2.2. Sucessões e séries de funções. Séries de potências (revisitadas) e séries de Fourier

(Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no Capítulo 2 dos Apontamentos de Cálculo II de Alexandre Almeida (2018) e no Capítulo 4 dos Apontamentos de Cálculo II de Virgínia Santos (2009/2010) (disponíveis no Moodle))

Universidade de Aveiro, 2024/2025

Cálculo II – C

Resumo dos Conteúdos

Exemplo introdutório

Para $x \in]-1,1[$, a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

é convergente e a sua soma é, para cada x, $s(x) = \frac{1}{1-x}$.

A afirmação anterior tem a seguinte interpretação usando de convergência sucessões:

Para cada $x \in]-1,1[$, a sucessão das somas parciais $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

é tal que $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \frac{1}{1-x}$.

Exemplo introdutório (cont.)

Essa convergência pode ainda ser encarada da seguinte forma:

Considerem-se as funções $s_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$, de domínio $]-1,1[$.
A sucessão (de funções)

$$s_1(x), s_2(x), s_3(x), \ldots, s_n(x), \ldots.$$

é convergente, ponto a ponto, para a função $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$, no intervalo $]-1,1[$.

Este conceito de convergência (convergência pontual) e outro "mais exigente" (convergência uniforme) será aqui objeto de estudo.

Sucessão de funções

Definição:

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}(D)$ o conjunto das funções reais de variáveis reais definidas em D.
Uma sucessão de funções definidas em D $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} & \to & \mathcal{F}(D) \\ n & \mapsto & f_n \end{array}$$

Observação:

Note-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} f_n \colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) \end{array}$$

Exemplos

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

é uma sucessão de funções definidas em $\mathbb{R}$. Isto é, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a seguinte sucessão de funções definidas em $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{x}{2},\ f_3(x) = \frac{x}{3}, \ldots,\ f_n(x) = \frac{x}{n}, \ldots$$

2. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n(x) = x^n\,,\ x \in [0,1]\,,$$

é uma sucessão de funções definidas em $[0,1]$. Isto é, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a seguinte sucessão de funções definidas em $[0,1]$:

$$h_1(x) = x,\ h_2(x) = x^2,\ h_3(x) = x^3, \ldots,\ h_n(x) = x^n, \ldots$$

Convergência pontual

Definição:

Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções reais definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Diz-se que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f em D se, para cada $x \in D$,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Exemplos:

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in [0,1]$, converge pontualmente para a função nula pois, para todo o $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

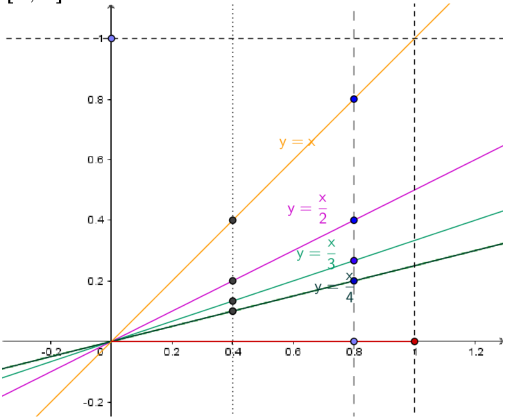
Nota: O domínio das funções pode ser alargado a $\mathbb{R}$, mantendo-se a convergência pontual para $f(x) \equiv 0$.

Exemplos (cont.)

Ilustração gráfica—Exemplo 1:

$f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in [0, 1]$

$f(x) = 0$

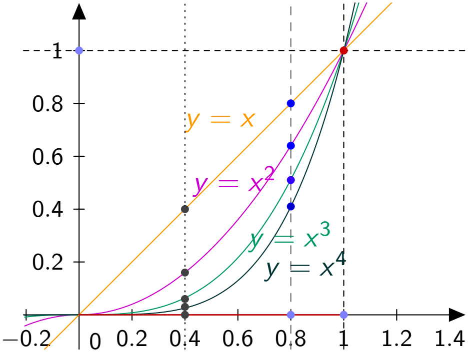


Exemplos (cont.)

2. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, converge pontualmente para a função $h(x)$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

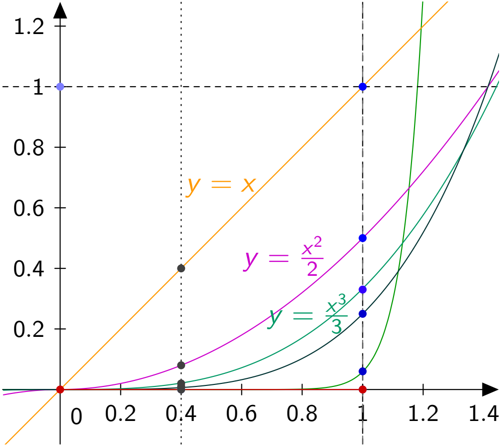
Ilustração gráfica:



Exemplos (cont.)

3. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $x \in [0, 1]$, converge pontualmente para a função nula.

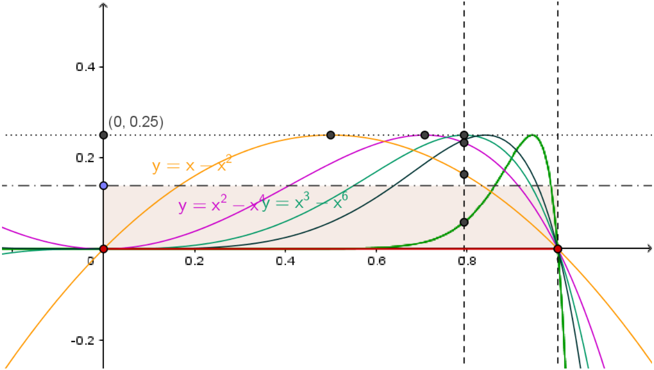
   Ilustração gráfica:



Exemplos (cont.)

4. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $x \in [0, 1]$, converge pontualmente para a função nula.

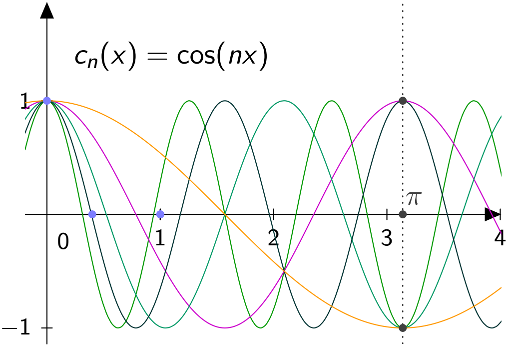
Ilustração gráfica:



Exemplos (cont.)

5. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n(x) = \cos(nx)\,,\ x \in [0, \pi]$, não converge pontualmente.

Ilustração Gráfica:



Voltando aos exemplos 3 e 4

$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem pontualmente para a função nula (ex. 3 e 4, resp.). Haverá alguma diferença na forma como convergem?
Analisando os esboços gráficos respetivos nota-se os seguintes comportamentos distintos:

- Em $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o gráfico de $g_n(x)$ vai-se *aproximando* do gráfico da função limite, à medida que n cresce. Isto é, fixada uma faixa (qualquer, tão "pequena"quanto se queira) em torno do gráfico da função limite, é sempre possível encontrar uma ordem a partir da qual, todos os pontos de interseção da reta $x = x_0$ (com $x_0 \in [0, 1]$ arbitrário) com os gráficos das funções g_n se situam nessa faixa. Assim, a partir de uma determinada ordem, todos os gráficos das funções g_n situam-se na faixa considerada. ver applet
- Em $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal não acontece. Isto é, é possível definir uma faixa em torno do gráfico da função limite para a qual não existe uma ordem, a partir da qual os gráficos de $p_n(x)$ se situem nessa faixa. ver applet

Convergência uniforme

Definição:

Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções reais definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Diz-se que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em D se a sucessão numérica de termo geral

$$M_n := \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$$

é um infinitésimo, ou seja, $\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$.

Exemplo:

A sucessão de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do Exemplo 3 converge uniformemente para a função nula em $[0,1]$. De facto,

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{|x^n|}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Nos outros exemplos a convergência é uniforme?

Ex. 1 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in [0,1]$, converge uniformente para a função nula (porquê?) ▸ ver applet

Ex. 2 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, não converge uniformemente para a função $h(x)$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$ (porquê?)

