CÁLCULO DIFERENCIAL A VÁRIAS VARIÁVEIS

O essencial

Paula Carvalho e Luís Descalço

SÍLABAS & DESAFIOS

EDIÇÃO, DISTRIBUIÇÃO E VENDAS
SÍLABAS & DESAFIOS - UNIPESSOAL LDA.
NIF: 510212891
www.silabas-e-desafios.pt
info@silabas-e-desafios.pt

Sede:
Rua Dorilia Carmona, nº 4, 4 Dt
8000-316 Faro
Telefone: 289805399
Fax: 289805399
Encomendas: encomendar@silabas-e-desafios.pt

TÍTULO
CÁLCULO DIFERENCIAL A VÁRIAS VARIÁVEIS – o essencial
AUTORES
Paula Carvalho e Luís Descalço

1ª edição

ISBN: 978-989-99310-8-4
Depósito legal:

Pré-edição, edição, composição gráfica e revisão: Sílabas & Desafios Unipessoal, Lda.
Pré-impressão, impressão e acabamentos: Gráfica Comercial, Loulé

Capa: Inês Godinho©2016

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este livro é um texto introdutório dos conceitos básicos de cálculo para funções de várias variáveis escrito de uma forma acessível, clara e sucinta, tornando-o um texto de apoio à lecionação e ao trabalho do estudante.

Destina-se a estudantes universitários do segundo ano de Engenharias, de Física, ou de outros cursos da área das Ciências Naturais onde o cálculo diferencial é uma das componentes importantes da sua formação. É o primeiro de um conjunto de dois livros que cobrem a generalidade dos programas de Cálculo lecionado nas universidades portuguesas. O segundo livro, dos mesmos autores, *Cálculo integral a várias variáveis, O essencial* [1], dedica-se ao cálculo integral e cálculo vetorial de funções de várias variáveis. Tem como pré-requisitos conhecimentos de cálculo diferencial de funções reais de uma variável real, usualmente adquiridos em unidades curriculares precedentes. Além disso, são também profícuos alguns conhecimentos de álgebra linear e geometria analítica.

Entendemos que, neste nível de aprendizagem, é importante que o estudante desenvolva a habilidade de calcular, com papel e lápis, mas também usando métodos computacionais. Defendemos que o uso de métodos computacionais exige que o estudante seja capaz de compreender os problemas interpretando-os num contexto geométrico e, também, que conheça os resultados teóricos e clássicos que lhe permitam fazer uma boa interpretação dos resultados obtidos por esse meio.

Pretendemos que seja um texto simples, básico e essencial. Contém uma coleção extensa de exemplos e exercícios resolvidos e, no final de cada capítulo, apresenta também uma lista de exercícios propostos. Exercícios complementares podem ser ainda encontrados em [2].

Neste contexto, embora tenha sido nossa preocupação manter o rigor matemático, foi feita uma simplificação da exposição, colocando mais enfase no cálculo do que na justificação dos resultados teóricos. Recomendamos pois, sobretudo aos estudantes mais curiosos e ambiciosos, a consulta da bibliografia indicada ([3-9]), constituída por textos clássicos, onde se podem encontrar as demonstrações omitidas, bem como algumas explicações mais profundas que são aqui preteridas.

O livro está dividido em 5 capítulos. No capítulo 1, estendem-se as noções topológicas, já conhecidas para a reta, a espaços de dimensão mais elevada. Aplicam-se os resultados, preferencialmente, às dimensões 2 (o plano) e 3 (o espaço) onde aparecem a maioria das aplicações nas áreas de Ciências e Engenharias. É um capítulo introdutório, onde se define com algum rigor, a linguagem que se usa no resto do livro.

No capítulo 2 define-se função, escalar e vetorial, de várias variáveis. Sendo este o momento do primeiro contacto dos estudantes com funções de mais do que uma variável, é dada atenção a conceitos básicos, como domínio, curvas e superfícies de nível, representação gráfica. A visualização gráfica é uma componente importante para a compreensão destes conceitos pelo que se aconselha, sempre que seja útil, o recurso a um sistema de computação para traçar os gráficos de funções de duas variáveis. O capítulo 3 tem como objetivo o estudo dos limites e continuidade de funções escalares. Além das definições, apresenta resultados que permitem calcular limites de funções quando eles existem e critérios que permitem concluir que determinado limite não existe. Os resultados são, também, estendidos a funções vetoriais.

No capítulo 4 introduzem-se as derivadas parciais e faz-se a sua interpretação geométrica. São estabelecidos critérios para que uma função seja diferenciável, refere-se a relação entre continuidade e diferenciabilidade de uma função e estuda-se o diferencial de uma função. Dá-se relevo ao teorema da derivada da função composta, à derivação de funções dadas na forma implícita e à existência de inversa.

Por fim, o capítulo 5 faz a integração de todos os conceitos estudados nos capítulos anteriores aplicando-os na resolução de problemas de otimização. Estudam-se os extremos, locais e globais, de uma função em conjuntos abertos e em conjuntos fechados, onde se usa o teorema de Weierstrass. Faz-se a apresentação e aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de extremos condicionados, nos casos mais simples.

Agradecimentos

Os autores desejam expressar o seu agradecimento ao CIDMA - Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia (UID/MAT/04106/2013 e SFRH/BSAB/114249/2016).

Desejam, também, agradecer aos vários colegas que consigo têm trabalhado ao longo dos anos nesta unidade curricular, uma vez que alguns dos exercícios propostos foram sendo colecionados durante esse tempo, tornando-se impossível determinar a sua autoria.

Este livro é dedicado aos nossos estudantes.

Aveiro, Julho de 2016

Paula Carvalho

Luís Descalço

CAPÍTULO 1.

NOÇÕES TOPOLÓGICAS EM $\mathbb{R}^n$

Este capítulo tem como objetivo a generalização do conceito de intervalo aberto (em $\mathbb{R}$) a espaços de maior dimensão – os chamados **abertos** – em particular, a $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, e introduzir mais algumas noções topológicas necessárias. No final do capítulo o estudante deverá ser capaz de:

- Definir bola aberta, bola fechada, ponto interior, ponto exterior, ponto fronteiro (isolado e de acumulação);
- Indicar interior, exterior, derivado, fronteira e fecho de um conjunto no plano e no espaço;
- Classificar conjuntos de pontos em: aberto, fechado, limitado e compacto.

1.1. Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

As interpretações geométricas associadas a espaços reais de dimensão 1, 2 e 3 são a reta, o plano e o espaço tridimensional ordinário. Assumimos conhecidas as noções topológicas básicas num espaço de dimensão 1, nomeadamente, as noções de ponto interior, de interior, de ponto fronteiro e de fronteira de um subconjunto de números reais (um intervalo ou reunião de intervalos), entre outras. Uma vez que vamos considerar resultados que envolvem funções cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, em particular $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, vamos definir a terminologia que nos permite usar com rigor algumas noções topológicas em $\mathbb{R}^n$.

A **distância euclidiana** entre dois pontos (a, b) e (c, d) de $\mathbb{R}^2$ define-se por $d((a, b), (c, d)) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$. Em $\mathbb{R}^n$ define-se, de modo análogo, distância euclidiana entre dois pontos por

$$d\big((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)\big) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

Uma **distância em $\mathbb{R}^n$** é qualquer função d que satisfaz as seguintes propriedades:

i. $d(a, b) \geq 0$ e $d(a, a) = 0$

ii. $d(a, b) = d(b, a)$

iii. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (desigualdade triangular),

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Podem definir-se outras distâncias além da euclidiana, e um estudo mais detalhado sobre este assunto pode consultar-se, por exemplo, em [5]. Neste texto apenas vamos usar a distância euclidiana. Na reta real, no plano, ou no espaço, podemos pensar na distância euclidiana entre dois pontos como o comprimento do caminho em linha reta entre eles.

DEFINIÇÃO 1.1

A **bola aberta** no centro em $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) < r\}$, formado pelos pontos que estão à distância de *p* inferior a *r*.

Analogamente, define-se bola fechada de centro em p e raio r como sendo o conjunto $\bar{B}_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) \leq r\}$. O conjunto dos pontos que verificam $d(x, p) = r$ denota-se, habitualmente, por $S_r(p)$. Se $n = 2$ este conjunto é uma circunferência e se $n = 3$ é uma superfície esférica (de centro em p e raio r). Temos, sempre, $\bar{B}_r(p) = B_r(p) \cup S_r(p)$.

DEFINIÇÃO 1.2

Um ponto p diz-se um **ponto interior** de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se existir uma bola aberta de centro em p contida em D. O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto D diz-se o **interior de $\boldsymbol{D}$** e denota-se por $\operatorname{int}(D)$. Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** se todos os seus pontos são pontos interiores, isto é, se $D = \operatorname{int}(D)$. Um conjunto aberto que contém um ponto p diz-se uma **vizinhança do ponto $\boldsymbol{p}$**.

Notamos que uma bola aberta de centro em p é uma vizinhança de p mas nem toda a vizinhança é uma bola. No entanto, existir uma vizinhança de um ponto p contida num conjunto D é equivalente a existir uma bola aberta de centro em p contida em D, e assim usamos também, por vezes neste texto, a noção de vizinhança.

DEFINIÇÃO 1.3

Um ponto p diz-se **ponto de fronteira** de um conjunto $D \in \mathbb{R}^n$ se qualquer bola aberta de centro em p tem pontos que pertencem a D e pontos que não pertencem a D. A **fronteira de $\boldsymbol{D}$** é o conjunto $\operatorname{fr}(D)$ formado por todos os pontos de fronteira de D. Um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ diz-se **fechado** em $\mathbb{R}^n$ se todos os pontos de fronteira de D lhe pertencem, isto é, se $\operatorname{fr}(D) \subseteq D$.

Exemplo 1.1. Consideremos as bolas abertas em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Fixado um ponto p em $\mathbb{R}$, os pontos cuja distância a p é menor que r são os pontos do intervalo $]p-r, p+r[$. Assim, uma bola aberta de raio r centrada em p é, simplesmente, o intervalo de números reais $]p-r, p+r[$. No plano ($\mathbb{R}^2$) os pontos que estão a uma distância de um ponto p inferior a r são os pontos do círculo de centro em p e raio r, sem incluir a circunferência. E, finalmente, no espaço $(\mathbb{R}^3)$ a bola aberta de centro p e raio r é a esfera de centro em p com raio r, sem incluir a superfície esférica.

As bolas abertas são exemplos de conjuntos abertos (em qualquer espaço euclidiano). Um círculo (incluindo a circunferência fronteira) e uma esfera (incluindo a superfície esférica) são exemplos de conjuntos fechados em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente. O conjunto vazio e todo o espaço $\mathbb{R}^n$ são conjuntos que são, simultaneamente, abertos e fechados em $\mathbb{R}^n$. Mas há também conjuntos que não são abertos nem fechados. Por exemplo, o conjunto $]0,1[\times [0,1]$ não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}^2$, pois não coincide com o seu interior, que é o conjunto $]0,1[\times]0,1[$, e também não contém a sua fronteira, que é o conjunto $(\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$.

Segue-se a definição de conjunto limitado (ver Figura 1.1).

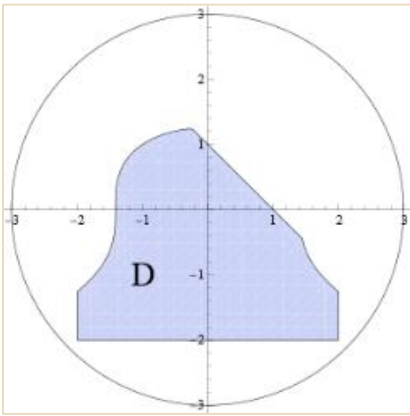


FIGURA 1.1. UM CONJUNTO LIMITADO EM $\mathbb{R}^2$

DEFINIÇÃO 1.4

Um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existir uma bola fechada $\bar{B}_r(0)$, de centro na origem, tal que $D \subseteq \bar{B}_r(0)$.

DEFINIÇÃO 1.5

Um conjunto diz-se **compacto** se for limitado e fechado.

Exercício resolvido 1.1. Diz-se que uma função é limitada se o seu contradomínio for um conjunto limitado. Encontre exemplos de funções de várias variáveis limitadas e não limitadas, com domínio limitado e não limitado.

Resolução. A função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \sin(xy)$ com $D = \overline{B}_1(0)$ é limitada pois o seu contradomínio está contido em $[-1,1]$ (que é uma bola fechada em $\mathbb{R}$). Se tomarmos a mesma expressão para $f(x, y)$ mas agora com $D = \mathbb{R}^2$ temos um exemplo de uma função limitada cujo domínio não é limitado. A função $g: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = x\ \mathrm{tg}(y)$ com $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$ tem domínio limitado, pois está contido, por exemplo, na bola $\overline{B}_4(0)$. O contradomínio da função não é limitado pois, fazendo $x = 1$ na expressão que define g, e tomando valores para y cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, o valor de g tende para infinito. Assim, não pode existir uma bola fechada que contenha o contradomínio de g.

DEFINIÇÃO 1.6

Dizemos que p é um **ponto de acumulação de um conjunto** $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se, para qualquer $r > 0$, a bola $B_r(p)$ tem pontos de $D \backslash \{p\}$, ou seja, $B_r(p) \cap (D \backslash \{p\}) \neq \emptyset$. Um ponto diz-se **ponto isolado de $\boldsymbol{D}$** se pertence a D e não é ponto de acumulação de D.

Recordamos que uma sucessão de números reais é uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Definimos sucessão em $\mathbb{R}^n$ como sendo uma função que a cada $k \in \mathbb{N}$ faz corresponder um vetor de números reais

$$(x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}).$$

Assim, definir uma sucessão em $\mathbb{R}^n$ corresponde a definir n sucessões de números reais. Por exemplo, a sucessão com termo geral $x_k = \left(\frac{1}{k}, e^{\frac{1}{k}}\right)$ é uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^2$,

$$(1, e), \qquad \left(\frac{1}{2}, e^{\frac{1}{2}}\right), \qquad \left(\frac{1}{3}, e^{\frac{1}{3}}\right), \qquad \ldots$$

cujas coordenadas são as sucessões de números reais de termo geral $u_k = \frac{1}{k}$ e $v_k = e^{\frac{1}{k}}$.

DEFINIÇÃO 1.7

Diz-se que uma sucessão de pontos de $\mathbb{R}^n$ converge para um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, e escrevemos $\lim x_k = p$ ou simplesmente $x_k \to p$, se e só se para cada $r > 0$

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}: k > k_0 \Rightarrow x_k \in B_r(p),$$

ou seja, existe uma ordem k_0 depois da qual todos os termos da sucessão estão na bola de raio r centrada em p.

Pode mostrar-se facilmente que uma sucessão de pontos de $\mathbb{R}^n$ converge para um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ se e só se cada coordenada da sucessão converge para a correspondente coordenada do ponto p. Assim, a sucessão de termo geral $x_k = \left(\frac{1}{k}, e^{\frac{1}{k}}\right)$ converge para o ponto $(0,1)$, pois a sucessão de números reais $u_k = \frac{1}{k}$ converge para 0 e a sucessão de números reais $v_k = e^{\frac{1}{k}}$ converge para 1.

Exercício resolvido 1.2. Mostre que um ponto p é ponto de acumulação de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se e só se existe uma sucessão de pontos de $D \backslash \{p\}$ convergente para p.

Resolução. Se p é ponto de acumulação de D então para cada $k \in \mathbb{N}$ temos $B_{\frac{1}{k}}(p) \cap (D \backslash \{p\}) \neq 0$. Logo, podemos escolher para cada k, um ponto $x_k \in D$ diferente de p nesta bola, obtendo assim uma sucessão de pontos de $D \backslash \{p\}$ convergente para p. A implicação recíproca também se verifica facilmente. Seja $r > 0$, qualquer. Se a sucessão de termo geral (x_k) converge para p, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Longrightarrow x_k \in B_r(p) \cap (D \backslash \{p\})$. Portanto, $B_r(p) \cap (D \backslash \{p\}) \neq \emptyset$, $logo\ p$ é o ponto de acumulação de D.

1.2. Exercícios Propostos

1. Em cada uma das seguintes alíneas, D é o conjunto de pontos do plano que satisfaz as condições indicadas. Faça um esboço de D, diga se é um conjunto aberto ou fechado e explicite a sua fronteira:

   a) $4x^2 + y^2 < 4$.

   b) $x \leq y$.

   c) $|x| < 1$ e $|y| \leq 1$.

   d) $xy < 0$.

   e) $x^2 + 9y^2 > 1 \vee (x, y) = (0,0)$.

2. Em cada uma das seguintes alíneas, S é o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz as condições indicadas. Faça um esboço de S, diga se é um conjunto aberto ou fechado e explicite a sua fronteira:

   a) $x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

   b) $x + y + z \geq 1$.

   c) $1 < x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 9$.

   d) $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$ e $z > 0$.

   e) $xy < 0$.

3. Mostre que um disco em $\mathbb{R}^2$ $(\{(x,y): x^2+y^2<r\}, r\geq 0)$ é um conjunto aberto, mas não o é quando considerado como um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

4. Mostre que é verdadeiro ou que é falso:

   a) Se S é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^3$ e $x \in S$, então $S\backslash\{x\}$ é um conjunto fechado.

   b) Se S é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^3$ e $x \in \mathbb{R}^3\backslash S$, então $S \cup \{x\}$ é um conjunto fechado.

   c) A fronteira de um conjunto é sempre um conjunto fechado.

CAPÍTULO 2.

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Podemos pensar numa função real de uma variável real como uma entidade que recebe um número real e produz a partir dele um único número real de acordo com uma regra bem definida. Vamos agora estudar funções reais com várias variáveis reais, que podemos ver como entidades que recebem vários números reais e produzem a partir deles um único número real. De seguida estudaremos as funções vetoriais de várias variáveis, que são funções que, além de receberem vários números reais também produzem, como resultado, vários números reais.

No final do capítulo o estudante deve ser capaz de:

- Determinar domínios de funções de duas e três variáveis;
- Identificar curvas de nível de funções reais de duas variáveis e usar esse conhecimento para tirar conclusões acerca da superfície (ou parte dela) que é o seu gráfico;
- Identificar superfícies de nível de funções reais de três variáveis e usar esse conhecimento para tirar conclusões acerca do comportamento da função;
- Determinar domínios de funções vetoriais de várias variáveis.

2.1. Funções Escalares

Utilizamos naturalmente funções reais de várias variáveis no nosso dia-a-dia. Por exemplo, quando somamos ou multiplicamos dois números estamos a usar as funções $f(x,y) = x + y$ ou $g(x,y) = xy$, respetivamente. Podemos pensar que estas funções produzem um número real a partir de um par de números reais e são, portanto, funções com domínio $\mathbb{R}^2$. Quando queremos calcular a média aritmética de n números, usamos a função $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, a qual tem domínio $\mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO 2.1 – Campo Escalar

Uma função real de n variáveis, também designada usualmente na Física por **campo escalar**, $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é uma correspondência de um conjunto $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ para $\mathbb{R}$, que associa a cada elemento de D, o **domínio da função**, um único elemento do **conjunto de chegada** $\mathbb{R}$. Escreve-se

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

Para definir rigorosamente uma função é preciso explicitar o domínio, o conjunto de chegada e uma regra que permita transformar cada elemento do domínio num único elemento do conjunto de chegada. No entanto é usual, no nosso contexto, definir uma função indicando apenas uma expressão que define a regra de transformação, ficando implícito que o domínio da função é o maior conjunto (no sentido de inclusão) em que a expressão indicada tem significado no conjunto de chegada.

Exemplo 2.1. A função f definida por $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ tem domínio $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, uma vez que a expressão $\frac{1}{x^2+y^2}$ tem significado em $\mathbb{R}$ para qualquer par de números reais (x,y) exceto para o ponto $(0{,}0)$.

O número de variáveis independentes da função fica também determinado (duas no exemplo) ao definir uma função deste modo. Em geral, quando definimos uma função f por $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sem indicar o domínio, assumimos que o domínio da função é o conjunto, que denotamos por D_f, ou simplesmente por D,

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ tem significado em } \mathbb{R}\},$$

e a função tem **n variáveis independentes** $x_1, x_2, \dots, x_n$. A variável z diz-se **dependente** (depende de $x_1, x_2, \dots, x_n$ por meio de f).

Exemplo 2.2. O domínio da função (de três variáveis) definida por $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2}$ é o conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \neq 0\}$. Geometricamente, é todo o espaço $\mathbb{R}^3$ exceto o plano yOz.

Chama-se **contradomínio** da função ao conjunto dos valores reais que a função pode tomar. Denotamos o contradomínio de f por CD_f, e temos:

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \colon (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ pertence ao domínio de } f\}.$$

No exemplo anterior o contradomínio da função é $\mathbb{R}^+$ pois

$$\frac{1}{x^2} > 0,$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, e todos os reais positivos podem ser escritos na forma $\frac{1}{x^2}$ com x real.

Segue-se a definição de gráfico de uma função de n variáveis. É de particular interesse o caso em que a função tem duas variáveis já que, neste caso, o gráfico pode ser visualizado geometricamente no espaço.

DEFINIÇÃO 2.2

Seja $f \colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função real de n variáveis. O gráfico de f é o conjunto

$$G_f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon (x_1, \dots, x_n) \in D, z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Exercício resolvido 2.1. Determine e descreva geometricamente o domínio e o gráfico de cada uma das seguintes funções:

1. $f(x,y) = 2x + 3y - 4$

2. $g(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$

Resolução. O domínio da função f é o conjunto

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \text{ tem significado em } \mathbb{R}\}.$$

Temos $f(x,y) = 2x + 3y - 4$ e, portanto, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$, $2x + 3y - 4$ é um número real, logo $D_f = \mathbb{R}^2$. O gráfico de f é a superfície definida por

$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_f, z = f(x,y)\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + 3y - 4\},$$

o plano representado na Figura 2.1.

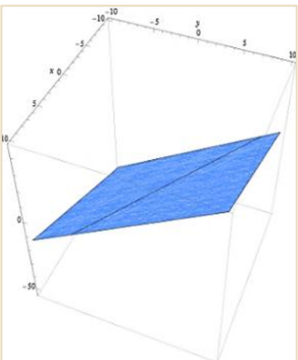


Figura 2.1. Plano de equação $z = 2x + 3y - 4$

Como a expressão $\sqrt{6 - x^2 - y^2}$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o radicando for um número real positivo, ou seja, se $6 - x^2 - y^2 \geq 0$, o domínio de g é o conjunto

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 6 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 6\},$$

um círculo fechado (contendo a sua fronteira) de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{6}$ representado na Figura 2.2.

