



Ficha de Exercícios 1
Complementos de funções reais de variável real

1. Calcule:

- (a) $\sin(\arccos(\frac{1}{2}))$
- (b) $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{2}))$
- (c) $\sin(\arcsen(-\frac{1}{2}))$
- (d) $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$
- (e) $\cotg(\arcsen(\frac{12}{13}))$
- (f) $\cos(2 \cdot \arctg(\frac{4}{3}))$
- (g) $\operatorname{arccotg}(\cotg(\frac{1}{2}))$
- (h) $\operatorname{arccotg}(\tg \frac{\pi}{4})$
- (i) $\arctg(\tg(\pi))$

Resolução (d): $\sin(\arccos(-\frac{1}{2})) = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Simplifique $\sin(\arctg x)$.

3. Mostre que:

- (a) $\cos^2(\arcsen x) = 1 - x^2, \forall x \in [-1, 1]$.
- (b) $\sin^2(\arccos x) = 1 - x^2, \forall x \in [-1, 1]$.

4. Seja f a função definida por $f(x) = \arctg(\ln(2x + 1))$.

- (a) Determine o domínio e o contradomínio de f .
- (b) Justifique que f é invertível e caracterize a sua inversa, f^{-1} , indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

Resolução:

- (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 > 0\} =]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

Uma vez que $\ln(2x + 1)$, para $x \in D_f$, toma todos os valores de \mathbb{R} , então $CD_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- (b) f é invertível porque é injetiva (porque f é a composta de duas funções injetivas).

$$D_{f^{-1}} = CD_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$CD_{f^{-1}} = D_f =]-\frac{1}{2}, +\infty[$$

Expressão designatória: para $x \in D_f$ e $y \in CD_f$, tem-se que

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \arctg(\ln(2x + 1)) \Leftrightarrow \tg(y) = \ln(2x + 1) \Leftrightarrow 2x + 1 = e^{\tg(y)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^{\tg(y)} - 1).$$

$$\text{Logo } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^{\tg(x)} - 1).$$

5. Caracterize a função inversa das seguintes funções indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que as definem. Considere as restrições principais das funções trigonométricas.
- (a) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right);$
 - (b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2 \operatorname{arcsen}(1-x)}{3};$
 - (c) $f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2-x} \right);$
 - (d) $f(x) = e^{\operatorname{arcsen} x};$
 - (e) $f(x) = 2 \operatorname{arcsen}(\sqrt{x}) - \pi;$
 - (f) $f(x) = 3 \operatorname{arccos}(\sqrt{x+4}) - \frac{\pi}{2};$
 - (g) $f(x) = \frac{1}{\pi + \operatorname{arccos}(x-2)};$
 - (h) $f(x) = \pi - 3 \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right);$
 - (i) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\ln(x+1)).$

6. Determine o domínio, o contradomínio e os zeros das funções dadas por:

- (a) $f(x) = \pi - \operatorname{arccos}(2x+1)$
- (b) $g(x) = -\frac{\pi}{3} + \operatorname{arccotg}(-3x)$
- (c) $h(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x+1} \right)$
- (d) $m(x) = \operatorname{arcsen} \left(x - \frac{x^2}{2} \right)$

Resolução (a):

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x+1 \leq 1\} = [-1, 0].$$

Uma vez que $2x+1$, para $x \in D_f$, toma todos os valores do intervalo $[-1, 1]$, então

$$0 \leq \operatorname{arccos}(2x+1) \leq \pi.$$

Logo, $0 \leq \pi - \operatorname{arccos}(2x+1) \leq \pi$, o que permite concluir que $CD_f = [0, \pi]$.

Para $x \in D_f$ temos que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{arccos}(2x+1) = \pi \Leftrightarrow 2x+1 = \cos(\pi) \Leftrightarrow x = -1.$$

Logo $x = -1$ é o único zero de f .

7. Seja f a função dada por $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2 - 1)$.

- (a) Determine o domínio e o contradomínio de f .
- (b) Indique as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.

8. Considere a função g definida por

$$g(x) = \operatorname{arccos} \left(\frac{1}{x} \right).$$

Indique o domínio, o contradomínio e os zeros de g .