▸ ver applet

Ex. 4 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = x^n(1-x^n)$, $x \in [0,1]$, converge pontualmente para a função nula, mas não converge uniformemente. (porquê?) ▸ ver applet

Ex. 5 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n(x) = \cos(nx)$, $x \in [0,\pi]$, nem sequer converge pontualmente. ▸ ver applet

A convergência uniforme implica a convergência pontual

Proposição:

Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f num conjunto D, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f nesse conjunto.

Prova:

Para cada $x \in D$,

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y\in D} |f_n(y) - f(y)| = M_n, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em D, então, $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$.
Logo, para cada $x \in D$,

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

e, portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

Propriedades das sucessões convergentes uniformemente

Teorema: Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções contínuas em $[a,b]$.

Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $[a,b]$, então:

(i) f é contínua em $[a,b]$ e

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to c} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(c) = f(c),$$

$c \in [a,b]$;

(ii) f é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx;$$

(iii) Adicionalmente, se as funções f_n têm derivadas contínuas em $[a,b]$ e a sucessão $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[a,b]$, então

f é diferenciável em $[a,b]$ e $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x),\ \forall x \in [a,b].$

Observações relativas ao teorema anterior

1. As propriedades anteriores podem funcionar como critérios para provar que uma dada sucessão não converge uniformemente.

2. O resultado em (iii) do teorema anterior mantém-se válido se, em vez da convergência uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, apenas assumirmos a sua convergência pontual (na verdade, basta que exista um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que a sucessão numérica $\big(f_n(x_0)\big)$ seja convergente).

3. A continuidade e a diferenciabilidade nos extremos do intervalo devem ser tomadas como laterais.

Série de funções

Definição:

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$. Chama-se série de funções de termo geral f_n ao par $((f_n),(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\ ,\ x \in D.$$

Representa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \ \text{ ou, em alternativa, por } \ f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

Observação:

Tal como nas série numéricas, a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chamamos a sucessão (de funções) das somas parciais da série de termo geral f_n.

Convergência pontual/uniforme de uma série de funções

Definição: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ uma série de funções definidas em D tal que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sua sucessão de somas parciais.

1. A série de funções converge pontualmente em D se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir pontualmente em D.
2. A série de funções converge uniformemente em D se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir uniformemente em D.

Caso a série seja convergente, a função S limite da sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ designa-se por soma da série e escreve-se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = S$.

Neste caso, diz-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge para S (pontual ou uniformemente, conforme o caso).

Exemplo:

Já vimos que a série de potências, definidas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

converge pontualmente em $]-1,1[$ e a sua soma é $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Além disso, esta série converge uniformemente em qualquer intervalo fechado e limitado contido em $]-1,1[$ (ver a justificação mais à frente, no slide 28). Veja a seguinte applet.

Note que:

Se uma série de funções converge uniformemente em D, então converge pontualmente em D. O recíproco não é verdadeiro.

Domínio de Convergência de uma série de funções

Observação:

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ é convergente (pontualmente) em D com soma S, então $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ é convergente e tem soma $S(x)$, para cada $x \in D$, e vice-versa.

Definição:

Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, onde f_n estão definidas em D. Ao conjunto dos pontos $x \in D$ para os quais a série numérica correspondente é convergente chama-se domínio de convergência da série.

Exemplo: A série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ (definidas em $\mathbb{R}$) tem domínio de convergência $\mathbb{R}^+$.

Propriedades das séries uniformemente convergentes

Teorema:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ uma série de funções contínuas em $[a,b]$. Suponha-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em $[a,b]$ com soma S. Então:

(i) A soma S é contínua em $[a,b]$;

(ii) A soma S é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

[integração termo a termo];

(iii) Adicionalmente, se cada f_n é de classe C^1 em $[a,b]$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente em $[a,b]$, então S é diferenciável neste intervalo e

$$\Big(S(x)\Big)' = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x))', \quad x \in [a,b]$$

[derivação termo a termo].

Observações relativas ao teorema anterior

1. As propriedades anteriores podem funcionar como critérios para provar que uma dada série de funções não converge uniformemente. Isto é, se a função limite f não satisfizer alguma das propriedades listadas, a convergência da série não é uniforme no intervalo em causa.

2. O resultado em (iii) do teorema anterior mantém-se válido se, em vez da convergência uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, assumirmos apenas a sua convergência pontual (na verdade, basta que exista um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ seja convergente).

Observações relativas ao teorema anterior

- Como podemos constatar, a convergência uniforme permite preservar certas propriedades importantes como são a integração e a derivação termo a termo.

