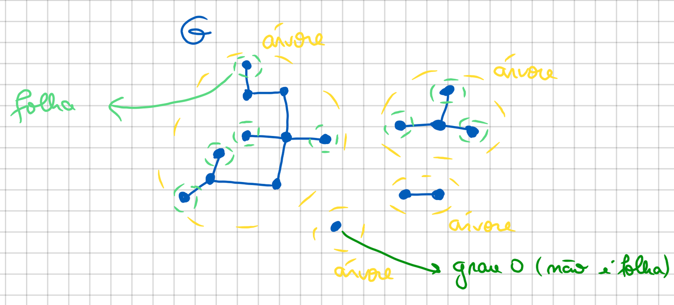
Parte III - Árvores e Florestas

Floresta - Grafo simples sem ciclos
Árvore - Grafo simples sem ciclos e conexo
Folha - Vértice de grau 1 numa árvore



$CC(G) = 4$

$\boxed{\begin{array}{l} G \text{ conexo} \\ G \text{ não tem ciclos} \end{array} \Big\} \Longrightarrow \underset{\text{nº arestas}}{\varepsilon(G)} = \underset{\text{vértices}}{\gamma(G)} - 1}$

Demonstração

$\gamma(G) = 1 \quad \bullet \quad \varepsilon(G) = 0 = \gamma(G) - 1 \quad \checkmark$

$H = G - v$, v é uma folha (Vamos provar a seguir que G tem folhas) $\Longrightarrow$ **Lema**

$\left.\begin{array}{l} \gamma(H) = \gamma(G) - 1 \\ \varepsilon(H) = \varepsilon(G) - 1 \\ H \text{ conexo (tirou-se vértice grau 1)} \\ H \text{ não tem ciclos} \end{array}\right] \xrightarrow[\text{indução}]{} \begin{array}{l} \varepsilon(H) = \gamma(H) - 1 \\ \varepsilon(G) - \cancel{1} = \gamma(G) - \cancel{1} - 1 \\ \varepsilon(G) = \gamma(G) - 1 \quad \square \end{array}$

Lema

Uma árvore com pelo menos dois vértices tem pelo menos duas folhas

Demonstração

Se G é uma árvore e P um caminho em G de comprimento máximo

v_0 —— · —— · … · —— v_k P

$d(v_0) = d(v_k) = 1$

$d(v_0) = 1$ porque v_0 não pode ser adjacente a um vértice que não esteja em P, pois P tem comprimento máximo. Ainda v_0 não pode ser adjacente a um vértice de P porque G não tem ciclos. Podemos tirar a mesma conclusão para v_k

$\boxed{\left.\begin{array}{l} G \text{ conexo} \\ \varepsilon(G) = \gamma(G) - 1 \end{array}\right] \Longrightarrow G \text{ não tem ciclos}}$

Demonstração:

Suponhamos que G tem um ciclo
Seja 'e' uma aresta desse ciclo

só retira a aresta, o vértice fica! ← $H = G - e$ é conexo

$\varepsilon(H) = \varepsilon(G) - 1$
$\gamma(H) = \gamma(G) \rightarrow (\varepsilon(G) = \varepsilon(H) = \gamma(H) - 1)$
$\varepsilon(H) = \overbrace{\gamma(H) - 1} - 1 = \gamma(H) - 2$, o que não é possível tendo em conta que H é conexo

$\therefore$ G não tem ciclos

$\boxed{\left.\begin{array}{l} G \text{ não tem ciclos} \\ \varepsilon(G) = \gamma(G) - 1 \end{array}\right] \Longrightarrow G \text{ é conexo}}$

Demonstração:

$CC(G) = K \geq 1$

$G_1 \quad G_2 \; - - - \; G_K$

$\begin{array}{l} \varepsilon(G_1) = \gamma(G_1) - 1 \\ \varepsilon(G_2) = \gamma(G_2) - 1 \\ \vdots \\ \varepsilon(G_K) = \gamma(G_K) - 1 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + \cdots + \varepsilon(G_K) \\ \quad = \underbrace{\gamma(G_1) + \gamma(G_2) + \cdots + \gamma(G_K)}_{\gamma(G)} - K \\ \varepsilon(G) = \gamma(G) - K \\ \quad \Downarrow \\ \gamma(G) - 1 \\ \Leftrightarrow K = 1 \;\therefore G \text{ é conexo} \end{array}$

$\boxed{\begin{array}{l} G \text{ floresta} \\ \varepsilon(G) = \gamma(G) - CC(G) \end{array}}$

- Todas as arestas de uma árvore são pontes
- Se acrescentarmos uma aresta a uma árvore, entre vértices dessa árvore, o grafo obtido tem um ciclo

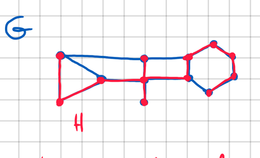
Folha 5

(27) Uma árvore não tem ciclos de comprimento ímpar, logo é um grafo bipartido

Árvore abrangente

Uma <u>árvore abrangente</u> de G é um <u>subgrafo abrangente</u> de G que é árvore