9. Seja $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 - 1)$.

- (a) Caracterize a função inversa de f , indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.
- (b) Resolva a inequação $f(x) > \frac{\pi}{4}$.

10. Calcule, se existir, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ onde

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{arctg}(x^2) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

11. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{|x-a|}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cotg\left(\frac{2}{x}\right)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(1-x)$
- (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$
- (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

12. Determine k por forma a que a função f seja **contínua** no seu **domínio**.

- (a) $f(x) = \begin{cases} x^5 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$
- (b) $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \cosh(x^2) + 2 & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$
- (c) $f(x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{2}{x}\right) & \text{se } x \geq 2 \\ 2ke^{x-2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

13. Mostre que a equação $x^5 - 3x = 1$ admite pelo menos uma solução no intervalo $]1, 2[$.

14. Mostre que a equação $x^3 + 4x^2 + 2x + 5 = 0$ tem pelo menos uma solução em \mathbb{R} .

15. Seja $f(x) = 6x + \operatorname{sen}(1 - x^2) + 3\cos(x^2 - 1)$. Mostre que existe pelo menos um zero de f no intervalo $] -1, 1[$.

16. Prove que a equação $x^3 = 3x^2 - 1$ tem pelo menos uma raiz real.

17. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 3 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) A função f tem mínimo global no intervalo $[-1, 1]$?
- (b) A alínea anterior contradiz o Teorema de Weierstrass? Justifique.

18. Sejam k um parâmetro real e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) + k & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{arctg}(\cos(x)) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Existe algum valor de k que torne a função f contínua em $x = 0$? Justifique convenientemente.
(b) Mostre que f tem pelo menos um zero no intervalo $]\pi, 2\pi[$.

Resolução:

- (a) Observe-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) + k \right) = 0 + k = k$$

porque

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$$

(uma vez que o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo).

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\operatorname{arctg}(\cos(x)) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \right) = \operatorname{arctg}(1) - 2\operatorname{sen}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

f é contínua em $x = 0$ se e só se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Logo, f é contínua em $x = 0$ se $k = \frac{\pi}{4}$.

- (b) Uma vez que

- f é contínua em $[\pi, 2\pi]$
- $f(\pi) = \operatorname{arctg}(\cos(\pi)) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - 2 < 0$
- $f(2\pi) = \operatorname{arctg}(\cos(2\pi)) - 2\operatorname{sen}(\pi) = \frac{\pi}{4} > 0$

então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que

$$\exists c \in]\pi, 2\pi[: f(c) = 0,$$

o que prova que f tem pelo menos um zero em $]\pi, 2\pi[$.

19. Determine uma equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico de f onde $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x-1)}$ no ponto de abscissa $x = 1$.
20. Considere a função f definida por $f(x) = x^2 \ln x + 11x - \frac{x^2}{2}$. Determine, caso exista, $a \in \mathbb{R}^+$ por forma a que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = a$ tenha declive $m = 11$.
21. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico da função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abscissa 4.

22. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da função considerada.

- (a) $f(x) = (x-1)(x^2 + 3x)$;
(b) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$;
(c) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$;
(d) $f(x) = x^2 e^{x^2}$;

- (e) $f(x) = \arcsen \sqrt{x}$;
- (f) $f(x) = 3^{\operatorname{tg} x}$;
- (g) $f(x) = \log_3(\operatorname{tg} x)$
- (h) $f(x) = e^{\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}}$;
- (i) $f(x) = \cos(\log_2(x^2))$;
- (j) $f(x) = (1 - x^2) \ln x$;
- (k) $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$;
- (l) $f(x) = x^2 - \frac{\ln(x^2)}{x}$.

23. Determine a derivada de cada uma das funções seguintes:

- (a) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{sen}(4x^3))$;
- (b) $f(x) = \arcsen \frac{1}{x^2}$;
- (c) $f(x) = \arccos(1 - e^x)$;
- (d) $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + \ln x)$.

24. Considere a função f definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que $f(-1) = -3$ e que f é invertível, determine $(f^{-1})'(-3)$.