- Contudo, provar a convergência uniforme de uma série de funções por definição torna-se, em geral, complicado devido à dificuldade em lidar com a sucessão das somas parciais.

- O resultado seguinte, conhecido como **Critério de Weierstrass**, é bastante útil na prática pois fornece uma condição suficiente para a convergência uniforme.

Critério de Weierstrass

(condição suficiente de convergência uniforme de uma série de funções)

Teorema:

Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas em D e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica de termos não negativos, tais que

$$|f_n(x)| \leq a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in D.$$

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em D.

Exemplo:

(aplicação do Critério de Weierstrass, integração e derivação termo a termo)

Pelo Critério de Weierstrass, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ (Porquê?).

Neste caso, é possível integrar e derivar termo a termo a sua função soma, i.e.,

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{n^2+x^2}\, dx \right) = \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2+x^2} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2} \qquad \text{(Confirme!)}$$

Exercício:

Faça uma análise análoga ao exemplo anterior usando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$.

Séries de Potências: convergência uniforme

Teorema:

Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$. Então a série converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado do seu intervalo de convergência $I_c =]c-R, c+R[$.

Prova para o caso $c = 0$: Seja $[a,b] \subset]-R, R[$.

Note-se que, para todo o $x \in [a,b]$, $|x| \leq M$, onde $M = \max\{|a|, |b|\}$. Logo,

$$|a_n x^n| \leq |a_n| M^n, \ \forall x \in [a,b], \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Como a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| M^n$ é convergente (porque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n M^n$ converge absolutamente), o Critério de Weierstrass permite concluir que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em $[a,b]$.

Teorema de Abel:

Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$. Se a série converge no ponto $x = c + R$ (respetivamente, no ponto $x = c - R$), então ela converge uniformemente em $[c, c+R]$ (respetivamente, em $[c-R, c]$).

Exemplo de aplicação:

O domínio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n\sqrt{n+1}}$ é $[-7, 3[$ (verifique!).

Então, pelo Teorema de Abel, a série converge uniformemente em $[-7, -2]$. Conjugando com o Teorema do slide 28, conclui-se que esta série é uniformemente convergente em qualquer intervalo da forma

$$[-7, b]\,, \text{ com } -7 < b < 3\,.$$

Observações:

Consequentemente, uma série de potências é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado do seu domínio de convergência.

Deste modo:

- A função soma de uma série de potências é contínua.
- Pode-se derivar termo a termo.
- Pode-se integrar termo a termo.

Mais precisamente, do teorema do slide 23 resulta o teorema do slide seguinte.

Teorema: Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências, $I_c =]c-R, c+R[$ o seu intervalo de convergência, e $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$. Então:

(i) A função f é contínua em todo o domínio (de convergência da série).

(ii) A função f é diferenciável e $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-c)^{n-1}$, $\forall x \in I_c$.

(iii) A função F, definida por $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$, é a primitiva de f em I_c tal que $F(c) = 0$.

(iv) A função f é integrável em qualquer subintervalo $[a, b]$ do domínio de convergência e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n(x-c)^n dx.$$

Unicidade de representação de uma função em série de potências

Teorema:

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n\,, \qquad x \in I_c =]c-R, c+R[,$$

então f possui derivadas finitas de qualquer ordem em I_c e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Observações:

1. Para se provar o teorema anterior basta considerar a propriedade (ii) do Teorema do slide 31 e fazer alguns cálculos adicionais.
2. O teorema anterior mostra que sempre que uma série de potências convirja para $f(x)$ numa vizinhaça do seu centro c, ela é a série de Taylor de $f(x)$ centrada em c.

Exemplos de aplicação das propriedades das séries de potências

$\downarrow$

obtenção de desenvolvimentos de Taylor de uma função recorrendo ao desenvolvimento em Taylor de outra função (adequada).

1. Partindo deste desenvolvimento de MacLaurin

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \,, \ -1 < x < 1 \,,$$

podemos concluir que (Porquê?)

1. $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \,, \ -1 < x < 1;$$
2. $$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \,, \ -1 \leq x < 1,$$
3. $$\ln x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1} \,, \qquad 0 < x \leq 2.$$

2. Partindo deste desenvolvimento de MacLaurin

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\,,\ -1 < x < 1\,,$$

podemos concluir que (Porquê?)

