Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I - C **2024/2025**

Ficha de Exercícios 4
Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em $\mathbb{R}$) das equações diferenciais dadas:

   (a) $y = \operatorname{sen} x - 1 + \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} + y \cos x = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)$;

   (b) $z = \cos x$ $\qquad z'' + z = 0$;

   (c) $y = \cos^2 x$ $\qquad y'' + y = 0$;

   (d) $y = Cx - C^2 \quad (C \in \mathbb{R})$ $\qquad (y')^2 - xy' + y = 0$.

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada constitui um integral geral.

   (a) $y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);

   (b) $y = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);

   (c) $y = \mathrm{e}^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}$.

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por

$$y = A \operatorname{sen}(x + B) \qquad \text{com} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

   Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções

4. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - \operatorname{sen} x = 0$.

   (b) Mostre que a função definida por $\varphi(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ é uma solução particular da EDO da alínea anterior, que satisfaz as condições $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1$.

5. Determine a solução geral das seguintes EDO:

   (a) $y' - \dfrac{1}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x} = 0$;

   (b) $y' - \sqrt{1 - x^2} = 0$;

   (c) $y' - \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 0$.

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDO de variáveis separáveis:

   (a) $x + yy' = 0$;

   (b) $xy' - y = 0$;

   (c) $(t^2 - xt^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2$;

   (d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$.

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

   (a) $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 1/2;$

   (b) $xy + x + y'\sqrt{4+x^2} = 0, \quad y(0) = 1;$

   (c) $(1+x^3)y' = x^2 y, \quad y(1) = 2.$

8. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

   (a) $y' + 2y = \cos x;$

   (b) $x^3 y' - y - 1 = 0;$

   (c) $\dfrac{1}{x}\, y' - \dfrac{1}{x^2+1}\, y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,, \qquad x \neq 0.$

9. Considere a EDO $x^2 y' + 2xy = 1$ em $]0, +\infty[$. Mostre que qualquer solução desta EDO tende para zero quando $x \to +\infty$.

10. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogéneas e determine um seu integral geral.

    (a) $(x^2 + y^2)y' = xy;$

    (b) $y'\left(1 - \ln \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{y}{x}\,, \quad x > 0.$

11. Considere a equação diferencial $y' = \dfrac{y}{x}\,(1 + \ln y - \ln x)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}^+.$

    (a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogénea.

    (b) Determine um integral geral desta EDO.

12. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

    (a) $xy' + y = y^2 \ln x, \qquad x > 0;$

    (b) $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2 y^5\,, \qquad x \neq 0.$

13. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

    (a) $y' + y = \operatorname{sen} x;$

    (b) $y'' - y + 2\cos x = 0;$

    (c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x;$

    (d) $y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{e}^{2x};$

    (e) $y'' + y' = \mathrm{e}^{-x};$

    (f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x);$

    (g) $y''' + y' = \operatorname{sen} x;$

    (h) $y'' + 9y = \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^{-x}.$

14. Considere o problema de valores iniciais

$$y'' + 4y' + 4y = \cos(2x)\,, \qquad y(\pi) = 0\,, \quad y'(\pi) = 1.$$

Justifique que este problema possui uma única solução (em $\mathbb{R}$) e determine-a.

15. Resolva o seguinte problema de valor inicial $\begin{cases} y' + y\cos x = \cos x \\ y(0) = 2. \end{cases}$

16. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

    (a) $(1+x^2)y' + 4xy = 0$;

    (b) $y'' + y + 2\operatorname{sen} x = 0$;

    (c) $(1+x^2)y' - y = 0$;

    (d) $y''' + 4y' = \cos x$;

    (e) $y' - 3x^2 y = x^2$;

    (f) $y''' - 3y' + 2y = 12\,\mathrm{e}^x$.

17. Resolva a EDO $xy'' - y' = 3x^2$ (Sugestão: Efetue a mudança de variável $z = y'$).

18. Considere a EDO linear homogénea (de coeficientes não constantes)

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0\,, \qquad x \in]1,\infty[.$$

    (a) Mostre que $\{x, e^x\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação.

