Aula 13 dúvidas

Exemplo 3.4.7

$$\underbrace{\binom{n}{m}}\underbrace{\binom{m}{k}} = \underbrace{\binom{n}{k}}\overbrace{\binom{n-k}{m-k}}$$

de entre os restantes n-k elementos escolher m-k *

nº de subconjuntos A de $\{1,\dots,n\}$ de tamanho m

nº de subconjuntos de um conjunto de tamanho m com k elementos

nº de subconjuntos de $\{1,\dots,n\}$ com k elementos

* Isto dá-nos o nº de pares (A, B) $A \subseteq B \subseteq \{1,\dots,n\}$

$|A| = k$
$|B| = m$

A: líderes da equipa com k elementos
B: equipa de m elementos

Exemplo 3.4.8

Sequências de bolas

vermelhas - 3
verdes - 2
azuis - 4

} bolas da mesma cor são idênticas

$$\binom{9}{3,2,4} = \frac{9!}{2!\,3!\,4!} = \underbrace{\binom{8}{2,2,4}} = \binom{8}{3,1,4} = \binom{8}{3,2,3}$$

vermelho _ _ _ _ _
verde _ _ _ _ _
Azul _ _ _ _ _

Teste 1 (22/23)

① a) $\forall x\, \exists y\, (\text{Filo}(x) \wedge \text{Livro}(y)) \longrightarrow \text{Escrever}(x, y)$

$\forall x\, (\text{Filo}(x) \wedge \exists y\, \text{Livro}(y)) \longrightarrow \text{Escrever}(x, y)$

$\forall x\, \text{Filo}(x) \rightarrow (\exists y\, \text{Livro}(y) \wedge \text{Escreve}(x, y))$

"Se é filósofo então escreve livro"

Forma prenex

$\forall x\, \neg \text{Filo}(x) \vee (\exists y\, \text{Livro}(y) \wedge \text{Escreve}(x, y))$ para ficar Forma conjuntiva

função Skolem

$\equiv \forall x\, \boxed{\exists y}\, ((\neg \text{Filo}(x) \vee \text{Livro}(y)) \wedge (\neg \text{Filo}(x) \vee \text{Escrever}(x, y)))$

$f(x) = y \longrightarrow$ f. Skolem

$\equiv \forall x\, ((\neg \text{Filo}(x) \vee \text{Livro}(f(x))) \wedge (\neg \text{Filo}(x) \vee \text{Escrever}(x, f(x))))$

b) $\forall y\, \forall x\, (\text{Alunode}(y, x) \wedge \text{Filo}(x)) \longrightarrow (\exists z\, \text{Livro}(z) \wedge \text{Escrever}(x, z) \wedge \text{Ler}(y, z))$

$\forall y\, (\text{Alunode}(y, x) \wedge \underbrace{\exists x}\, \text{Filo}(x)) \longrightarrow (\exists z\, \text{Livro}(z) \wedge \text{Escrever}(x, z) \wedge \text{Ler}(y, z))$

por causa do alcance $(\exists \Rightarrow \forall)$ pelo desfazer do "$\rightarrow$"

② $\varphi_1 : \forall x\, \exists y\, (P(x, y) \wedge Q(x, y))$

$\equiv \forall x\, (\underbrace{P(x, f(x)) \wedge Q(x, f(x))}_{2 \vee \text{cláusulas}})$, $f(x) \rightarrow$ função Skolem

$\varphi_2 : \forall x\, [((\exists y\, P(x, y)) \wedge (\exists z\, Q(x, z))) \longrightarrow (\exists w\, R(x, w))]$

$\equiv \forall x\, [((\neg(\exists y\, P(x, y)) \vee \neg(\exists z\, Q(x, z))) \vee (\exists w\, R(x, w))]$

$\equiv \forall x\, [((\forall y\, \neg P(x, y) \vee \forall z\, \neg Q(x, z)) \vee (\exists w\, R(x, w))]$

não depende de nada que está para trás

$\equiv \forall x\, \forall y\, \forall z\, \exists w\, (\neg P(x, y) \vee \neg Q(x, z)) \vee (R(x, w))$

$w = g(x) \longrightarrow$ função Skolem

$\equiv \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\underbrace{\neg P(x, y) \vee \neg Q(x, z) \vee R(x, g(x))}_{1 \vee \text{cláusula}})$