25. Considere a função f definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

26. Para cada uma das funções seguintes determine $(f^{-1})'$ utilizando o Teorema da derivada da função inversa.

- (a) $f(x) = x^3 + 1$;
- (b) $f(x) = \ln(\arcsen x)$, com $x \in]0, 1[$;
- (c) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, com $x \in]-1, 0[$;
- (d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

27. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

28. Verifique que $x = 0$ é raiz da equação $e^x = 1 + x$. Mostre que esta equação não pode ter outra raiz real.

29. Mostre que a função $f(x) = \operatorname{arctg}(x - 2) + 2x - 5$ tem um único zero no intervalo $]2, 3[$.

30. Utilize o Teorema de Rolle para provar que:

- (a) O polinómio $x^{102} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo duas raízes reais.

Resolução: Seja $f(x) = x^{102} + ax + b$. Observe-se que $f'(x) = 102x^{101} + a$ e, portanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[101]{-\frac{a}{102}}$.

Suponhamos, para redução ao absurdo, que f tem pelo menos 3 zeros, digamos x_1, x_2, x_3 , onde supomos que $x_1 < x_2 < x_3$. Pelo Teorema de Rolle, podemos concluir que existe pelo menos um zero de f' em $]x_1, x_2[$ e pelo menos um zero de f' em $]x_2, x_3[$. Mas isto é absurdo, porque f' tem um único zero em \mathbb{R} . Logo f tem no máximo dois zeros e, portanto, o polinómio dado tem no máximo duas raízes reais.

- (b) O polinómio $x^{101} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo três raízes reais.

31. Prove que:

- (a) para todo o $x \in]0, 1[$ se tem $\arcsen x > x$;
- (b) para todo o $x \geq 0$ se tem $\sen x \leq x$;

Resolução: Seja $f(x) = \sen x - x$, com $x \in \mathbb{R}$. Observe-se que $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo f é decrescente em \mathbb{R} e, para todo o $x \geq 0$, tem-se que $f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \sen x - x \leq 0$, como se pretendia demonstrar.

- (c) para todo o $x > 0$ se tem $\ln x < x$.

32. Seja f uma função real de variável real. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a, b]$ e $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'''(c) = 0$.

33. Considere a função f definida pela expressão analítica $f(x) = \arcsen(1 - x) + \sqrt{2x - x^2}$.

- (a) Determine o domínio de f .
- (b) Mostre que $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$.
- (c) Justifique que f atinge um máximo global y_M e um mínimo global y_m . Determine também esses valores.
- (d) Determine o contradomínio de f .

34. Seja h a função de domínio \mathbb{R} definida por $h(x) = \arctg(x^2 - 4x)$. Estude h quanto à existência de extremos e determine os seus intervalos de monotonia.

35. Considere a função g definida por $g(x) = \arcsen((x-1)^2)$.

- (a) Determine o domínio de g .
- (b) Mostre que a equação $g(x) = \frac{\pi}{6}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 2]$.
- (c) Estude g quanto à existência de extremos locais e determine os seus intervalos de monotonia.
- (d) A função g é invertível? Justifique a sua resposta.

36. Calcule, caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas que se seguem:

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 2) - \ln(x^2))$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen^2 \frac{x}{3}}{x^2}$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x}$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsen x}{3x}$;
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \sen x}$;
- (f) $\lim_{x \rightarrow -\pi/4} \frac{\cos(2x)}{1 + \cotg x}$;
- (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$;
- (h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\ln(2 - x)}$;
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$;
- (j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

- (k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$;
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$;
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$;
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$;
- (o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$;
- (p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$;
- (q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}$.

37. Mostre que existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$, mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

38. Considere a função g de domínio \mathbb{R} definida por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Mostre que g é diferenciável em $x = 0$ e indique o valor de $g'(0)$.
- (b) Mostre que existe pelo menos um $c \in]0, \frac{2}{\pi}[$ tal que $g'(c) = \frac{2}{\pi}$.

Resolução:

- (a) $g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{1+x^4} = 0$ (pela Regra de Cauchy).
 $g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$ (porque o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo).
 Como $g'_-(0) = g'_+(0) = 0$, então g é diferenciável em $x = 0$ e $g'(0) = 0$.

