é 17 e é atingido no ponto $(1,2)$; o mínimo global de f em $\mathcal{D}$ é -3 e é atingido no ponto $(1,0)$.

10. (a) Os pontos críticos são $(0,0)$ e $(1,1)$. A função f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.
Como $\det(H_f(0,0)) = -1 < 0$, então $(0,0)$ não é extremante (é ponto de sela). Como $\det(H_f(1,1)) = e^{-4} > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -e^{-2} < 0$, então $f(1,1) = e^{-2}$ é máximo local.
(b) Os pontos críticos de g são $(0,0)$, $(2,1)$ e $(1,1/4)$. Aplicando um dos testes da Hessiana, conclui-se que os dois primeiros são pontos de sela e que $(1,\frac{1}{4})$ é minimizante local de g, onde atinge $-\frac{1}{4}$ (mínimo local).
(c) $(1,1)$ é o único extremante local de h, trata-se de um minimizante e $h(1,1) = 3$ é o respetivo mínimo local.
(d) Maximizante local: $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$; Respetivo máximo local: $\frac{4}{3}$

11. –

12. –

13. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que f tem extremos globais em $\mathcal{D}$. $(0,0)$ é o único ponto crítico no interior de $\mathcal{D}$, mas não é extremante. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange identificamos os candidatos $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$. Calculando o valor de f nestes pontos, conclui-se que o máximo global de f é 2 (atingido nos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$) e o mínimo global de f é -2 (atingido nos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$).

14. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que f tem extremos globais em $\mathcal{D}$. Não existem pontos críticos no interior de $\mathcal{D}$ (ambas as derivadas parciais anulam-se $(0,0)$, mas este ponto situa-se na fronteira). A fronteira $fr(\mathcal{D})$ é constituída pela semicircunferência $\mathcal{D}_1$ e pelo segmento de reta $\mathcal{D}_2$:

$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}; \qquad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 1\}.$$

Como f é constante em $\mathcal{D}_2$ (pois $f(x,0) = 0$) todos os pontos situados neste segmento são candidatos a extremantes. Os candidatos em $\mathcal{D}_1$ são $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (obtidos através do método dos multiplicadores de Lagrange). Como

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(x,0) = 0,$$

o máximo global de f é $1/2$ e o mínimo global é $-1/2$.

15. $(4,8)$ é o que se encontra mais próximo (à distância $3\sqrt{5}$) e $(-4,-8)$ é o que se encontra mais afastado (à distância $5\sqrt{5}$).

16. $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

17. Aplicando o métodos dos multiplicadores de Lagrange identificamos os pontos

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right).$$

O primeiro é o mais próximo e o segundo ponto é o mais distante.

18. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é minimizante global e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é maximizante global. Assim, a temperatura mínima é de $T\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 22{,}93$ e a temperatura máxima é de $T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 37{,}07$.

19. (a) –
    (b) $(0,1)$.
    (c) $f(0,1)=0$ é mínimo global e $f(0,4)=9$ é máximo global.

20. O lucro máximo da empresa é 100 (milhões de euros), sendo atingido com um gasto de 11 em investigação e de 9 em publicidade.

21. $(0,0)$ é ponto de sela e $(0,-2)$ é maximizante local de f.

22. $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ é máximo global e $f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}$ é mínimo global de $f|_{\mathcal{C}}$.
    (Sugestão: usar o Método dos Multiplicadores de Lagrange)

23. $P_1=(\frac{-\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$ e $P_2=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$.

24. (b)

25. (d)