Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II-C **2024/2025**

Ficha de Exercícios 3 - Parte I
Funções reais de várias variáveis reais (Parte I):
Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$; Domínios; Conjuntos de nível; Limites; Continuidade; derivação parcial e derivadas direcionais; diferenciabilidade e plano tangente; Regra da cadeia; Teorema da função implícita

1. Represente geometricamente os seguintes conjuntos:

   (a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$;
   (b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$;
   (c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$;
   (d) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$.

   Caracterize cada um dos conjuntos do ponto de vista topológico (usando a topologia usual em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$).

2. Determine o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$;
   (b) $f(x,y,z) = \sqrt{y - x^2}$;
   (c) $f(x,y) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$;
   (d) $f(x,y) = \ln(xy)$;
   (e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;
   (f) $f(x,y,z) = \operatorname{arcsen} \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. Determine as curvas/superfícies de nível das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = x - 4y$
   (b) $f(x,y) = x^2 - 4y$
   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$
   (d) $f(x,y) = x^2 - 4y^2$
   (e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

4. Suponha que $T(x,y) = 40 - x^2 - y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xOy (admita que x e y são dados em quilómetros e a temperatura T em graus Celsius). Um indivíduo encontra-se na posição $(3,2)$ e pretende dar um passeio.
   Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se desejar desfrutar sempre da mesma temperatura.

5. Determine, caso existam, os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^4}{2x^2 + 4y^2}$
   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$
   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + 2y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$
   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + 2y^2}$
   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{y^4 + (y-x)^2}$

6. Considere f a função de domínio contido em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

   (a) Determine o domínio de f e diga, justificando, se é um conjunto fechado.
   (b) Determine as curvas de nível $\mathcal{C}_k$ de f, para $k=0$ e $k=\frac{1}{2}$, respetivamente. Faça os seus esboços gráficos.
   (c) Mostre que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

7. Determine o domínio de continuidade das funções, de domínio $\mathbb{R}^2$, definidas por:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$.

8. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função f dada por
$$f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} x + \cos(z-3y).$$

9. Calcule, caso existam, as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções nos pontos P indicados:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ $[P=(2,2)]$;
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{4-x^2-2y^2}\,, & \text{se} \quad x^2+2y^2 \neq 4 \\ 0\,, & \text{se} \quad x^2+2y^2 = 4 \end{cases}$ $[P=(2,0)]$;
   (c) $f(x,y) = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \\ x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}\,, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$ $[P=(0,0)]$.

10. Determine as derivadas parciais de primeira e de segunda ordens da função
$$f(x,y) = \ln(x+y) - \ln(x-y).$$

11. Sendo $z = \ln(x^2+xy+y^2)$, mostre que $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2.$

12. Mostre que a função $f(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x)$ verifica a equação
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (\textit{equação de Laplace}).$$

13. Considere a função $f(x,y) = \ln x + xy^2$.

   (a) Indique o domínio de f.
   (b) Determine equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1,2,4)$.

14. Seja $f(x,y,z) = x \operatorname{sen}(yz)$.

   (a) Determine o gradiente de f.
   (b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1,3,0)$ segundo o vetor unitário U com a direção e sentido de $V = (1,2,-1)$.

15. Considere a função f definida por $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

   (a) Indique o domínio D de f e caracterize-o do ponto de vista topológico.
   (b) Descreva as curvas de nível da função f.
   (c) Justifique que f é diferenciável em $(3,0)$.
   (d) Escreva a expressão geral das derivadas direcionais de f no ponto $(3,0)$.
   (e) Determine a direção e sentido segundo os quais se atinge o valor máximo das derivadas direcionais de f em $(3,0)$.

16. Determine a reta normal e o plano tangente à superfície cónica
$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3 - z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$
no ponto $(3,4,-2)$.

17. Considere a função f dada por $f(x,y,z) = 3xy + z^2$.

    (a) Calcule o gradiente de f num ponto genérico.

    (b) Determine uma equação do plano tangente à superfície de nível 4 de f, no ponto $(1,1,1)$.

18. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = x + y + z - e^{xyz}$.

    (a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$.

    (b) Determine a direção e sentido de maior crescimento de f no ponto $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e calcule a derivada direcional correspondente nesse ponto.

    (c) Determine uma equação cartesiana do plano tangente à superfície de nível 0 de f no ponto $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

    Resolução:

    (a) As derivadas de 1.ª ordem de f em $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ são:

    $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1 - yz\, e^{xyz}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 1 - xz\, e^{xyz}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1 - xy\, e^{xyz}$$

    que são contínuas em $\mathbb{R}^3$, logo, f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$.

