Folha 5

(11)

b) $d_G(v) = r$

$d_{G^c}(v) = r$

$d_G(v) + d_{G^c}(v) = d_{K_m}(v)$
$\downarrow$
$m-1$

$\Leftrightarrow 2r = m-1$

$\Leftrightarrow m = 2r+1$

nº de vértices ⇓ ordem

m é ímpar. A afirmação é falsa.

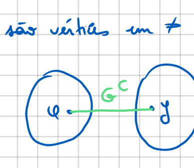
c) A afirmação é falsa

d) Se G não é conexo então G^c não é conexo.

A afirmação é verdadeira.

Como G não é conexo, G tem pelo menos duas componentes conexas.

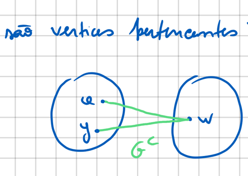
• Se u e y são vértices em ≠ componentes conexas



$uy \in E(G^c)$

$\therefore$ u e y são conexos em G^c

• Se u e y são vértices pertencentes à mesma componente conexa



Seja w um vértice noutra componente conexa de G

$uw \in E(G^c)$

$yw \in E(G^c)$

(u, y, w) é um caminho entre u e y em G^c

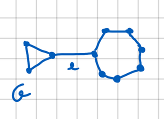
$\therefore G^c$ é conexo

Pontes

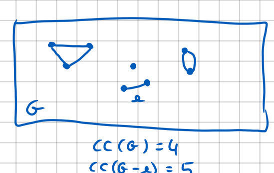
Uma aresta e é uma ponte de G se $cc(G-e) > cc(G)$

$cc \to$ componentes ~~complementares~~ conexas

Exemplo



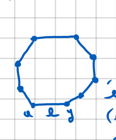
$cc(G) = 1$
$cc(G-e) = 2$] $\Rightarrow$ e é uma ponte



$cc(G) = 4$
$cc(G-e) = 5$

Teorema

Uma aresta é uma ponte se e só se não pertence a nenhum ciclo.



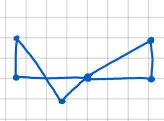
'e' não é ponte (existe caminho alternativo entre u e y caso se retire 'e')

$$\boxed{cc(G-e) = cc(G)+1 \quad \downarrow \quad \text{'e' é ponte}}$$

Circuito de Euler

trajeto - não repete arestas (pode repetir vértices)

G tem um circuito de Euler se existe um trajeto fechado em G que contém todas as arestas de G.



Teorema

Um grafo conexo tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices têm grau par.

Demonstração

$\Rightarrow$) C é circuito de Euler

$C = (v_0, c_1, v_1, c_2, v_2, \dots, c_k, v_k)$

$v_0 = v_k$

$\{c_1, \dots, c_k\} \in E(G)$

$c_i \neq c_j$

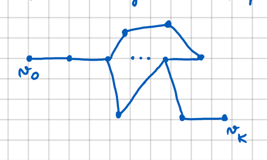
v_i é incidente a e_{i-1} e a e_i

Se v_i aparece em C 'm_i' vezes

$d(v_i) = 2m_i$

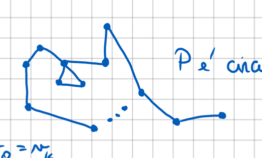
$\therefore$ O grau de cada vértice é par.

$\Leftarrow$) Seja P um trajeto de comprimento máximo



$v_0 = v_k$

pq P tem comprimento máximo



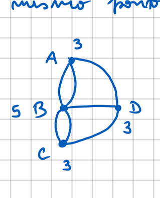
P é circuito

$v_0 = v_k$

P tem todas as arestas de G

Problema das 7 pontes de Königsberg

É possível atravessar todas as pontes uma única vez voltando ao mesmo ponto de partida?



Não é possível. G tem vértices de grau ímpar.

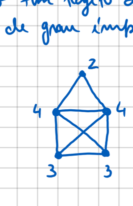
Trajeto de Euler

Trajeto que contém todas as arestas de um grafo.

Teorema

Seja G finito e conexo.

