UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cálculo II C — Teste 2

6/06/2025

Avaliação Contínua — Duração: 1h30

Deve responder a cada uma das 4 questões numa folha diferente. Comece por escrever o seu nome e número nas 4 folhas. Justifique claramente as suas respostas. Uma resposta do GeoGebra, sem justificação, não tem qualquer cotação. Boa sorte!

1. (5,0 val.) Considere a função $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^3+y^3} & , \quad (x,y) \in \mathcal{D}\backslash\{(0,0)\} \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Determine e descreva geometricamente o domínio $\mathcal{D}$ da função f.

   (b) Estude o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

   (c) Diga, justificando, se f é diferenciável em $(0,0)$.

2. (5,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

   (a) Determine as derivadas parciais de f, indicando os seus domínios.

   (b) Obtenha a expressão da derivada direcional de f no ponto $(1,1)$, $D_U f(1,1)$, segundo qualquer vetor unitário $U = (u_1, u_2)$.

3. (5,0 val.) Considere a equação $\mathrm{e}^{x^2+y^2} + y = \mathrm{e} + 1$.

   (a) Mostre que a equação define y como função de x, $y = g(x)$, numa vizinhança do ponto $(0,1)$ e calcule $g'(0)$.

   (b) Utilizando a regra da cadeia calcule a derivada da função $h(x, g(x))$ em $x = 0$, sendo $h(x,y) = xy$ e g a função definida na alínea anterior.

4. (5,0 val.) Considere a função com domínio $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 \leq 9\}$ definida por $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$.

   (a) Esboce $\mathcal{D}$ e justifique que se pode aplicar o Teorema de Weierstrass para concluir que f atinge máximo e mínimo globais em $\mathcal{D}$.

   (b) Determine o(s) ponto(s) crítico(s) de f e classifique-o(s) usando o teste da Hessiana.

   (c) Determine os extremos globais de f.

Formulário

Série de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \,\sin(nx)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

Derivadas parciais e direcionais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

$$D_U f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P+hU) - f(P)}{h}$$

$$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U$$

Plano tangente

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Regra da cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

Teorema da função implícita

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$