Cálculo I-C

Slides de apoio às aulas

Integrais impróprios e Transformadas de Laplace

Departamento de Matemática
Universidade Aveiro

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos e do Prof. Alexandre Almeida (indicados na bibliografia).

Extensão do conceito de integral de Riemann

A definição de integral de Riemann exige que a função integranda, f, seja limitada e esteja definida num intervalo fechado e limitado I.

Neste capítulo, vamos estender o conceito de integral de Riemann para o caso em que o intervalo I é ilimitado, considerando uma função f que é integrável em qualquer subintervalo fechado e limitado de I. Passaremos, então, ao estudo do que chamamos de **integrais impróprios de 1ª espécie**.

Exemplos de integrais impróprios de 1ª espécie:

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)\, dx$

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Definição (Integral impróprio de 1.ª espécie no limite superior de integração):

Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, para todo o $t > a$.
Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx,$$

então o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Exemplo: Uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}(x)\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg} t \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Exercícios:

1. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

   (a) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \cos(x)dx$ (b) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2}dx$ (c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

2. Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ é:
   (a) divergente se $\alpha \leq 1$;
   (b) convergente se $\alpha > 1$ e, neste caso, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha - 1}$.

3. Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\beta x}\, dx$ é:
   (a) divergente se $\beta \geq 0$;
   (b) convergente se $\beta < 0$ e, neste caso, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\beta x}\, dx = -\frac{1}{\beta}$.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Definição (Integral impróprio de 1.ª espécie no limite inferior de integração):

Seja $f : \,]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, a]$, para todo o $t < a$.
Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, dx,$$

então o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$$

diz-se convergente e escreve-se

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Exemplo: Como

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}\int_t^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}(x)\right]_t^1\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} t\right)\\ &= \frac{3\pi}{4},\end{aligned}$$

o integral impróprio $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{3\pi}{4}.$$

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Exercícios:

1. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{4-x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{4}{1+(x+1)^2}\,dx$

2. Estude a natureza do seguinte integral impróprio em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\int_{-\infty}^{0} a^x\,dx.$$

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Proposição (Propriedades dos integrais impróprios de 1.ª Espécie): Sejam $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, t]$, $\forall t > a$. Então verificam-se as seguintes condições:

1. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ são convergentes, então para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ é convergente e
$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$
2. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente, então para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \alpha f(x)\,dx$ é divergente.

Observação: Resultado análogo é válido para integrais impróprios de 1.ª espécie no limite inferior de integração.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Proposição (Propriedades dos integrais impróprios de 1.ª Espécie): Sejam $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall t > a$, e $b > a$. Então os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x)\, dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^{b} f(x)\, dx + \int_b^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Observação: Resultado análogo, com as devidas adaptações, é válido para integrais impróprios de 1.ª espécie no limite inferior de integração.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Exemplos:

1. Pelo Exercício 2 da página 5 tem-se que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx \text{ converge e que } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

2. Como, atendendo ao Exercício 2 da página 5, o integral impróprio

$\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\, dx$ é divergente, então o integral impróprio

$\displaystyle\int_3^{+\infty} x^2\, dx$ também é divergente.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Definição(Integral impróprio de 1.ª espécie em ambos os limites de integração):

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[\alpha, \beta]$ para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \beta$.

1. Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, os integrais impróprios

   $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ são ambos convergentes dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente e escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

2. Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, pelo menos um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

é divergente dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.

Exercício: Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x\,dx$

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Proposição (Critério de Comparação): Sejam f e g duas funções definidas em $[a,+\infty[$, integráveis em $[a,t]$, para todo o $t>a$, tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

para todo o $x \in [a,+\infty[$. Então:

(i) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente;

(ii) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente.

Observação: Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o mesmo critério para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Exemplo: Usando o Critério de Comparação estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Notar que, para todo o $x \in [1, +\infty[$ temos

$$0 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}\ .\ (\textbf{justifique!}) \tag{1}$$

Uma vez que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente e que a desigualdade (1) se verifica, pelo Critério de Comparação, o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Proposição (Critério do Limite): Sejam f e g duas funções definidas em $[a,+\infty[$ e integráveis em $[a,t]$, para todo o $t>a$, tais que $f(x)\geq 0$ e $g(x)>0$, $\forall x\in[a,+\infty[$. Seja

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\ .$$

Então:

(i) Se $L\in\mathbb{R}^+$, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

(ii) Se $L=0$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

(iii) Se $L=+\infty$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Exemplo: Usando o Critério do Limite estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Notar que, para todo o $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{sen}\frac{1}{x^2} \geq 0$ e $\frac{1}{x^2} > 0$. Além disso

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Uma vez que $L \in \mathbb{R}^+$ e que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente, pelo Critério do Limite, o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Observação: Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o Critério do Limite para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exemplo: Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x-1)^2}\,dx$.