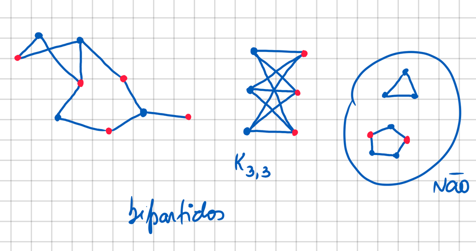
G tem trajeto de Euler se e só se o nº de vértices de grau ímpar é igual a 0 ou 2.



$\longrightarrow$ tem um trajeto de Euler mas não tem circuito de Euler

G é bipartido se

- $V(G) = X \cup Y$
- $X \cap Y = \emptyset$
- $e \in E(G) \Rightarrow e = uy \quad u \in X, y \in Y$



Teorema

Um grafo é bipartido se e só se não tem ciclos de comprimento ímpar.

$\Rightarrow$) Se G contém um ciclo de comprimento ímpar então não é bipartido.

$\Leftarrow$) Suponhamos que G não tem ciclos de comprimento ímpar.

Se G é desconexo o processo que vamos usar aplica-se a cada componente conexa.

$v_0 \in V(G)$

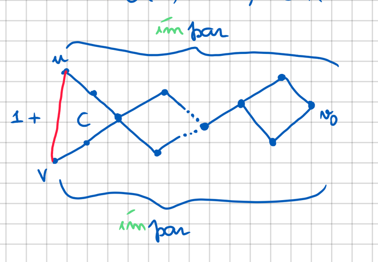
$C_v^u \quad X = \{v \in V(G) \mid dist(v_0, v) \text{ é par}\}$

$C_v^u \quad Y = \{v \in V(G) \mid dist(v_0, v) \text{ é ímpar}\}$

$X \cup Y = V(G) \qquad X \cap Y = \emptyset$
$\downarrow$
G conexo

• Não existe uma aresta entre vértices de X (Y)

$uv \in E(G) \qquad u, v \in X$



Existe um circuito $u - v_0 - v - u$ que tem comprimento ímpar, logo, existe um ciclo de comprimento ímpar.

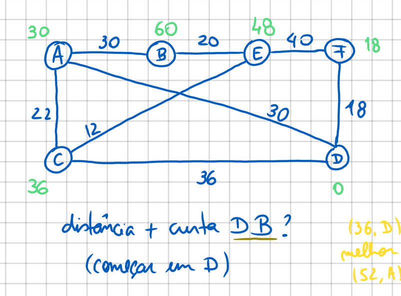
Folha 5

(16) $(1, 2, 3, 1)$ é um ciclo ímpar em $G_2 \Rightarrow G$ NÃO é bipartido

$X = \{a, h, e, d\}$
$Y = \{g, c, f, b\}$] é bipartição em G_1. G_1 é bipartido

G_1 e G_2 não são isomorfos porque G_1 é bipartido e G_2 não é bipartido

O Algoritmo de Dijkstra – Folha 5 (ex 30)



distância + curta DB?
(começar em D)

start $\uparrow$ D; antecessor

A	B	C	D	E	F
(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(0, -)	(∞, -)	(∞, -)
(30, D)	(∞, -)	(36, D)		(∞, -)	(18, D)
(30, D)	(∞, -)	(36, D)		(58, F)	
	(60, A)	~~(52, A)~~		(58, F)	
	(60, A)	(36, D)		(48, C)	
	(60, A)				

$\to$ custo mín (na linha)

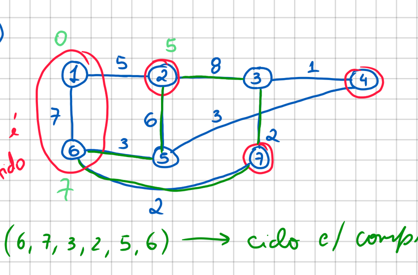
40+18

(36, D) melhor que (52, A)

Resposta: $D \to A \to B \quad 60$

Folha 5

(31)



a) $(6, 7, 3, 2, 5, 6) \longrightarrow$ ciclo c/ comprimento ímpar

b) entre 1 e 4
start

1	2	3	4	5	6	7
(0, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)
	(5, 1)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(7, 1)	(∞, -)
		(13, 2)	(∞, -)	(11, 2)	(7, 1)	(∞, -)
		(13, 2)	(∞, -)	(10, 6)		(9, 6)
		(11, 7)	(∞, -)	(10, 6)		
		(11, 7)	(13, 5)			
			(12, 3)			

Resposta 12 $\to$ custo mín

1 6 7 3 4