Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I-C **2024/2025**

Ficha de Exercícios 2 - Parte II

Integral de Riemann. Teorema Fundamental do Cálculo integral. Cálculo de áreas.

1. Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis.

   (a) $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$.

   (b) $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

   (c) $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-2,0[\\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in]0,1]. \end{cases}$

   (d) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

   (e) $f : [1,6] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \ln x + e^x & \text{se } x \in [1,6] \setminus \mathbb{N} \\ x^3 + \sqrt{x} & \text{se } x \in [1,6] \cap \mathbb{N}. \end{cases}$

2. Determine $F'(x)$ sendo F a função real de variável real dada por

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt$

   Resolução: A função f definida por $f(t) = e^{t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e as funções g_1 e g_2 dadas por $g_1(x) = x^2$ e $g_2(x) = 0$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Então, como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo Integral, tem-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

   $$F'(x) = e^{(x^2)^2} \cdot 2x - e^{0^2} \cdot 0 = 2xe^{x^4}.$$

   (b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{t^2}{t^2+1}\, dt$ (c) $F(x) = \displaystyle\int_x^{0} e^{-s^2}\, ds$ (d) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x} (\operatorname{sen} t^2 + e^{-t^2})\, dt$

   (e) $F(x) = x^3 \displaystyle\int_1^{x} e^{-s^2}\, ds$ (f) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{1+e^{3x}} \operatorname{sen} t^2\, dt$

   (g) $F(x) = \displaystyle\int_x^{2} \cos t^4\, dt$ (h) $F(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{x^3} \ln(t^2+1)\, dt$ (i) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} e^{x+t^2}\, dt$

3. Seja F uma função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \cdot \operatorname{arcsen} t\, dt$, para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Determine $F'(x)$.

4. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^2\, dt$. Calcule $f'\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\right)$.

5. Seja F a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \left(\int_0^{t} \mathrm{e}^{-u^2}\, du \right) dt$. Calcule $F''(x)$.

6. Considere a função G definida em $\mathbb{R}$ por $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{3t^4+4t^3}\, dt$.

   (a) Estude a função G quanto à monotonia.

   (b) Determine, se existirem, os pontos de inflexão ao gráfico de G.

7. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_1^{x^2} (1 + e^{t^2})\, dt.$$

   (a) Determine $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

8. Usando a Regra de Cauchy, calcule o seguinte limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^{x^2} t\, \cos(1 - e^{1-t})\ dt}{x^2 - 1}.$$

9. Considere as funções F e G definidas em $\mathbb{R}$, respetivamente, por

$$F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt \qquad \text{e} \qquad G(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\, dt$$

   Usando a Regra de Cauchy calcule o seguinte limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)}.$$

10. Mostre que a função F definida em $[1, +\infty[$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t+1}\, dt$ é estritamente crescente.

11. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{x-1}$ sendo F a função dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t^2+1}\, dt$.

12. Calcule

   (a) $\displaystyle\int_0^2 6x^4\, dx$

   Resolução:

$$\int_0^2 6x^4\, dx = 6\int_0^2 x^4\, dx = 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 6\left(\frac{2^5}{5} - 0\right) = \frac{192}{5}$$

   (b) $\displaystyle\int_3^2 \left(\frac{t^2}{3} - \sqrt{t}\right) dt$ (c) $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{e^x}{3}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x}}\, dx$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$ (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x\ \mathrm{tg}\, x\, dx$ (g) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

   (h) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ (i) $\displaystyle\int_{-\pi}^0 \mathrm{sen}\,(3x)\, dx$ (j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx$

   (k) $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{x}\, dx$ (l) $\displaystyle\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\, dx$ (m) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}(x-1)\, dx$

   (n) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$ (o) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx$ (p) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$

13. Calcule

(a) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x+4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x\,dx$

14. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ onde $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad 1\le x\le 2 \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ onde $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{se} \quad x\in[-1,0[\\ 7 & \text{se} \quad x=0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{se} \quad x\in]0,1] \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ onde $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se} \quad x\neq 1 \\ 5 & \text{se} \quad x=1 \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ onde $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{se} \quad x\in[0,\frac{\pi}{2}[\\ \cos x & \text{se} \quad x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}] \\ \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x\in]\frac{3\pi}{2},2\pi] \end{cases}$

15. Considere a função f definida por $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$.

(a) Determine a primitiva de f que se anula no ponto $x=e^2$.
Resolução: Uma vez que

$$\int f(x)dx=\int \frac{1}{x\ln x}dx=\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx=\ln|\ln x|+C, \qquad C\in\mathbb{R}$$

a primitiva de f que se anula no ponto $x=e^2$ tem de verificar a igualdade

$$\ln|\ln(e^2)|+C=0.$$

Logo

$$C=-\ln 2$$

e a primitiva de f que se anula no ponto $x=e^2$ é a função F definida por $F(x)=\ln|\ln x|-\ln 2$.

