$x = c$

Estrutura M

$D = \{1, 2\}$

$c^M = 2$

valoração v

$v(x) = 2$

(M, v) é um modelo para a fórmula $x = c$ porque $(M, v) \underbrace{\models}_{\text{"é válida"}} x = c$

$\exists_x \; x = c$, c – constante

Estrutura M

$D = \{1, 2\}$, $c^M = 2$

valoração v

$v(x) = 1$

$(M, v) \models \exists_x \; x = c$

$(M, v) \models \exists_x \varphi(x)$, quando $(M, v^{x/a}) \models \varphi(x)$ para algum $a \in D$.

$$v^{\frac{x}{a}}(y) \begin{cases} v(y) & \text{se } y \neq x \\ v(a) & \text{se } y = x \end{cases}$$

$D = \{1, 2, 3\}$

$P = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

$c^M = 1$

$(M, v) \models P(c, c)$ porque $(c^M, c^M) = (1, 1) \in P$

$\forall_x P(x, x)$

$(M, v^{x/1}) = P(x, x)$ porque $(1,1) \in P$

$(M, v^{x/2}) = P(x, x)$ " $(2,2) \in P$

$(M, v^{x/3}) = P(x, x)$ " $(3,3) \in P$

$\Big\} \; (M, v) \models \forall_x P(x, x)$

Exercício

$D = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3), (3,2)\}$

$S = \{1, 3\}$

$v(x) = 3$ e $v(y) = 2$

a) $R(x, y)$ é válida pq $(3, 2) \in R$

$(M, v) \models R(x, y)$ pq $(v(x), v(y)) = (3, 2) \in R$

b) $S(y)$ não é válido $S(v(y)) \notin R$

$(M, v) \not\models S(y)$ pq $v(y) = 2 \notin S$.

c) $\forall_y (\underbrace{S(x)}_{3} \wedge \underbrace{R(x, y)}_{R(3, y)\ \forall_y})$

$3 \in S$ ✓

↳ y não é variável livre, logo valoração $v(y)$ é ignorada

- $(M, v) \models S(x)$ porque $v(x) = 3 \in S$
- $(M, v^{y/1}) \not\models R(x, y)$ porque $(v(x), 1) = (3, 1) \notin R$

Logo

$(M, v) \not\models S(x) \wedge R(x, y)$

d) $\exists_x \forall_y (S(x) \wedge R(x, y)) \longrightarrow$ não há variáveis livres (fórmula fechada) (valoração ignorada)

$(M, v^{x/1\, y/1}) \models (S(x) \wedge R(x, y))$ pq $1 \in S$ e $(1,1) \in R$

$(M, v^{x/1\, y/2}) \models (S(x) \wedge R(x, y))$ pq $1 \in S$ e $(1,2) \in R$

$(M, v^{x/1\, y/3}) \models (S(x) \wedge R(x, y))$ pq $1 \in S$ e $(1,3) \in R$

$(M, v^{x/1}) \models \forall_y S(x) \wedge R(x, y)$

$(M, v) \models \exists_x \forall_y S(x) \wedge R(x, y)$

Folha 1

9) estrutura M, valoração v

$\alpha^M = A$, $\beta^M = A$, $\gamma^M = B$

a) $(M, v) \not\models R(\alpha, \beta)$ pq $(A, A) \notin R$

b) $(M, v^{x/A}) \not\models f(x) = \beta$ porque $f(A) \neq A$

$\beta^M = A$

$(M, v^{x/B}) \not\models f(x) = \beta$ porque $f(B) \neq A$

$(M, v^{x/C}) \not\models f(x) = \beta$ porque $f(C) \neq A$

Não existe $a \in X$ tal que $(M, v^{x/a}) \models f(x) = \beta$

$\therefore (M, v^{x/a}) \not\models \exists_x f(x) = \beta$

c) $\forall_w R(f(w), w)$

$(M, v^{w/A}) \models R(f(w), w)$ pq $(f(A), A) = (B, A) \in R$.

$(M, v^{w/B}) \models R(f(w), w)$ pq $(f(B), B) = (C, B) \in R$

$(M, v^{w/C}) \models R(f(w), w)$ pq $(f(C), C) = (C, C) \in R$.