    (b) A direção e sentido de maior crescimento de f em $P = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é dada pelo vetor gradiente de f em P:

    $$\begin{aligned} \nabla f(P) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{\partial f}{\partial y}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{\partial f}{\partial z}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}, 1 - 0, 1 - 0 \right) \\ &= \left(\frac{3}{4}, 1, 1 \right) \end{aligned}$$

    A norma deste vetor é $\|\, \nabla f(P) \,\| = \frac{\sqrt{41}}{4}$. Seja U o vetor unitário com a direção e sentido de $\nabla f(P)$. A derivada direcional correspondente nesse ponto é dada por

    $$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U = \frac{\sqrt{41}}{4}.$$

    (c) Notar que $\mathcal{S}_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z - e^{xyz} = 0 \right\}$ e portanto $P \in \mathcal{S}_0$. Uma vez que $\nabla f(P) \neq (0,0,0)$, o plano tangente a $\mathcal{S}_0$ em $P = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tem esse vetor como vetor ortogonal. Assim, uma equação desse plano é

    $$\left(x - 0, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{3}{4}, 1, 1 \right) = 0$$

    ou seja, $3x + 4y + 4z - 4 = 0$ é uma equação cartesiana do plano pedido.

19. Determine $\dfrac{dz}{dt}$ por dois processos distintos:

    (a) $z = \operatorname{sen}(xy)$, onde $x = 3t$ e $y = t^2$.

    (b) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, onde $x = \operatorname{sen}(3t)$ e $y = \cos(3t)$.

20. Seja $z = \operatorname{sen}(x^2 + 2y)$, onde $x(s,t) = s + t$ e $y(s,t) = 2s - t$. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial s}(0,0)$.

21. Seja $z = xy^2 + \ln(5 + x^2) - e^y$, onde $x(s,t) = s \cdot \cos(t)$ e $y(s,t) = s \cdot \operatorname{sen}(t)$. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial s}(\pi, 0)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}(\pi, 0)$.

22. Considere a equação $y^4 - xy^2 + x^3 - 1 = 0$. Mostre que esta equação define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(1,1)$ e determine $y'(1)$.

23. Considere a equação $e^x - 2yx + y^4 - y = 1$. Verifique se esta equação define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(0,1)$ e, em caso afirmativo, calcule $y'(0)$.

Exercícios de revisão

24. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

    (a) Determine o domínio de f, D_f.

    (b) Averigue se existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

    (c) Determine a curva de nível -1, $\mathcal{C}_{-1}$, e represente-a geometricamente.

(Teste 1 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

25. Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x(r,s,t) = rse^t, y(r,s,t) = rs^2e^{-t}$ e $z(r,s,t) = r^2s \cdot \operatorname{sen}(t)$, determine o valor de $\dfrac{\partial u}{\partial s}(1,1,0)$.

26. Considere a equação $\ln(xy) - 2x^2 + y + 1 = 0$. Verifique se esta equação define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(1,1)$ e, em caso afirmativo, calcule $y'(1)$.

Questões de escolha múltipla:

27. Uma equação do plano tangente à superfície de equação $x^2 - 2y^2 + xz^2 = 5$ no ponto $(1,0,2)$ é:
(a) $-3x + 2z + 7 = 0$
(b) $3x - 2z + 1 = 0$
(c) $3x + 2z - 7 = 0$
(d) $3x + 2z - 1 = 0$

(Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

28. Sejam $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xy) + \mathrm{e}^z$ e $U = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. A derivada direcional de f segundo o vetor U no ponto $P = (0,1,2)$ é igual a:
(a) $1 + \mathrm{e}^2$
(b) $\dfrac{1+\mathrm{e}^2}{\sqrt{3}}$
(c) $1 - \mathrm{e}^2$
(d) $\mathrm{e}^2 - 1$

(Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

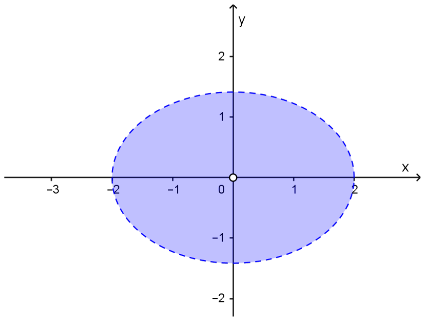
29. Relativamente à função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}\operatorname{sen}(-xy^2) & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

podemos afirmar que:
(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$
(c) f é contínua em $\mathbb{R}^2$
(d) não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