(b) Uma vez que:

- g é contínua em $[0, \frac{2}{\pi}]$
- g é diferenciável em $]0, \frac{2}{\pi}[$

então, pelo Teorema de Lagrange, podemos concluir que existe pelo menos um $c \in]0, \frac{2}{\pi}[$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(\frac{2}{\pi}) - g(0)}{\frac{2}{\pi} - 0} = \frac{(\frac{2}{\pi})^2 \operatorname{sen}(\frac{2}{\pi})}{\frac{2}{\pi}} = \frac{2}{\pi}$$

como se pretendia demonstrar.

39. Considere a função f definida em $] - \infty, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x - 1} & \text{se } x < 0 \\ 1 + \operatorname{arcsen} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Verifique se f é contínua em $x = 0$.
- (b) Mostre que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0, 1[$.
- (c) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.

40. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $h(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$.
Mostre que as retas $y = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$ são assíntotas horizontais ao gráfico de h .
41. Para cada uma das funções seguintes, determine uma aproximação linear da função f no ponto $x = a$.
- $f(x) = x^3$, $a = 2$;
 - $f(x) = e^x$, $a = 2$;
 - $f(x) = 1 + 2x - x^3$, $a = 1$.
42. Determine os polinómios de Taylor seguintes:
- $T_0^3(x^3 + 2x + 1)$;
 - $T_\pi^3(\cos x)$;
 - $T_1^3(xe^x)$;
 - $T_0^5(\sin x)$;
 - $T_0^6(\sin x)$.
43. Seja $f(x) = (1 + x^2)\operatorname{arctg}(1 + x)$, $x \in \mathbb{R}$. Determine uma aproximação linear de f numa vizinhança de $x = -1$.
44. Considere $f(x) = e^x$.
- Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f .
 - Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $] -1, 0[$, com erro absoluto inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.
 - Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro absoluto cometido nessa aproximação.
45. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1, 1]$, com erro absoluto inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.
46. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação de $\sin(3)$ quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

Exercícios de revisão

47. Determine os zeros da função dada por

$$g(x) = \begin{cases} \arccos(x^2) & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ e^{-x+1} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

48. Considere a função h definida por $h(x) = \arccos(e^{x-1}) + \pi$. Justifique que h é invertível e caracterize a função inversa de h , indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

49. Considere a função f definida em \mathbb{R} por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \\ \operatorname{arctg}(\ln(x+1)) + \frac{e^{x-x^2}}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde α é um parâmetro real.

- (a) Determine os limites laterais de f na origem.
 - (b) Pode indicar um valor para $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que f seja contínua em $x = 0$? Justifique a sua resposta.
 - (c) O gráfico de f admite assíntotas verticais? Justifique a sua resposta.
50. Prove que a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ tem 3 raízes distintas e localize-as em intervalos de \mathbb{R} cujos extremos sejam números inteiros consecutivos.
51. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e h a função definida por $h(x) = \alpha \arcsen(x^2 - 1) + x^2 - \frac{\pi}{2}x$.
- (a) Determine o domínio de h .
 - (b) Mostre que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $] -1, 1[$, qualquer que seja o valor do parâmetro α .

52. Sejam α um parâmetro real e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \operatorname{arccotg}(e^x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Para que valores de α a função f é contínua em $x = 0$? Justifique convenientemente.
 - (b) Considere $\alpha = 1$. Mostre que f tem pelo menos um zero no intervalo $]\frac{1}{\pi}, \frac{4}{\pi}[$.
53. Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \arcsen(x^2))^{\frac{1}{x}}$.

54. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.

55. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin(x^2)} - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Usando a definição de derivada, verifique se f é diferenciável em $x = 0$ e, em caso afirmativo, indique o valor de $f'(0)$.

56. Mostre que $x = 2$ é o único zero da função h definida por $h(x) = \frac{\pi}{4} - \arcsen\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - x + 2$.
57. Seja $f(x) = \ln(1+x)$, com $x \in]-1, +\infty[$.
- (a) Determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função f , $T_0^2 f(x)$.
- (b) Usando o polinómio $T_0^2 f(x)$, determine um valor aproximado de $\ln(1.1)$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $\frac{1}{3} \times 10^{-3}$.