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,\ -1 \leq x \leq 1.$$

Desenvolvimento em série de MacLaurin "famosos"

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \text{para } x \in]-1,1[,$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

Desenvolvimento em série de MacLaurin "famosos" (continuação)

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{para } x \in]-1, 1[.$$

Séries Trigonométricas

Definição:

As série de funções com a seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \mathrm{sen}(n\omega x) \right] \quad (1)$$

onde $\omega \in \mathbb{R}^+$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sucessões numéricas, têm a designação genérica de séries trigonométricas.

Observações:

- Se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ forem absolutamente convergentes, então a série (1) é absolutamente e uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.
- Caso (1) seja convergente, a sua soma $S(x)$ é periódica de período $\frac{2\pi}{\omega}$.

Revisão do conceito de função periódica

Definição:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se periódica se existir $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O período de f é o menor valor de T que verifica a igualdade anterior. Neste caso, dizemos que, f é T–periódica.

Observações:

- Se f é T–periódica, então pode converter-se, por mudança de variável, numa 2π–periódica, para tal basta considerar-se

$$F(x) := f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

- Por esse motivo, passamos a considerar apenas funções 2π–periódicas.

Coeficientes de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Se esta série trigonométrica convergir uniformemente, a_n e b_n são completamente determinadas pela função f.

- Determinação de a_0: Mostra-se que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \pi a_0$$

e, portanto,

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx}$$

Coeficientes de Fourier (cont.)

- Determinação de a_m, com $m \geq 1$: Multiplica-se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right],$$

por $\cos(mx)$ e integra-se no intervalo $[-\pi, \pi]$, obtendo-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) f(x)\, dx = \pi a_m$$

e, portanto,

$$\boxed{a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx\,, \quad \text{para } m = 1, 2, \ldots}$$

- Determinação de b_m, com $m \geq 1$: Usando argumentos análogos, obtém-se

$$\boxed{b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx, \quad \text{para } m = 1, 2, \ldots}$$

Série de Fourier

Definição:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e integrável em $[-\pi, \pi]$. Chama-se série de Fourier associada à função f (ou da função f) à série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right],$$

onde a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ e b_n $(n \in \mathbb{N})$ são dados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx.$$

a_n e b_n são designados por coeficientes de Fourier da função f.

Notação:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right]$$

- Os coeficientes de Fourier podem ser calculados usando um qualquer intervalo de integração de amplitude 2π (devido à periodicidade das funções integrandas em causa).

- Uma série de Fourier nem sempre converge. Caso seja convergente, a sua soma é periódica com período 2π, mas pode ser diferente de f.

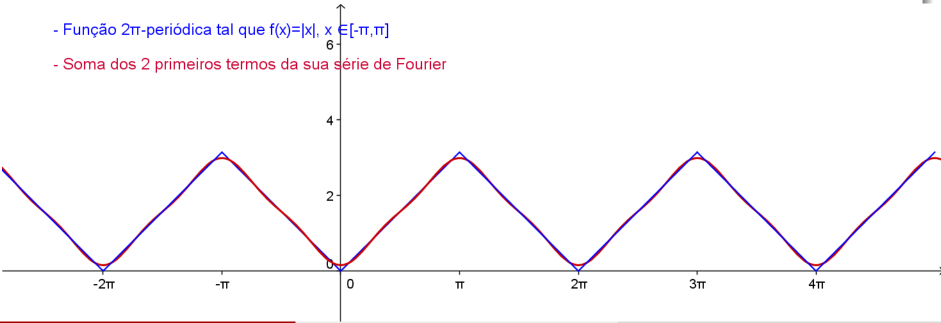
- Se f é uma função ímpar, a sua série de Fourier é uma *série de senos*.

- Se f é uma função par, a sua série de Fourier é uma *série de cossenos*.

Exemplos

- Seja f a função 2π-periódica definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|$. Neste caso,
$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$
Ilustração gráfica:

▸ ver applet

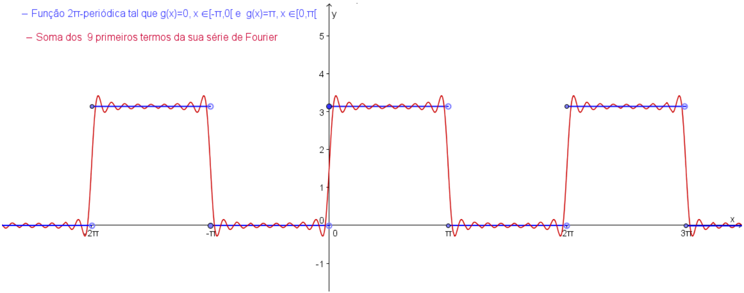


Exemplos (cont.)