O gráfico de g é o conjunto de pontos

$$G_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_g, z = g(x, y)\}$$

$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 6, z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}\right\}.$$

Note-se que

$$z = \sqrt{6 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6 \wedge z \geq 0,$$

e, portanto, a equação $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ representa a parte superior da superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{6}$, que se pode ver na Figura 2.2.

FIGURA 2.2. DOMÍNIO E GRÁFICO DA FUNÇÃO $g(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$

Se a função em questão depender de mais do que duas variáveis, o gráfico é um conjunto de pontos num espaço de dimensão maior do que 3, que não podemos visualizar.

Exercício resolvido 2.2. Determine o domínio e o gráfico das seguintes funções e descreva geometricamente os seus domínios.

1. $f(x, y, z) = -2\ln(9 - x^2 - y^2 + z^2)$

2. $g(x, y, z) = \dfrac{5z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Resolução.

1. A função $f(x,y,z) = -2\ln(9 - x^2 - y^2 + z^2)$ está definida para os ternos (x,y,z) para os quais $\ln(9 - x^2 - y^2 + z^2)$ tem significado em $\mathbb{R}$. Assim,

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9 - x^2 - y^2 + z^2 > 0\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 9\},$$

é um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$, limitado exteriormente pela superfície de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 9$ (sem incluir a superfície). Esta superfície é um hiperbolóide de uma folha (ver Figura 2.3). O gráfico da função é o conjunto

$$G_f = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \in D_f, w = -2\ln(9 - x^2 - y^2 + z^2)\right\}$$

o qual, sendo um subconjunto de $\mathbb{R}^4$, não se pode visualizar geometricamente.

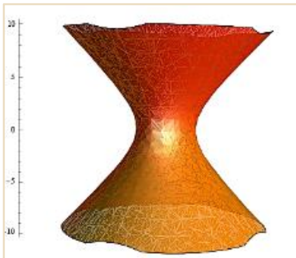


FIGURA 2.3. HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA

2. Para a função g temos

$$D_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}, \quad \text{(note que } z \text{ pode ser qualquer)}$$

$$= \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, D_g é todo o espaço $\mathbb{R}^3$, exceto o eixo dos zz. O gráfico da função é o subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$G_g = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \in D_g, w = \frac{5z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right\}.$$

2.1.1. Curvas e Superfícies de Nível

Dada uma função f de duas variáveis, as curvas de nível de f podem ser representadas no plano, permitindo-nos obter informação sobre o gráfico da função. Um uso comum das curvas de nível são os mapas e cartas geográficas onde se representa a altitude. Do mesmo modo as superfícies de nível de uma função de três variáveis, cujo gráfico não pode ser visualizado geometricamente, fornecem informação relevante sobre o comportamento da função.

DEFINIÇÃO 2.3

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y)$ uma função de duas variáveis. Define-se **curva de nível associada a** k ($k \in \mathbb{R}$) como sendo o conjunto

$$C_k = \{(x,y) \in D: f(x,y) = k\},$$

isto é, o conjunto dos pontos do domínio de f para os quais o valor da função é k.

De um modo análogo,

DEFINIÇÃO 2.4

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ uma função de três variáveis. Define-se **superfície de nível associada a** k ($k \in \mathbb{R}$) como sendo o conjunto

$$S_k = \{(x,y,z) \in D: f(x,y,z) = k\},$$

isto é, o conjunto dos pontos do domínio de f para os quais o valor da função é k.

Podem definir-se de modo semelhante as **hiperfícies de nível**, para funções com mais que três variáveis, as quais não se podem visualizar geometricamente.

Exemplo 2.3. As curvas de nível da função definida por $f(x,y) = 4 - 2x^2 - 3y^2$ são

$$C_k = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = k\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - 2x^2 - 3y^2 = k\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 = 4 - k\},$$

que constituem uma família de curvas definidas pelas equações $2x^2 + 3y^2 = 4 - k$, com k a variar em $\mathbb{R}$.

A sua classificação deve ser discutida em função de k. Assim, se $k = 4$, a equação $2x^2 + 3y^2 = 0$ é satisfeita apenas pelo ponto $(0,0)$, logo $C_0 = \{(0,0)\}$.

Para todo o $k > 4$ tem-se $4 - k < 0$ e a equação $2x^2 + 3y^2 = 4 - k$ é impossível, logo $C_k = \emptyset$.

Se $k < 4$ então $4 - k > 0$ e as equações $2x^2 + 3y^2 = 4 - k$ que podem ser escritas na forma

$$\frac{x^2}{\frac{4-k}{2}} + \frac{y^2}{\frac{4-k}{3}} = 1$$

definem, para cada k, elípses de semieixos $\sqrt{\frac{4-k}{2}}$ e $\sqrt{\frac{4-k}{3}}$, representadas na Figura 2.4.

O gráfico da função f é o parabolóide representado na Figura 2.4. O contradomínio da função é $]-\infty, 4]$ (um subconjunto de números reais).

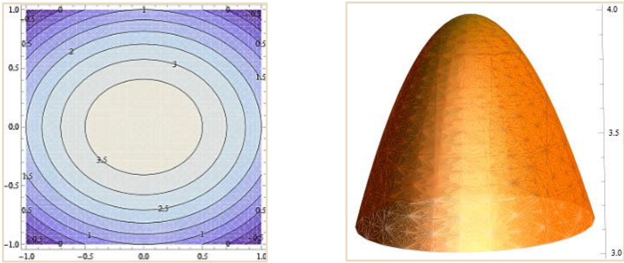


FIGURA 2.4. CURVAS DE NÍVEL E GRÁFICO DE $f(x,y) = 4 - 2x^2 - 3y^2$

Exercício resolvido 2.3. Descreva geometricamente as superfícies de nível da função escalar definida por $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ e esboce as que estão associadas aos níveis 0, — 1 e 1.

Resolução. Para cada $k \in \mathbb{R}$,

$$S_k = \left\{(x,y,z) \in D_f : f(x,y,z) = k\right\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = k\}.$$

Se $k = 0$, S_0 é a superfície definida pela equação $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, uma superfície cónica cujo eixo é o eixo dos yy. Se $k < 0$, $x^2 - y^2 + z^2 = k$ define, para cada k, um hiperbolóide de duas folhas. Se $k > 0$, $x^2 - y^2 + z^2 = k$ define de modo idêntico, para cada k, um hiperbolóide de uma folha. As superfícies para os níveis pedidos encontram-se representadas na Figura 2.5.

FIGURA 2.5. SUPERFÍCIES DE NÍVEL ASSOCIADAS AOS NÍVEIS 0,-1 E 1, RESPETIVAMENTE

2.2. Funções Vetoriais

Em algumas situações é útil considerar funções que além de receberem vários números reais também produzem, como resultado, vários números reais que são apresentados, geralmente, na forma de vetor. São exemplos destas funções as aplicações lineares, conhecidas da álgebra linear, e as curvas parametrizadas (ver [1]). Vamos agora considerar funções deste tipo, que recebem um vetor como objeto a transformar e produzem a partir dele um único vetor, de acordo com uma regra pré-definida.

DEFINIÇÃO 2.5

Uma **função vetorial** de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

$$f: D \subseteq R^n \to \mathbb{R}^m$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto y = (y_1, \dots, y_m) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big)$$

é uma correspondência de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$, que associa a cada elemento de D, o domínio da função, um único elemento do conjunto de chegada $\mathbb{R}^m$. As m funções reais,

$$f_i: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$$

$i = 1, \dots, m$, são as **funções coordenadas** da função vetorial f.

Quando a função vetorial é definida apenas pelas expressões analíticas que definem as suas funções coordenadas, fica implícito que o domínio da função vetorial obtém-se intersectando os domínios das expressões que definem as funções coordenadas.

Exemplo 2.4. A função

$$f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}, x^2+y\right)$$

é uma função vetorial de duas variáveis reais que toma valores em $\mathbb{R}^3$.

As funções coordenadas são as três funções escalares:

$\boldsymbol{f_1} : \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \backslash \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \to \mathbb{R}$ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mapsto \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}$	$f_2 : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$	$f_3 : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto x^2+y.$

Exercício resolvido 2.4. Caracterize analiticamente e represente geometricamente o domínio de cada uma das seguintes funções:

$$a) \;\; f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2-4}, \ln(16-x^2-y^2)\right)$$

$$b) \;\; g(x,y,z) = \left(\frac{xy}{1-x^2-y^2}, \frac{\sqrt{y^2-x}}{z}\right)$$

Resolução. As funções coordenadas de f são

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4} \quad \text{e} \quad f_2(x,y) = \ln(16-x^2-y^2),$$

definidas por expressões cujos domínios são, respetivamente,

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 4\} \;\; \text{e}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 16\}.$$

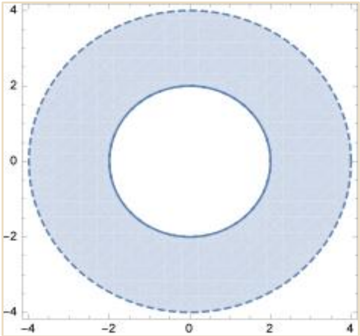


FIGURA 2.6. COROA CIRCULAR: $4 \leq x^2 + y^2 < 16$.

Logo, $D = D_1 \cap D_2$ é a coroa circular representada na Figura 2.6.

A função g é uma função de três variáveis e, portanto, o seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. As funções coordenadas são definidas por

$$g_1(x, y, z) = \frac{xy}{1 - x^2 - y^2}$$

e

$$g_2(x, y, z) = \frac{\sqrt{y^2 - x}}{z}.$$

Temos,

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 1\}.$$

Geometricamente, é todo o espaço $\mathbb{R}^3$ exceto a superfície cilíndrica (circular) de equação $x^2 + y^2 = 1$. Além disso,

$$D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - x \geq 0, z \neq 0\},$$

é a região que se obtém retirando do espaço $\mathbb{R}^3$ a parte interior à superfície cilíndrica (parabólica) de equação $y^2 - x = 0$ e também o plano xOy. Logo

$$D_g = D_1 \cap D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 1, y^2 - x \geq 0, z \neq 0\}.$$

Este conjunto está representado na Figura 2.7.

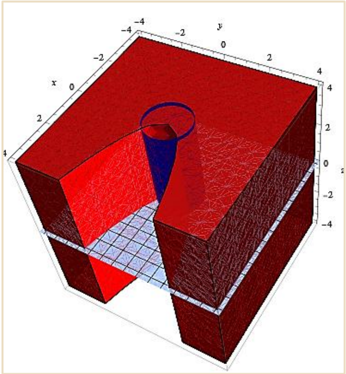


FIGURA 2.7. DOMÍNIO DE g (REGIÃO SOMBREADA A VERMELHO EXCLUINDO AS SUPERFÍCIES A AZUL)

2.3. Exercícios Propostos

1. Determine o domínio das seguintes funções, descreva-o geometricamente e indique se o conjunto em questão é aberto ou fechado em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, conforme o caso.

   a) $g(x,y,z) = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$.

   b) $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, com $a \in \mathbb{R}$.

   c) $p(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$.

   d) $l(x,y,z) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$, com $a \in \mathbb{R}$.

   e) $t(x,y,z) = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   f) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-a}$. Discuta o resultado em função de a.

2. Determine o domínio e o contradomínio da função h definida por $h(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Use um sistema de computação para representar o gráfico da função.

3. Determine as curvas de nível ou as superfícies de nível das seguintes funções e descreva-as geometricamente; quando possível esboce o gráfico.

   a) $f(x, y) = 2x + y$.
   b) $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
   c) $h(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$.
   d) $g(x, y) = e^{xy}$.
   e) $j(x, y) = \sin x, \text{com } 0 \leq x \leq \pi \text{ e } y \geq 0$.
   f) $h(x, y, z) = x + y + 3z$.
   g) $j(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xOy (admita que x e y são dados em quilómetros e a temperatura em graus Celsius). Um indivíduo encontra-se na posição (3, 2) e pretende dar um passeio.
   Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se desejar desfrutar sempre da mesma temperatura.

5. Determine o domínio das seguintes funções vetoriais:

   a) $f(x, y) = \left(xy^2, \sqrt{xy}\right)$.
   b) $f(x, y, z) = \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \ln(x + y + z)\right)$.
   c) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, e^{x^2+y^2}, xz\right)$.

CAPÍTULO 3.

LIMITES E CONTINUIDADE

Neste capítulo dá-se destaque a métodos de prova de não existência de limite de uma função num ponto de acumulação do seu domínio bem como a alguns resultados que permitem provar que determinado limite existe, e calcular o seu valor.

No final do capítulo o estudante deve ser capaz de

- Operar com limites e funções contínuas;
- Calcular limites segundo caminhos diferentes no domínio da função, limites direcionais ou curvas de nível (como casos particulares) para concluir que certo limite não existe;
- Aplicar resultados conhecidos para mostrar a existência de limite;
- Usar a definição para averiguar se uma função é contínua num ponto;
- Calcular o domínio de continuidade de uma função.

3.1. Introdução

De um modo intuitivo e informal dizemos que uma função f é contínua num ponto p do seu domínio se, para x próximo de p a função f toma valores $f(x)$ próximos de $f(p)$. Mais precisamente, diz-se que f é contínua num ponto p, se o valor de $f(x)$ se aproxima de $f(p)$ tanto quanto se queira, tomando x suficientemente próximo de p, independentemente do modo como x se aproxima de p.

A noção de limite de uma função de n variáveis e domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$, num ponto $p \in \mathbb{R}^n$, exige que seja possível que um ponto $x \in D$ se possa aproximar arbitrariamente de p, sendo irrelevante se esse ponto p pertence, ou não, a D. Porém, para esta aproximação ser possível, este ponto deve ser um ponto de acumulação de D. Por outro lado, a noção de continuidade de uma função num ponto exige que o ponto p pertença ao domínio da função, podendo ser um ponto de acumulação ou um ponto isolado.

Note-se que se f é uma função de uma só variável, o seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um ponto genérico $x \in \mathbb{R}$ pode aproximar-se de $p \in \mathbb{R}$ pela esquerda ou pela direita, isto é, por valores inferiores a p ou por valores superiores a p. Recorde-se que, a existência de limite à esquerda e à direita do ponto p com valores iguais permite garantir a existência de limite da função nesse ponto. Mas o domínio de uma função de duas variáveis, é um subconjunto do plano. Há um número infinito de modos (não apenas pela esquerda ou pela direita) de um ponto $x \in \mathbb{R}^2$ se aproximar de p. Assim, o conceito de limite lateral não existe em espaços de dimensão maior do que 1.

Neste capítulo iremos definir limite de uma função usando sucessões[1]. Começaremos por definir limite de uma função de duas variáveis e estenderemos a definição a funções com n variáveis $(n > 2)$. Referiremos brevemente algumas propriedades e operações com limites. Introduziremos, a seguir, a noção de continuidade de uma função num ponto e no seu domínio. Por fim, estendemos estes conceitos a funções vetoriais.

3.2. Limites e Continuidade de Funções Escalares

Comecemos, então, por definir limite para uma função de duas variáveis.

[1] É conhecida, e frequentemente usada em cursos desta natureza, uma definição de limite com base em vizinhanças. Prova-se facilmente que as definições são equivalentes (ver [5]).

DEFINIÇÃO 3.1

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e (a, b) um ponto de acumulação do seu domínio. Dizemos que o **limite da função $\boldsymbol{f}$ quando $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ tende para $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$** é o valor L, e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(a,b)} f(x, y) = L,$$

se para qualquer sucessão (x_k, y_k) de pontos de $D\backslash\{(a, b)\}$ tais que $\lim_k x_k = a$ e $\lim_k y_k = b$, a correspondente sucessão das imagens, a sucessão numérica $\big(f(x_k, y_k)\big)$, converge para L.

Pode provar-se que **o limite de uma função, se existir, é único**.

Segue-se um exemplo de aplicação desta definição para o cálculo do limite de uma função de duas variáveis.

Exemplo 3.1. Consideremos a função f definida por $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$. O domínio de f é o conjunto $D = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Para calcular o limite de f quando (x, y) tende para $(0,0)$, consideremos uma sucessão arbitrária (x_k, y_k) de pontos de D convergente para $(0,0)$, isto é, (x_k) convergente para 0 e (y_k) convergente para 0. A sucessão das imagens $\big(f(x_k, y_k)\big)$ é dada por

$$f(x_k, y_k) = \frac{3x_k^2 y_k}{x_k^2 + y_k^2},$$

e

$$\lim_{k\rightarrow\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\rightarrow\infty} \frac{3x_k^2 y_k}{x_k^2 + y_k^2} = 3 \lim_{k\rightarrow\infty} \left(y_k \frac{x_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \right) = 0,$$

pois $\lim y_k = 0$ e a sucessão de termo geral $\frac{x_k^2}{x_k^2+y_k^2}$ é limitada (entre 0 e 1). Está assim provado que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

O exemplo seguinte ilustra como se pode aplicar a Definição 3.1 para provar que um limite não existe.

Exemplo 3.2. Seja a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & se \;\; y > 0 \\ 0 & se \;\; y \leq 0 \end{cases}.$$

Tomemos duas sucessões de pontos,

$$(x_k, y_k) = \left(0, \frac{1}{k}\right) \quad \text{e} \quad (u_k, v_k) = \left(0, -\frac{1}{k}\right),$$

ambas convergentes para o ponto $(0,0)$. Calculando a sucessão das imagens de cada uma das sucessões, tem-se, no primeiro caso,

$$f(x_k, y_k) = f\left(0, \frac{1}{k}\right) = 1,$$

porque $\frac{1}{k} > 0$, para todo o $k \in \mathbb{N}$. No segundo caso, a sucessão das imagens é

$$f(u_k, v_k) = f\left(0, -\frac{1}{k}\right) = 0,$$

uma vez que $-\frac{1}{k} < 0$, para todo o $k \in \mathbb{N}$. Deste modo, exibimos duas sucessões convergentes para o ponto $(0, 0)$ tais que as correspondentes sucessões das imagens, ambas constantes, convergem para valores diferentes $(1 \text{ e } 0)$, o que mostra que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

A Definição 3.1 generaliza-se para funções escalares de n variáveis $(n \geq 2)$.

DEFINIÇÃO 3.2

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação do seu domínio. Dizemos que o limite da função f, quando x tende para p, é o valor $L \in \mathbb{R}$, e escrevemos $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$, se para qualquer sucessão (x_k) de pontos de $D \backslash \{p\}$ convergente para p, a correspondente sucessão das imagens $\big(f(x_k)\big)$ converge para L.

Exercício resolvido 3.1. Sendo

$$f(x,y,z) = \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2},$$

calcular

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z).$$

Resolução. Seja (x_k, y_k, z_k) uma sucessão arbitrária de pontos de $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ convergente para o ponto $(0,0,0)$. Definindo a sucessão numérica (u_k) por $u_k = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2, k \in \mathbb{N}$, como as sucessões (x_k), (y_k) e (z_k) convergem para zero, temos $u_k \rightarrow 0$. Logo

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k, z_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin u_k}{u_k} = 1,$$

o que mostra que o valor de limite pedido é 1.

Muitas das propriedades conhecidas dos limites de funções de uma variável são igualmente válidas para funções de várias variáveis. Em particular, são válidas as propriedades relativas a somas, produtos, quocientes, bem como composições de funções, sempre que estejam bem definidas estas operações, como se refere no teorema seguinte:

TEOREMA 3.1

Sejam $f, g: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **funções escalares de n variáveis** e $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma **função real** de uma variável com $f(D) \subseteq I$, tais que $\lim_{x \to p} f(x) = a$, $\lim_{x \to p} g(x) = b$, $\lim_{t \to a} \alpha(t) = \alpha(a) = c$, com p um ponto de acumulação de D. Então

(i) $\lim_{x \to p} \big(f(x) + g(x)\big) = a + b$;

(ii) $\lambda \lim_{x \to p} f(x) = \lambda a$, para todo o escalar λ;

(iii) $\lim_{x \to p} f(x) g(x) = ab$;

(iv) $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}, se\ b \neq 0$;

(v) $\lim_{x \to p} (\alpha \ o\ f)(x) = c$.

A demonstração deste teorema resulta da utilização das propriedades correspondentes para sucessões numéricas. Demonstramos como exercício apenas uma das afirmações estabelecidas no Teorema 3.1 e deixamos as restantes como exercício a resolver.

Exercício resolvido 3.2. Demonstrar a afirmação (i) do Teorema 3.1 utilizando a definição de limite de uma função de n variáveis (Definição 3.2).

Resolução. Consideremos uma sucessão arbitrária (x_k) de pontos de $D \backslash \{p\}$ convergente para p. Por hipótese, as sucessões de números reais $\big(f(x_k)\big)$ e $\big(g(x_k)\big)$ convergem para a e b, respetivamente. Como o limite da soma de duas sucessões é igual à soma dos limites respetivos, o limite da sucessão $(f(x_k) + g(x_k))$ é igual a $a + b$. Conclui-se assim que,

$$\lim_{x \to p} \big(f(x) + g(x)\big) = a + b.$$

DEFINIÇÃO 3.3

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D$. A **função f diz-se contínua no ponto p** se para qualquer sucessão (x_k) de pontos de D, convergente para p, a sucessão das imagens $(f(x_k))$ converge para $f(p)$.

O **domínio de continuidade** de f é o conjunto de todos os pontos onde a função é contínua. A função f diz-se **contínua** se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Notemos que, na definição anterior, o ponto p pode ser um ponto de acumulação ou um ponto isolado de D. *Se* p é um ponto de acumulação de D a função f é contínua em p se e só se

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Se p é um ponto isolado de D então f é contínua em p. De facto, se p é um ponto isolado de D, qualquer sucessão (x_k) de pontos de D, convergente para p tem todos os termos iguais a p (é constante) a partir de certa ordem e temos $\lim_k f(x_k) = \lim f(p) = f(p)$.

As propriedades das funções contínuas de várias variáveis são formalmente idênticas às já conhecidas para funções de uma variável.

TEOREMA 3.2

Sejam $f, g: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **funções escalares** e $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma **função real de variável real** com $f(D) \subseteq I$. Sejam $p \in D$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Se f e g são funções contínuas no ponto p, então as funções $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ (sempre que $g(p) \neq 0$) e λf, são **funções contínuas** em p.

(ii) Se f é contínua em p e α é contínua em $f(p)$ então $\boldsymbol{\alpha \circ f}$ **é contínua em $\boldsymbol{p}$**.

Exercício resolvido 3.3. Demonstrar a afirmação (ii) do Teorema 3.2.

