2.1. Séries de Potências e Fórmula de Taylor

(Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no Capítulo 4 dos Apontamentos de Cálculo II da Prof. Doutora Virgínia Santos e no Capítulo 1 dos Apontamentos de Cálculo II do Prof. Doutor Alexandre Almeida (disponíveis no Moodle))

Universidade de Aveiro, 2024/2025

Cálculo II – C

Resumo dos Conteúdos

1. Séries de Potências
2. Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange
3. Séries de Taylor
4. Anexos

Série de potências — definição

Definição:

Chama-se série de potências centrada em $c \in \mathbb{R}$ (ou série de potências de $x - c$) a uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots \quad (1)$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$. Os números a_n são designados de coeficientes da série.

Observação: No caso em que $c = 0$, temos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ que se chama série de potências centrada na origem.

Convenção: Em (1) supomos que $a_0(x-c)^0 = a_0$ mesmo que $x = c$ (isto é, vamos supor que $0^0 = 1$).

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Série de potências centrada na origem com coeficientes unitários.

Notar que [porquê?]

- a série é convergente sse $|x| < 1$, *i.e.*, sse $x \in]-1, 1[$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$.

O conjunto $]-1, 1[$ é chamado de domínio de convergência da série.

Domínio de convergência de uma série de potências

Definição:
Chama-se domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ ao conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série é convergente.

Exemplos:

Usando os Critérios de D'Alembert e/ou de Cauchy e, se necessário, outros critérios de convergência de séries numéricas (como o Critério de Leibniz), podemos concluir que:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$; domínio de convergência: $\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x+1)^n$; domínio de convergência: $]-2,0]$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x-2)^n$; domínio de convergência: $\{2\}$

Domínio de convergência de uma série de potências

Notação: Usualmente denota-se o domínio de convergência de uma série de potências por D_c.

Observação: Uma vez que para $x = c$ a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$$

é convergente, podemos concluir que $D_c \neq \emptyset$.

Intervalo de convergência/Raio de convergência

Teorema:
Qualquer que seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$, verifica-se uma, e uma só, das seguintes condições:

(i) a série converge absolutamente em $x = c$ e diverge se $x \neq c$;

(ii) a série converge absolutamente em todo o $x \in \mathbb{R}$;

(iii) existe um único $R > 0$ para o qual a série converge absolutamente se $x \in]c - R, c + R[$ e diverge se $x \in]-\infty, c - R[\cup]c + R, +\infty[$.

Definições:

Ao número R chamamos raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$.

No caso (i) , consideramos $R = 0$; no caso (ii) , consideramos $R = +\infty$;
Caso $R \neq 0$, o intervalo $I_c =]c - R, c + R[$ (ou $\mathbb{R}$, quando $R = +\infty$) designa-se por intervalo de convergência da série.

Exemplos:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$; intervalo de convergência: $\mathbb{R}$; $R = +\infty$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x+1)^n$; intervalo de convergência: $]-2, 0[$; $R = 1$

Observações:

- Uma série de potências pode convergir ou não nos extremos do seu intervalo de convergência. O teorema do slide anterior nada afirma sobre a natureza da série nesses pontos.
- O domínio de convergência de uma série de potências contém o seu intervalo de convergência, mas poderá ainda conter algum dos extremos desse intervalo. O estudo da natureza da série nesses pontos é feito caso a caso.

Raio de Convergência, usando os Coeficientes da Série

Proposição:

Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

1. $R = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, se este limite existir.
2. $R = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, se este limite existir.

Observações:

1. Estas fórmulas de cálculo do raio de convergência resultam da aplicação do Critério do Quociente ou do Critério da Raiz. Assim, estes métodos funcionam quando a aplicação direta desses critérios também pode ser usada.
2. **Cuidado com a aplicação**: a série tem que apresentar uma escrita tal como no enunciado da proposição.

Polinómios de Taylor

Definição:

Seja f uma f.r.v.r. admitindo derivadas finitas até à ordem $n \in \mathbb{N}$ num dado ponto $c \in \mathbb{R}$. Ao polinómio

$$T_c^n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

chamamos polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto c.
Caso $c = 0$, o polinómio $T_0^n f(x)$ passa a ser designado por polinómio de MacLaurin de ordem n da função f.

Observação:

$T_c^n f(x)$ é o único polinómio de grau menor ou igual a n que assume o mesmo valor que f em c e que as suas sucessivas derivadas em c são iguais às sucessivas derivadas de f em c, respetivamente, até à ordem n.

Exemplos

1. O polinómio de Taylor de ordem n em c, para c qualquer em $\mathbb{R}$, de uma função polinomial de grau n é a própria função. Por exemplo, $T_1^3(x^3) = x^3$.
2. $$T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$
3. $$T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$
4. $$T_0^{2n+1}(\operatorname{sen} x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
5. $$T_0^{2n}(\cos x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Fórmula de Taylor

Teorema:

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função real com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então, para todo $x \in I \setminus \{c\}$, existe θ entre c e x tal que

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{T_c^n f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{R_c^n f(x)}.}$$

$\downarrow$

Fórmula de Taylor de ordem n da função f no ponto c, com resto de Lagrange

$R_c^n f(x) \longrightarrow$ resto de Lagrange de ordem n de f no ponto c

$T_c^n f(x) \longrightarrow$ polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto c

Note que, se $x = c$, $f(c) = T_c^n f(c)$, (resto nulo).