    (b) Obtenha a solução geral da EDO.

    (c) Resolva agora a EDO

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2\,, \qquad x \in]1,\infty[,$$

    começando por verificar que ela admite uma solução do tipo $y = \beta x^2$ para certo $\beta \in \mathbb{R}$.

19. Resolva cada um dos seguintes problemas de Cauchy usando transformadas de Laplace.

    (a) $3x' - x = \cos t\,, \quad x(0) = -1$;

    (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 36y = 0\,, \quad y(0) = -1\,, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2$;

    (c) $y'' + 2y' + 3y = 3t\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1$;

    (d) $y''' + 2y'' + y' = x\,, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) - 1 = 0$;

    (e) $y'' + y' = \dfrac{e^{-t}}{2}\,, \quad y(0) = 0 = y'(0)$.

Exercícios de revisão

20. Considere a EDO $y''' - 2y'' + y' = 4x + 1$.

    (a) Resolva a EDO homogénea associada.

    (b) Sabendo que a EDO completa admite uma solução do tipo $y = Ax^2 + Bx$, onde A e B são constantes, determine a solução geral da EDO completa.

21. Considere a EDO $y'' + y' - 6y = 6\mathrm{e}^{2x}$.

    (a) Resolva a EDO homogénea associada.

    (b) Determine uma solução particular da EDO completa.

    (c) Indique a solução geral da EDO completa.

22. Resolva a seguinte equação diferencial: $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \quad x > 0.$

23. Resolva a seguinte equação diferencial de Bernoulli:

$$y' + 4\frac{y}{x} = x^3 y^2, \quad x > 0.$$

24. Considere o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + y' = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} \\[2ex] y(0) = 0 \\[2ex] y'(0) = 0 \end{cases}$$

   (a) Mostre que $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \dfrac{1}{4s(s+1)^2}, \quad s > 0.$

   (b) Usando a Transformada de Laplace inversa, resolva o problema de valores iniciais.

25. Usando a Transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + y = t \\[2ex] y(0) = 1 \\[2ex] y'(0) = -1 \end{cases}$$

26. Usando a Transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\[2ex] y(0) = -1 \\[2ex] y'(0) = 6 \end{cases}$$

Soluções

1. (a) Sim; (b) Sim; (c) Não; (d) Sim.

2. (a) $xy' - y = 0$; (b) $y'' = 0$; (c) $xy' - y\ \ln(y) = 0$.

3. $y''' + y' = 0$.

4. (a) $y = C_1 x - \operatorname{sen} x + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

5. (a) $y = \ln|\operatorname{arctg} x| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$;
   (b) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$;
   (c) $y = \dfrac{x^3}{3} + \operatorname{arctg} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$.

6. (a) $x^2 + y^2 = C\,, \quad C \in \mathbb{R}$;
   (b) $y = C\,x\,, \quad C \in \mathbb{R}$ (compare com o ex. 2(a));
   (c) $\dfrac{x}{t} = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{t}}\,, \quad C \in \mathbb{R}$;

(d) $y = \dfrac{1}{\ln|x^2-1| - C}\,, \quad C \in \mathbb{R};$

7. (a) $y = \dfrac{1}{x+1};$ (b) $y = -1 + 2e^{2-\sqrt{4+x^2}};$ (c) $y^3 = 4(1+x^3).$

8. (a) $y = \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} x + C\,\mathrm{e}^{-2x}\,, \qquad C \in \mathbb{R};$

   (b) $y = -1 + C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\,, \qquad x \neq 0, \qquad C \in \mathbb{R};$

   (c) $y = (C+x)\sqrt{x^2+1}\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$

9. Comece por verificar que a solução geral possui a forma $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^2}\,, \quad C \in \mathbb{R}.$

10. (a) $\ln|y| - \dfrac{x^2}{2y^2} = C, \qquad C \in \mathbb{R}$ $\qquad$ ($y = 0$ é solução singular).