Resolução. Consideremos uma sucessão arbitrária (x_k) de elementos de D convergente para p. Sendo f contínua em p, a sucessão $(f(x_k))$ é convergente para f(p). Como α é contínua em $f(p)$, para toda a sucessão (y_k) de elementos de I convergente para $f(p)$ temos $(\alpha(y_k))$ convergente para $\alpha(f(p))$. Portanto, também $\alpha\big(f(x_k)\big)$ converge para $\alpha\big(f(p)\big)$. Assim, $(\alpha\ of)(x_k)$ é convergente para $(\alpha\ of)(p)$, o que mostra que $\alpha\ o\ f$ é contínua em p.

Pode mostrar-se facilmente, utilizando a Definição 3.3, que são contínuas as funções constantes e as projeções[2]. Conjugando este facto com o teorema anterior concluímos que também são contínuas as funções polinomiais, pois podem ser vistas como somas e produtos de funções constantes e de projeções. Além disso, é contínua qualquer função que envolva somas, diferenças, produtos, quocientes e composições de funções polinomiais e outras funções contínuas conhecidas. A demonstração destes factos pode ser consultada em [3].

Exercício resolvido 3.4. Sendo f a função definida por $f(x,y) = e^{x-3y} + x^2y^2$, calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y).$$

Resolução. A função f é a soma das funções contínuas $g(x,y) = x^2y^2,$ que é polinomial, e $h(x,y) = e^{x-3y}$, que resulta da composição de uma função exponencial com uma função polinomial, ambas contínuas. Logo, f é contínua em todo o seu domínio e, em particular, no ponto $(1,0)$, portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = f(1,0) = e.$$

---

[2] Para funções de duas variáveis as projeções são as funções definidas por $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = y$.

3.2.1. Existência de Limite de Funções Escalares

Sabemos que, para funções de uma variável, basta calcular o limite à esquerda e o limite à direita para concluir sobre a existência de limite de uma função num ponto. Para funções com mais que uma variável não podemos aplicar este procedimento, pois há muitos modos diferentes de aproximação ao ponto em questão e não apenas *pela direita ou esquerda*. Existe, no entanto, um resultado análogo, útil na prática, que apresentamos a seguir.

PROPOSIÇÃO 3.1 – Existência de Limite -1

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, A_1, \dots, A_k \subseteq D$ com $D = A_1 \cup \dots \cup A_k$ $(k \in \mathbb{N})$ e p um ponto de acumulação de A_i, para qualquer $i \in \{1 \dots k\}$. Se existirem os limites[3]

$$\lim_{x \to p} f_{|A_i}(x)$$

para $i = 1, \dots, k$, e tiverem todos o mesmo valor L então existe o limite de f em p e temos

$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

Exercício resolvido 3.5. Provar que existe o limite da função

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & se \quad y > 0 \\ x^2 + y^2 & se \quad y \leq 0 \end{cases}$$

no ponto $(0,0)$ e determinar o seu valor.

[3] Denotamos o limite da restrição de uma função f a um subconjunto $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$, num ponto p, por $\lim_{x \to p} f_{|A}(x)$, $\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x)$, ou apenas $\lim_{\substack{x \to p \\ A}} f(x)$.

Resolução. Note-se que no ponto $(0,0)$ não sabemos se a função é ou não contínua e não podemos utilizar o Teorema 3.1. A função está definida por duas expressões diferentes em qualquer vizinhança de $(0,0)$. Podemos, no entanto, usar a Proposição 3.1 tomando os conjuntos $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ nos quais as respetivas restrições de f são contínuas. Temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in A_1}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0$$

e

$$\mathit{lim}_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in A_2}} f(x,y) = \mathit{lim}_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0.$$

Portanto, de acordo com a proposição anterior,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

PROPOSIÇÃO 3.2 – Existência de Limite -2

Sejam f e u funções escalares de duas variáveis (resultado análogo é válido para funções de n variáveis) e g uma função real de variável real, tais que,

$$f(x,y) = g\big(u(x,y)\big).$$

Se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = c \quad \text{e} \quad \lim_{z\to c} g(z) = L$$

então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{z\to c} g(z) = L.$$

Exercício resolvido 3.6. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x}.$$

Resolução. Vamos aplicar a Proposição 3.2 considerando que

$$f(x,y) = \frac{e^{x-y}-1}{y-x}, \quad z = u(x,y) = x - y \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{e^z - 1}{-z}.$$

Temos, então

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} u(x,y) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{z\to 0} g(z) = -1,$$

logo

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{-z} = -1.$$

Temos, ainda, um terceiro resultado útil para provar a existência de limite.

PROPOSIÇÃO 3.3 – Existência de Limite -3

Sejam f e g funções reais definidas em $D \subseteq \mathbb{R}^n (n \geq 2)$. Se

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0$$

e g é uma função limitada numa vizinhança de x, então

$$\lim_{x\to p}\big(f(x)g(x)\big) = 0.$$

Exercício resolvido 3.7. Provar que é contínua em $\mathbb{R}^2$, a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Resolução. Para os pontos $(x,y) \neq (0,0)$ a função é contínua por ser composição de funções contínuas. No ponto $(0,0)$ a função é contínua se admite limite no ponto $(0,0)$ e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Ora,

$$\frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} = x\frac{x^2}{x^2 + y^2} - 3x\frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\frac{x^2}{x^2 + y^2} - x\frac{3y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right) - 3\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\frac{y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= 0 - 0 = 0,$$

por aplicação (duas vezes) da Proposição 3.3, tendo em conta que as expressões $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ e $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ só tomam valores entre 0 e 1.

3.2.2. Não Existência de Limite de Funções Escalares

Em geral, provar que determinado limite não existe é mais simples do que provar que ele existe. Recordemos que, por definição, o limite de uma função f num ponto p existe e é igual a L, se, para qualquer sucessão de pontos de $D_f\backslash\{p\}$ convergente para p, a correspondente sucessão das imagens converge para o mesmo valor L. Assim, para provar que o limite em p não existe, é suficiente encontrar uma sucessão de pontos de $D_f\backslash\{p\}$ tal que a correspondente sucessão das imagens não convirja, ou duas sucessões de pontos de $D_f\backslash\{p\}$ tais que as correspondentes sucessões de imagens convirjam para valores diferentes. Para isso, basta mostrar que existe um conjunto de pontos do domínio da função, usualmente uma curva (a que também chamamos trajeto ou caminho), ao longo do qual o **limite da função nesse ponto $\boldsymbol{p}$** não existe[4], ou dois caminhos ao longo dos quais os limites calculados em p tenham valores diferentes.

PROPOSIÇÃO 3.4 – Não existência de Limite

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A e B subconjuntos de D e p um ponto de acumulação de A e de B. Se pelo menos um dos limites $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in B}} f(x)$ não existe ou, existindo ambos, se tem

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to p \\ x \in B}} f(x)$$

então não existe $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.

[4]Aos limites calculados sobre trajetos ou caminhos, chamamos **limites trajetoriais**, em particular, no caso de os caminhos serem retas, chamamos-lhe **limites direcionais**.

Exercício resolvido 3.8. Provar que não existe

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

com

1. $f\,(x,y) = \dfrac{x}{x^3 - y^3}$ sendo $(a,b) = (0,0)$;

2. $f(x,y) = \dfrac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ sendo $(a,b) = (0,0)$;

3. $f(x,y) = \dfrac{x - 2y}{x - 2 + (y-1)^2}$ sendo $(a,b) = (2,1)$.

Resolução.

1. O domínio desta função é o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$. Considerando o conjunto $A = \{(x,y) \in D : y = 0\}$, do qual $(0,0)$ é ponto de acumulação, temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\,.$$

   Como este último limite não existe em $\mathbb{R}$, o limite inicial também não existe.

2. Neste caso a função tem domínio $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Basta tomar na Proposição 3.4 os conjuntos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} : x = 0\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} : y = 0\}$. O ponto $(0,0)$ é ponto de acumulação de A e de B e, além disso, temos

$$\lim_{\substack{(x.y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 3\,.$$

   Uma vez os valores obtidos são diferentes concluímos que o limite pedido não existe.

3. O domínio da função definida por

$$f(x,y)=\frac{x-2y}{x-2+(y-1)^2}$$

é

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x-2+(y-1)^2\neq 0\}$$

$$=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=2-(y-1)^2\}.$$

Assim, pertencem ao domínio desta função todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ exceto os que se encontram sobre a parábola de equação $x=2-(y-1)^2$. Para mostrar que o limite referido não existe, vamos calcular os **limites direcionais**. Consideremos, para $m\in\mathbb{R}$, a família de conjuntos $A_m=\{(x,y)\in D: y-1=m(x-2)\}$ (retas de declive m que passam por (2,1)). O ponto (2,1) é ponto de acumulação de cada um destes conjuntos A_m, e temos, tendo em conta a definição de A_m,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,1)\\(x,y)\in A_m}}\frac{x-2y}{x-2+(y-1)^2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2\big(1+m(x-2)\big)}{x-2+m^2(x-2)^2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)-2m(x-2)}{(x-2)\big(1+m^2(x-2)\big)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1-2m}{1+m^2(x-2)}$$

$$=1-2m.$$

Este valor depende do parâmetro m, ou seja, para cada reta de declive m obtém-se um valor diferente para o respetivo limite, o que permite concluir que o limite pretendido não existe.

3.3. Limites e Continuidade de Funções Vetoriais

Os conceitos de limite e continuidade generalizam-se a campos vetoriais de acordo com a definição de limite, mais geral, que se segue.

DEFINIÇÃO 3.4

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função vetorial e p um ponto de acumulação do seu domínio. Dizemos que o limite da função f, quando x tende para p, é o vetor $L \in \mathbb{R}^m$, e escrevemos $\lim_{x \to p} f(x) = L$, se para qualquer sucessão (x_k) de pontos de $D \backslash \{p\}$ convergente para p, a sucessão numérica $\|f(x_k) - L\|$ converge para 0.

É válida a álgebra dos limite que já conhecemos e a demonstração de algumas das propriedades enunciadas no seguinte teorema pode ser consultada em [3].

TEOREMA 3.3

Sejam $f, g: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funções e p um ponto de acumulação de D. Se $\lim_{x \to p} f(x) = a$ e $\lim_{x \to p} g(x) = b$, com $a, b \in \mathbb{R}^m$, então

(i) $\lim_{x \to p} \big(f(x) + g(x)\big) = a + b$;

(ii) $\lim_{x \to p} \lambda f(x) = \lambda a$, para todo o escalar λ;

(iii) $\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$

$(\cdot$ *denota o produto interno de dois vetores*$)$;

(iv) $\lim_{x \to p} \|f(x)\| = \|a\|$.

A proposição seguinte permite reduzir o cálculo de limites e o estudo da continuidade de funções vetoriais ao caso das funções escalares – as suas funções coordenadas.

PROPOSIÇÃO 3.5

Sendo p um ponto de acumulação do domínio de uma função vetorial

$$\begin{aligned} f: D \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto y = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big) \end{aligned}$$

temos

$$\lim_{x \to p} f(x) = \left(\lim_{x \to p} f_1(x), \lim_{x \to p} f_2(x), \dots, \lim_{x \to p} f_m(x)\right),$$

se todos estes limites existirem. Se o limite de pelo menos uma das funções coordenadas não existir, então não existe o limite da função vetorial.

Uma função vetorial diz-se **contínua** num ponto de acumulação p do seu domínio se admite limite nesse ponto e

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Tal como as funções escalares, as funções vetoriais são contínuas nos pontos isolados do domínio.

Decorre de imediato da Proposição 3.5, que uma função vetorial é contínua num ponto do seu domínio se e só se todas as suas funções coordenadas são contínuas nesse ponto.

Exemplo 3.3. Consideremos a função

$$f(x,y) = \left(\ln(4 - x^2 - y^2), \frac{3x^2}{x^2 + y^2}, \quad e^{x+y}\right).$$

O domínio da função obtém-se fazendo a interseção dos domínios das três expressões que definem as funções coordenadas. Sendo

$$f_1(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2), \quad f_2(x,y) = \frac{3x^2}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad f_3(x,y) = e^{x+y},$$

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} \quad \text{e}$$

$$D_3 = \mathbb{R}^2.$$

Assim, o domínio da função f,

$$D_f = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\} \backslash \{(0,0)\},$$

é o interior de um círculo aberto de raio 2 retirando-lhe o seu centro, o ponto $(0,0)$. Para calcular o limite de f no ponto $(0,1)$, por exemplo, averiguamos a existência dos três limites das funções coordenadas. Uma vez que estes limites existem, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$$

$$= \left(\lim_{(x,y)\to(0,1)} \ln(4 - x^2 - y^2), \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{3x^2}{x^2 + y^2}, \lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{x+y} \right)$$

$$= (\ln 3, 0, e).$$

Também podemos considerar o problema de calcular o limite de f no ponto $(0,0)$, pois embora este ponto não pertença a D_f é um ponto de acumulação deste conjunto. Este limite, porém, não existe, pois não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)$.

Exemplo 3.4. A função vetorial definida por $f(x, y, z) = (sin(x + y), xz)$ é contínua em todos os pontos do seu domínio ($\mathbb{R}^3$), uma vez que as suas componentes o são.

Exemplos importantes de funções vetoriais contínuas são as curvas parametrizadas que são funções vetoriais com uma só variável.

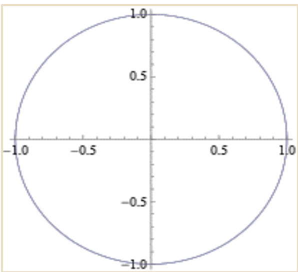
Exemplo 3.5. Uma **curva parametrizada** no plano é uma função vetorial contínua $\mathrm{r}: \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t \rightarrow r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

Na Figura 3.1 estão representadas as curvas parametrizadas, ambas de domínio $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$,

$$r_1(t) = (\cos t\,, \sin(t))$$

$$r_2(t) = (\sin t\,, \sin(2t))\,.$$

A primeira é uma circunferência de raio 1 e a segunda é uma lemniscata.



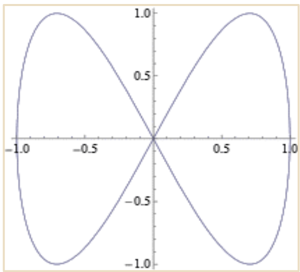


FIGURA 3.1. IMAGENS DAS CURVAS r_1 E r_2 REFERENTES AO EXEMPLO 3.5

3.4. Exercícios Propostos

1. Considere a função

$$f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

a) Indique o domínio D da função f.

b) Descreva geometricamente os conjuntos $A=\{(x,y)\in D: f(x,y)={}^1/_4\}$ e $B=\{(x,y)\in D: f(x,y)={}^1/_3\}$.

c) Determine

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ A}} f(x,y) \quad e \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ B}} f(x,y).$$

d) Diga, justificando, se a função f possui limite no ponto $(0,0)$.

2. Considere a função $f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)} & \text{se} \quad (x,y)\in D\backslash\{(0,0)\}\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Determine e descreva geometricamente o domínio D da função f.

b) Estude a continuidade da função no ponto $(0,0)$.

3. Determine o domínio da continuidade da função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{se} \quad x=0\end{cases}.$$

4. Seja

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{xy}}{x^2-y^2}\text{ . Estude a existência de }\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

5. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{-1+\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-e^{x+y}+x+y}{(x+y)^2}$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{1-\cos(x+y-1)}{(x+y-1)^2}$.

6. Estude a continuidade da função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x^2-y^2-z^2}} & \text{se} \quad x^2+y^2+z^2 > 1, \\ x^2+y^2+z^2 & \text{se} \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1. \end{cases}$$

7. Considere a função $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin y + y^2 \sin x}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que g é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$.

8. Indique o domínio das funções e calcule ou mostre que não existe, o limite nos pontos indicados.

a) $f(x,y) = \left(\sqrt{4-x^2-y^2}, \ln(1-x)\right)$, no ponto $(0,1)$.

b) $f(x,y) = \left(e^x, x^2+y^2, \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$, no ponto $(0,0)$.

c) $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}, e^{x^2+2y^2}\right)$, no ponto $(0,0)$.

CAPÍTULO 4.

CÁLCULO DIFERENCIAL

Neste capítulo vamos introduzir as noções de derivadas parcial e direcional, bem como a de diferenciabilidade de funções escalares e vetoriais. Vamos ver ainda como calcular derivadas parciais de composições de funções e também derivadas de funções definidas implicitamente por equações.

Os campos escalares e vetoriais definidos no plano ou no espaço aparecem frequentemente em aplicações da matemática. Muitas vezes é importante saber de que modo varia o campo ao passar de um ponto para outro ponto próximo deste.

No final deste capítulo o estudante deve ser capaz de:

- Calcular derivadas parciais e derivadas direcionais;
- Usar o Teorema de Schwarz;
- Usar derivadas parciais para resolver problemas;
- Verificar se uma função é diferenciável num ponto, usando a definição;
- Relacionar diferencialidade e continuidade num ponto;
- Aplicar a regra da cadeia para derivar funções compostas;
- Enunciar as condições em que é aplicável o teorema da função implícita;
- Calcular as derivadas parciais de funções definidas implicitamente.

4.1. Derivadas Parciais e Direcionais

Recordamos que a derivada da função $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no ponto $a \in \text{int}(D)$ é o valor do limite $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se este limite existir, que se denota por $f'(a)$. Do ponto de vista geométrico, este valor é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(a, f(a)\big)$. A função derivada de f é a função $f': E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto f'(x)$ onde $E \subseteq D$ é o subconjunto dos pontos de D onde a derivada existe. Dizer que uma função de uma variável tem derivada num ponto a é o mesmo que dizer que ela é diferenciável nesse ponto. Isto não se aplica, porém, a funções de mais do que uma variável. De facto, não existe um número específico que possa ser chamado a **derivada** de f num ponto $p \in \mathbb{R}^n$; há uma infinidade de números (chamados derivadas direcionais de f em p, que vamos definir nesta secção) que podem ser vistos como análogos à derivada de uma função de uma variável mas cuja existência não implica que a função seja diferenciável.

4.1.1. Derivadas Parciais de Primeira Ordem

Seja f uma função de duas variáveis,

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) \text{ e } (a, b) \in \operatorname{int}(D).$$

Definimos a função g, de apenas uma variável x, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} g: A \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = f(x, b) \end{aligned}$$

onde $A = \{x \in \mathbb{R}: (x, b) \in D\}$.

A **derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a, b)** é, se o limite existir,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a),$$

ou seja, é a derivada da função g no ponto a. As notações mais usuais para a derivada parcial de f em ordem a x são $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ ou $f_x(a,b)$. De modo semelhante, definindo $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto g(y) = f(a,y)$ onde $B = \{y \in \mathbb{R}: (a,y) \in D\}$, a **derivada parcial de $\boldsymbol{f}$ em ordem a $\boldsymbol{y}$ no ponto $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$** é, se existir

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=g'(b),$$

a derivada da função g no ponto b, que se denota, analogamente, por $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ ou $f_y(a,b)$.

Geometricamente, considerar os pontos de D da forma (a,y) (ou seja, fixar $x=a$) corresponde a intersetar o gráfico de f com o plano da equação $x=a$ obtendo uma linha que pode ser vista como o gráfico da função de uma variável $g(y)=f(a,y)$. Por exemplo, considere-se o gráfico da função $z=f(x,y)=1-x^2-y^2$, que se mostra na Figura 4.1. Tomando $x=\frac{1}{2}$ (constante) e deixando variar y, a curva que resulta da interseção do gráfico de f com o plano $x=\frac{1}{2}$ é a parábola representada a vermelho na Figura 4.1. A derivada parcial de f em ordem a y no ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ mede a variação de z correspondente à variação de uma unidade de y ao longo da tangente a esta curva. Esta variação de z é $f_y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-1$, que é, portanto, o declive da reta tangente à curva no ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (ver a Figura 4.2).

A interpretação geométrica da derivada parcial de f em ordem a x é análoga.

Na prática, para calcular a derivada parcial de f em ordem a uma das suas variáveis, calcula-se a derivada da função f como se ela dependesse apenas desta variável, usando as regras de derivação sempre que possível, considerando as outras variáveis como constantes.

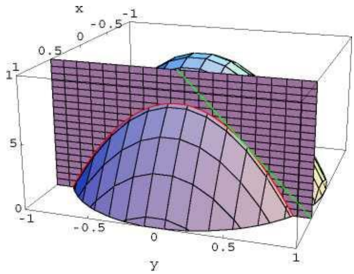


FIGURA 4.1. INTERSEÇÃO COM O PLANO $x = \frac{1}{2}$

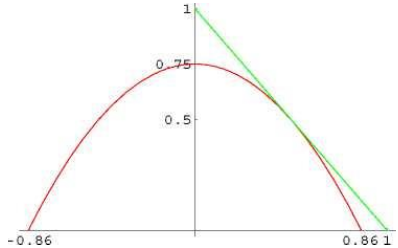


FIGURA 4.2. PROJEÇÃO NO PLANO yOz

Exemplo 4.1. Calculemos as derivadas parciais da função definida por $f(x, y) = x^2 - 3xy$ no ponto $(1,0)$.

Tem-se, por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h, 0) - f(1,0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{h} = 2.$$

Este é o valor que se obtém considerando f como função apenas de x, assumindo y como constante, derivando em relação a x e aplicando ao ponto $(1,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = (2x - 3y)\Big|_{(1,0)} = 2.$$

De modo análogo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = (-3x)\Big|_{(1,0)} = -3.$$

A generalização a funções de n variáveis $(n > 2)$ é imediata:

DEFINIÇÃO 4.1

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar de n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $p = (p_1, \dots, p_n) \in \operatorname{int}(D)$. Para cada variável x_i $(i = 1, \dots, n)$ define-se a derivada parcial de f em ordem a x_i no ponto p por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, \dots, p_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + h, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{h}, \quad (4.1)$$

caso este limita exista.