$\neg \psi \equiv \neg(\forall x\, \exists w\, R(x, w))$

$\equiv \exists x\, \forall w\, R(x, w)$

não depende de nenhuma variável

$c = x \longrightarrow$ constante Skolem

$\equiv \forall w\, \underbrace{R(c, w)}_{1 \vee \text{cláusula}}$

$\Gamma = \{P(x, f(x)), Q(x, f(x)), \neg P(x, y) \vee \neg Q(x, z) \vee R(x, g(x)), \neg R(c, w)\}$

Queremos mostrar $\Gamma \models \perp$

c_1	$P(x, f(x))$
c_2	$Q(x, f(x))$
c_3	$\neg P(x, y) \vee \neg Q(x, z) \vee R(x, g(x))$
c_4	$\neg R(c, w)$
c_5	$\neg P(c, y) \vee \neg Q(c, z)$
c_6	$\neg Q(c, z)$
c_7	$\perp$

BR(3,4) umg $\{c/x,\ g(c)/w\}$

BR(1,5) umg $\{c/x,\ f(c)/y\}$

$\boxed{\text{BR}}$(6,2) umg $\{c/x,\ f(c)/z\}$

NÃO pode ser aplicado para variáveis em comum (Renomear)

SÓ PODES SUBSTITUIR VARIÁVEIS

Outro caminho... pior

⋮

c_5	$P(t, f(t))$
c_6	$\neg Q(t, z) \vee R(t, g(t))$

Renomeação $x \rightarrow t$ variável

umg $\{t/x,\ f(t)/y\}$ BR(3,5)

⋮

③ F e P $\overset{+}{\text{ou}}$ F e E $\overset{+}{\text{ou}}$ E e P

$$\binom{5}{1}\times\binom{11}{1} + \binom{5}{1}\times\binom{7}{1} + \binom{7}{1}\times\binom{11}{1} = 5\times 11 + 5\times 7 + 7\times 11 = 55 + 35 + 77 = 167$$

④ 1ª classe - 4
2ª " - 7
restaurante - 1
bagagem - 2

a) $\boxed{\text{sequência c/ repetição}}$

tamanho = 14

$$\binom{14}{4,7,1,2} = \frac{14!}{4!\,7!\,1!\,2!}$$

b) 1ª classe são 1 só

tamanho = 11 (inclui a "1" de 1ª classe)

$$\binom{11}{1,2,1,7} = \frac{11!}{1!\,2!\,1!\,7!}$$

⑤ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$

$\boxed{x_2 \geq 3}$

$x_1 \leq 2$

$x_1 = 0$ bolas ou $x_1 = 1$ bola ou $x_1 = 2$ bolas

$x_1 = 0$ bolas:

x_1 x_2 x_3 x_4

bolas já colocadas = 3 + 0 = 3

nº de "1" = bolas restantes = 15 - 3 = 12

caixas restantes = 3 caixas

nº de "0" = 3 - 1 = 2

$$\left(\!\binom{3}{12}\!\right) = \binom{12+3-1}{12} = \binom{14}{12} = \frac{14\times 13}{2}$$

$x_1 = 1$ bola:

x_1 x_2 x_3 x_4

bolas já colocadas = 3 + 1 = 4

bolas restantes = 11 → nº "1"

caixas = 4

nº de "0" = 4 - 1 = 3

$$\left(\!\binom{3}{11}\!\right) = \binom{11+3-1}{11} =$$

$x_2 + x_3 + x_4 = 14$

x_2 3 4

$$\left(\!\binom{3}{11}\!\right)$$

$x_1 = 2$ bolas:

x_1 x_2 x_3 x_4

$x_2 + x_3 + x_4 = 13$

x_2 3 4

$$+ \left(\!\binom{3}{10}\!\right)$$

+

⑥ a) Se existirem 9 alturas ≠ não tínhamos a garantia de que qlqr subconjunto de 9 pessoas existissem pelo menos 2 com = altura.

b) Pessoas → Alturas

$P = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_8$

→ 8 alturas ≠ (das 9 pessoas, pelo menos 2 têm = altura)

$|P| = 32 = 4\times 8 \implies |A_i| > 5$ para algum i