Observe-se que, $\frac{e^x}{(x-1)^2} > 0$ e $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$, $\forall x \in]-\infty, 0]$.
Uma vez que

$$L = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x}{(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

e que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ é convergente (**verifique!**), concluímos, pelo Critério do Limite, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x-1)^2}\,dx$ é convergente.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Exercícios: Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\, dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5x^2 - 3}{x^8 + x - 1}\, dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x^2}\, dx$
4. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{4 + \sqrt{x}}\, dx$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^7 + 2x + 1}\, dx$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^3 + 3x}{2 + x^2}\, dx$

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Definição (Convergência absoluta): Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t > a$. Dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

é absolutamente convergente, se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

é convergente.

Proposição: Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t > a$. Se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

Integrais Impróprios de 1.ª Espécie

Observação: Com ligeiras adaptações, pode definir-se convergência absoluta e enunciar-se a mesma proposição para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exercício: Verifique se os seguintes integrais impróprios são absolutamente convergentes:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2x^4}\, dx$, para todo o $n \in \mathbb{N}$

Transformada de Laplace

Seguidamente, iremos apresentar uma ferramenta que se revela bastante útil na resolução de certos problemas envolvendo equações diferenciais (que iremos estudar no capítulo seguinte). Trata-se de uma 'transformação' que consiste em converter uma dada função noutra através de um integral impróprio apropriado.

Definição: Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função. Chama-se transformada de Laplace de f à função $\mathcal{L}\{f\}$ definida por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

nos pontos $s \in \mathbb{R}$ em que este integral impróprio é convergente.

Observação: Podemos escrever $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ para indicar a transformada de Laplace de f. Ao escrever-se desta forma salienta-se o facto da função inicial f depender de t, enquanto que a transformada $\mathcal{L}\{f\}$ é calculada em s.

Observação: É habitual escrever-se $F(s)$ para denotar $\mathcal{L}\{f\}(s)$.

Transformada de Laplace

Exemplo: Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 1$. Por definição,

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt$$

para $s \in \mathbb{R}$ em que este integral impróprio é convergente. Ora, estudando a convergência do integral conclui-se que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}, \text{ para } s > 0$$

(para $s \leq 0$ este integral diverge). Assim,

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \text{ para } s > 0.$$

Transformada de Laplace

Exemplos:

- $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \neq 1,\ t \neq 2, \\ 2 & \text{se} \quad t = 1, \\ 0 & \text{se} \quad t = 2. \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \qquad \text{[Verifique!]}$$

- $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \dfrac{1}{s-a}, \quad s > a, \qquad (a \in \mathbb{R})$

- $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$

- $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0, \qquad (a \in \mathbb{R})$

- $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0, \qquad (a \in \mathbb{R}).$

Linearidade da Transformada de Laplace

Proposição: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Suponha-se que existem $\mathcal{L}\{f\}(s)$ e $\mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > s_f$ e $s > s_g$, respetivamente. Então:

(i) $\mathcal{L}\{f+g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \qquad s > \max\{s_f, s_g\};$

(ii) $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s), \qquad s > s_f.$

Exemplos de aplicação:

1. $$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a}, \qquad s > a \text{ e } s > -a \\ &= \frac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|, \qquad (a \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

2. $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(at)\}(s) = \frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|, \qquad (a \in \mathbb{R})$ verifique!

Existência da Transformada de Laplace

Observação: Nem toda a função admite transformada de Laplace.
Por exemplo, $f(t) = e^{t^2}$ não tem transformada de Laplace, uma vez que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{t^2} dt$ diverge para qualquer $s \in \mathbb{R}$. [Verifique!]

Questão: Que propriedades da função f poderão garantir a existência de $\mathcal{L}\{f\}(s)$, com $s > s_0$, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$?

Funções de ordem exponencial

Definição: Sejam $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$. f diz-se uma função de ordem exponencial k (à direita) se existem constantes $M > 0$, $T > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq M\, e^{kt}\,, \qquad \forall t \geq T\,.$$

Exemplos de funções de ordem exponencial:

1. Funções polinomiais;
2. Funções limitadas;
3. Funções do tipo $f(t) = t^n e^{at} cos(bt)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$;
4. Funções do tipo $f(t) = t^n e^{at} sen(bt)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Observação: Se f é uma função de ordem exponencial k, então

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-st} f(t) = 0, \qquad \text{para todo } \; s > k.$$

Condição suficiente de existência de Transformada de Laplace

Definição: Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-se seccionalmente contínua se existe uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$ tal que

1. f é contínua em $]x_{i-1}, x_i[$, para todo o $i = 1, 2, \ldots, n$;
2. os limites laterais nas extremidades de cada subintervalo existem e são finitos.

Definição: Seja I um subintervalo ilimitado de $\mathbb{R}$. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se seccionalmente contínua se f é seccionalmente contínua em todo o subintervalo $[a, b]$ de I.

Teorema: Se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e f é de ordem exponencial k (para algum $k \in \mathbb{R}$), então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > k$.