Exemplo 4.2. As derivadas parciais da função de três variáveis definida por

$$f(x, y, z) = \ln(xz) + e^{xyz}$$

no conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xz > 0\}$, num ponto genérico (x, y, z) são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{z}{xz} + yze^{xyz} = \frac{1}{x} + yze^{xyz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xze^{xyz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{x}{xz} + xye^{xyz} = \frac{1}{z} + xye^{xyz}.$$

Definem-se as funções derivadas parciais, como as funções que a cada ponto associam a derivada parcial nesse ponto. Notamos que estas funções têm o mesmo número de variáveis que a função inicial e estão definidas num subconjunto do seu domínio

Exemplo 4.3. Calcular as derivadas parciais da função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x & se \;\; x < y \\ y & se \;\; x \geq y \end{cases}.$$

Note-se que f é uma função contínua em todo o seu domínio, $\mathbb{R}^2$. Considere-se a seguinte partição do domínio de f em três conjuntos:

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}, \qquad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

i. Se $(x_0, y_0) \in D_1$ então é sempre possível considerar uma vizinhança de (x_0, y_0) na qual se tem $f(x, y) = x$. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

ii. Se $(x_0, y_0) \in D_2$ a situação é semelhante, tendo-se $f(x, y) = y$ numa vizinhança de (x_0, y_0). Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1.$$

iii. Se $(x_0, y_0) \in D_3$ a situação é completamente diferente. De facto, em qualquer vizinhança de (x_0, y_0) existem pontos (x, y) para os quais $f(x, y) = x$, como também existem pontos (x, y) para os quais $f(x, y) = y$. O processo anteriormente usado não se aplica. É necessário recorrer à definição. Como $(x_0, y_0) \in D_3$ temos $x_0 = y_0$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, x_0) - f(x_0, x_0)}{h}.$$

Se $h > 0$, então $f(x_0 + h, x_0) = x_0$ mas, se $h < 0$, tem-se $f(x_0 + h, x_0) = x_0 + h$. Assim,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h, x_0) - x_0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{x_0 - x_0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

e

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h,x_0)-x_0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{x_0+h-x_0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1,$$

o que nos permite concluir que não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$. Analogamente se conclui que também não existe $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Do exposto conclui-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}1 & se\ \ x<y\\ 0 & se\ \ x>y\end{cases}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}0 & se\ \ x<y\\ 1 & se\ \ x>y\end{cases}$$

e o domínio das funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ é $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\neq y\}$.

Permanecem válidas para as derivadas parciais as conhecidas operações com derivadas de funções de uma só variável. O teorema seguinte vale também para as derivadas parciais em ordem a qualquer das variáveis de uma função com duas ou mais variáveis, com as devidas adaptações.

TEOREMA 4.1

Se f e g são funções de duas variáveis x e y, p é um ponto interior do domínio de ambas as funções e existem $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ e $\frac{\partial g}{\partial x}(p)$, então

1. $$\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(p)=\frac{\partial f}{\partial x}(p)+\frac{\partial g}{\partial x}(p);$$

2. $$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(p)=\frac{\partial f}{\partial x}(p)g(p)+f(p)\frac{\partial g}{\partial x}(p);$$

3. $$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x}(p)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(p)g(p)-f(p)\frac{\partial g}{\partial x}(p)}{\left(g(p)\right)^2},se\ g(p)\neq 0.$$

4.1.2. Derivadas Parciais de Ordem Superior

Como as derivadas parciais de uma função f real de várias variáveis são funções das mesmas variáveis, derivando estas funções em ordem a cada uma das variáveis, obtém-se as derivadas de segunda ordem da função f. Por exemplo, para uma função f de duas variáveis, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Estas derivadas parciais também são usualmente denotadas por

$$f_{xx}\,, \qquad f_{xy}\,, \qquad f_{yx}\,, \qquad f_{yy}.$$

A possibilidade de derivar parcialmente mantém-se, pelo que podemos definir as derivadas parciais de terceira ordem da função f, e assim sucessivamente, definindo-se as derivadas parciais de qualquer ordem $k \in \mathbb{N}$.

Diz-se que uma função $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^k se todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a k existem e são contínuas em D. Diz-se ainda que uma função é de classe C^0 se é contínua e é de classe C^∞ se tem derivadas parciais contínuas de qualquer ordem. Pode mostrar-se que qualquer função de classe C^1 num aberto é contínua (ver [5]). Note-se que uma função de classe C^{k+1} num aberto também é de classe $C^k (k \in \mathbb{N}_0)$.

Exemplo 4.4. Calculemos as derivadas parciais de primeira e segunda ordem da função definida por $f(x,y) = x + \sin(xy) - e^y$.

Tem-se,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + y\cos(xy) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) - e^y.$$

As derivadas de segunda ordem obtêm-se derivando as funções derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = -y^2 \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = -x^2 \sin(xy) - e^y.$$

Neste exemplo, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ são iguais em qualquer ponto (x,y), o que nem sempre acontece, como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 4.5. Considere-se a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vamos mostrar as que derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ de f não são iguais no ponto $(0,0)$. De facto, para todo o $x, y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = 0 = f(x,0)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{y(h^2-y^2)}{h^2+y^2} = -y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,0+h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x(x^2-h^2)}{x^2+h^2} = x.$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, y) = -1 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, 0) = 1,$$

em particular,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

não têm o mesmo valor.

Pode afirmar-se, no entanto, que se f é uma função escalar de duas variáveis definida num subconjunto aberto D do plano que admite derivadas parciais de primeira e de segunda ordens, contínuas em D, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p),$$

para todo o $p \in D$.

Esta propriedade estende-se a funções escalares com mais do que duas variáveis. O teorema seguinte, conhecido como **Teorema de Schwarz**, estabelece condições suficientes para que as derivadas parciais mistas de segunda ordem de uma função sejam iguais.

TEOREMA 4.2

Seja $z = f(x_1, \dots, x_n)$ uma função de classe C^2 num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Então para todo o $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ e para todos os índices $i, j \in \{1, \dots, n\}$ temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Uma demonstração deste teorema pode ser consultada, por exemplo, em [3].

Exemplo 4.6. Calcular todas as derivadas parciais de segunda ordem da função f definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + 3yz - \sin(xz).$$

Começando por calcular as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - z\cos(xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3y - x\cos(xz).$$

As derivadas parciais de segunda ordem são, neste caso, 9. Note-se, porém, que a função f é contínua em todos os pontos e o mesmo acontece com todas as suas derivadas, uma vez que todas elas resultam da composição de funções contínuas, o que permite usar o teorema de Schwarz e reduzir o esforço de cálculo. Temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 2 + z^2\sin(xz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial z^2}(x, y, z) = x^2\sin(xz),$$

E, utilizando o teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -\cos(xz) + xz\sin(xz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 3.$$

4.1.3. Derivadas Direcionais

Seja $z = f(x,y)$ uma função escalar de duas variáveis e considere-se um qualquer vetor, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, com $\|u\| = 1$ e um ponto $P = (a,b)$ interior do domínio D de f. Seja $Q = (a,b) + t(u_1,u_2) = (a + tu_1, b + tu_2)$ um ponto ainda pertencente ao domínio de D, sobre a reta que passa por P e tem direção de u. Como o vetor u tem norma 1, a distância entre P e Q é igual a t e a razão

$$\frac{f(Q) - f(P)}{t} = \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a,b)}{t}$$

define a variação média de f quando passa do ponto P para o ponto Q. Se existir, o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a,b)}{t}$$

diz-se a **derivada direcional de $\boldsymbol{f}$ em $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ segundo o vetor $\boldsymbol{u}$**.

Esta derivada é, geometricamente, o declive de uma reta tangente ao gráfico de f. Mais precisamente, é o declive da tangente, no ponto

$(a, b, f(a, b))$, à curva que se obtém intersetando o gráfico de f com o plano que contém o ponto $(a, b, 0)$ e cuja direção é gerada pelos vetores $(u_1, u_2, 0)$ e $(0,0,1)$, como ilustrado pela Figura 4.3.

A definição estende-se para qualquer vetor não nulo e a funções com qualquer número de variáveis.

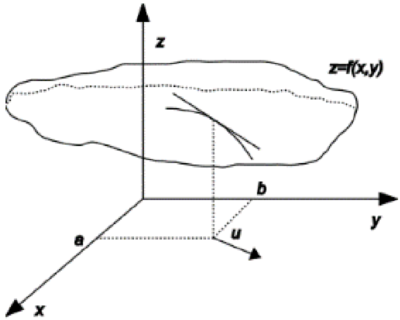


FIGURA 4.3. ILUSTRAÇÃO DA NOÇÃO DE DERIVADA SEGUNDO O VETOR u.

DEFINIÇÃO 4.2

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função, p um ponto interior de D e u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$. A **derivada de f no ponto p segundo o vetor u**, denota-se por $D_u f(p)$, e é definida por

$$D_u f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t},$$

se este limite existir. Chamamos derivada **direcional de f no ponto p segundo no vetor u** à derivada de f segundo o vetor unitário $\frac{u}{\|u\|}$.

Exemplo 4.7. A derivada da função f definida por $f(x, y) = xy$ no ponto $p = (2,3)$ segundo o vetor $u = (1, -1)$ é

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(2 + t, 3 - t) - f(2,3)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(2 + t)(3 - t) - 6}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t - t^2}{t} = 1,$$

e a derivada direcional de f segundo u é, por definição, a derivada de f segundo o vetor unitário $\frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ou seja,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}t, 3-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)-f(2,3)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)-6}{t}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Note-se que se f é uma função de duas variáveis e (a,b) é um ponto interior do domínio de f, considerando o vetor $u=(1,0)$ temos, por definição,

$$\begin{aligned} D_u f(a,b) &= \lim_{t\to 0}\frac{f\big((a,b)+t(1,0)\big)-f(a,b)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \end{aligned}$$

ou seja, a derivada parcial de f em relação a x é uma derivada direcional. Em geral, as derivadas parciais de uma função de várias variáveis são as derivadas direcionais segundo os vetores da base canónica.

4.2. Diferencialidade

Recorde-se que, se $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função de uma variável que admite derivada finita num ponto $p\in\operatorname{int}(D)$, então f é diferenciável e pode escrever-se, para $p+h\in D$,

$$f(p+h)-f(p)=f'(p)h+\epsilon(h), \tag{4.2}$$

onde a função ϵ satisfaz

$$\lim_{h\to 0}\frac{\epsilon(h)}{h}=0. \tag{4.3}$$

Além disso, pode mostrar-se que, sendo f diferenciável, é também contínua nesse ponto.

Para funções de duas ou mais variáveis a relação entre diferenciabilidade e continuidade de uma função não é tão simples. Uma função pode admitir todas as derivadas parciais num ponto, ou mesmo, como ilustra o exemplo seguinte, admitir derivada segundo qualquer vetor num ponto (o que, como veremos, é uma condição necessária para que a função seja diferenciável) mas não ser contínua nesse ponto.

Exemplo 4.8. Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Considere-se $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ e calcule-se $D_u f(0,0)$. De acordo com a Definição 4.2, obtém-se

$$D_u f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(tu_1)\cdot(tu_2)^2}{t[(tu_1)^2+(tu_2)^4]}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{u_1\cdot u_2^2}{u_1^2+t^2u_2^4}.$$

Se $u_1\neq 0$ então $D_u f(0,0)=\frac{u_2^2}{u_1}$. Se $u_1=0$ e $u_2\neq 0$ então $D_u f(0,0)=0$, pelo que a derivada segundo qualquer vetor não nulo existe sempre. Mas verifica-se facilmente que esta função não é contínua em $(0,0)$ considerando, por exemplo, os caminhos $x=y^2$ e $x=0$ no estudo do limite em $(0,0)$.

A caracterização de diferenciabilidade patente em (4.2) e (4.3) estende-se, com naturalidade, a funções escalares de várias variáveis.

Informalmente, pode dizer-se que uma função é diferenciável num ponto se o acréscimo da função pode ser aproximado, na vizinhança desse ponto, por uma função linear. Assim, uma função f de uma variável é diferenciável num ponto x_0 se, numa vizinhança do ponto, podemos aproximar a função usando a reta tangente ao gráfico em $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Analogamente, vamos ver que uma função de duas variáveis é diferenciável num ponto (x_0, y_0) se existe um plano que a aproxima numa vizinhança deste ponto.

DEFINIÇÃO 4.3

Uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é **diferenciável** num ponto $p = (x_0, y_0) \in int\ (D)$ se existem constantes m_1 e m_2 e uma função ϵ definida numa bola centrada na origem, tais que, para todo o vetor não nulo $v = (h, k)$, com $p + v = (x_0 + h, y_0 + k) \in D$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + m_1 h + m_2 k + \epsilon(h, k) \qquad (4.4)$$

onde $\epsilon(h, k)$ satisfaz

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\epsilon(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \qquad (4.5)$$

É fácil mostrar que os números m_1 e m_2 que aparecem na definição anterior são as derivadas parciais de f no ponto (x_0, y_0). De facto, sendo f diferenciável verifica-se, por definição, a relação (4.5). Consequentemente, tomando, em particular, $k = 0$ e $h > 0$ obtém-se, utilizando também (4.4),

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{\epsilon(h, k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - m_1 h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \right) - m_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - m_1,$$

e, como o mesmo vale se considerarmos $h < 0$, conclui-se que

$m_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Por um processo semelhante se conclui que $m_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Assim, se f é diferenciável num ponto (x_0, y_0), então existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e, pode escrever-se,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \epsilon(h, k) \quad (4.6)$$

ou ainda (usando $\cdot$ para denotar o produto interno de dois vetores),

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot (h, k) + \epsilon(h, k). \quad (4.7)$$

Isolando $\epsilon(h, k)$ nesta equação e utilizando (4.5) obtemos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 4.1

Uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto $p = (x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D)$ **se e só se as derivadas parciais de f em p existem e**

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

DEFINIÇÃO 4.4

O vetor $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ é **chamado o vetor gradiente de f em (x_0, y_0)**.

A expressão (4.5) traduz que $\epsilon(h, k)$ tende mais rapidamente para zero do que $\|(h, k)\|$. Como, usando (4.6), temos

$$\epsilon(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\right),$$

isto significa que o acréscimo $df(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ pode ser aproximado pela função linear

$$\mathrm{df}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k = \nabla f(x_0,y_0\,) \cdot (h,k),$$

no sentido preciso de que o erro a tomar nesta aproximação tende para zero mais rapidamente que $\|(h,k)\|$.

Exemplo 4.9. A função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ cujo gráfico é a folha positiva de uma superfície cónica, não é diferenciável no ponto $(0,0)$, o vértice da superfície. De facto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+0}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}.$$

Como $\frac{|t|}{t}$ tem o valor 1 se t é positivo e −1 se t é negativo, este limite não existe, logo não existe a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e, portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$.

Contudo, a existência de ambas as derivadas parciais num ponto não é suficiente para garantir que f é diferenciável nesse ponto, conforme se pode ver no exemplo seguinte.

Exemplo 4.10. A função f definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, admite derivadas parciais no ponto $(0,0)$ mas não é aí diferenciável. De facto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0,$$

e, de modo análogo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Para mostrar que é f não é diferenciável em $(0,0)$ temos que provar que o limite,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

não é nulo, de acordo com a Proposição 4.1. Para isso vamos considerar o caminho definido por $h = k$, com $h > 0$, do qual $(0,0)$ é ponto de acumulação. Temos então

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h=k,h>0}} \frac{h^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h\sqrt{2}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}\sqrt{2}} = +\infty.$$

Portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$, embora existam ambas as derivadas parciais neste ponto.

A Definição 4.3 estende-se naturalmente para funções de mais do que duas variáveis:

DEFINIÇÃO 4.5

Uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in \text{int}(D)$ se existem constantes $m_1, \dots, m_n$ e uma função ϵ definida numa bola centrada na origem de $\mathbb{R}^n$, tais que, para todo o vetor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, satisfazendo $p + v \in D$,

$$f(p + v) - f(p) = m_1 v_1 + \dots + m_n v_n + \epsilon(v) \qquad (4.8)$$

com $\lim_{v\to 0} \frac{\epsilon(v)}{\|v\|} = 0$.

Mostra-se, de modo análogo, que se existirem as constantes $m_1, \dots, m_n$, estas são as derivadas parciais de f e por isso a equação (4.8) pode escrever-se

$$f(p+v) - f(p) = f_{x_1}(p)v_1 + \cdots + f_{x_n}(p)v_n + \epsilon(v), \tag{4.9}$$

e temos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 4.2

Uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in \operatorname{int}(D)$ **se e só se as derivadas parciais de f em p existem e**

$$\lim_{(v_1,\dots,v_n)\to(0,\dots,0)} \frac{f(p+v) - f(p) - f_{x_1}(p)v_1 - \cdots - f_{x_n}(p)v_n}{\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}} = 0.$$

4.2.1. Diferenciabilidade e Continuidade

Tal como no caso de uma função de uma só variável, pode provar-se que se uma função é diferenciável num ponto então ela é contínua nesse ponto.

TEOREMA 4.3

Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $p \in \operatorname{int}(D)$, então:

i. f é também contínua nesse ponto;
ii. Para todo o vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^n$, existe a derivada de f segundo o vetor u em p, e temos

$$D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot u.$$

Demonstração:

i. Se f é diferenciável em p então, tomando o limite quando v tende para zero em (4.8), obtemos

$$\lim_{v\to 0}(f(p+v)-f(p)) = \lim_{v\to 0}(m_1 v_1 + \cdots + m_n v_n) + \lim_{v\to} \epsilon(v) = 0+0=0.$$

Assim,

$$\lim_{v\to 0} f(p+v) = f(p),$$

ou seja,

$$\lim_{x\to \mathrm{p}} f(x) = f(p),$$

o que mostra que f é contínua em p.

ii. Seja $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo. Considerando $v = tu = t(u_1, \dots, u_n)$ na equação (4.9), com t um número real não nulo e dividindo por t vem,

$$\frac{f(p+tu)-f(p)}{t} = f_{x_1}(p)u_1 + \cdots + f_{x_n}(p)u_n + \frac{\epsilon(tu)}{t}.$$

Tomando, nesta equação, o limite quando t tende para zero, obtemos

$$D_u f(p) = f_{x_1}(p)u_1 + \cdots + f_{x_n}(p)u_n = \nabla f(p) \cdot u,$$

como queríamos demonstrar.

Este teorema constitui, na prática, uma ferramenta importante para decidir se uma função é diferenciável em determinados pontos. Em particular, como consequência pode-se apontar o seguinte:

- Se uma função não é contínua num ponto p do seu domínio então também não é diferenciável nesse ponto.
- Se para algum vetor u, não nulo, não existe $D_u f(p)$ então podemos

concluir que a função f não é diferenciável no ponto p. Em particular, se não existe alguma das derivadas parciais de f em p então f não é diferenciável em p.

Exemplo 4.11. A função escalar definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua no ponto $(0,0)$, o que se verifica facilmente calculando limites direcionais nesse ponto. Assim, o Teorema 4.3 permite concluir que também não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

O teorema seguinte, cuja demonstração pode ser consultada, por exemplo, em [5], fornece um critério para testar a diferenciabilidade de uma função que é, por vezes, muito mais simples de usar do que a definição.

TEOREMA 4.4 – Condição Suficiente de Diferencialidade

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto aberto D. Se f tem derivadas parciais contínuas em todos os pontos de D (isto é, se f é de classe C^1em D) então f é diferenciável em D.

De acordo com o teorema anterior, são exemplos de funções diferenciáveis, entre outras, as funções constantes, as funções polinomiais, as funções trigonométricas, as funções logaritmo e exponencial e todas as composições destas funções, quando definidas num conjunto aberto.

Exemplo 4.12. A função definida por $g(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ é diferenciável em todo o seu domínio, que é $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. De facto, as derivadas parciais de primeira ordem de g,

$$g_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad e \quad g_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

são funções contínuas (porque são quocientes de funções polinomiais) em $\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$ e podemos aplicar o teorema anterior.

4.2.2. Plano Tangente

Consideremos o gráfico de uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto dos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $z = f(x,y)$ e $(x,y) \in D$. Dizer que f é diferenciável em (x_0,y_0) é dizer que

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(h,k) + \epsilon(h,k) \qquad (4.10)$$

com $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\epsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$ (ver 4.7). Para tal (h,k) próximo de $(0,0)$, temos a aproximação (com erro $\epsilon(h,k)$)

$$f(x_0+h, y_0+k) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(h,k). \qquad (4.11)$$

Fazendo $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$, temos

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0),$$

ou seja, para pontos (x,y) próximos de (x_0,y_0), os valores de $z = f(x,y)$ podem ser aproximados pela expressão do segundo membro.

Sendo $z_0 = f(x_0,y_0)$, o conjunto dos pontos que verificam a equação

$$z - z_0 = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0),$$

é o plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0,y_0,z_0), isto é,

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (4.12)$$

é uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0, z_0).

Exemplo 4.13. A função $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$ definida em $\mathbb{R}^2$ é diferenciável no ponto $(0,0)$ porque é de classe C^1(em todo o domínio).

Temos $f(0,0) = 0$ e, utilizando as regras da derivação, obtemos $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$.

Assim, aplicando (4.11), obtemos a aproximação linear de f em $(0,0)$ para $f(0.2,0.1)$:

$$f(0.2,0.1) = f\big((0,0) + (0.2, 0.1)\big) \approx f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (0.2, 0.1)$$

$$= 0 + (1, -1) \cdot (0.2, 0.1) = 0.1.$$

Uma aproximação para $f(0.2, 0.1)$ é, portanto, 0.1, que aproxima o valor exato

$$f(0.2,0.1) = \frac{0.2 - 0.1}{0.2^2 + 0.1^2 + 1} = 0.0952 \dots$$

Usando (4.12) obtemos uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0,0)$:

$$z - 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y - 0),$$

ou seja,

$$z = x - y.$$

Exercício resolvido 4.1. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e determine uma equação do plano tangente ao gráfico da função no ponto $(0,0,0)$.

Resolução. Em qualquer ponto $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ a função é diferenciável (consequência do Teorema 4.4). É diferenciável também no ponto $(0,0)$ uma vez que existem as derivadas parciais neste ponto e, além disso,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

De facto, verifica-se facilmente (usando a definição) que

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=0.$$

Além disso, o referido limite é nulo, pois temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}h\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\frac{h^2}{h^2+k^2}$$

e, nesta última expressão o primeiro fator tende para zero e os outros dois definem funções limitadas (verifique que são ambos em módulo menores que 1). Assim, a função é diferenciável no ponto $(0,0)$. Utilizando a fórmula (4.12) obtemos a equação pedida: $z = 0$.

Na Figura 4.4 estão representados o gráfico de f e o plano tangente ao gráfico no ponto $(0,0,f(0,0))$.