Soluções:

1. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (e) $\frac{5}{12}$; (f) $-\frac{7}{25}$; (g) $\frac{1}{2}$; (h) $\frac{\pi}{4}$; (i) 0.
2. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
3. ———
4. Resolvido
5. (a) $D_{f^{-1}} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; $CD_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$; $f^{-1}(y) = \arcsen(2y) - \frac{\pi}{2}$;
 (b) $D_{f^{-1}} = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$; $CD_{f^{-1}} = [0, 2]$; $f^{-1}(y) = 1 - \sen\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3y}{2}\right)$;
 (c) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $CD_{f^{-1}} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$; $f^{-1}(y) = 2 - \frac{\pi}{\arctg y}$;
 (d) $D_{f^{-1}} = [e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}]$; $CD_{f^{-1}} = [-1, 1]$; $f^{-1}(y) = \sen(\ln y)$;
 (e) $D_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$; $CD_{f^{-1}} = [0, 1]$; $f^{-1}(y) = \sen^2\left(\frac{y+\pi}{2}\right)$;
 (f) $D_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \pi]$; $CD_{f^{-1}} = [-4, -3]$; $f^{-1}(y) = \cos^2\left(\frac{y+\pi}{3}\right) - 4$;
 (g) $D_{f^{-1}} = [\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}]$; $CD_{f^{-1}} = [1, 3]$; $f^{-1}(y) = 2 + \cos\left(\frac{1}{y} - \pi\right)$;
 (h) $D_{f^{-1}} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$; $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$; $f^{-1}(y) = 2\text{tg}\left(\frac{\pi-y}{3}\right) + 1$;
 (i) $D_{f^{-1}} =]0, \pi[$; $CD_{f^{-1}} =]-1, +\infty[$; $f^{-1}(y) = e^{\cotg y} - 1$.
6. (a) $D_f = [-1, 0]$, $CD_f = [0, \pi]$, zeros de f : $x = -1$.
 (b) $D_g = \mathbb{R}$, $CD_g =]-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$, zeros de g : $x = -\frac{\sqrt{3}}{9}$.
 (c) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $CD_h =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$, h não tem zeros.
 (d) $D_m = [1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$, $CD_m = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, zeros de m : $x = 0 \vee x = 2$.
7. (a) $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; $CD_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
 (b) Interseção com o eixo dos xx : $(-1, 0)$ e $(1, 0)$; Interseção com o eixo dos yy : $(0, -\frac{\pi}{2})$.
8. $D_g =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, $CD_g = [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, zeros de g : $x = 1$.
9. (a) $D_{f^{-1}} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1 + \text{tg } x}$.
 (b) $] \sqrt[3]{2}, +\infty[$.
10. 0

11. (a) Não existe; (b) $\frac{1}{2}$; (c) $\frac{1}{2}$; (d) $-\frac{\pi}{2}$; (e) $\frac{\pi}{2}$; (f) e^2 .
12. (a) $k = 1$; (b) $k = 1$; (c) $k = 0$.
13. —
14. —
15. —
16. —
17. (a) Não.
(b) Não, porque f não é contínua no intervalo $[-1, 1]$.
18. Resolvido
19. Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$: $y = x$.
Equação da **reta normal** ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$: $y = 2 - x$.
20. $a = 1$
21. $y = \frac{1}{4}x + 1$
22. (a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$, $D_{f'} = \mathbb{R}$; (b) $f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
(c) $f'(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; (d) $f'(x) = 2x e^{x^2}(1+x^2)$, $D_{f'} = \mathbb{R}$;
(e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$, $D_{f'} =]0, 1[$;
(f) $f'(x) = 3^{\lg x} \ln 3 \sec^2 x$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
(g) $f'(x) = \frac{1}{\ln 3} \sec x \operatorname{cosec} x$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
(h) $f'(x) = \frac{6x^2(\sqrt{x}-1)-\sqrt{x^5}}{2(\sqrt{x}-1)^2} e^{\frac{x^3}{\sqrt{x}-1}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; (i) $f'(x) = \frac{-2\operatorname{sen}(\log_2(x^2))}{x \ln 2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
(j) $f'(x) = \frac{1-x^2(2\ln x+1)}{x}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^+$; (k) $f'(x) = 2x \operatorname{arctg} x + 1$, $D_{f'} = \mathbb{R}$;
(l) $f'(x) = \frac{2x^3-2+\ln(x^2)}{x^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
23. (a) $\frac{-12x^2 \cos(4x^3)}{1+\operatorname{sen}^2(4x^3)}$;
(b) $\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{-2\sqrt{x^4-1}}{x^5-x}$;
(c) $\frac{e^x}{\sqrt{2e^x-e^{2x}}}$;
(d) $\frac{1}{x(2+\ln^2 x+\ln(x^2))}$.
24. $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{54}$.
25. $(f^{-1})'(2) = 1$.
26. (a) $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}}$;
(b) $(f^{-1})'(y) = e^y \cos(e^y)$;
(c) $(f^{-1})'(y) = \frac{-\sqrt{y+1}}{2\sqrt{y}(1+y)^2}$;
(d) $(f^{-1})'(y) = \begin{cases} \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}} & \text{se } y > 1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-y}} & \text{se } y < 0 \end{cases}$.
27. —
28. —