Propriedades da Transformada de Laplace

1. **Deslocamento na transformada**
   Sejam $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0,b]$, $b>0$, e $\lambda\in\mathbb{R}$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s)=F(s)$ existe para $s>s_f$, então
   $$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}f(t)\}(s)=F(s-\lambda),\ \text{ para }\ s>\lambda+s_f.$$

2. **Transformada da expansão/contração**
   Sejam $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0,b]$, $b>0$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s)=F(s)$ existe para $s>s_f$, então, para todo o $a\in\mathbb{R}^+$,
   $$\mathcal{L}\{f(at)\}(s)=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \text{para } s>a\,s_f.$$

Propriedades da Transformada de Laplace (cont.)

3. **Derivada da transformada**
   Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, com $b > 0$.
   Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n\, F^{(n)}(s), \text{ para } s > s_f,$$
   onde $F^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função F.

4. **Transformada da derivada**
   Suponha-se que $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ ($n \in \mathbb{N}$) são funções ordem exponencial s_0, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$ e que $f^{(n)}$ existe e é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$. Então existe $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$, para $s > s_0$, e
   $$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Propriedades da Transformada de Laplace (cont.)

5. Transformada do deslocamento
   Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$, $H_a(t)$ a função degrau unitário[1] em $t = a$.
   Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $a \in \mathbb{R}^+$,
   $$\mathcal{L}\{H_a(t)f(t-a)\}(s) = e^{-as}\,F(s), \text{ para } s > s_f.$$

[1] Função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ 1 & \text{se } t \geq a \end{cases}$, também designada por função de Heaviside (quando $a = 0$).

Propriedades da Transformada de Laplace (cont.)

6. Transformada da convolução

   O produto de convolução de duas funções f e g, caso o integral exista, define-se como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau,\ t \geq 0\,.$$

   Se f e g são funções de ordem exponencial s_0, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, e seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$, então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s),\ \text{para } s > s_0,$$

   (F e G são as transformadas de Laplace de f e g, respetivamente.)

Exemplo

Cálculo de $\mathcal{L}\{\cos^2 t\}$ usando a transformada da derivada:

Como $\left(\cos^2 t\right)' = -\operatorname{sen}(2t)$, então

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\} &= \mathcal{L}\left\{\left(\cos^2 t\right)'\right\} \\ &= s\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - \cos^2(0) \\ &= s\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - 1\,, \qquad \text{para } s > 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\} = \frac{2}{s^2+4}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos^2 t\} &= \frac{1}{s}\left(1 - \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\}\right) \\ &= \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}\,, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Transformada de Laplace inversa

Observação: Em muitas aplicações práticas, como, por exemplo, na resolução de problemas de valores iniciais (que iremos estudar no capítulo seguinte), é importante determinar a Transformada de Laplace inversa de uma dada função $F(s)$.

Em geral, dada $F(s)$, interessa determinar "a" função f (definida em $\mathbb{R}_0^+$) tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Tal f, caso exista, chama-se transformada de Laplace inversa de F e escreve-se

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \quad \text{ou} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).$$

Questão: Será esta função única, existirá? Nem sempre existe, mas, caso existam funções nessas condições, a unicidade pode garantir-se escolhendo aquela que é contínua (ver teorema da página seguinte).

Transformada de Laplace Inversa (unicidade)

Teorema: Sejam f e g duas funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ tais que

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s), \quad \text{para } s > \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Se f e g são contínuas no ponto $t \in \mathbb{R}^+$, então $f(t) = g(t)$.

Definição: Se $F(s)$ é transformada de Laplace de uma função contínua $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, define-se

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t).$$

Observação: Cada propriedade da Transformada de Laplace dá origem a uma propriedade da Transformada de Laplace inversa (basta ler a tabela das propriedades das Transformadas de Laplace em "sentido inverso").

Algumas propriedades da Transformada de Laplace Inversa

1. **Linearidade da Transformada de Laplace inversa**
   Suponha-se que F e G admitem transformada de Laplace inversa. Então as funções $F+G$ e αF ($\alpha \in \mathbb{R}$) também admitem tansformada inversa e
   (i) $\mathcal{L}^{-1}\{F+G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$;
   (ii) $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

2. **Transformada inversa do deslocamento**
   Se F admite transformada de Laplace inversa, então $F(s-\lambda)$ também admite transformada inversa para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e
   $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\, \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

3. **Transformada inversa do produto**
   Se F e G admitem transformada de Laplace inversa, então FG também admite transformada inversa e
   $$\mathcal{L}^{-1}\{FG\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} * \mathcal{L}^{-1}\{G\}$$

Exemplos:

1.
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^3}\right\} &= \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^3}\right\} \; s>2\\ &= \frac{3}{2}e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}\\ &= \frac{3}{2}e^{2t}t^2, \quad t\geq 0\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}\right\} \; s>0\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\\ &= (1 * sen)(t) \quad t\geq 0\\ &= \int_0^t sen(\tau)\,d\tau\\ &= -\cos(t)+1\end{aligned}$$