Exemplo I (Caso A)

$$X_m = 3X_{m-1} - 2X_{m-2} + \underbrace{2^m}_{d_m}, \quad m \geq 2$$

p^n, $p = 2$

Exemplo II (Caso B)

$$X_m = 3X_{m-1} - 2X_{m-2} + (m+1), \quad m \geq 2$$

polinómio grau 1

Exemplo III (Combinar soluções aka Princípio da Sobreposição)

$$X_m = 3X_{m-1} - 2X_{m-2} + 2^m + (m+1), \quad m \geq 2$$

Parte homogénea de ambos os problemas $\Longrightarrow X_m = 3X_{m-1} - 2X_{m-2} - 2$

Solução de uma ERL

$$X_m = \underbrace{a_m}_{\text{solução da eq. homogénea}} + b_m$$

b_m → solução particular

Polinómio característico

$X_m = q^m$

$q^m - 3q^{m-1} + 2q^{m-2} = 0, \quad m \geq 2$

$m = 2 \Longrightarrow q^2 - 3q + 2 = 0$

$q^2 - 3q + 2 = (q-1)(q-2)$ — multiplicidade 1, 1

$\hookrightarrow a_m = \alpha \times 1^m + \beta \times 2^m, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Exemplo I (determinar solução particular)

$$\alpha + \beta 2^m + \overbrace{\gamma m 2^m}^{b_m(1)}$$

γ → constante a determinar

$X_m = 3X_{m-1} - 2X_{m-2} + 2^m$

$\boxed{X_m = \gamma m 2^m} \Leftrightarrow \gamma m 2^m = 3\gamma(m-1)2^{m-1} - \cancel{2\gamma(m-2)2^{m-2}} + 2^m, \quad m \geq 2 \quad (\gamma = ??)$

$m = 2$

$m = 2 \Longrightarrow 8\gamma = 6\gamma + 4$

$\Leftrightarrow (8-6)\gamma = 4$

$\Leftrightarrow \gamma = \frac{4}{2} = 2$

$b_m(1) = 2m2^m = m2^{m+1}$

$b_m(1)$ → solução particular; 2 → γ

Exemplo II

$$\alpha + \beta 2^m + \overbrace{(A_0 + A_1 m)}^{\text{polinómio de grau 1}} m$$

$(A_0 + A_1 m)$ → grau do termo não homogéneo

m → multiplicidade de $q = 1$ (multiplicidade 1)

(
Exemplo II (?)

$P(q) = (q-1)^3$

$d_m = m + 5$

Solução particular: $b_m\ (A_0 + A_1 m + A_2 m^2)\, m^2$
)

Solução particular ex II

$b_m(2) = A_0 m + A_1 m^2 \quad (A_0, A_1 \text{ – constantes a determinar})$

$b_m(2) - 3b_{m-1}(2) + 2b_{m-2}(2) = (m+1)$

$\Leftrightarrow A_0 m + A_1 m^2 - 3\left(A_0(m-1) + A_1(m-1)^2\right) + 2\left(A_0(m-2) + A_1(m-2)^2\right) = (m+1)$

$m = 1$, $m = 2$

$$\begin{array}{l} (m=2) \\ \\ (m=1) \end{array} \begin{cases} 2A_0 + 4A_1 - 3(A_0 + A_1) = 3 \\ A_0 + A_1 + 2(-A_0 + A_1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A_0 + A_1 = 3 \\ -A_0 + 3A_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A_1 = -1 \\ -A_0 + 3A_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{1}{2} \\ A_0 = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$L_2 - L_1 = L_1$

$\therefore b_m(2) = -\frac{7}{2}m - \frac{1}{2}m^2 \Longrightarrow$ Solução particular Ex II

Ex III

$$X_m = 3X_{m-1} - 2X_{m-2} + 2^m + (m+1), \quad m \geq 2$$

Solução particular: $b_m(3) = \underbrace{m2^{m+1}}_{\text{SP Ex I}} \overbrace{- \frac{7}{2}m - \frac{1}{2}m^2}^{\text{SP Ex II}}$

Solução geral da eq.

$$X_m = 3X_{m-1} - 2X_{m-2} + 2^m + (m+1)$$

$$X_m = \alpha + \beta 2^m + m2^{m+1} - \frac{7}{2}m - \frac{1}{2}m^2 \quad (\alpha, \beta \text{ – constantes})$$

Solução do problema do Valor Inicial

$$\begin{cases} \boxed{X_m = 3X_{m-1} - 2X_{m-2} + 2^m + (m+1), \quad m \geq 2} \\ X_0 = 0 \\ X_1 = -2 \end{cases}$$