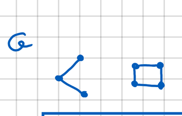
subgrafo abrangente → tem todos os vértices do grafo "original"



H é uma árvore abrangente de G

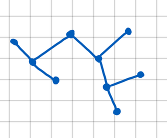
Folha 5

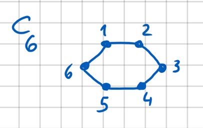
(28) Tem que ser ponte



$\boxed{\tau(G) = \text{nº de árvores abrangentes}}$

- Se G é desconexo então $\tau(G) = 0$
- Se G é uma árvore então $\tau(G) = 1$





$\tau(C_K) = K$

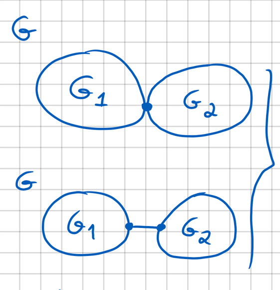
$\tau(\;) = 3$

$\tau(\;) = K$

K arestas

$\tau(\;) = \tau(\;) \times \tau(\;) = 3 \times 2 = 6$

$\tau(\;) = \tau(\;) \times \tau(\;) = 4 \times 3 = 12$



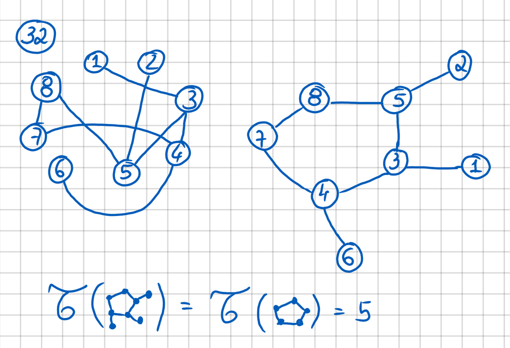
$\tau(G) = \tau(G_1) \times \tau(G_2)$

$\tau(\;) = ?$

Já voltamos aqui

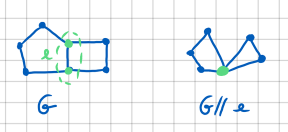
Folha 5

(32)



$\tau(\;) = \tau(\;) = 5$

Fusão



$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Teorema} \text{ (Fórmula recursiva para } \tau) \\ \tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G /\!/ e) \end{array}}$

$\tau(G-e)$ → nº de árvores abrangentes de G que não contém 'e'

$\tau(G/\!/e)$ → nº de arestas abrangentes de G que contém 'e'

$(G/\!/a) - b = (G - b)/\!/a$, a e b são arestas distintas de G

$\tau(\;) =$

$= \tau(\;) + \tau(\;)$ (G − e, G//e)

$= \tau(C_7) + \tau(C_4) \times \tau(C_3)$

$= 7 + 4 \times 3 = 19$

$\tau(\;) = \tau(\;)$

$= \tau(\;) + \tau(\;)$ (retirar; Fusão (shrunk 'e' e vértices))

$= \tau(\;) + \tau(\;)$

$= \underbrace{\tau(\;)}_{(1)} + \underbrace{\tau(\;)}_{3} \times \underbrace{\tau(\;)}_{2}$

(1) $\tau(\;) = \tau(\;) + \tau(\;)$ → não contam → C_3

$= \tau(C_3) + \tau(\;) + \tau(\;)$ → não conta, C_3

$= \underbrace{3 + 3} + \tau(\;) + \tau(\;)$ → lacete não conta, pode ser retirado

$= 2 \times 3 + 3 + \tau(\;)$

$= 2 \times 3 + 3 + 2 = 11$

Teorema de Cayley

O nº de árvores com 'n' vértices numerados é igual a n^{n-2}

$3^{3-2} = 3$

$4^{4-2} = 16$

$\tau(K_4) = 4^{4-2} = 16$

$\boxed{\tau(K_n) = n^{n-2}}$

Código de Prüffer → não damos

Folha 5

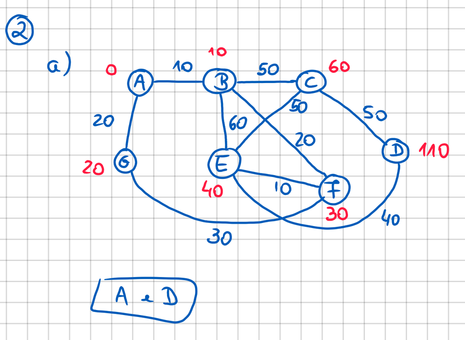
(33)

$\tau(\;) = \tau(K_6) \times \tau(C_6)$
$= 6^{6-2} \times 6 = 6^5$

Teste T2 (2018)

(2)

a)



$\boxed{A \text{ e } D}$

A → início; D → fim

A	B	C	D	E	F	G
(0, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)
	(10, A)	(∞, -)	(60, -)	(∞, -)	(∞, -)	(20, A)
		(60, B)	(∞, -)	(70, B)	(30, B)	(20, A)
		(60, B)	(∞, -)	(70, B)	(30, B)	
		(60, B)	(∞, -)	(40, F)		
		(60, B)	(80, E)			
			(80, E)			

Custo → 80
Caminho → A B F E D