    (b) $y = x\,\mathrm{e}^{Ky}\,, \quad x > 0, \qquad K \in \mathbb{R}.$

11. (a) —

    (b) $y = x\,\mathrm{e}^{Cx}, \quad x > 0, \qquad C \in \mathbb{R}.$

12. (a) $y = \dfrac{1}{1 + Cx + \ln x}\,, \qquad x > 0, \quad C \in \mathbb{R}$ $\quad$ ($y = 0$ é solução singular).

    (b) $y^4 = \dfrac{x^2}{C - 4x^5}\,, \quad C \in \mathbb{R}$ $\quad$ ($y = 0$ é solução singular).

13. (a) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{2} - \dfrac{\cos x}{2};$

    (b) $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \cos x;$

    (c) $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + 3x;$

    (d) $y = \left(C_1 + C_2 x + \dfrac{x^3}{6}\right)\mathrm{e}^{2x};$

    (e) $y = C_1 + (C_2 - x)\,\mathrm{e}^{-x};$

    (f) $y = C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2\,\cos(2x) - \dfrac{1}{4}\cos(2x)\,\ln|\sec(2x) + \operatorname{tg}(2x)|;$

    (g) $y = C_1 + C_2\,\cos x + C_3 \operatorname{sen} x - \dfrac{x}{2}\operatorname{sen} x;$

    (h) $y = C_1 \operatorname{sen}(3x) + C_2\,\cos(3x) + \dfrac{\operatorname{sen} x}{8} - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{10}.$

    (C_1, C_2, C_3 são constantes reais arbitrárias).

14. $y = \dfrac{3}{4}(x-\pi)\,\mathrm{e}^{2(\pi-x)} + \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{8}.$

15. $y = 1 + \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$

16. (a) $y = \dfrac{K}{(x^2+1)^2}\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

    (b) $y = C_1\,\cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x\,\cos x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

    (c) $y = C\,\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}\,, \qquad C \in \mathbb{R};$

    (d) $y = C_1 + C_2\,\cos(2x) + C_3 \operatorname{sen}(2x) + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

    (e) $y = K\,\mathrm{e}^{x^3} - \dfrac{1}{3}\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

(f) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + (C_2 + C_3x + 2x^2)\,\mathrm{e}^{x}\,, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

17. $y = Cx^2 + x^3 + K\,, \qquad C, K \in \mathbb{R}.$

18. (a) –

    (b) $y = C_1x + C_2e^x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

    (c) $y = C_1x + C_2e^x + x^2\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

19. (a) $x(t) = \dfrac{3}{10}\,\mathrm{sen}\,t - \dfrac{1}{10}\,\cos t - \dfrac{9}{10}\,\mathrm{e}^{\frac{t}{3}};$

    (b) $y(t) = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(6t) - \cos(6t);$

    (c) $y(t) = t - \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{sen}\,(\sqrt{2}\,t) + \dfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-t}\cos(\sqrt{2}\,t);$

    (d) $y(x) = \dfrac{1}{2}\,(x^2 - 4x + 8) - 2e^{-x}(x + 2);$

    (e) $y(t) = \dfrac{e^{-t}}{2}\,\big(e^t - t - 1\big).$

20. (a) $y_h = C_1 + C_2\mathrm{e}^x + C_3x\mathrm{e}^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

    (b) $y = y_h + y_p = C_1 + C_2\mathrm{e}^x + C_3x\mathrm{e}^x + 2x^2 + 9x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

21. (a) $y_h = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

    (b) $y_p = \frac{6}{5}x\mathrm{e}^{2x}$

    (c) $y = y_h + y_p = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + \frac{6}{5}x\mathrm{e}^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

22. $y = -\frac{1}{x}\cos x + \frac{1}{x^2}\mathrm{sen}\,x + \frac{C}{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

23. O integral geral é $y = \frac{1}{Cx^4 - x^4\ln x}$, $C \in \mathbb{R}$ e $y = 0$ é solução singular.

24. (a) —

    (b) $y(t) = \frac{1}{4}\left(1 - \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t}\right), \quad t \geq 0.$

25. $y(t) = t + \cos t - 2\mathrm{sen}\,t, \quad t \geq 0.$

26. $y(t) = (3t - 1)e^{-3t}, \quad t \geq 0.$