(b) Calcule o valor da área da região do plano situada entre as retas de equações $x=e$ e $x=e^3$, limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico de f.

Resolução: Uma vez que para todo o $x\ge e$,

$$\ln x\ge \ln e \Leftrightarrow \ln x\ge 1$$

podemos concluir que para todo o $x\in[e,e^3]$, $x\ln x>0$ e, portanto,

$$\frac{1}{x\ln x}>0.$$

Como f é contínua e positiva em $[e, e^3]$, a área pedida é dada por

$$\int_e^{e^3} f(x)dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_e^{e^3} = \ln|\ln(e^3)| - \ln|\ln e| = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

16. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função g definida por $g(x) = x\ln(x+1)$.

17. Calcule o valor da área da região (limitada) do plano situada entre $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função g definida por $g(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1}$.

18. Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Calcule a área da região limitada do plano situada entre as retas de equação $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo gráfico de f e pelo eixo Ox.

19. Calcule o valor da área da região do plano situada entre os gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \frac{4+\operatorname{sen}^2 x}{1+4x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+4x^2}$$

e pelas retas de equações $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Resolução: Uma vez que as funções f e g são contínuas em $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ e, para todo o $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$,

$$f(x) = \frac{4+\operatorname{sen}^2 x}{1+4x^2} > \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+4x^2} = g(x)$$

podemos afirmar que a área pedida é dada pelo seguinte integral de Riemann:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1+4x^2} dx.$$

Como

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1+4x^2} dx = \frac{4}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1+(2x)^2} dx = 2\Big[\operatorname{arctg}(2x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left(\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0)\right) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

podemos concluir que a área é igual a $\dfrac{\pi}{2}$.

20. Calcule a área da região limitada do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.

21. Calcule a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = e^{2x+1}$ e $g(x) = xe^{2x+1}$, e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = -\frac{1}{2}$.

22. Calcule a área da região (limitada) de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$, e pelas retas $x = 2$ e $y = 0$.

23. Determine a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico da função f definida por $f(x) = x\cos x$ e pelas retas de equação $y = x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

24. Exprima, em termos de integrais definidos, o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = -\pi$ e $x = \pi$ e limitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, respetivamente.

25. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2,\ y \geq x-1,\ y \leq 4\}$.

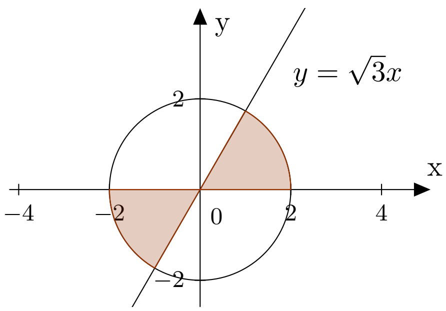
    (a) Represente geometricamente a região A.

    (b) Calcule o valor da área da região A.

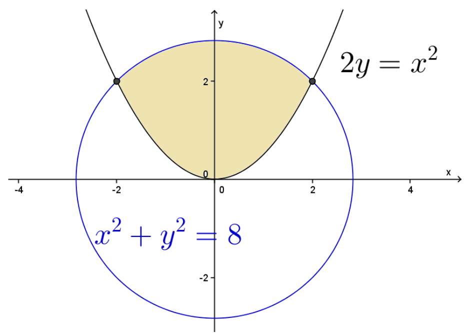
26. Calcule a área da região do plano situada entre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função h definida por
$$h(x) = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

27. Recorrendo ao cálculo integral, determine o valor da área da região sombreada representada nas figuras seguintes:

    (a)



    (b)



Exercícios de revisão

28. Diga, justificando, se a função h definida por
$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}(x^2-4) & \text{se} \quad x < 2 \\ \pi & \text{se} \quad x = 2 \\ \cos(1-e^{x-2}) & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$
é integrável (no sentido de Riemann) no intervalo $[-1, 4]$.

29. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

    (a) Determine $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

    (b) Calcule o valor da área da região delimitada pelo gráfico da função f, pelo eixo das abcissas e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = \sqrt{3}$.

30. Seja $F : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}}\,dt$.

    (a) Justifique que F é diferenciável e mostre que $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-\operatorname{sen}^2 x}}$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

    (b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x \cos x}$.

31. Considere as funções g e h definidas por $g(x) = -x$ e $h(x) = \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x$. Determine, justificando, o valor da área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções g e h e pelas retas de equações $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{4}$.

32. Calcule a área da região do plano

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \ \wedge \ x\operatorname{sen} x \leq y \leq x\}.$$

Soluções

1. (a) f é integrável em $[0, 4]$;
   (b) f não é integrável em $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;
   (c) f é integrável em $[-2, 1]$.
   (d) f não é integrável em $[0, 1]$.
   (e) f é integrável em $[1, 6]$.

2. (a) Resolvido
   (b) $F'(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
   (c) $F'(x) = -e^{-x^2}$
   (d) $F'(x) = \sin x^2 + e^{-x^2}$
   (e) $F'(x) = 3x^2 \int_1^x e^{-s^2}\, ds + x^3 e^{-x^2}$
   (f) $F'(x) = -2x \sin x^4 + 3e^{3x} \sin(1 + e^{3x})^2$
   (g) $F'(x) = -\cos x^4$
   (h) $F'(x) = 3x^2 \ln(x^6 + 1) + \operatorname{sen} x \ln(\cos^2 x + 1)$
   (i) $F'(x) = F(x) + xe^x(3xe^{x^6} - 2e^{x^4})$.

3. $F'(x) = 2(x + 1) \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\, dt + x(x + 1)^2 \cos x$.

4. $\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}$

5. $F''(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

6. (a) G é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.
   (b) $(-1, G(-1))$

7. (a) $F'(x) = (1 + e^{x^4})2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
   (b) F é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$ e F é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.
   $F(0) = \int_1^0 (1 + e^{t^2}) dt$ é mínimo local de F.

8. 1

9. -1

10. —

11. 1

12. (a) Resolvido
    (b) $-\frac{19}{9} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
    (c) $\frac{1}{3e^3} - \frac{1}{3e^4}$
    (d) $\frac{2}{7}(27\sqrt{3} - 1)$
    (e) $\frac{\pi}{4}$
    (f) 1
    (g) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$
    (h) $\frac{\pi}{6}$
    (i) $-\frac{2}{3}$
    (j) $\ln 2$
    (k) $\ln 2$
    (l) 2
    (m) $-\frac{9}{28}$
    (n) $\frac{1}{2}$
    (o) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$
    (p) $\frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg}(\frac{3}{2}) - \frac{\pi}{4}\Big)$

13. (a) $\frac{\ln 3}{4}$
    (b) $\frac{\pi}{8}$
    (c) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
    (d) $\frac{e^2+1}{4}$
    (e) $e - 2$

14. (a) $2 + \ln 2$
    (b) $\frac{\pi}{2} + \ln 2$
    (c) $\frac{1}{2}\ln 5$
    (d) $-\pi - 3$

15. Resolvido

16. $\frac{3\ln 3}{2}$

17. $e^2 + 1 - 2\ln\frac{1+e^2}{2}$

18. $\frac{1}{2}$

19. Resolvido

20. $\frac{1}{6}$

21. $1 - \frac{5}{4e}$

22. $\frac{1}{3} + \ln 2$

23. $\frac{-4\pi+8+\pi^2}{8}$

24. $\int_{-\pi}^{-3\pi/4}(\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx + \int_{-3\pi/4}^{\pi/4}(\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi}(\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx$

25. (a) —

(b) $\frac{37}{6}$

26. $\frac{\pi^2}{72}$

27. (a) $\frac{4\pi}{3}$

    (b) $\frac{4}{3} + 2\pi$

28. h é integrável em $[-1, 4]$ porque h é limitada em $[-1, 4]$ e descontínua apenas num ponto de $[-1, 4]$ (em $x = 2$).

29. (a) $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

    (b) $\frac{3\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}$.

    Exercício 30

30. (a) —— (Sugestão: Usar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral)

    (b) $\frac{1}{2}$ (Sugestão: Usar a Regra de Cauchy e a alínea anterior)

31. $\frac{8+\pi^2}{32}$.

32. $\frac{\pi^2-8}{8}$.