Cap I – Lógica de 1ª ordem e demonstração automática

Proposições → têm valor lógico associado

Fórmulas

→ Proposições
- atómicas
- compostas

→ Conectivos
- $\wedge$ (e / mas)
- $\vee$ (ou / seja ou)
- $\neg$ (não)
- $\rightarrow$ (se ... então) — implicação
- $\leftrightarrow$ (se e só se / sse) — dupla implicação

A só se B ($A \rightarrow B$)

A seja ou B ($A \vee B$)

A é condição suficiente para B ($A \rightarrow B$)

A é condição necessária e suficiente para B ($A \leftrightarrow B$)

B é condição necessária ($A \rightarrow B$) [ou B não acarreta A]

$\bot$ / $\top$ } falso / verdadeiro

Definições recursivas de fórmulas

- proposições são fórmulas
- $\bot$ e $\top$ são fórmulas
- φ e ψ são fórmulas ⟹ $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ } são fórmulas

Folha 0

2) p: Sou responsável

q: Perco a MB

r: Vou de férias para as Bermudas

a) Se permanecer a MB vou de férias para as Bermudas

$q \rightarrow r$

b) Para ir de férias para as Bermudas é suficiente que seja responsável

$p \rightarrow r$

c) Perco a MB só se for responsável

$q \rightarrow p$

d) Para perder a MB é necessário ser responsável (ser responsável é condição necessária)

Para perder a MB (antecedente) ser responsável (consequente)

$q \rightarrow p$

e) Se perder a MB então vou de férias para as Bermudas, sendo eu responsável

$q \rightarrow (p \rightarrow r)$

$p \rightarrow r$

Semântica, validade e equivalência

$v: V \rightarrow \{0, 1\}$ valoração

V: fórmulas; 0 Falso; 1 Verdadeiro

$v(\top) = 1$ para cada valoração → tautologia

$v(\bot) = 0$ " " " → contradição

contingência → tem pelo menos uma tautologia

Tabelas verdade

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

→ só é falsa quando $V \rightarrow F$ (verdadeiro implica falso)

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

→ tem que ter o mesmo valor lógico para as "p"

Exemplo 1.1.10

$v(p) = 1$

$v(q) = 0$

$v(\neg p \rightarrow (p \vee q)) = v(\neg p) \rightarrow v(p \vee q)$

$= \neg v(p) \rightarrow v(p) \vee v(q)$

$= \neg 1 \rightarrow 1 \vee 0$

$= 0 \rightarrow 1$

$= 1$

calcular valor lógico da expressão

→ ψ é tautologia

$v(\psi) = 1$ para toda a valoração

→ ψ é contingência

$v(\psi) = 1$ para alguma valoração

→ ψ é contradição

$v(\psi) = 0$ para toda a valoração

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

tautologia

$p \wedge \neg p$ → contradição

$p \vee \neg p$ → tautologia

Equivalência lógica

$\varphi \equiv \psi$ ou $\varphi \leftrightarrow \psi$ é tautologia

equivalência; dupla implicação

Exemplo 1.1.16

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1

tem o mesmo valor lógico para cada valoração

$\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$

$\equiv \neg q \rightarrow \neg p$ (a ñ acontecer q então não se acontece p)

(contrapositiva)

Exemplo 1.1.17

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee r$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

as fórmulas não são equivalentes lógicas

Leis de Morgan

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\neg q \rightarrow (p \rightarrow r) \overset{?}{\equiv} (q \wedge p) \rightarrow r$

dupla implicação

$\equiv \neg q \vee (p \rightarrow r)$

$\equiv \neg(q \wedge p) \vee r$ — dupla implicação

$\equiv \neg q \vee \neg p \vee r$

$\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Dada uma tabela de verdade, determinar a fórmula φ

→ linhas em que φ dá 1

1, 4, 5, 6, 8

$\varphi_1 = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

$\varphi_4 = \neg p \wedge q \wedge r$

$\varphi_5 = p \wedge \neg q \wedge \neg r$

$\varphi_6 = p \wedge \neg q \wedge r$

$\varphi_8 = p \wedge q \wedge r$

$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_4 \vee \varphi_6 \vee \varphi_8 \vee \varphi_5$