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π–periódica e $g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

  Neste caso, $g(x) \sim \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x], \qquad x \in \mathbb{R}.$

  Ilustração gráfica:



▸ ver applet

Extensões Periódicas

Extensões de funções definidas em intervalos de amplitude 2π:

- Se $f : [a, a+2\pi[\to \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}$, podemos estendê-la a todo o $\mathbb{R}$ de forma única de forma a torná-la 2π–periódica. O mesmo se passa se $f :]a, a+2\pi] \to \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}$.
  Por isso, supondo que f é integrável, com algum abuso de linguagem, dizemos que a série de Fourier de f é a série de Fourier da sua extensão 2π–periódica a $\mathbb{R}$.
- Caso o domínio de f seja fechado, isto é, $f : [a, a+2\pi] \to \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}$, consideramos que a série de Fourier de f é a série de Fourier da extensão 2π–periódica de $f|_{[a,a+2\pi[}$ (ou $f|_{]a,a+2\pi]}$, é indiferente, pois a série obtida é a mesma).
- Para simplificar a escrita, com algum abuso de linguagem, é frequente representar por f estas extensões 2π–periódicas de f.

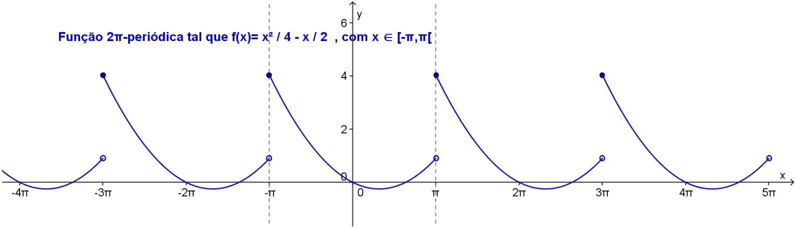
Extensões Periódicas (continuação)

- Exemplo:

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

a sua série de Fourier é a série de Fourier da função, de domínio $\mathbb{R}$, 2π-periódica tal que $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$, para $x \in [-\pi, \pi[$.

Ilustração gráfica:



ver applet

Extensões Periódicas (continuação)

Extensões ímpares de funções definidas no intervalo $[0, \pi]$:

Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Considere-se a "extensão" ao intervalo $[-\pi, \pi]$ definida da seguinte forma:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{extensão ímpar de } f}}{f_i} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_i(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

A série de Fourier da extensão ímpar de f é uma série de senos.

Extensões Periódicas (continuação)

Extensões pares de funções definidas no intervalo $[0, \pi]$:

Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Considere-se a extensão ao intervalo $[-\pi, \pi]$ definida da seguinte forma:

$$\underbrace{f_p}_{\text{extensão par de } f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_p(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

A série de Fourier da extensão par de f é uma série de cossenos.

Exemplo

$$\begin{aligned} f: [0,\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

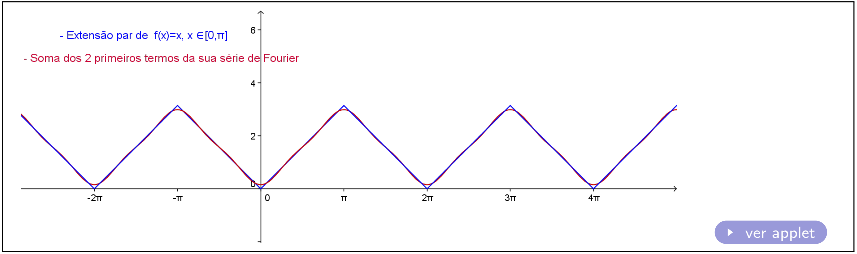
Extensão par de f: $$\begin{aligned} f_p: [-\pi,\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_p(x) = |x| \end{aligned}$$