$\therefore (M, v) \models \forall_w R(f(w), w)$

Exemplo 1.2.27

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato. $\models$ Tom tem garras

- $\forall_x \; \text{gato}(x) \longrightarrow \text{garras}(x) \equiv \forall_x \; \neg \text{gato}(x) \vee \text{garras}(x)$

Tom – constante

- gato (Tom)
- garras (Tom)

Substituição

$\Gamma = \{\neg \text{gato}(x) \vee \text{garras}(x), \text{gato}(\text{Tom}), \neg \text{garras}(\text{Tom})\}$

$\Gamma^* = \{\neg \underbrace{\text{gato}(\text{Tom})}_{p} \vee \underbrace{\text{garras}(\text{Tom})}_{q}, \text{gato}(\text{Tom}), \neg \text{garras}(\text{Tom})\}$

$= \{\neg p \vee q, p, \neg q\}$

1	$\neg p \vee q$	Hipóteses
2	p	
3	$\neg q$	
4	q	Res($2,1$)
5	$\perp$	Res($3,4$)

$\therefore$ O Tom tem garras.

1.3 Formas Normais

Literal – fórmula atómica ou negação de forma atómica

FNC $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ $\quad \underbrace{\varphi_i}_{\vee\text{-cláusulas}} = \bigwedge_{j \in J} L_j$, L_j literais

FNP Forma normal prenex

$$Q_{x_1} Q_{x_2} \cdots Q_{x_n} \; \varphi$$

Exemplo

$\underbrace{\forall_x \exists_y}_{\text{prefixo}} \underbrace{P(x, y)}_{\text{matriz}}$ FNP

Como transformar na FNP

$$\boxed{\begin{aligned} \neg \forall_x \varphi &\equiv \exists_x \neg \varphi \\ \neg \exists_x \varphi &\equiv \forall_x \neg \varphi \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boxed{\forall}_x \varphi \boxed{\wedge} \forall_x \psi &\equiv \forall_x \varphi \wedge \psi \\ \boxed{\exists}_x \varphi \boxed{\vee} \exists_x \psi &\equiv \exists_x \varphi \vee \psi \end{aligned}}$$

$(\forall_x P(x)) \vee (\exists_y Q(y))$

$\forall_x \exists_y P(x) \vee Q(y)$

!

$\forall_x \; x \geq 0 \vee \forall_x \; x < 0 \equiv \forall_x \; x \geq 0 \vee \forall_y \; y < 0$

$\neq$ $\qquad \equiv \forall_x \forall_y (x \geq 0 \vee y < 0)$

$\forall_x (x \geq 0 \vee x < 0)$

$\exists_x \; x \geq 0 \wedge \exists_x \; x < 0 \equiv \exists_x \; x \geq 0 \wedge \exists_y \; y < 0$

$\neq$ $\qquad \equiv \exists_{x,y} (x \geq 0 \wedge y < 0)$

$\exists_x (x \geq 0 \wedge x < 0)$

$$\boxed{\begin{aligned} \forall_x P(x) &\equiv \forall_y P(y) \\ \exists_x P(x) &\equiv \exists_y P(y) \end{aligned}}$$

Exemplo 1.3.4

$(\forall_x P(x)) \longrightarrow (\exists_x Q(x))$

$\equiv \neg (\forall_x P(x)) \vee (\exists_x Q(x))$

$\equiv \exists_x \neg P(x) \vee \exists_x Q(x)$

$\equiv \exists_x \neg P(x) \vee Q(x)$

$\equiv \exists_x P(x) \rightarrow Q(x)$

Exemplo 1.3.5

$\forall_x \forall_y (\exists_z (P(x, z) \wedge P(y, z))) \longrightarrow (\exists_u Q(x, y, u))$

$\equiv \forall_x \forall_y \neg (\exists_z (P(x, z) \wedge P(y, z))) \vee (\exists_u Q(x, y, u))$

$\equiv \forall_x \forall_y (\forall_z \neg P(x, z) \vee \neg P(y, z)) \vee (\exists_u Q(x, y, u))$

$\equiv \forall_x \forall_y \exists_u (\forall_z \neg P(x, z) \vee \neg P(y, z)) \vee Q(x, y, u)$

$\equiv \forall_x \forall_y \exists_u \forall_z \neg P(x, z) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, y, u)$

Folha 1 ex 7 $\longrightarrow$ TPC