Majorantes do resto de Lagrange

O módulo do resto de Lagrange $R_c^n f(x)$ dá-nos o erro absoluto cometido quando tomamos $T_c^n f(x)$ por $f(x)$, uma vez que

$$|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)|\,.$$

Mesmo que desconheçamos esse resto é possível, em geral, majorá-lo.

Formas de efetuar a majoração do resto:

Se a $(n+1)$-ésima derivada de f é contínua num intervalo $[a,b]$ contendo o ponto c, então ela é limitada nesse intervalo. Sendo $M \geq \sup\limits_{y\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(y)\right|$, tem-se que

$$|R_c^n f(x)| \leq M\,\frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,, \qquad \text{para todo o } x\in[a,b].$$

Ver applet, sobre a aproximação de uma função usando polinómios de Taylor.

Série de Taylor — definição

Definição:

Se f admitir derivadas finitas de todas as ordens em c, à série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

chamamos série de Taylor da função f no ponto c.
Se $c = 0$, passamos a chamar-lhe série de MacLaurin de f.

Exemplo:

A série de MacLaurin da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Relacione com o ponto 3. do slide 11.

No exemplo do slide anterior, a série de Taylor da função no ponto $c = 0$ converge para a função no intervalo $]-1, 1[$, i.e., para cada $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \, .$$

Questão:

Seja I um intervalo aberto centrado no ponto c onde a série de Taylor de f é convergente, será que a sua soma para cada x é igual a $f(x)$?
Nem sempre, ver exemplo do slide seguinte!

Funções Analíticas

Definição:

Sejam I um intervalo aberto, $c \in I$, e f uma função definida em I que admite derivadas finitas de todas as ordens em c. Dizemos que f é analítica em c se existir $r > 0$ tal que, para todo o $x \in]c - r, c + r[\subset I$, a série de Taylor de f no ponto c converge para $f(x)$.

Exemplos

1. Função analítica em $c = 0$: $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$

2. Função não analítica em $c = 0$: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

   f possui derivadas finitas de todas as ordens em $\mathbb{R}$, mas como $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, a sua série de MacLaurin converge para a função nula.

Teorema:

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I. Então, para todo o $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \text{ se, e só se, } \lim_{n\to\infty} R_c^n f(x) = 0.$$

Exemplo: Seja $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$R_0^n f(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\, x^{n+1}\,, \qquad x \neq 0, \quad \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} R_0^n f(x) = 0$, [Porquê?], concluímos que a série de MacLaurin da função exponencial converge para a própria função em $\mathbb{R}$, i.e.,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema:

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I. Se existir $M > 0$ tal que

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M \,, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \,, \qquad \forall x \in I.$$

Exercício: Usando o teorema anterior mostre que:

1. $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \,, \quad x \in \mathbb{R}.$
2. $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \,, \quad x \in \mathbb{R}.$

Compare com os pontos 4. e 5. do slide 11.

Séries geométricas e séries de Dirichlet

$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ com $a, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: série geométrica de razão r e primeiro termo a. Esta série converge se e só se $|r| < 1$ e tem soma $S = \frac{a}{1-r}$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$: série de Dirichlet (ou série harmónica) de ordem p. Esta série converge se e só se $p > 1$.

Critério de D'Alembert e Critério de Cauchy

Critério de D'Alembert ou Critério do Quociente: Seja $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e suponha-se que existe $L := \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. Se $L < 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente e se $L > 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Critério de Cauchy ou Critério da Raiz: Suponha-se que existe $L := \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$. Se $L < 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente e se $L > 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Critério da Comparação

Critério da Comparação: Suponha-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0.$$

Então:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

Critério do Limite

Critério do Limite: Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Suponha-se que existe o limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Então verificam-se as condições seguintes:

- se $L \in \mathbb{R}^+$, então as séries têm a mesma natureza.
- se $L = 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- se $L = +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Critério de Leibniz

Critério de Leibniz: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ tal que:

- $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
- a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente.

Então a série alternada é convergente.

Conceitos de Majorantes, Supremo e Máximo

Majorante de um conjunto:

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Diz-se que A é um conjunto majorado se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$, para todo o $x \in A$. Qualquer M que satisfaça essa desigualdade é chamado de majorante de A.

Supremo de um conjunto majorado:

O supremo de um conjunto majorado A é o menor dos majorantes. Isto é, $s \in \mathbb{R}$ diz-se supremo de A se s for um majorante e se para todo o $\epsilon > 0$, existe $b \in A$ tal que $s - \epsilon < b$. Notação: $s = \sup A$.

Axioma do Supremo:

Todo o subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado tem supremo.

Máximo:

Se $s = \sup A \in A$, a s chama-se máximo de A. Notação: $s = \max A$.

Método de Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma propriedade que depende de $n \in \mathbb{N}$. O Método de Indução Matemática é uma técnica de demonstração que tem como objetivo mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

O Método de Indução Matemática consiste em dois passos:

1. **Passo de base (ou base de indução)**: mostrar que $P(1)$ é verdadeira;
2. **Passo de indução (ou hereditariedade)**: assumindo que $P(k)$ é verdadeira, mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, para $k \in \mathbb{N}$ arbitrário.

Método de Indução Matemática (continuação)

Observações:

- A $P(k)$ chamamos a hipótese de indução e a $P(k+1)$ a tese de indução.
- Este método pode generalizar-se para situações onde se pretenda mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{Z}$, com $n \geq n_0$ para algum $n_0 \in \mathbb{Z}$. No passo base, basta tomar n_0 em vez de 1 e no passo de indução considerar k inteiro e $k \geq n_0$.