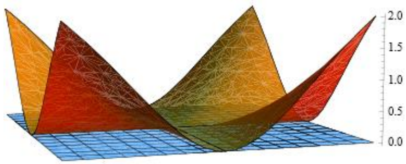


FIGURA 4.4. GRÁFICO E O PLANO TANGENTE NO PONTO $(0,0,0)$

4.2.3. O Diferencial Total

No caso de uma função de uma variável, $y = f(x)$, a derivada de y em ordem a x é, como se sabe,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Com $\Delta x = h$ (variação em x) e $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ (variação em y), temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

e, portanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

com $\varepsilon \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Podemos, então, escrever

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x.$$

Isto significa que Δy pode ser aproximado por $f'(x)\Delta x$ no sentido preciso que acabámos de ver (no limite temos a igualdade), o que leva à definição do diferencial $\mathrm{d}y$ como sendo

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$$

O diferencial de uma função de várias variáveis define-se de modo semelhante. Para simplificar a exposição, consideremos uma função f de duas variáveis, de classe C^1, definida por $z = f(x,y)$ num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, e sejam Δx e Δy os incrementos de x e y, respetivamente. Então

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Podemos escrever,

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Por outro lado, usando a definição de derivada parcial em relação a x, temos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y)$$

e, por isso

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y) + \varepsilon_1 \qquad (4.13)$$

com $\varepsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Além disso, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \varepsilon_2 \qquad (4.14)$$

com $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta y \to 0$, uma vez que $y + \Delta y \to y$. Assim, usando as equações (4.13) e (4.14), obtemos

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y + \Delta y) + \varepsilon_1\right)\Delta x$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\right)\Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \varepsilon \Delta \mathrm{x}$$

com $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$. De modo análogo se obtém

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \varepsilon' \Delta y,$$

e temos, finalmente

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \varepsilon\, \Delta x + \varepsilon' \Delta y$$

com $\varepsilon \to 0$ e $\varepsilon' \to 0$ quando $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$. Vemos, então, que Δz pode ser aproximado por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y,$$

e no limite temos a igualdade, o que nos leva a definir

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

a que chamamos o **diferencial (total) de z**.

Em geral, se f é uma função escalar de n variáveis, $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, o diferencial de f é:

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

O diferencial expressa uma aproximação para a variação da função provocada por pequenas variações $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ nas variáveis independentes $x_1, \dots, x_n$ – a variação total é a soma dos efeitos devidos às várias variações independentes.

Exemplo 4.14. Estimar a quantidade de material usado para construir uma caixa cilíndrica fechada de altura 3 e diâmetro 4 (em metros) sabendo que a espessura da folha metálica é de 0.004.

O volume de uma caixa com estas dimensões é dado por $V(h,r) = \pi r^2 h$, onde h é a altura da caixa e r o raio da base circular.

Tendo em conta a espessura da folha, o diferencial do volume

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial h}\mathrm{d}h + \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r,$$

dá-nos uma estimativa para a quantidade de material que se procura. Assim, com $(h,r) = (3,2)$, $dh = 0.008$ (temos que incluir a espessura da tampa circular da base e também a do topo) e $dr = 0.004$, como $\frac{\partial V}{\partial h}(3,2) = [\pi r^2]_{(3,2)} = 4\pi$ e $\frac{\partial V}{\partial r}(3,2) = [2\pi h r]_{(3,2)} = 12\pi$, uma estimativa para a quantidade de metal usado é

$$\mathrm{d}V = 4\pi \times 0.008 + 12\pi \times 0.004 = 0.25132\ldots \text{ (em metros cúbicos).}$$

Note-se que a quantidade exata de material utilizado pode calcular-se subtraindo do volume da caixa (incluindo a espessura do material utilizado para a construir), o volume que a caixa pode conter, sendo por isso igual a $V(3 + 0.008, 2 + 0.004) - V(3,2) = 0.25188\ldots$.

Observemos que o diferencial de uma função escalar pode ser visto como uma transformação linear. Se f é uma função escalar de n variáveis, $z = f(x_1, \dots, x_n)$, o diferencial de f no ponto p é a transformação linear

$$\mathrm{d}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

tal que

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Delta x_n \quad (4.15)$$

cuja matriz é a matriz (linha) das derivadas parciais de f.

4.2.4. Diferenciabilidade de Funções Vetoriais

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função vetorial e $p \in \operatorname{int}(D)$ um ponto. Diz-se que f é diferenciável no ponto p se existir uma matriz L de dimensão $m \times n$ tal que, para todo o vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$, com $p + v$ situado numa bola centrada em p contida em D, se tenha:

$$f(p+v) = f(p) + L \cdot v + \epsilon(v) \quad (4.16)$$

com

$$\lim_{v \to 0} \frac{\epsilon(v)}{\|v\|} = 0.$$

A aplicação linear definida por $L \cdot v$ chama-se diferencial de f em p, representa-se por $\mathrm{d}f_p$ (é uma função de v) e, é a única aplicação linear cuja matriz (relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respetivamente) é a chamada **matriz Jacobiana de f no ponto p** (ou derivada de f no ponto p). Esta matriz representa-se, habitualmente, por $J_f(p)$, e as suas entradas são as derivadas parciais das funções coordenadas de f, f_i em ordem às variáveis $x_j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$:

$$J_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}.$$

É fácil verificar que uma função vetorial é diferenciável em p se e só se todas as suas funções coordenadas forem diferenciáveis em p. Note-se que, se $m = 1$, a matriz Jacobiana é a matriz (linha) das derivadas parciais da função (ver (4.15)).

Exemplo 4.15. Seja $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma função definida por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ num qualquer intervalo I de números reais. A função α é diferenciável em I, uma vez que as suas componentes definidas por $\alpha_1(t) = \cos t$, $\alpha_2(t) = \sin t$, e $\alpha_3(t) = t$ são todas diferenciáveis em $I \subseteq \mathbb{R}$. A matriz derivada de α é $J_\alpha(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$, que pode ser identificada com o vetor $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$. O diferencial de α num ponto $t \in I$ é a aplicação linear $d\alpha_t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $h \mapsto \alpha'(t)h = (-h\sin t, h\cos t, h)$.

Exemplo 4.16. Vamos mostrar que a função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y^2, 1 + y - 2z)$$

é diferenciável no ponto $(0,1,2)$. Escrevendo

$$f_1(x, y, z) = x + y^2 \quad e \quad f_2(x, y, z) = 1 + y - 2z,$$

a matriz Jacobiana de f em $(0,1,2)$ é

$$J_f(0,1,2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{(0,1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{(0,1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

O diferencial de f em $(0,1,2)$ é a aplicação linear $df_{(0,1,2)}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$df_{(0,1,2)}(h) = J_f(0,1,2) \cdot h = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 + 2h_2 \\ h_2 - 2h_3 \end{bmatrix}.$$

4.2.5. Derivação de Funções Compostas

A derivação de funções compostas faz-se de acordo com uma generalização da regra de derivação da função composta de funções de uma só variável. A regra da cadeia, como também é conhecida, além de ser imprescindível para a demonstração de alguns resultados teóricos, é um instrumento útil para o cálculo de derivadas. É importante recordar que as derivadas são aplicações lineares, que podem ser representadas por matrizes. Assim, o caso unidimensional é um caso particular onde a derivada, sendo uma aplicação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pode ser representada por uma matriz 1×1 e pode ser interpretada como um número real.

Sejam f e g duas funções vetoriais definidas por

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g: V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$$

com U e V abertos em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respetivamente. Seja $p \in U$ tal que $f(p) \in V$. Se f é diferenciável em p e g diferenciável em $f(p)$, então a função h definida de U para $\mathbb{R}^s$ por $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, é diferenciável em p e tem-se

$$J_h(p) = J_{g \circ f}(p) = J_g(f(p)) \times J_f(p),$$

ou seja,

$$
\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \cdots \\ \frac{\partial h_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_s}{\partial x_n} \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \cdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{f(p)} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_p .
$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [3].

Exercício resolvido 4.2. Seja $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x, y, z) = \sin(x^2 y\, z^3)$, com

$$
x = t + 1, \qquad y = t^2, \qquad z = e^t.
$$

Calcule a derivada da função composta $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = g\big(x(t), y(t), z(t)\big)$.

Resolução. Definindo a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, tal que, $f(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, temos $h = g \circ f$, e

$$
J_h(t) = J_g\big(f(t)\big)\, J_f(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}_{f(t)} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}_t
$$

$$
= \begin{bmatrix} 2xyz^3 \cos(x^2yz^3) & x^2z^3 \cos(x^2yz^3) & 3x^2yz^2 \cos(x^2yz^3) \end{bmatrix}_{(t+1, t^2, e^t)} \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{bmatrix}
$$

$$
= 2t^2(t+1)\, e^{3t} \cos(t^2(t+1)^2 e^{3t}) + 2t\, (t+1)^2 e^{3t} \cos(t^2(t+1)^2 e^{3t})
$$

$$
+ 3t^2(t+1)^2 e^{3t} \cos(t^2(t+1)^2 e^{3t})
$$

$$
= e^{3t} t(t+1)(3t^2 + 7t + 2) \cos(t^2(t+1)^2 e^{3t}).
$$

A partir deste exercício fica clara a razão pela qual a regra da derivação da função composta é também conhecida como **regra da cadeia**. Usando a notação matricial, a derivada da função composta também pode escrever-se,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

(omitindo os pontos onde as derivadas devem ser calculadas) ficando explícita a cadeia que dá o nome à regra que se usa na prática. Note-se que, nesta situação, é usual escrever

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

enfatizando a dependência entre as variáveis envolvidas na composição: h depende de x, y e z que, por sua vez, dependem de t.

Exercício resolvido 4.3. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \sin(-x + y^2),$$

com $x = \frac{u}{w}$ e $y = e^u v$. Considere a função composta $h: V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida num conjunto aberto V por $h(u, v, w) = f(x(u, v, w),\ y(u, v, w))$. Calcule, onde existirem, as derivadas parciais de h em ordem às variáveis u, v e w.

Resolução. Considerando a função $g: V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(u, v, w) = \big(x(u, v, w), y(y, v, w)\big) = \left(\frac{u}{w}, e^u v\right),$$

temos $h = f \circ g$. Assim,

$$J_h(u, v, w) = J_f(g(u, v, w)) \cdot J_g(u, v, w),$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{bmatrix}_{(u,v,w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{(g(u,v,w))} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix}_{(u,v,w)} .$$

Efetuando o produto das matrizes, obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial h}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w},$$

(com as derivadas de h, x e y calculadas no ponto (u, v, w) e as derivadas de f calculadas no ponto $\big(x(u, v, w), y(u, v, w)\big)$ e, calculando as derivadas, temos

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v,w) = -\cos(-x + y^2)\frac{1}{w} + 2y\ \cos(-x + y^2)ve^u,$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v,w) = 2y\ \cos(-x + y^2)e^u,$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(u,v,w) = -\cos(-x + y^2)\left(-\frac{u}{w^2}\right),$$

onde $x = \frac{u}{w}$ e $y = e^u v$. Substituindo x e y pelas suas expressões em u e v, obtém-se, finalmente,

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v,w) = cos\left(-\frac{u}{w} + e^{2u}v^2\right)\left(-\frac{1}{w} + 2v^2e^{2u}\right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v,w) = 2ve^{2u}\, cos\left(-\frac{u}{w} + e^{2u}v^2\right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(u,v,w) = \frac{u}{w^2}\, cos\left(-\frac{u}{w} + e^{2u}v^2\right).$$

4.3. Derivação de Funções Dadas na Forma Implícita

Uma equação envolvendo várias variáveis, pode definir uma variável como função nas restantes sem que, no entanto, tenhamos uma definição explícita da função. Nestes casos dizemos que a função está definida implicitamente pela equação.

Comecemos por considerar o seguinte problema: Dada uma equação do tipo $F(x,y)=0$, envolvendo duas variáveis, em que condições pode a equação ser resolvida em ordem a uma delas?

Por exemplo, a equação $x-y+1=0$ é uma equação do tipo $F(x,y)=0$, onde $F(x,y)=x-y+1$. Esta equação pode ser resolvida, quer em ordem a y quer em ordem a x. Temos, no primeiro caso $y=x+1$ e, no segundo caso $x=y-1$. Isto significa que a equação define globalmente uma **função explícita,** f definida em $\mathbb{R}$, por $y=f(x)=x+1$ (ou $g(y)=y-1$, no segundo caso), isto é, para todo o $x\in\mathbb{R}$, as equações

$$F(x,y)=0 \qquad \text{e} \qquad y=f(x)$$

são equivalentes e, portanto, a curva de nível C_0 de F é o gráfico da função f.

Algumas equações podem ser resolvidas em ordem a uma das variáveis sem que a correspondente função explícita fique definida globalmente, ou seja, o gráfico da função está contido na curva de nível de F mas não coincide com a mesma. É o que se passa, por exemplo, com a equação

$$x^4-y^2=0,$$

da forma $F(x,y)=0$, com $F(x,y)=x^4-y^2$ (ver Figura 4.5). Tome-se um ponto (a,b) tal que $F(a,b)=0$. Facilmente se vê que, se for $a\neq 0$, existe sempre uma bola centrada no ponto (a, b) na qual a equação $F(x, y) = 0$ pode ser univocamente resolvida em ordem a y. Fica assim determinada uma função $y = f(x)$ tal que, para (x, y) na referida bola, as condições $F(x, y) = 0$ e $y = f(x)$ são equivalentes. A função f é definida por $f(x) = x^2$ se $b \geq 0$, e $f(x) = -x^2$ se $b < 0$.

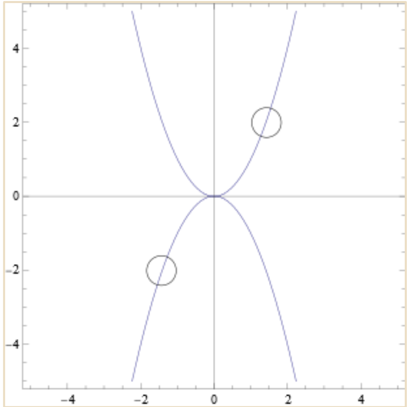


FIGURA 4.5. CURVA DE EQUAÇÃO $x^4 - y^2 = 0$

Pode acontecer que a equação se consiga resolver em ordem a uma das variáveis mas não em ordem à outra. Por exemplo, a equação

$$x^2 \sin x - ye^x = 0$$

não pode ser resolvida explicitamente em ordem a x, mas podemos facilmente resolver a equação em ordem a y, obtendo $y = x^2 e^{-x} \sin x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Há ainda casos em que este problema não tem solução. Por exemplo, a equação $x^2 + y^2 + 1 = 0$ não tem soluções reais.

Finalmente, pode ainda acontecer que não seja possível resolver explicitamente a equação dada em ordem a uma das suas variáveis, mas que consigamos mostrar que a equação determina **implicitamente** essa variável em função das restantes. Diz-se que se trata de uma função **definida implicitamente**.

Dizer que a equação $F(x, y) = 0$ define implicitamente y como função de x num dado subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ significa que, para cada abcissa x_0 de um ponto de D, se fixarmos $x = x_0$ na equação, obtemos uma equação em y, $F(x_0, y) = 0$, que tem uma única solução y_0 com $(x_0, y_0) \in D$.

Neste contexto, podem apresentar-se condições suficientes para poder concluir que uma dada equação define localmente, isto é, na vizinhança de certo ponto, uma tal função, juntamente com um processo para calcular as suas derivadas nesse ponto.

Para simplicidade de exposição, consideramos em primeiro lugar uma função de duas variáveis. Sejam $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto aberto D, (x_0, y_0) um ponto de $\operatorname{int}(D)$ e k um número real fixo. Diz-se que a **equação $\boldsymbol{F(x,y) = k}$ define implicitamente $\boldsymbol{y}$ como função de $\boldsymbol{x}$ em $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$** se existe uma função $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I contendo x_0 tal que, $f(x_0) = y_0$ e, $F(x,y) = k$ é equivalente a $y = f(x)$, para $x \in I$.

Isto significa que o conjunto dos pontos (x, y) cuja imagem por F é k (a curva de nível de F associada ao nível k) contém o gráfico da função f.

TEOREMA 4.5

Seja $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^l, com $l \geq 1$. Considere-se um ponto $p = (x_0, y_0)$ do interior de D que pertence à curva de nível F associada ao nível k

$$C_k = \{(x,y) \in D: F(x,y) = k\},$$

ou seja, $F(x_0, y_0) = k$. Se $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então existe uma função $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^l, definida num intervalo I de números reais, tal que $F\big(x, f(x)\big) = k$ para todo o $x \in I$, $f(x_0) = y_0$ e, além disso,

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Exemplo 4.17. A equação

$$xy + 3e^{xy} = 3 \tag{4.17}$$

define implicitamente y como função de x no ponto $(3{,}0)$. Com efeito, defina-se $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x,y) = xy + 3e^{xy}$. A função F é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$ e o ponto $(3{,}0)$ pertence à curva de nível $C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 3\}$, ou seja, $F(3{,}0) = 3$. Além disso,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(3{,}0) = (x + 3xe^{xy})\Big|_{(3{,}0)} = 12 \neq 0.$$

O Teorema 4.5 garante a existência de uma função $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, definida num intervalo I de números reais contendo o ponto 3, tal que $f(3) = 0$ (isto é, o ponto $(3{,}0)$ pertence ao gráfico da função f) e,

$$f'(3) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(3{,}0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(3{,}0)} = \left(-\frac{y + 3ye^{xy}}{x + 3xe^{xy}}\right)\Big|_{(3{,}0)} = 0.$$

Este resultado pode ser obtido por outro processo: atendendo à existência da função $y = f(x)$, garantida pelo teorema, que satisfaz $F\big(x, f(x)\big) = 3$. Derivando ambos os membros da equação (4.17) em ordem a x, escrita agora na forma $xf(x) + 3e^{xf(x)} = 3$, obtemos

$$f(x) + xf'(x) + 3e^{xf(x)}\big(f(x) + xf'(x)\big) = 0.$$

Fazendo $x = 3$ na equação, como $f(3) = 0$, obtemos

$$3f'(3) + 9f'(3) = 0$$

donde

$$f'(3) = 0.$$

Note-se que a condição $\frac{\partial F}{\partial y} = (x_0, y_0) \neq 0$ no Teorema 4.5 é apenas suficiente; se $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ nada se pode concluir quanto à existência de função implícita. Veja-se, por exemplo, a equação $x - y^3 = 0$. Definindo $F(x,y) = x - y^3$, embora se tenha $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$, a equação define implicitamente a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exemplo 4.18. A equação

$$e^{2x^2y} + \ln(y + x\cos y) = 2$$

define implicitamente y como função de x no ponto $(e, 0)$.

Com efeito, defina-se $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,y) = e^{2x^2y} + \ln(y + x\cos y).$$

Temos $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: y + x\cos y > 0\}$ e F é de classe C^∞ em D. Verifica-se $F(e,0) = 2$ e o ponto $(e,0)$ pertence ao interior de D pois, por exemplo, a bola $B_{\frac{\pi}{4}}(e,0)$ está contida em D (verifique). Além disso a derivada de F em ordem a y naquele ponto não é nula, pois

$$F_y(e,0) = \left(2x^2e^{2x^2y} + \frac{1 - x\sin y}{y + x\cos y}\right)\Bigg|_{(e,0)} = 2e^2 + e^{-1} \neq 0.$$

O Teorema 4.5 garante a existência de uma função $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ definida num intervalo I de números reais contendo o ponto e, tal que $f(e) = 0$ e,

$$f'(e) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(e,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(e,0)} = -\frac{1}{2e^3 + 1}.$$

Segue-se a generalização do Teorema 4.5 para funções reais de n variáveis:

TEOREMA 4.6

Seja $F: D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^l, com $l \geq 1$. Seja $p = (x_1^*, \dots, x_n^*, y^*) \in D$ um ponto do interior de D que pertence à hiperfície de nível de F associada ao nível k

$$F_k = \{(x_1, \dots, x_n, y) \in D : F(x_1, \dots, x_n, y) = k\}.$$

Se

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^*, \dots, x_n^*, y^*) \neq 0,$$

então existe uma função $f: B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^l, definida numa bola aberta B em $\mathbb{R}^n$, tal que

- $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in B$ e $f(x_1^*, \dots, x_n^*) = y^*$,
- $F\big(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\big) = k$, para todo o $(x_1, \dots, x_n) \in B$, e
- as derivadas parciais de f no ponto $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*, y^*)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^*, \dots, x_n^*, y^*)}, \quad i = 1, \dots n. \tag{4.18}$$

Nesta situação diz-se que a equação $F(x_1, \dots, x_n, y) = k$ define implicitamente y como função de $(x_1, \dots, x_n)$ numa vizinhança do ponto $(x_1^*, \dots, x_n^*, y^*)$.

Exemplo 4.19. A equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 2 \tag{4.19}$$

define implicitamente z como função de x e de y no ponto $(0,1,1)$. De facto, definindo $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz$ pode ver-se imediatamente que $F(0,1,1) = 2$, (ou seja, o ponto (0,1,1) pertence à superfície de nível 2 de F), F é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$ e, além disso,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,1,1)} = (3z^2 + 6xy)\Bigg|_{(0,1,1)} = 3 \neq 0,$$

o que garante a existência de uma função f de duas variáveis, também de classe C^∞, definida numa bola aberta B, no plano, contendo o ponto $(0,1)$, tal que $f(0,1) = 1$, $F\big(x, y, f(x, y)\big) = 2$, para todo o $(x, y) \in B$ e, além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1)} = -\frac{(3x^2 + 6yz)|_{(0,1,1)}}{3} = -2$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1)} = -\frac{(3y^2 + 6xz)|_{(0,1,1)}}{3} = -1.$$

Observação: A fórmula (4.18) do Teorema 4.6 que dá a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ pode ser obtida facilmente a partir da equação

$$F\big(x_1, x_2, \dots, x_n, y(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = k, \tag{4.20}$$

atendendo a que F é diferenciável em D. De facto, para cada $i = 1, \dots, $ n, derivando parcialmente em ordem a x_i ambos os membros da equação (4.20), pela regra da cadeia, resulta

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)\,\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

donde se obtém a referida fórmula. O mesmo processo pode ser utilizado para obter derivadas parciais de y de ordem superior. Assim, por exemplo, para obter a derivadas parciais de segunda ordem, basta derivar esta última equação usando a regra da cadeia e tendo em conta que $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Exemplo 4.20. Retomando o Exemplo 4.19, derivando implicitamente ambos os membros da equação (4.19) em ordem a x, e atendendo a que $z = z(x, y)$ para cada ponto (x, y) (o que está omisso para simplicidade de escrita nas expressões seguintes) na vizinhança de $(0,1)$, temos

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

donde,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy}$$

e no ponto $(0,1)$, notando que $z(0, 1) = 1$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -2.$$

De modo idêntico, derivando ambos os membros da equação (4.19) em ordem a y, e atendendo a que $z = z(x, y)$, obtém-se

$$3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

donde no ponto (0,1),

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = -\left.\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy}\right|_{(0,1,1)} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Podemos usar o teorema da função implícita para obter uma equação do plano tangente em qualquer ponto de uma superfície definida por uma equação. Para uma superfície em $\mathbb{R}^3$ que seja o gráfico de uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, já vimos que

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

é uma equação do plano tangente à superfície no ponto (x_0, y_0, z_0), pelo que, um vetor normal à superfície nesse ponto $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ é $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$, onde as derivadas parciais são calculadas no ponto (x_0, y_0).