29. —
30. —
31. —
32. —
33. (a) $D_f = [0, 2]$.
 (b) —
 (c) Para justificar a existência de máximo e mínimo globais usar o Teorema de Weierstrass. Observar que $f'(x) < 0$, para todo $x \in]0, 2[$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e $f(2) = \frac{-\pi}{2}$. Então o mínimo global é $\frac{-\pi}{2}$ e o máximo global é $\frac{\pi}{2}$.
 (d) $CD_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
34. h é estritamente decrescente em $] -\infty, 2[$ e estritamente crescente em $]2, +\infty[$. A função h tem um mínimo em $x = 2$ cujo valor é $\arctg(-4)$.
35. (a) $\mathcal{D}_g = [0, 2]$
 (b) —
 (c) g é estr. decrescente em $]0, 1[$ e estr. crescente em $]1, 2[$
 g tem um mínimo em $x = 1$ cujo valor é 0
 (d) Não, pois não é injetiva
36. (a) $\ln 3$; (b) $1/9$; (c) não existe; (d) $2/3$; (e) $-1/2$; (f) -1 ; (g) 0; (h) 1; (i) 1; (j) 1; (k) 1; (l) e ; (m) e^{-2} ; (n) 0; (o) 1; (p) e^4 ; (q) $1/2$.
37. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = 1$.
38. Resolvido.
39. (a) f é contínua em $x = 0$
 (b) —
 (c) e
40. —
41. (a) $y = 12x - 16$
 (b) $y = e^2(x - 1)$
 (c) $y = 3 - x$
42. (a) $T_0^3(x^3 + 2x + 1) = x^3 + 2x + 1$
 (b) $T_\pi^3(\cos x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$
 (c) $T_1^3(xe^x) = e + 2e(x - 1) + \frac{3}{2}e(x - 1)^2 + \frac{2}{3}e(x - 1)^3$
 (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
 (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
43. $g(x) = 2(x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
44. (a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$, para algum θ entre 0 e x .
 (b) —

- (c) Por exemplo, $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq T_0^2 f(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$, com erro inferior a $\frac{1}{6}$.
45. —
46. $\frac{(3-\pi)^6}{6!}$ (uma vez que $|R_5(3)| \leq \frac{(3-\pi)^6}{6!}$).
47. Zero de g : -1 .
48. $D_{h^{-1}} = [\pi, \frac{3\pi}{2}[$, $CD_{h^{-1}} =]-\infty, 1]$ e $h^{-1}(x) = 1 + \ln(\cos(x - \pi))$.
49. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
 (b) Não, porque não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 (c) $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f .
50. f tem um zero em $]0, 1[$, um em $]1, 2[$ e outro em $] - 1, 0[$.
51. (a) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
 (b) —
52. (a) A função f é contínua em $x = 0$ qualquer que seja o valor de α .
 (b) — (Sugestão: usar o Teorema de Bolzano-Cauchy)
53. 1
54. f é estritamente decrescente em $] - \infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$. A função f não tem extremos locais.
55. f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 1$.
56. —
57. (a) $T_0^2 f(x) = x - \frac{x^2}{2}$.
 (b) $\ln(1.1) = f(0.1) \approx T_0^2 f(0.1) = \frac{19}{200}$.