→ determinar solução da equação

$$\begin{array}{l} (m=0) \\ \\ (m=1) \end{array} \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \cancel{4 - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

$$X_m = 2 - 2^{m+1} + m2^{m+2} - \frac{7}{2}m - \frac{1}{2}m^2$$

Solução pretendida

Folha 4

7) b)
$$\begin{cases} a_m - 4a_{m-1} + 4a_{m-2} = m + 2^m, \quad m \geq 2 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Passo 1: Determinar polinómio característico

$$a_m - 4a_{m-1} + 4a_{m-2} = 0 \xRightarrow[a_m = q^m]{} q^m - 4q^{m-1} + 4q^{m-2} = 0 \xRightarrow[m=2]{} \underbrace{q^2 - 4q + 4}_{(q-2)^2} = 0$$

Passo 2: Solução geral da eq. homogénea

X_m → solução eq. homogénea

$X_m = \alpha 2^m + \underbrace{\beta m 2^m}_{}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$q = 2$ → raiz de multiplicidade 2

Passo 3: Solução particular para a eq.

Passo 3a

Solução particular eq

$a_m - 4a_{m-1} + 4a_{m-2} = \underbrace{m}_{= m \times 1^m}$

$b_m = B_m$ (B – constante a determinar)

solução particular da eq.

Passo 3b

Solução particular eq

$a_m - 4a_{m-1} + 4a_{m-2} = 2^m$

$e_m = Cm^2 2^m$ (C – constante a determinar)

solução particular da eq

$$a_m = \underbrace{X_m}_{} + b_m + e_m$$

eq. homogénea

Continuação 3a

$B_m - 4B(m-1) + 4B(m-2) = m$

$m = 2$

$m = 2$: $2B - 4B = 2 \Leftrightarrow B = -1$

Continuação 3b

$$\underbrace{Cm^2 2^m}_{a_m} - 4\underbrace{C(m-1)^2 2^{m-1}}_{a_{m-1}} + 4\underbrace{C(m-2)^2 2^{m-2}}_{a_{m-2}} = 2^m$$

$m = 2$

$m = 2 \Longrightarrow 16C - 8C = 4 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$

Solução geral: $a_m = \underbrace{\alpha 2^m + mB2^m}_{X_m} \underbrace{- m}_{b_m} + \underbrace{m^2 2^{m-1}}_{e_m}$

$$\begin{array}{l} (m=0) \\ \\ (m=1) \end{array} \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + 2\beta \cancel{-1} \cancel{+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore a_m = m2^{m-1} - m + m^2 2^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Equações Recorrência Não Linear (ERNL)

$$5^{X_m} = 12 \times 5^{X_{m-1}} + 3, \quad m \geq 1$$

Linearizar eq

$y_m = 5^{X_m}$

$y_{m-1} = 5^{X_{m-1}}$

Eq. linearizada

$y_m = 12y_{m-1} + 3$

Eq. homogénea

$(P(q) = q - 12) \quad y_m = 12y_{m-1}$ (p. geométrica de razão 12)

$a_m = \alpha(12)^m$ → Solução eq. homogénea

Solução particular

$b_m = B; \quad B = 12B + 3$

$\Leftrightarrow B = -\frac{3}{11}$

$\therefore y_m = \alpha(12)^m - \frac{3}{11}$

$$X_m = \log_5(y_m) = \log_5\left(\alpha(12)^m - \frac{3}{11}\right), \quad m \in \mathbb{N}$$

Exemplo (transformação logarítmica)

$$\begin{cases} X_m = X_{m-1} + X_{m-2}, \quad m \geq 2 \\ \alpha_0 = \alpha_1 = 2^1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \log_2(X_m) = \log_2(X_{m-1}) + \log_2(X_{m-2}), \quad m \geq 2 \\ \log_2(X_0) = 1 \\ \log_2(X_1) = 1 \end{cases}$$

$\log_a(X_{m-1} \times X_{m-2})$

$$\xRightarrow{Y_m = \log_2(X_m)} \overbrace{\begin{cases} y_m = y_{m-1} + y_{m-2}, \quad m \geq 2 \\ y_0 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}}^{\text{Problema linearizado} \Longrightarrow X_m = 2^{y_m} = 2^{F_m}} \Longrightarrow y_m = F_m \ (\text{nº Fibonacci})$$

11) a)
$$\begin{cases} a_m = m\, a_{m-1} + m!, \quad m \geq 1 \\ a_0 = -2 \end{cases} \xRightarrow{a_m = m!\, b_m} \begin{cases} m!\, b_m = m!\, b_{m-1} + m! \\ 0!\, b_0 = -2 \end{cases}$$

$a_m = m!\, b_m$

$(\ldots) \Leftrightarrow \begin{cases} b_m = b_{m-1} + 1 \\ b_0 = -2 \end{cases} \Longrightarrow$ P. aritmética razão 1

$\therefore b_m = -2 + m, \quad m \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow a_m = m!\,(m-2)$