Algumas superfícies conhecidas são usualmente definidas implicitamente por equações (por exemplo, a superfície esférica unitária é definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Vamos ver como podemos usar o teorema de função implícita para obter a equação do plano tangente a uma superfície definida deste modo.

Consideremos em $\mathbb{R}^3$ uma qualquer superfície definida implicitamente por uma equação $F(x, y, z) = 0$ (no exemplo da superfície esférica referida temos $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$). Para encontrar uma equação do plano tangente à superfície no ponto (x_0, y_0, z_0), vamos assumir que estamos nas condições do teorema da função implícita, e que a equação define z como função de x e y. Temos então $z = f(x, y)$, e também, $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. O teorema dá-nos as fórmulas para as derivadas parciais de f no ponto (x_0, y_0). Assim, o vetor normal à superfície no ponto (x_0, y_0, z_0) é dado por

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right) = \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0,)}, \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0,)}, 1\right).$$

Multiplicando este vetor pelo escalar não nulo $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$, concluímos que também

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

é um vetor normal à superfície no ponto (x_0, y_0, z_0). Portanto,

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \,.\, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \qquad (4.21)$$

é uma equação do plano tangente à superfície definida por $F(x,y,z) = 0$ no ponto (x_0, y_0, z_0). Nos casos em que $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ podemos chegar de modo análogo à equação (4.21), para o plano tangente à superfície definida pela equação. Basta-nos, portanto, que o gradiente de F não seja nulo, e podemos enunciar o seguinte teorema:

TEOREMA 4.7

Sejam $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e p um ponto regular de F isto é, um ponto tal que

$$\nabla F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)\right) \neq (0, \dots, 0).$$

Então o vetor gradiente $\nabla F(p)$ é normal em p à superfície de nível de F que passa por p.

Exemplo 4.21. O plano tangente à superfície esférica referida antes, definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tem equação (sendo $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$)

$$\nabla F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2},\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

ou seja,

$$\left(1,1,\sqrt{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

e, simplificando,

$$x + y + \sqrt{2}z = 2.$$

Terminamos esta secção com a extensão do teorema da função implícita a funções vetoriais.

TEOREMA 4.8

Sejam $F: D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial de classe C^l,com $l \geq 1$ definida por

$$F(x,y) = \big(F_1(x,y), \dots, F_m(x,y)\big)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Seja $p^* = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$ um ponto, com $x^* \in \mathbb{R}^n$, $y^* \in \mathbb{R}^m$ e $F_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}: F(x,y) = k\}$, com $k \in \mathbb{R}^m$, um conjunto de nível de F ao qual p^* pertence.

Se a matriz (quadrada de dimensão m)

$$J_{F_y}(p^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(p^*) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(p^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(p^*) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(p^*) \end{bmatrix}$$

for invertível, então existe uma função vetorial $f: B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, de classe C^l, definida numa bola aberta B em $\mathbb{R}^n$ tal que

- $x^* \in B$ e $f(x^*) = y^*$;
- $F\big(x, f(x)\big) = k, x \in B$;
- A matriz Jacobiana de f no ponto x^* pode ser calculada utilizando a matriz das derivadas parciais de F no ponto (x^*, y^*):

$$J_f(x^*) = -\left(J_{F_y}(p^*)\right)^{-1} \times J_{F_x}(p^*),$$

com J_{F_x} a matriz de dimensão $m \times n$, calculada no ponto p^*,

$$J_{F_x}(p^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(p^*) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(p^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(p^*) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(p^*) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.22. Seja $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z, v) = \big(F_1(x, y, z, v), F_2(x, y, z, v)\big) = (xz + yvz^2,\ xz^3 + y^2v^4)$$

que é diferenciável.

Podemos usar o teorema da função implícita (Teorema 4.8.) para mostrar que existe uma função $f: B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida uma bola aberta B, contendo o ponto $x^* = (1,1)$ tal que $f(1,1) = (0,-1) = y^*$ e $F\big(x, y, f(x, y)\big) = (0,1)$ para todo o $(x, y) \in B$. De facto, o ponto $p^* = (1,1,0,-1)$ pertence ao conjunto de nível $F_{(0,1)} = \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}^{2+2}: F(x, y) = (0,1)\}$ e, além disso, a matriz

$$J_{F_{(z,v)}}(1,1,0,-1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{(1,1,0,-1)}$$

$$= \begin{bmatrix} x + 2yvz & yz^2 \\ 3xz^2 & 4y^2v^3 \end{bmatrix}_{(1,1,0,-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

é invertível. A matriz Jacobiana de f no ponto $(1,1)$ é dada por

$$J_f(1,1) = -\left(J_{F_{(z,v)}}(1,1,0,-1)\right)^{-1} \times J_{F_{(x,y)}}(1,1,0,-1)$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(1,1,0,-1)} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z & vz^2 \\ z^3 & 2yv^4 \end{bmatrix}_{(1,1,0,-1)}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

4.3.1. Existência de Função Inversa

Uma função $f: U \to V$ é **invertível** se existe uma função $g: V \to U$ tal que $f \circ g = id_V$ e $g \circ f = id_U$, sendo id_V e id_U as funções identidade em V e em U, respetivamente. Recorde-se que se f é uma função de uma só variável, diferenciável, a condição $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ num intervalo I é suficiente para garantir que f é invertível em I, sendo a derivada da inversa dada por $(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}$, com $x = f^{-1}(y)$. Por exemplo, a função $f(x) = x^2, x > 0$ é invertível, pois $f'(x) = 2x > 0$ e, isolando o x na equação $y = x^2$, obtemos a expressão que define a função inversa $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Podemos usar a fórmula de cálculo da derivada da inversa, obtendo $(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Portanto, se uma função f é diferenciável num ponto p e $f'(p) \neq 0$ podemos garantir a existência de uma vizinhança de p onde a função é invertível; diz-se neste caso que f é **localmente invertível**.

Seja agora $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável no conjunto aberto D. Admita-se que num certo ponto $p \in D$ se tem $\det(J_f(p)) \neq 0$. Então existe uma vizinhança U de p e uma vizinhança V de $f(p)$ tal que a restrição de f a U, $f|_U: U \to V$ admite inversa $f^{-1}: V \to U$, também diferenciável. Além disso, a matriz Jacobiana de f^{-1} em $f(p)$ é a inversa de $J_f(p)$ e temos, em particular,

$$\det (J_{f^{-1}}\big(f(p)\big) = \frac{1}{\det\big(J_f(p)\big)}.$$

O determinante da matriz Jacobiana (quando é uma matriz quadrada de ordem n) de f num ponto p, $\det\big(J_f(p)\big)$, chama-se **Jacobiano** e, também se denota frequentemente por

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Exemplo 4.23. A função $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta\ , r\sin\theta)$ não é invertível, porque não é bijetiva. Porém a sua restrição ao conjunto $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ é invertível – é a conhecida transformação de coordenadas polares para coordenadas retangulares. O Jacobiano desta transformação é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

e o Jacobiano da transformação inversa em cada ponto (x,y) é, notando que $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

4.4. Exercícios Propostos

1. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = x^3 + 2xy$.

   b) $g(x,y) = e^{2xy^3}$.

   c) $h(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$.

   d) $i(x,y,z) = e^x \sin x + \cos(z - 3y)$.

2. Determine todas as derivadas parciais de primeira e segunda ordem da função $f(x,y) = \ln(x+y) - \ln(x-y)$.

3. Calcule $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, sendo $f(x, y) = \sin(x + \cos y)$.

4. Demonstre que:

   a) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2, \text{sendo } z = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

   b) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1, \text{sendo } u = x + \frac{x - y}{y - z}$.

5. Determine uma função f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}.$$

6. Uma fábrica produz dois tipos de máquinas de lavar loiça: o modelo A, de tipo independente e o modelo B, de encastrar. O custo de fabricar x unidades de máquinas do modelo A e y unidades do modelo B é dado por

$$C(x, y) = 210\sqrt{xy} + 125x + 130y + 1025.$$

   Calcule os custos marginais quando se produzem, 80 máquinas de modelo A e 20 de modelo B. Interprete, compreenda e explique o resultado.

7. A lei dos gases ideais foi derivada originalmente de resultados experimentais das Leis de Charles e de Boyle. Sabe-se que muitos gases comuns apresentam comportamentos próximos dos gases ideais à temperatura e pressão ambiente. Considere que P é a pressão de um gás, V o seu volume e T a sua temperatura (medida em graus Kelvin). A Lei dos gases ideais estabelece que $PV = nRT$, onde n é o número de moles de gás presente e R é a constante universal dos gases ($R = kN_A$, sendo k a constante de Boltzmann e N_A o número de Avogadro).

   Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} + 1 = 0.$$

8. Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar, $P_0 \in \text{int}(D)$ e u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$.

   a) Defina derivada de f no ponto P_0 segundo o vetor u.
   b) Defina derivada direcional de f no ponto P_0 segundo a direção do vetor u.
   c) Calcule as derivadas direcionais das seguintes funções nos pontos dados segundo as direções indicadas:

   i. $f(x,y) = x^2 + y^2$, em $P_0 = (1,1)$, segundo o vetor $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

   ii. $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$, em $P_0 = (1,2)$, segundo o vetor $u = (1,1)$;

   iii. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, em $P_0 = (1,1,0)$, segundo o vetor $u = (1,-1,2)$.

9. Calcule a derivada da função f dada por

$$f(x,y) = \frac{y}{x},$$

   segundo o vetor $u = (9,\ 3)$, no ponto $P = (3,-1)$, usando a definição.

10. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{4 - x^2 - 2y^2} & se \quad x^2 + 2y^2 \neq 4, \\ 0 & se \quad x^2 + 2y^2 = 4. \end{cases}$$

   a) Estude a existência de limites direcionais de f no ponto $(2,0)$.
   b) Diga se f é contínua em $(2,0)$.
   c) Calcule (caso existam) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)$.
   d) Diga se f é diferenciável em $(2,0)$.
   e) Discuta, sem calcular, a existência de derivada direcional de f no ponto $(2,0)$, segundo qualquer vetor não nulo.

11. Mostre que a função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^2y^2}{x^4+y^4} & se \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0,0)$.

12. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

b) Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

c) Diga, justificando, se f é diferenciável em $(0,0)$.

d) Calcule, se existir, $D_u f(0,0)$, sendo u um qualquer vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$.

13. Considere a função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \ln x + xy^2$.

a) Indique o domínio de f.

b) Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $P(1,2)$.

c) Use a aproximação linear de f no ponto P para obter uma aproximação de $f(1.05, 2.10)$.

14. Considere a função vetorial $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(u,v) = \left(\sqrt{1-u^2}\cos v, \sqrt{1-u^2}\sin v, 2u\right).$$

a) Determine o domínio e estude a continuidade de f.

b) Indique os pontos onde f é diferenciável e calcule a matriz derivada de f.

c) Use aproximação linear no ponto $(0,0)$ para obter um valor aproximado de $f(0.02, 0.05)$. Compare esta aproximação com o valor exato.

15. Seja r a função vetorial definida por

$$r(x,y) = (x+2y)\,\hat{\imath} + x\sin(\pi y)\,\hat{\jmath} + xy^2\,\hat{k}.$$

Determine a derivada da função $r \circ q$, onde q é dada por $q(t) = (\sin t\,, t^2)$.

16. Determine as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ e o diferencial total $\mathrm{d}f$ nos seguintes casos:

a) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}, \text{com } \begin{cases} x = u - 2v \\ y = 2\mathrm{u} + \mathrm{v} \end{cases}.$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}, \text{com } \begin{cases} x = u^v \\ y = u \ln v \end{cases}.$

17. A temperatura sobre uma certa superfície é dada em cada ponto por uma função $T(x,y)$ (em graus Celcius). Uma pessoa desloca-se de modo a que a sua posição (x,y) em cada instante t (em minutos) é dada por $x(t) = 3 + \frac{1}{4}t,\ y(t) = \sqrt{t+1}$. Sabe-se que $T_x(5,3) = 4$ e $T_y(5,3) = 1$. Qual é a variação da temperatura, em função do tempo, que a pessoa sofre ao fim de 8 minutos?

18. Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real. Estabeleça condições que garantam que a equação $2\,g(x+y) = g(x) + g(y)$ define y como função de classe C^1 de x numa vizinhança do ponto (1,1). Mostre que, sob tais condições, $y'(1) = -1$.

19. Considere a equação

$$e^{x^2+y^2+z^2} = x + y + e^z.$$

a) Prove que a equação dada define implicitamente z como função de classe C^1 de x e y, numa vizinhança do ponto $(0,0,1)$.

b) Sendo $z = h(x, y)$ a função implícita referida na alínea anterior, calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função h no ponto $(0,0)$.

20. Usando o **Teorema da Função Implícita** é possível mostrar que um vetor normal a uma superfície dada por uma equção do tipo $F(x, y, z) = 0$ (F de classe C^1) num certo ponto, é o vetor gradiente de F calculado nesse ponto.

Determine os planos tangentes à superfície S definida pela equação

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

que são paralelos ao plano $x + y + z = 0$.

21. Considere a função f dada por $f(x, y, z) = 3xy + z^2$.

a) Calcule o gradiente da função num ponto genérico.

b) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível de equação $f(x, y, z) = 4$, no ponto (1,1,1).

22. Considere a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$

a) Mostre que a equação define z como função implícita de classe C^1 de x e y numa vizinhança do ponto (1,1,1).

b) Mostre que a equação define y como função implícita de classe C^1 de x e z numa vizinhança do ponto (1,1,1).

c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ com $f(x, y) = xy^2z^3$ sendo $z = z(x, y)$ a função implícita definida na alínea a).

d) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)$ com $g(x, y) = xy^2z^3$ sendo $y = y(x, z)$ a função implícita definida na alínea b).

23. Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(\pi) = -1$.

a) Prove que a equação

$$x^2 + 2\cos(yz) - g\left(\frac{y}{z}\right) = 0$$

define implicitamente x como função de classe C^1 de y e z, numa vizinhança de $(-1, \pi, 1)$.

b) Mostre que

$$\left(y\frac{\partial x}{\partial y} + z\frac{\partial x}{\partial z}\right)\bigg|_{(\pi,1)} = 0.$$

24. Seja $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $H(x, y) = \sin(3x - y)$. Calcule $(H(x(z), y(z)))'$ nos pontos onde as equações

$$\begin{cases} x^3 + 2y = 2z^3 \\ x - y^2 = z^2 + 3z \end{cases}$$

definem implicitamente (x, y) como função vetorial de classe C^1, de z.

25. Sejam $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 (em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$, respetivamente), tais que

$$\varphi(1) = 0, \varphi'(1) = 1, f(0,1) = 1, \frac{\partial f}{\partial u}(0,1) = 2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = 3.$$

a) Mostre que a equação

$$f(y, e^y)\varphi(xz) = 0$$

define implicitamente z em função de x e y numa vizinhança do ponto (1,0,1).

b) Sendo $z = z(x, y)$ a função cuja existência foi provada na alínea anterior, determine $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$.

26. Considere a equação $g(x^2 + y^2) + z + g(2x - z) = 0$, onde g é uma função real de variável real.

a) Estabeleça condições sobre g que garantam que a equação dada possa definir y como função de x e z numa vizinhança de $(0,1,-1)$, com $y = y(x, z)$ de classe C^1 e tal que

$$-\frac{\partial y}{\partial x}(0,-1)+\frac{\partial y}{\partial z}(0,-1)=y(0,-1).$$

b) Mostre que, nas condições estabelecidas na alínea anterior, se tem

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}(0,-1)+2\frac{\partial^2 y}{\partial^2 z}(0,-1)=0.$$

27. Considere a superfície S definida pela equação

$$x^2+y^2-z^2=2x.$$

Determine os pontos de S nos quais os planos tangentes são paralelos aos planos xOy, xOz e yOz.

CAPÍTULO 5.

EXTREMOS DE FUNÇÕES

Este capítulo é dedicado ao estudo de extremos (máximos e mínimos) de funções de duas ou mais variáveis. Veremos como usar as derivadas parciais, estudadas nos capítulos anteriores, para localizar máximos e mínimos de uma função de várias variáveis. O processo é análogo ao que se utiliza para funções de uma variável, embora um pouco mais complexo e, como veremos, alguns resultados não se podem estender de modo direto.

No final do capítulo o estudante deve ser capaz de:

- Definir ponto crítico, extremo local e extremo global de uma função;
- Calcular pontos críticos de uma função;
- Classificar extremos locais usando a matriz Hessiana;
- Aplicar o teorema de Weierstrass;
- Determinar extremos condicionados usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

5.1. Pontos Críticos e Extremos Locais

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, D um conjunto aberto D e $p \in D$.

DEFINIÇÃO 5.1

A função f tem um **mínimo local** no ponto p se $f(x) \geq f(p)$, para todo o ponto x numa vizinhança de p; o ponto p diz-se um **minimizante (ou ponto de mínimo) local** da função f. De modo idêntico, f tem um **máximo local** (ou relativo) no ponto p se $f(x) \leq f(p)$, para todo o ponto x numa vizinhança de p; neste caso, o ponto p diz-se um **maximizante (ou ponto de máximo) local** da função f. Os maximizantes e minimizantes locais de f também se chamam **extremantes locais de** f e os valores correspondentes de $f(p)$ denominam-se, respetivamente, por **máximos locais** e **mínimos locais** ou, como também se diz, **extremos locais** da função f.

Note-se que um mínimo local não é necessariamente o menor valor atingido pela função; sabemos apenas que, numa região à volta do ponto p, o valor da função para qualquer outro ponto é sempre superior a $f(p)$. Fora dessa região nada se sabe acerca do comportamento da função podendo acontecer que a função atinja valores inferiores a $f(p)$. O mesmo se pode dizer acerca dos máximos locais.

Exemplo 5.1. Na Figura 5.1 assinalam-se um máximo e um mínimo local de uma função.

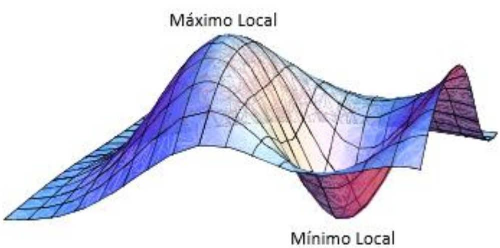


FIGURA 5.1. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO ONDE SE VISUALIZA UM MÍNIMO LOCAL E UM MÁXIMO LOCAL

Recordamos que um ponto crítico de uma função de uma variável é um ponto do seu domínio no qual a derivada da função se anula ou não existe. Define-se ponto crítico de funções de várias variáveis de um modo similar.

DEFINIÇÃO 5.2

Um ponto p é um **ponto crítico** ou **ponto de estacionaridade** de uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida num conjunto aberto D se se verifica uma das seguintes situações:

i. não existe pelo menos uma das derivadas parciais de primeira ordem de f em p;

ii. $\nabla f(p) = 0$.

Note-se que, na definição anterior, se se verifica (i) a função não é diferenciável em p. A condição (ii) obriga a que as derivadas parciais de f, existindo, sejam todas nulas no ponto p.

Se f é uma função de duas variáveis de classe C^1 definida num aberto e $p = (a, b)$ é um ponto de mínimo local de f, verifica-se, para todo o (x, y) numa vizinhança de (a, b) contida em D (a qual existe pois D é aberto), $f(a, b) \leq f(x, y)$. Em particular, $f(a, b) \leq f(x, b)$ ou seja, sendo g_1 a função de uma variável definida por $g_1(x) = f(x, b)$, tem-se $g_1(a) \leq g_1(x)$ para pontos x próximos de a, o que significa que a é um ponto de mínimo para a função g_1 e, portanto, $g_1'(a) = 0$. Como $g_1'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ tem-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$. De igual modo se conclui que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$, usando agora a função g_2 definida por $g_2(y) = f(a, y)$. O caso em que p é ponto de máximo local é análogo e concluímos que, se p é um extremante local de uma função diferenciável f, então $\nabla f(p) = (0,0)$. Esta ideia generaliza-se para funções reais com qualquer número de variáveis.

PROPOSIÇÃO 5.1

Se p é um extremante local de uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida num conjunto aberto D, então p é um ponto crítico de f.

A proposição anterior afirma que se f tem um máximo ou um mínimo local para $x = p$ e todas as derivadas parciais de f existem nesse ponto, então são todas nulas. O recíproco, porém, é falso: se p é um ponto crítico de f, nesse ponto a função pode atingir, ou não, um máximo ou mínimo local.

Exemplo 5.2. Considere-se a função de duas variáveis $f(x,y) = x^2 - y^2$ cujas derivadas parciais são,

$$f_x(x,y) = 2x \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = -2y.$$

O único ponto onde as ambas as derivadas parciais se anulam simultaneamente é o ponto $(0,0)$, sendo este, portanto, o único ponto crítico da função. Porém, este não é um extremante de f. De facto, na vizinhança do ponto $(0,0)$ temos $f(x,0) = x^2 > 0 = f(0,0)$ para $x \neq 0$, isto é, se nos movemos no gráfico de f na direção do eixo dos xx a função cresce; por outro lado, $f(0,y) = -y^2 < 0 = f(0,0)$ para $y \neq 0$, ou seja, se nos movemos no gráfico de f na direção do eixo dos yy, a função decresce (ver Figura 5.2). Assim sendo, $f(0,0)$ não é máximo local nem mínimo local da função. Esta função não tem extremos locais.

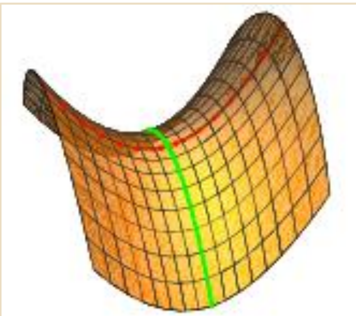


FIGURA 5.2. GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x,y) = x^2 - y^2$, UM PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

Os pontos críticos que apresentam este tipo de comportamento, nos quais a função não atinge máximo nem mínimo local, chamam-se **pontos de sela**.

A Proposição 5.1 é muito útil quando procuramos os extremos relativos de uma função. Se conhecemos todos os pontos críticos da função conhecemos todos os candidatos a extremantes da função. Portanto, se uma função não possuir pontos críticos então não admite qualquer extremo local.

Para saber se num ponto crítico há ou não um extremo local usamos as derivadas de segunda ordem da função.