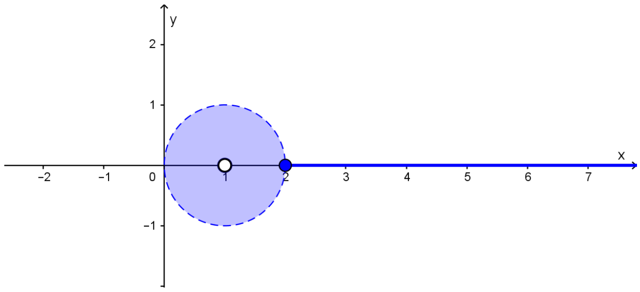
(Exame Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)

Soluções

1. (a) É aberto.

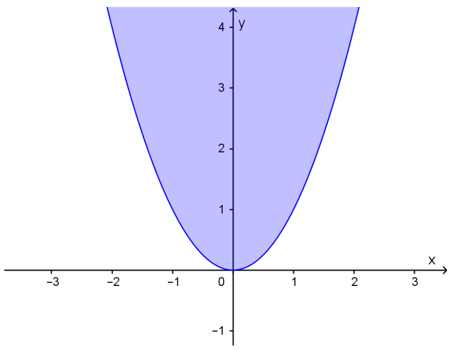


(b) Não é aberto, nem é fechado.

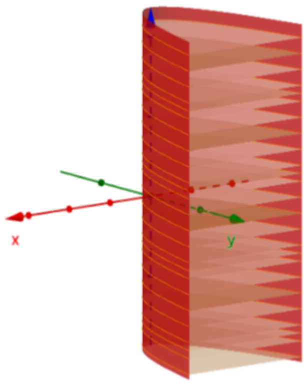


(c) É fechado.

(d) É fechado.

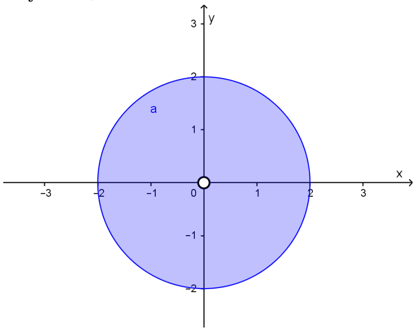


2. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.

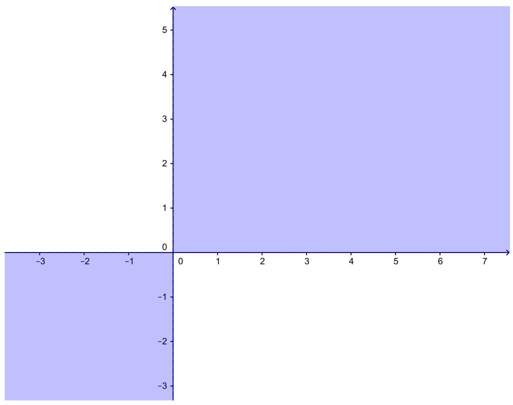


(b) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2\}$. Trata-se de um cilindro parabólico (incluindo os pontos que se situam no seu interior).

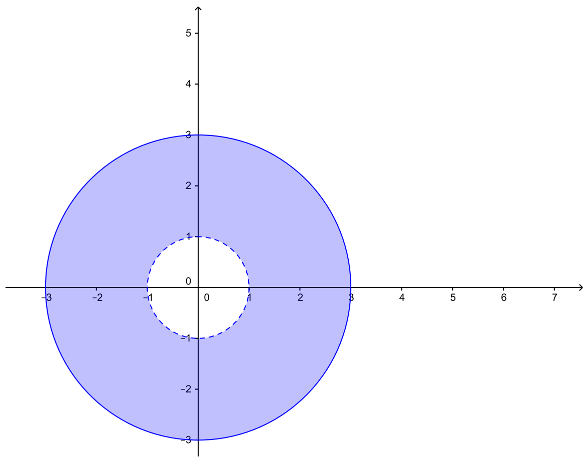
(c) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x, y) \neq (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.



(d) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$.



(e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}$.



(f) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0) \wedge z^2 \leq x^2 + y^2\}$.

3. (a) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{4} - \frac{k}{4}\}$.
   Nota: é a reta de declive $\frac{1}{4}$ e com ordenada na origem $-\frac{k}{4}$.