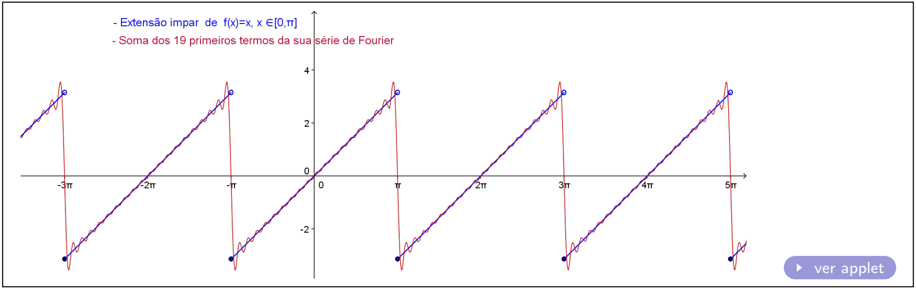
A série de Fourier da extensão par de f é $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

Extensão ímpar de f: $$\begin{aligned} f_i: [-\pi,\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_i(x) = x \end{aligned}$$

A série de Fourier da extensão ímpar de f é $2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\sin(nx)}{n}$

Ilustrações Gráficas





Convergência de uma série de Fourier

Uma série de Fourier nem sempre converge para a função que lhe deu origem. No entanto, sob certas condições podemos identificar a sua soma e, como vamos ver, nalguns desses casos a soma coincide com a função original. Analise os seguintes exemplos gráficos:

1. Onda Triangular ▸ ver applet
2. Função quadrática par ▸ ver applet
3. Onda quadrada ▸ ver applet
4. Dente de serra ▸ ver applet
5. Função quadrática (não par) ▸ ver applet

Antes enunciar as ditas condições, precisamos de introduzir a noção de função seccionalmente diferenciável.

Convergência de uma série de Fourier (cont.)

Definições:

- f diz-se seccionalmente contínua em $[a, b]$ se existir uma partição $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) de $[a, b]$ tal que f é contínua em cada subintervalo aberto $]a_{j-1}, a_j[$ ($j = 1, \ldots, n$) e existirem e forem finitos os limites laterais

$$f(a_{j-1}^+) := \lim_{x \to a_{j-1}^+} f(x) \qquad e \qquad f(a_j^-) := \lim_{x \to a_j^-} f(x).$$

  A função f dir-se-á seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$ se for seccionalmente contínua em todo o intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

- Uma função seccionalmente contínua diz-se seccionalmente diferenciável se a sua derivada é também seccionalmente contínua.

Observação: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é 2π-periódica, então f é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ sse f é seccionalmente diferenciável em $[-\pi, \pi]$, (ou em qualquer outro intervalo de amplitude 2π).

Convergência de uma série de Fourier (cont.)

Teorema de Dirichlet:

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e seccionalmente diferenciável (em $\mathbb{R}$) e $c \in \mathbb{R}$. Então a série de Fourier de f converge no ponto c para $\dfrac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$ (a média dos limites laterais de f no ponto c).

Observações: Nas condições do Teorema de Dirichlet:

- A série de Fourier de f converge (pontualmente) para a função

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad \text{se } x \text{ é ponto de continuidade de } f; \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & , \quad \text{se } x \text{ não é ponto de continuidade de } f. \end{cases}$$

- S é periódica com período 2π, pelo que basta conhecer $S(x)$ num intervalo de amplitude 2π.

Exemplo de função que satisfaz o Teorema de Dirichlet

Seja f a função 2π-periódica definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|$. Já vimos,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

▸ slide 43.

Como f é contínua em $\mathbb{R}$ e a sua derivada é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$ (Justifique!), pelo **Teorema de Dirichlet** conclui-se que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Outro exemplo de aplicação do Teorema de Dirichlet

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π–periódica e $g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

Já vimos que

$$g(x) \ \sim \ \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x]\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

slide 44

Como g é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ (Justifique!), então, pelo **Teorema de Dirichlet**, para $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (pontos onde g é contínua) tem-se que

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x].$$

Nos pontos $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (pontos onde g é descontinua),

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exemplos de aplicação ao cálculo de somas de séries numéricas

1. Já vimos que

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \qquad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Tomando $x = 0$, obtemos $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, logo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \qquad (1)$$

Partindo de (1), é possível mostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\Big($uma vez que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}\Big)$.

2. Já vimos que

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad x \in \{0, \pi\} \\ \pi & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Tomando $x = \frac{\pi}{2}$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$