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $p \in \text{int}(D)$. A matriz

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{bmatrix}$$

chama-se **matriz Hessiana de f no ponto p** . De acordo com o Teorema de Schwarz esta matriz é simétrica.

Recordamos que, se f é uma função de uma variável de classe C^2 definida num conjunto aberto, a fórmula de Taylor de f num ponto p do seu domínio é

$$f(p+h) = f(p) + f'(p)\,h + \frac{1}{2}f''(p)\,h^2 + R_2(h),$$

com $\lim_{h \to 0} \frac{R_2(h)}{h^2} = 0$ ($R_2(h)$ tende para zero mais rapidamente que h^2). Se a derivada da função se anula em p, ou seja, se p é ponto crítico da função, a fórmula anterior reduz-se a

$$f(p+h) = f(p) + \frac{1}{2}f''(p)h^2 + R_2(h),$$

o que significa que, para h suficientemente pequeno[5], o sinal da diferença de $f(p+h) - f(p)$ é o sinal de $f''(p)$, uma vez que h^2 é positivo e $R_2(h)$ tende

[5] Recordamos que, dizer que uma proposição é verdadeira para h suficiente pequeno é o mesmo que dizer que existe uma vizinhança da origem, tal que a proposição é verdadeira, para h nessa vizinhança.

para zero mais rapidamente do que h^2 (o que nos garante que, em módulo, $R_2(h)$ é menor que $\frac{1}{2}f''(p)h^2$ para h suficientemente pequeno). Assim, se $f''(p) < 0$ temos um máximo local em p e se $f''(p) > 0$ temos um mínimo local em p.

Um raciocínio análogo é válido para funções com várias variáveis. Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 definida num conjunto aberto D, a fórmula de Taylor de f no ponto $p \in D$ escreve-se, usando notação matricial, onde $R_2(v)$ é o resto de ordem 2, e v é um vetor tal que $p + v \in D$,

$$f(p+v) = f(p) + J_f(p)v + \frac{1}{2}v^T H_f(p)v + R_2(v), \tag{5.1}$$

com $\lim\limits_{v \to 0} \frac{R_2(h)}{\|v\|^2} = 0$. Assim, se as derivadas parciais de f no ponto p se anulam, isto é, se p é um ponto crítico de f, a Jacobiana de f é a matriz nula e a fórmula (5.1) reduz-se a

$$f(p+v) = f(p) + \frac{1}{2}v^T H_f(p)\, v + R_2(v). \tag{5.2}$$

Podemos agora raciocinar de modo análogo ao que fazemos para funções de uma variável, estudando o sinal da segunda derivada. Se garantirmos que $v^T H_f(p)v$ é maior ou igual a zero para todo o vetor v, então $f(p+v) - f(p) \geq 0$ para $\|v\|$ suficientemente pequeno, ou seja, $f(p+v) \geq f(p)$ o que significa que a função admite um mínimo local em p (analogamente, se $v^T H_f(p)v$ é menor ou igual a zero temos um máximo local).

Exercício resolvido 5.1. Determine a fórmula de Taylor de segunda ordem da função $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ no ponto $(0,0)$ e averigue se este ponto é um minimizante local.

Resolução. Comecemos por calcular as derivadas parciais de primeira ordem da função e verificar que (0,0) é um ponto crítico. Temos

$$f_x(x,y) = 2xe^{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = 2ye^{x^2+y^2},$$

E, portanto, $\nabla f(0,0) = (0,0)$. As derivadas parciais de segunda ordem

$$f_{xx}(x,y) = (2+4x^2)e^{x^2+y^2},$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4xye^{x^2+y^2} \quad \text{e}$$

$$f_{yy}(x,y) = (2+4y^2)e^{x^2+y^2}$$

são funções contínuas. A matriz Hessiana é, portanto,

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} (2+4x^2)e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & (2+4y^2)e^{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

e

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, a fórmula de Taylor da função no ponto (0,0) é, com $v = (h,k)$,

$$f\big((0,0)+(h,k)\big) = f(0,0) + \frac{1}{2}[h \quad k]\, H_f(p) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + R_2(v),$$

com $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{R_2(h)}{\|h\|^2} = 0.$ Como

$$[h \quad k] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = 2h^2 + 2k^2 \geq 0, \qquad \text{para qualquer } h \text{ e } k$$

temos $f(h,k) - f(0,0) \geq 0$ (neste caso para qualquer vetor (h,k) mas, em geral, basta para $\|(h,k)\|$ suficientemente pequeno), e concluímos que a função atinge um mínimo local em $(0,0)$.

Contudo, se a função f é de classe C^2, para estudar o sinal de $v^T H_f(p)v$ podemos usar, em vez da definição, um resultado da Álgebra Linear (ver [3]) que nos permite olhar apenas para os menores principais da matriz Hessiana $H_f(p)$.

Chamamos **menor principal** de ordem k de uma matriz quadrada M, de ordem n, que denotamos por M_k, o determinante da submatriz de ordem k que se obtém da matriz M eliminando as últimas $n-k$ linhas e as últimas $n-k$ colunas.

O teorema seguinte é conhecido como **Teste da segunda derivada** ou **Critério dos menores principais**.

TEOREMA 5.1 – Teste da Segunda Derivada

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $p \in \text{int}(D)$. Se p é um ponto crítico de f, tem-se o seguinte:

i. se todos os menores principais da matriz $H_f(p)$ são positivos,

$$H_1(p) > 0, H_2(p) > 0, H_3(p) > 0, \ldots$$

então p é um ponto mínimo local;

ii. se os menores principais da matriz $\mathrm{H}_f(p)$ são alternadamente negativos e positivos, sendo o primeiro negativo,

$$H_1(p) < 0, H_2(p) > 0, H_3(p) < 0, \ldots$$

então p é um ponto máximo local;

iii. se existir um menor de ordem par negativo ou dois menores de ordem ímpar com sinais diferentes, então p é um ponto de sela.

Nos casos em que este critério é inconclusivo, teremos que usar alguma outra forma de analisar o comportamento da função na vizinhança do ponto p, por exemplo, o método que usámos no exercício anterior.

Como caso particular, se $n = 2$ podemos dizer que:

i) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0$ e $\det\big(H_f(p)\big) > 0$ então p é o ponto de mínimo;

ii) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0$ e $\det\big(H_f(p)\big) > 0$ então p é o ponto de máximo;

iii) se $\det\big(H_f(p)\big) < 0$ então p é o ponto de sela.

Exercício resolvido 5.2. Calcular e classificar os pontos críticos da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = -3x^2y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

Resolução. Os pontos críticos são os pontos que verificam

$$\nabla f(x,y) = (0,0), \qquad \text{ou seja,} \qquad (4x - 6xy, -3x^2 + 4y - 3y^2) = (0,0).$$

Daqui resulta o sistema,

$$\begin{cases} 4x - 6xy & = 0 \\ -3x^2 + 4y - 3y^2 & = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são os pontos

$$\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \qquad (0,0), \qquad \left(0, \frac{4}{3}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

A matriz Hessiana de f, num ponto genérico $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, é

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 4-6y & -6x \\ -6x & 4-6y \end{bmatrix}.$$

Nos pontos críticos $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, obtém-se:

$$H_f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\det\left(Hf\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right) = \det\left(Hf\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right) = -16 < 0$, concluímos que $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ são pontos de sela. Para o ponto $(0,0)$ temos

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e, como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4 > 0$ e $\det\left(H_f(0,0)\right) = 16 > 0$, resulta que $(0,0)$ é o ponto de mínimo. Finalmente,

$$H_f\left(0,\frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

donde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,\frac{4}{3}\right) = -4 < 0$ e $\det\left(H_f\left(0,\frac{4}{3}\right)\right) = 16 > 0$ e, portanto, $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ é ponto de máximo local.

Na Figura 5.3 pode ver-se o gráfico de f onde os pontos de sela e os extremos estão assinalados.

Contudo, este critério nem sempre permite tirar conclusões, como se ilustra no exemplo seguinte.

Há casos em que este critério não permite classificar os pontos críticos de uma função e é preciso fazer uma análise diferente.

Exemplo 5.3. A função definida por $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^3$ tem um único ponto crítico: o ponto $(0,0)$. De facto,

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x(2x^2+1), 3y^2)$$

$$= (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0.$$

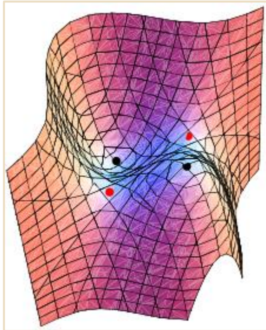


FIGURA 5.3. PONTOS CRÍTICOS DA FUNÇÃO DO EXERCÍCO RESOLVIDO 5.2

A matriz hessiana de f no ponto $(0,0)$,

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 12x^2+2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$ mas $\det\left(H_f(0,0)\right) = 0$. O Teorema 5.1. não permite tirar conclusões. Porém, como $f(0,0) = 0$, analisando a função na vizinhança do ponto $(0,0)$, sobre a reta $x = 0$ temos $f(0,y) = y^3$, que é positivo para $y > 0$ e negativo para $y < 0$, concluindo-se, imediatamente, que o ponto $(0,0)$ não é um extremante – é um ponto de sela.

Já a função definida por $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^4$, que também tem $(0,0)$ como único ponto crítico e verifica, igualmente, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$ e $\det\left(H_f(0,0)\right) = 0$, tem aí um ponto de mínimo, uma vez que $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) > 0$ para todo o $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercício resolvido 5.3. Calcular os extremos locais da função $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x + (y-1)(x - \ln z) - \ln x$, no conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \wedge z > 0\}$.

Resolução. Atendendo a que

$$\nabla f(x,y,z) = \left(y - \frac{1}{x}, x - \ln z\,, \frac{1-y}{z}\right),$$

temos

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y - \dfrac{1}{x} & = 0 \\ x - \ln z = 0 \\ \dfrac{1-y}{z} & = 0 \end{cases}.$$

Este sistema tem como solução o ponto $(1, 1, e)$. Este ponto é, portanto, o único ponto crítico da função. A matriz Hessiana, num ponto genérico $(x,y,z) \in D$, é

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x^2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{z} \\ 0 & -\dfrac{1}{z} & \dfrac{y-1}{z^2} \end{bmatrix}$$

donde, para $(x,y,z) = (1,1,e)$,

$$H_f(1,1,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{e} \\ 0 & -\frac{1}{e} & 0 \end{bmatrix}$$

Como $H_1(1,1,e) = 1 > 0$ e $\det\left(H_f\,(1,1,e)\right) \;= -\frac{1}{e^2} < 0$, o ponto $(1,1,e)$ é um ponto de sela, de acordo com o Teorema 5.1.

Observação: Existem outros critérios para classificar os pontos críticos de uma função, também baseados no estudo do sinal da forma quadrática[6] $v^T H_f(p)v$. Em particular, o teorema seguinte descreve a natureza dos pontos críticos usando os valores próprios da matriz Hessiana de f no ponto p.

TEOREMA 5.2

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais de segunda ordem contínuas na vizinhança de um ponto $p \in \mathrm{int}(D)$. Se p é um ponto crítico de f, tem-se o seguinte:

i. se todos os valores próprios de $H_f(p)$ são positivos, então f tem um ponto de mínimo local em p;
ii. se todos os valores próprios de $H_f(p)$ são negativos, então f tem um ponto máximo local em p;
iii. se $H_f(p)$ tem valores próprios positivos e negativos, então f tem um ponto de sela em p.

A aplicação deste critério exige o cálculo dos valores próprios da matriz, o que obriga à resolução de equações polinomiais de grau n. Por esta razão, muitas vezes, o critério dos menores principais apresentado é vantajoso.

---

[6] Pode ser encontrada mais informação sobre este assunto em [3], ou outros livros de Cálculo.

5.2. Extremos Globais e o Teorema de Weirstrass

Nesta secção vamos considerar o problema de otimizar uma função, isto é, o problema de calcular os extremos absolutos de uma função num certo conjunto limitado e fechado. A resolução deste problema tem uma relação forte com o conhecido Teorema de Weierstrass.

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. O ponto p diz-se um **ponto de mínimo absoluto**, se $f(p)$ é o menor valor atingido pela função em todo o seu domínio, isto é, se $f(p) \leq f(x)$, para todo o $x \in D$; p diz-se um **ponto de máximo absoluto**, se $f(p)$ é o maior valor atingido pela função em todo o seu domínio, ou seja, $f(p) \geq f(x)$, para todo o $x \in D$.

Os mínimos e máximos (extremos) absolutos também se chamam **extremos globais** e o ponto p no qual é atingido um extremo global diz-se um extremante **global**.

É claro que todo o extremo global é um extremo local, mas nem todos os extremos locais são globais.

TEOREMA 5.3 (Teorema de Weierstrass)

Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, definida num conjunto D fechado e limitado, então f atinge em D um mínimo e um máximo absolutos.

A demonstração pode ser consultada em [5].

Este teorema assegura a existência de mínimo e máximo para uma função contínua definida num compacto [7], mas não fornece um processo para os calcular.

Para encontrar os extremos absolutos de uma função contínua num conjunto compacto, podemos proceder do seguinte modo:

1. Obter os pontos críticos da função, isto é, pontos onde se anula o seu gradiente e pontos onde não exista alguma das derivadas parciais (apenas se consideram aqui os pontos interiores de D);
2. Obter os pontos extremantes da restrição da função à fronteira do seu domínio;
3. Calcular os valores da função em todos os pontos encontrados nos passos anteriores; o menor valor é o mínimo absoluto da função e o maior valor é o máximo absoluto da função.

Exemplo 5.4. Pretendemos calcular o valor máximo e o valor mínimo atingidos pela função $f(x,y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1$ no retângulo $R = [-1,1] \times [-1,1]$.

Como o domínio da função é um conjunto limitado e fechado e a função é contínua em R, o teorema de Weirstrass garante a existência de máximo e de mínimo globais de f em R. Seguindo o processo descrito:

1. Os pontos críticos de f obtêm-se resolvendo o sistema de equações

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4xy = 0 \\ -2y - 2x^2 = 0 \end{cases}.$$

[7] Recordamos que um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ é **limitado** se existe alguma bola fechada de dimensão n que o contenha e é **fechado** se contém a sua fronteira. Um conjunto limitado e fechado diz-se um **compacto**.

Da primeira equação obtém-se $y = 2$ (valor que não satisfaz a segunda equação) ou $x = 0$. Substituindo $x = 0$ na segunda equação, obtém-se y = 0, logo o ponto $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f no interior de R.

2. Estuda-se o comportamento de f na fonteira do conjunto R que é, neste caso, a união dos lados do retângulo definidos por

$$L_1 = \{(x, y): y = -1, -1 \leq x \leq 1\}, \qquad L_2 = \{(x, y): y = 1, -1 \leq x \leq 1\},$$

$$L_3 = \{(x, y): x = -1, -1 < y < 1\}, \qquad L_4 = \{(x, y): x = 1, -1 < y < 1\}.$$

Em L_1, temos $y = -1$ e podemos definir a função g, de uma variável apenas,

$$g(x) = f(x, -1) = 6x^2,$$

com domínio $[-1, 1]$. O problema de encontrar os extremos de $f(x, y)$ sobre L_1 é equivalente ao problema de encontrar os extremos de $g(x)$ em $[-1, 1]$. O gráfico de g é parte de uma parábola com vértice na origem e, portanto, o mínimo é atingido para $x = 0$ e o máximo para $x = -1$ e para $x = 1$. Assim os pontos $(0, -1)$, $(-1, -1)$ e $(1, -1)$ são candidatos a extremantes de f.

Em L_2, temos $y = 1$ e definimos, de modo análogo, a função $g(x) = f(x, 1) = 2x^2$ em $[-1, 1]$. Esta função tem mínimo para $x = 0$ e máximo para $x = -1$ e $x = 1$. Assim, os pontos $(0, 1)$, $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ são candidatos a extremantes de f.

Em L_3, temos $x = -1$ e definindo $g(y) = f(-1, y) = 5 - 2y - y^2$, com $y \in]-1,1[$, vem,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -1.$$

Como o gráfico de g é parte de uma parábola e o vértice se obtém para $y = -1$, a função g não admite extremantes em $]-1,1[$. Logo não existem pontos candidatos a extremantes de f em L_3.

Por último, em L_4 temos $x = 1$. Definimos $g(y) = f(1, y) = 5 - 2y - y^2$ com $y \in]-1,1[$, a mesma função que obtivemos para L_3. Portanto também não existem pontos candidatos a extremantes de f em L_4.

3. Finalmente, comparando os valores da função em todos os pontos candidatos a extremantes que obtivemos,

$$f(0,-1) = f(0,1) = 0, \qquad f(0,0) = 1,$$

$$f(-1,1) = f(1,1) = 2, \qquad f(-1,-1) = f(1,-1) = 6,$$

verificamos que o máximo absoluto de f é 6 e o mínimo absoluto é 0.

Na Figura 5.4 estão assinalados sobre o gráfico da função, a preto o primeiro ponto encontrado (que é ponto de sela), a vermelho os dois pontos onde é atingido o máximo absoluto e a verde os dois pontos onde é atingido o mínimo. Note-se que o único ponto crítico do interior do domínio de função não é um extremante, há dois maximizantes situados nos vértices do retângulo R e há dois minimizantes situados em dois lados do retângulo R.

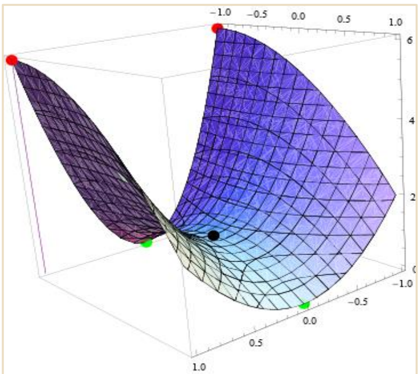


FIGURA 5.4. GRÁFICO DA FUNÇÃO DO EXEMPLO 5.4 COM DESTAQUE PARA OS PONTOS ESTUDADOS

5.3. Extremos Condicionados e Multiplicadores de Lagrange

Nesta secção vamos estudar o problema do cálculo de extremos de uma função em que as variáveis independentes estão sujeitas a certas condições dadas. É o chamado problema da determinação de **extremos condicionados** (ou, como também se diz, **extremos ligados**).

Não se conhece um método que resolva estes problemas na sua generalidade, mas há métodos particulares para o caso em que as condições de ligação têm estruturas simples, como, por exemplo, uma curva ou uma superfície.

Exemplo 5.5. Considere-se o caso mais simples que consiste em obter os extremos de uma função f de duas variáveis reais x e y sujeita à equação de ligação

$$g(x, y) = 0.$$

Por exemplo, determinar os pontos da hipérbole de equação $xy = 2$ que estão mais próximos da origem. Isto pode ser visto como o problema de minimizar a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeito à condição $g(x, y) = xy - 2 = 0$, como veremos mais adiante. Na Figura 5.5 representa-se a curva dada, $xy = 2$ e, também, algumas curvas de nível da função f. Como se observa na figura, um extremante de f na curva $g(x, y) = 0$ é um ponto p situado numa curva de nível de f que é tangente à curva definida por $g(x, y) = 0$.

Como, recordando o teorema da função implícita, em cada ponto, o vetor gradiente de g é perpendicular à curva de nível $g(x, y) = 0$ e o vetor gradiente de f é perpendicular às curvas de nível de f, podemos afirmar que, para qualquer ponto p onde f tenha um extremo sujeito à condição $g(x, y) = 0$, os vetores gradiente de f e g são colineares, ou seja, existe um número real λ tal que

$$\nabla f(p) = \lambda \ \nabla g(p).$$

Esta afirmação é a base do método dos multiplicadores de Lagrange para a possível obtenção de extremos condicionados de uma função.

A proposição seguinte permite-nos lidar com problemas de extremos condicionados envolvendo apenas uma restrição.

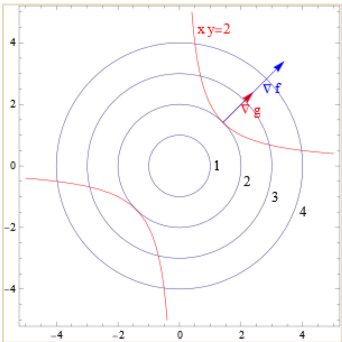


FIGURA 5.5. CURVAS DE NÍVEL DE f

PROPOSIÇÃO 5.2 – Métodos dos Multiplicadores de Lagrange

Sejam D um aberto em $\mathbb{R}^n$ e f e g duas funções diferenciáveis em D. Seja $S = \{x \in D: g(x) = c\}$, sendo c uma constante real. Se a restrição de f a S, tem um extremo local num ponto $p \in S$ para o qual $\nabla g(p) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\nabla f(p) = \lambda \, \nabla g(p).$$

Ao escalar λ chama-se **multiplicador de Lagrange**. O ponto (p, λ) diz-se um ponto de estacionaridade da função auxiliar de $n+1$ variáveis, que se denomina **função de Lagrange** ou **Lagrangeano** e é definida por

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda\, g(x_1, x_2, \dots, x_n). \qquad (5.3)$$

Na prática, para determinar os extremos de uma função f real de duas variáveis sujeita a uma equação de ligação $g(x, y) = 0$, aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange o que fazemos é:

1. Determinar os pontos críticos da função de Lagrange,

   $$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

   ou seja, as soluções do sistema

   $$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}.$$

   Observemos que a equação $L_\lambda(x, y, \lambda) = 0$ é equivalente à equação $g(x, y) = 0$. Os pontos em que ocorrem os extremos de f encontram-se entre as soluções deste sistema.
2. Decidir quais desses pontos são, de facto, extremantes de f sujeita a essa condição, implica uma análise mais pormenorizada. Mas, em geral, basta calcular o valor da função em todos os pontos encontrados e comparar os valores obtidos.

Exemplo 5.6. Determinar os pontos da circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 = 80$ que estão mais próximos e mais afastados do ponto $(1,2)$.

O problema consiste em calcular os extremantes (maximizantes e minimizantes) da função distância

$$d(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

sujeita à condição

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 80 = 0.$$

Como os pontos que maximizam ou minimizam a função $d(x,y)$ são os mesmos que maximizam ou minimizam a função $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$ (embora o valor máximo e mínimo não seja o mesmo para cada uma das funções), resolvemos o problema de optimizar a função f sujeita à condição

$$x^2 + y^2 - 80 = 0.$$

Notemos que estamos a procurar os extremos da função f na circunferência de raio $\sqrt{80}$, que é uma região limitada e fechada e, portanto, o teorema de Weirstrass garante que o mínimo e o máximo existem.