   (b) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^2}{4} - \frac{k}{4}\}$.
   Nota: é uma parábola com concavidade voltada para cima e vértice $\left(0, -\frac{k}{4}\right)$.

   (c) $\mathcal{C}_0 = \{(0,0)\}$. Para $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\}$ (nota: é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{k}$).

   (d) $\mathcal{C}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\frac{x}{2}\}$ (nota: são duas retas que passam na origem e com delives $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$). Para $k \neq 0$, $\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 = k\}$.

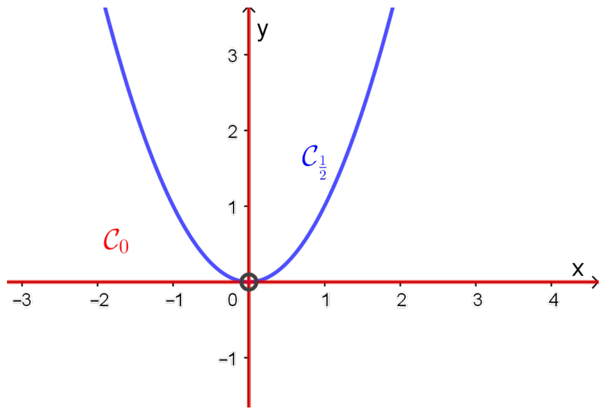
   (e) $\mathcal{S}_0 = \{(0,0,0)\}$. Para cada $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{S}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}$ é a superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{k}$.

4. $\{(x,y) : T(x,y) = T(3,2)\} = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 13\}$

5.
   (a) 0; (b) $\frac{1}{5}$; (c) 0; (d) 0; (e) Não existe.

6. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

   (b) $\mathcal{C}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\} \backslash \{(0,0)\}$, $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \backslash \{(0,0)\}$.



(c) —

7. (a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\neq y\}\cup\{(0,0)\}$
   (b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon xy\neq 0\}\cup\{(0,0)\}$

8. Para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, temos
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=3\operatorname{sen}(z-3y)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-\operatorname{sen}(z-3y)$.

9. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,2)=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,2)=\dfrac{1}{2}$.
   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,0)=0$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,0)$ não existe.
   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

10. Para $y>-x$ e $x>y$, temos
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2y}{y^2-x^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2x}{x^2-y^2}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$.

11. –

12. –

13. (a) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0\}=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$.
    (b) Plano tangente: $5x+4y-z-9=0$.
    Reta normal:
    $(x,y,z)=(1,2,4)+\alpha(5,4,-1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (equação vetorial) ou
    $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{4}=4-z$ (equações cartesianas).

14. (a) $\nabla f(x,y,z)=(\operatorname{sen}(yz),xz\cos(yz),xy\cos(yz))$.
    (b) $D_{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)}f(1,3,0)=-\frac{3}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

15. (a) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2>0\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
    (é aberto e não é fechado).
    (b) As curvas de nível $k\in\mathbb{R}$ de f são $C_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=e^k\}$ (circunferências de centro $(0,0)$).
    (c) Sim, porque tem derivadas parciais de 1.ª ordem contínuas em todo o seu domínio, em particular em $(3,0)$.
    (d) $D_{(u,v)}f(3,0)=\frac{2}{3}u$, com $u^2+v^2=1$.

(e) Na direção e sentido do vetor $(1,0)$, (notar que é a direção e sentido do vetor gradiente de f em $(3,0)$).

16. Reta normal: $(x,y,z) = (3,4,-2) + \alpha(3,4,5),\ \alpha \in \mathbb{R}$.
    Plano tangente: $3x + 4y + 5z - 15 = 0$.

17. (a) $\nabla f(x,y,z) = (3y, 3x, 2z)$.
    (b) $3x + 3y + 2z - 8 = 0$.

18. Resolvido

19. (a) $9t^2 \cos(3t^3)$.
    (b) 0.

20. 4

21. $\dfrac{\partial z}{\partial s}(\pi,0) = \dfrac{2\pi}{\pi^2+5}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}(\pi,0) = -\pi$.

22. -1

23. $\frac{1}{3}$

24. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
    (b) Não existe.
    (c) $\mathcal{C}_{-1} = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = -1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x = 0\}$.
    Logo $\mathcal{C}_{-1}$ é o eixo Oy excluindo o ponto $(0,0)$.

25. 6

26. $\frac{3}{2}$

27. (c)

28. (b)

29. (a)