Temos, então,

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - \lambda\,(x^2 + y^2 - 80).$$

Os pontos críticos de L satisfazem

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) = 2(x-1) - 2\,\lambda\, x = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) = 2(y-2) - 2\,\lambda\, y = 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 80 \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 & = \lambda\, x \\ y - 2 & = \lambda\, y \\ x^2 + y^2 - 80 & = 0 \end{cases}.$$

Notando que não existem soluções do sistema com $x = 0$ ou $y = 0$ (o ponto (0,0) não pertence à referida circunferência), eliminando λ nas duas primeiras equações, obtemos

$$\frac{x-1}{x} = \frac{y-2}{y},$$

donde,

$$y = 2x.$$

Substituindo na terceira equação do sistema, vem

$$x^2 + (2x)^2 = 80$$

logo

$$x = 4 \vee x = -4.$$

Há, portanto, que considerar os pontos $(4,8)$ e $(-4,-8)$. Como $f(4,8) = 45$ e $f(-4,-8) = 125$ conclui-se que o primeiro ponto indicado é o que se encontra mais próximo (à distância $3\sqrt{5}$) e o segundo é o se encontra mais afastado (à distância $5\sqrt{5}$), como ilustrado na Figura 5.6.

Exemplo 5.7. Determinar as dimensões da caixa com a forma de prisma retangular de maior volume cujos vértices se situam sobre a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (r > 0)$.

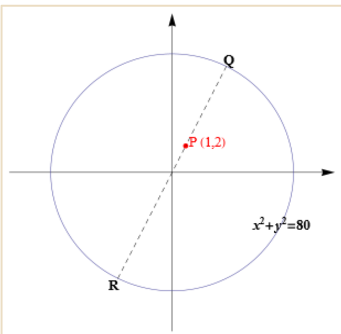


FIGURA 5.6. PONTOS DA CIRCUNFERÊNCIA MAIS PRÓXIMO, Q, E MAIS AFASTADO, R, DO PONTO $(1,2)$

Primeiro precisamos de identificar a função a otimizar, bem como a condição de ligação. Considerando que a superfície esférica está centrada na origem, os lados do prisma têm comprimento $2x$, $2y$ e $2z$, sendo (x, y, z) o vértice do prisma que se situa no primeiro quadrante. O volume da caixa é dado por $f(x, y, z) = 8\,xyz$. Queremos, portanto, maximizar a função

$$f(x, y, z) = 8\,xyz$$

sujeita à condição $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$.

Forma-se o Lagrangeano

$$L(x, y, z, \lambda) = 8xyz - \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - r^2).$$

Os possíveis extremos são os pontos críticos de L:

$$\begin{cases} L_x(x, y, z, \lambda) = 8yz - 2x\lambda = 0 \\ L_y(x, y, z, \lambda) = 8xz - 2y\lambda\ = 0 \\ L_z(x, y, z, \lambda) = 8xy - 2z\lambda = 0 \\ L_\lambda(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4yz - \lambda x = 0 \\ 4xz - \lambda y = 0 \\ 4xy - \lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \end{cases}$$

Também neste caso, pela natureza geométrica do problema, não nos interessa considerar soluções que se obtêm com $x = 0, y = 0$ ou $z = 0$ pois uma caixa com uma das dimensões nulas teria volume nulo (volume mínimo e não máximo, como se pretende).

Assim, podemos assumir que x, y e z são não nulos e, multiplicando ambos os membros da primeira equação por x, da segunda por y e da terceira por z, obtemos

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{4xyz}{\lambda} \\ y^2 = \dfrac{4xyz}{\lambda} \\ z^2 = \dfrac{4xyz}{\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \end{cases}$$

e usando a última equação, obtemos

$$\lambda = \frac{12xyz}{r^2}.$$

Substituindo λ nas equações anteriores, vem

$$x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}r.$$

O prisma procurado tem todas as arestas com o mesmo comprimento (é um cubo cuja aresta mede $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$) e tem volume $\frac{8\sqrt{3}}{9}r^3$.

Segue-se um exercício onde usamos, de um modo adaptado e com algum cuidado adicional, o método dos multiplicadores de Lagrange.

Exercício resolvido 5.4. Determinar os extremos globais da função $f(x,y) = xy$, no semicírculo $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$.

Resolução. O domínio é um conjunto limitado e fechado e, pelo teorema de Weierstrass, a função atinge um máximo global e um mínimo global no seu domínio. Assim, vamos determinar todos os candidatos a extremos usando o processo descrito e selecionar de entre eles o máximo e o mínimo global.

Uma vez que $f_x(x,y) = y$ e $f_y(x,y) = x$, o único ponto crítico de f é o ponto $(0,0)$. Como este ponto não é um ponto interior de D, no interior de D não há pontos críticos. Vamos então estudar a fronteira de D, que é constituída por duas curvas: a semicircunferência D_1 e o segmento de reta D_2:

$$D_1 = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}, \quad D_2 = \{(x,y): y = 0, -1 \leq x \leq 1\}.$$

A fronteira de D não pode ser definida, portanto, por uma condição do tipo $g(x,y) = 0$ com g diferenciável. Para estudar a restrição de f a D_1 podemos considerar a função de Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

tomando em atenção que apenas os pontos de estacionaridade desta função com $y \geq 0$ podem ser tomados como candidatos a extremantes da função. Fazendo $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ \\ x - 2\lambda y = 0 \\ \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Este sistema não admite soluções com $x = 0$ ou $y = 0$ (verifique). Assim, multiplicando a primeira equação por y e a segunda equação por x obtemos $y^2 = x^2$ (com $\lambda \neq 0$). Substituindo na terceira equação, vem $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e, como $y \geq 0$, vem $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Os pontos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são candidatos a extemantes de f.

O estudo da restrição de f a D_2 é trivial pois, como a função é constante em D_2 (temos $f(x, 0) = 0$ para qualquer x), todos os pontos são candidatos a extremantes. Uma vez que,

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}, \qquad f(x, 0) = 0,$$

concluímos que o máximo global é $\frac{1}{2}$ e é atingido no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e o mínimo global é $-\frac{1}{2}$, atingido no ponto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Para terminar refira-se ainda que, para obter os extremos de uma função f real de n variáveis sujeita $m\,(m \geq 1)$ condições do tipo $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\ (1 \leq i \leq m)$, o procedimento é análogo, considerando, neste caso, a função de Lagrange

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

de onde resulta um sistema com $n + m$ equações.

Observações finais: O método dos multiplicadores de Lagrange deve ser aplicado com cuidado. É preciso verificar que o método permite obter todos os pontos candidatos a extremantes, ou seja, que a função que define a curva $g(x, y) = 0$ é diferenciável e o seu vetor gradiente não se anula no ponto p. Por isso, quando procuramos extremos condicionados devemos também examinar todos os pontos críticos de $g(x, y)$.

Para ilustrar o que acaba de ser dito, consideremos

$$f(x, y) = x + y \quad \text{e} \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Se a condição é definida por $g(x, y) = 1$, o gradiente de g nunca se anula sobre a curva e tudo funciona bem. Mas se a condição é definida por $g(x, y) = 0$, o conjunto definido por esta condição tem apenas o ponto $(0, 0)$. É trivial que a função f admite neste conjunto o valor 0 como máximo e mínimo (em simultâneo). Mas $\nabla f(0,0) = (1,1)$ e $\nabla g(0,0) = (0,0)$, por isso não existe um escalar λ tal que $\nabla f(0,0) = \lambda \nabla g(0,0)$. Portanto, negligenciando o ponto crítico de g não encontraríamos o extremo de f.

Um outro caso mais interessante e menos trivial é o de encontrar o mínimo da função $f(x, y) = x$ sobre a curva definida por $g(x, y) = 0$, com $g(x, y) = y^2 + x^4 - x^3$. Esta curva chama-se piriforme (ver figura 5.7), o mínimo da função f sobre esta curva é 0 e ocorre no ponto (0,0) mas este ponto não satisfaz a condição de existir algum valor de λ tal que

$$\nabla f(0,0) = \lambda \nabla g(0,0).$$

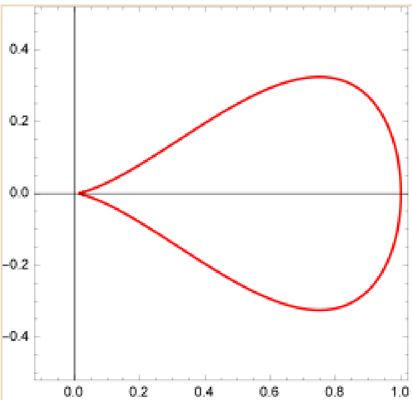


FIGURA 5.7. PIRIFORME: A CURVA DEFINIDA POR $y^2 + x^4 - x^3 = 0$

5.4. Exercícios Propostos

1. Determine, caso existam, os extremos locais das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$;

   b) $f(x,y) = 3x^2y^2 + y^2 - 3x^2 - 6y + 7$;

   c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy, \qquad x,y > 0$;

   d) $f(x,y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$;

   e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

   f) $f(x,y) = x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$.

2. Considere a função f definida por $f(x,y,z) = xyz(4a - x - y - z)$, $a \in \mathbb{R}$. Determine os extremos locais de f em função do parâmetro a.
3. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x - y^3)^2 - x^3$. Verifique que (0,0) é ponto crítico de f mas não é extremante local de f.
4. Seja g a função definida por $g(x,y) = x^2y^2$. Mostre que g possui um mínimo (global) nos pontos situados sobre os eixos coordenados (apesar do estudo da matriz Hessiana ser inconclusivo nesses pontos).
5. Determine, caso existam, os extremos globais da função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.
6. Seja $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ onde
   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}.$$
   a) Represente geometricamente o domínio gráfico da função f.
   b) Justifique que a função f possui extremos globais em D e determine-os.
7. Determine o ponto do plano de equação $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

8. Determine os pontos da superfície de equação $xyz = 1(x > 0 \; e \; y > 0)$, que se encontra(m) mais próximo(s) da origem.
9. Utilize o teorema dos multiplicadores de Lagrange para determinar, caso existam, os extremos das seguintes funções, sujeitas às restrições indicadas:
   a) $f(x,y) = 4x + 6y$, com $x^2 + y^2 = 13$;
   b) $f(x,y) = x^2y$, com $x^2 + 2y^2 = 6$;
   c) $f(x,y) = xy$, com $2x + 3y - 5 = 0$;
   d) $f(x,y,z) = xyz$, com $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$;
   e) $f(x,y,z) = yz + xy$, com $xy = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$.
10. Suponha que $T(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano.

    Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \geq x, \; 2y + x \leq 4\}$. Determine o(s) ponto(s) de A que se encontra(m) à menor temperatura.
11. Determine o(s) ponto(s) do elipsóide de equação $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza(m) a soma $x + 2y + x^2$.
12. A função definida por $f(x,y) = \frac{4x^2y^2 - y^4}{16}$ representa o quadrado da área de um triângulo isósceles de lados x e y cujo perímetro é $2x + y = 3$. Determine x e y por forma a que o triângulo tenha área máxima.
13. Determine o triângulo retângulo de área S cujo comprimento da hipotenusa é mínimo.
14. Considere a função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, onde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}$.
    a) Represente geometricamente o domínio D e faça um esboço do gráfico da função f.
    b) Diga, justificando, se existem máximos ou mínimos globais da função f. Em caso afirmativo, determine-os.
    c) A função f admite extremos não globais? Justifique.

15. Determine os extremos da função em D, sendo

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$$

e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi\}.$$

16. Determine o valor máximo da função f, dada por $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$, sobre a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

SOLUÇÕES

Capítulo 1

1.

a) É aberto em $\mathbb{R}^2$, $\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 4x^2 + y^2 = 4\}$;

b) É fechado em $\mathbb{R}^2$, $\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: y = x\}$;

c) Não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}^2$,$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in R^2: -1 \leq x \leq 1 \wedge (y = -1 \vee y = 1)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: (x = -1 \vee x = 1) \wedge -1 \leq y \leq 1\}$;

d) É aberto em $\mathbb{R}^2$, $\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x = 0 \vee y = 0\}$;

e) Não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}^2$,$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + 9y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$.

2.

a) É aberto em $\mathbb{R}^3$, $\text{fr}(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

b) É fechado em $\mathbb{R}^3$, $\text{fr}(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x + y + z = 1\}$;

c) Nem aberto nem fechado, $\text{fr}(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + 9y^2 + z^2 = 1 \vee x^2 + 9y^2 + z^2 = 9\}$;

d) Nem aberto nem fechado, $\text{fr}(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: (|x| = 1 \wedge |y| \leq 1) \wedge z > 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1 \wedge |y| = 1 \wedge z > 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: z = 0 \wedge |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}$;

e) É aberto em $\mathbb{R}^3$, $\text{fr}(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x = 0 \vee y = 0\}$.

Capítulo 2

1.

a) $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \frac{z^2}{3} - x^2 - \frac{y^2}{2} > 1\right\}$ (reunião dos interiores das duas folhas do hiperboloide), aberto em $\mathbb{R}^3$;

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq a^2\}$ (disco de raio $|a|$), fechado em $\mathbb{R}^2$;

c) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x + y + z \geq 0\}$ (conjunto dos pontos situados no plano $x + y + z = 0$ e acima deste), fechado em $\mathbb{R}^3$;

d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ (esfera centrada na origem e raio $|a|$), fechado em $\mathbb{R}^3$;

e) $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 \neq 0\right\}$ (pontos fora do cone, incluindo a superfície cónica e excluindo o vértice), nem aberto nem fechado em $\mathbb{R}^3$;

f) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq a^2\}$ (todo o espaço exceto a superfície esférica de raio a, se $a > 0$; $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ se $a = 0$; $\mathbb{R}^3$ se $a < 0$), aberto em $\mathbb{R}^3$ (também fechado se $a < 0$).

2.

$D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}; CD_h = [0,1]$.

3.

a) $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x + k\}, k \in \mathbb{R}$ (família de retas com declive −2);

b) $C_1 = \{(0,0)\}$; $Se\ k < 1, C_k = \emptyset$; $Se\ k > 1, C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{k^2}\}$(circunferências);

c) Se $k < 0, C_k = \emptyset$; $C_0 = \{(0,0)\}$; Se $k > 0, C_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{\frac{k^2}{2}} = 1\right\}$ (elípses);

d) Se $k \in \mathbb{R}^+, C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \ln k\}$ ($k \neq 1$: família de hipérboles; $k = 1$: eixos coordenados xx e yy); Se $k \leq 0, C_k = \emptyset$;

e) Se $k < 0$ ou $k > 1, C_k = \emptyset$; Se $0 \leq k < 1, C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x = \arcsin k \vee x = \pi - \arcsin k) \wedge y \geq 0\}$ (duas semirretas);

$C_1 = \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times [0, \infty[$ (semirreta);

f) $S_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = k\}, k \in \mathbb{R}$ (família de planos);

g) $S_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}, k \in R^+$ (família de superfícies esféricas centradas na origem e raio $\sqrt{k}$); $S_0 = \{(0,0,0)\}; S_k = \emptyset$ se $k < 0$.

4.

Elipse de equação $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{\frac{17}{2}} = 1$.

5.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$;

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z > -x - y\}$;

c) $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Capítulo 3

1.

a) $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

b) A: retas de declives $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$ excluindo a origem, B: retas de declives $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ excluindo a origem.

c) $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$.

d) Não.

2.

a) $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) : x^2 + y^2 = k\pi, k \in \mathbb{N}\}$ (plano excluindo as circunferências de raios $\sqrt{k\pi}, k \in \mathbb{N}$).

b) Não é contínua.

3. f é contínua em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

4. Não existe limite.

5.

a) 2;

b) $-\frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{2}$.

6. f não é contínua nos pontos situados na superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=1$, sendo contínua nos restantes pontos.

8.

a) $(\sqrt{3},0)$.

b) (1,0,0).

c) Não existe.

Capítulo 4

1.

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2+2y$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x$;

b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2y^3e^{2xy^3}$;
$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=6xy^2e^{2xy^3}$;

c) $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\frac{y+1/y}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}$,

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=\frac{x-x/y^2}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}$;

d) $\frac{\partial i}{\partial x}(x,y)=e^x(\sin x+\cos x)$,

$\frac{\partial i}{\partial y}(x,y)=3\sin(z-3y)$,

$\frac{\partial i}{\partial z}=-\sin(z-3y)$.

2. $f_x(x,y)=-\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}$,

$f_y(x,y)=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}$,

$f_{xx}(x,y)=\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}$,

$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=$
$-\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}$,

$f_{yy}(x,y)=\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}$.

3. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)=\sin y\cos(x+\cos y)$.

5. $f(x,y)=x^3y^2-6xy+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$.

6. $C_x(80{,}20)=\frac{355}{2}, C_y(80{,}20)=340$.

8.

c) i. $2\sqrt{2}$, ii. $\frac{1}{9\sqrt{2}}$, iii. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

9. 2.

10.

a) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ y=m(x-2)}} f(x,y)=-\frac{m}{2}$,

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ x=2}} f(x,y)$ não existe.

b) Não.

12.

b) $f_x(0{,}0)=1, f_y(0{,}0)=-1$.

c) Não.

13.

a) $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$;

b) $5x+4y-z=9$,
$\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{4}=4-z$;

c) 4.65.

14.

a) $[-1{,}1]\times\mathbb{R}$,

b) $\begin{bmatrix} -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\cos v & -\sqrt{1-u^2}\sin v \\ -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\sin v & \sqrt{1-u^2}\cos v \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

15. $\frac{d(r\circ q)}{dt}=(\cos t+$
$4t, \cos t\sin(\pi t^2)+$
$2\pi t\sin t\cos(\pi t^2), 4t^3\sin t+$
$t^4\cos t)$.

16.

a) $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{2u^2+2uv-12v^2}{(2u+v)^2}$;

$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{4v^2+16uv-9u^2}{(2u+v)^2}$;

$df(u,v)$ é a transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tal que

$df(u,v)(h,k) = \begin{bmatrix} \frac{2u^2+2uv-12v^2}{(2u+v)^2} & \frac{4v^2+16uv-9u^2}{(2u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$;

b) $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{vu^{2v-1}-u(\ln v)^2}{\sqrt{u^{2v}-u^2(\ln v)^2}}$;

$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \frac{vu^{2v}\ln u - u^2 \ln v}{v\sqrt{u^{2v}-u^2(\ln v)^2}}$;

$df(u,v)$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tal que $df(u,v)(h,k) =$

$\begin{bmatrix} \frac{vu^{2v-1}-u(\ln v)^2}{\sqrt{u^{2v}-u^2(\ln v)^2}} & \frac{vu^{2v}\ln u - u^2 \ln v}{v\sqrt{u^{2v}-u^2(\ln v)^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$.

17. 1.17 (aproximadamente)

18. g de classe C^1,

$g(2) = g(1), 2g'(2) \neq g'(1)$.

19.

b) $h_x(0,0) = h_y(0,0) = e^{-1}$.

20. $x + y + z = 4, x + y + z = -4$.

21.

a) $\nabla f(x,y,z) = (3x, 3y, 2z)$;

b) $3x + 3y + 2z = 8$.

22.

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -2$;

d) $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = -1$

24. $\left(H(x,y)\right)' = \cos(3x - y)\frac{6yz^2+2z+3}{3x^2y+1} - \cos(3x - y)\frac{6z^2-6x^2y-9x^2}{6x^2y+2}\left(x^2y \neq -\frac{1}{3}\right)$.

25. b) $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -1, \frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = 0$.

26. a) g de classe C^1 num intervalo aberto a que pertence $1, g(1) = \frac{1}{2}$ e $g'(1) = 1$.

27. Planos tangentes paralelos ao plano xOy não existem. Planos tangentes paralelos ao plano yOz nos pontos $(2,0,0), (0,0,0)$. Planos tangentes paralelos ao plano xOz nos pontos $(1,1,0), (1,-1,0)$.

Capítulo 5

1.

a) $\frac{59}{27}$ é máximo local;

b) -2 é mínimo local;

c) $\frac{5}{4}\sqrt[5]{4^3}$ é mínimo local;

d) 1 é máximo local;

e) $-\frac{4}{3}$ é mínimo local;

f) 1 e $\frac{1763}{432}$ são mínimos locais.

2. a^4 é máximo local de f (se 0 < a < 4).

5. $f(1,2) = -5$ é mínimo global de f.

6.

b) Mínimo global: $f(0,1) = 0$; Máximo global: $f(0,4) = 9$.

7. $(1,2,1)$

8. $P = (1,1,1)$.

9.

a) Mínimo global: $f(-2,-3)=-26$ máximo global: $f(2,3)=26$;

b) Mínimo global: $\mathrm{f}(-2,-1)=-4$; máximo global: $f(2,1)=4$;

c) Máximo global: $f\left(\frac{10}{12},\frac{15}{12}\right)=\frac{25}{24}$;

d) Extremos nos pontos $(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm 1)$. Máximo igual a $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ e mínimo igual a $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

e) Máximo global de valor $\frac{3}{2}$ nos pontos $(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$; mínimo global de valor $\frac{1}{2}$ nos pontos $(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

10. O ponto que se encontra à menor temperatura é $P=(0,2)$ (com temperatura 0).

11. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

12. $x=1$ e $y=1$.

13. É o triângulo retângulo com catetos $x=y=\sqrt{2S}$ e hipotenusa $z=2\sqrt{S}$.

14.

b) $f(0,0)=0$ é o mínimo global e $f(-2,0)=f(2,0)=2$ é o máximo global de f em D;

c) Não.

15. $f\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)=-3$ é mínimo local; $f\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$ é máximo local.

16. O valor máximo de f é $\frac{r^6}{27}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Carvalho e L. Descalço, *Cálculo Integral a várias variáveis, O essencial*, Sílabas e Desafios, 2016.

[2] P. Carvalho e L. Descalço, Exercícios de Cálculo III, siacua.web.ua.pt

[3] T. Apostol, Cáculo vol 2, Ed Reverté.Lda, 1993.

[4] A. Breda, J. Nunes da Costa, *Cálculo com Funções de Várias Variáveis,* Apêndice B, Ed. McGrawHill, 1996.

[5] E.L. Lima, *Curso de análise,* Volume 2. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1989.

[6] Larson, Hostetler and Edwards, Cálculo vol 2, Oitava edição, McGraw-Hill 2006.

[7] J. Stewart, Cálculo vol II, 5a edição, Cengage Learning, São Paulo, 2008.

[8] H. Bortolossi, Cálculo diferencial a várias variáveis, Ed Loyola, 2002.

[9] M. Craizer, G. Tavares, Cálculo integral a várias variáveis, Ed Loyola, 2002.