

# Cálculo I-C

## Slides de apoio às aulas

### Equações Diferenciais Ordinárias

Departamento de Matemática  
Universidade Aveiro

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos e do Prof. Alexandre Almeida (pág. 51-92) (indicados na bibliografia).

# Resumo dos Conteúdos

- 1 EDO – Introdução, conceitos e terminologia
- 2 Problemas de valores iniciais e problemas de valores na fronteira
- 3 Equações de variáveis separáveis
- 4 EDO lineares de primeira ordem
- 5 Equações diferenciais homogéneas
- 6 EDO de Bernoulli
- 7 EDO lineares de ordem arbitrária
  - Solução geral e conjunto fundamental de soluções
  - Solução particular de uma EDO linear completa
  - Problemas de Cauchy
  - Aplicação à resolução de um PVI linear

## Equações Diferenciais Ordinárias, o que são?

Equações que envolvem uma função e algumas das suas derivadas, podendo envolver também a variável que é o argumento dessa função. Estas equações aparecem frequentemente quando se pretende modelar matematicamente fenómenos reais, em especial, naqueles de evolução temporal.

### Exemplos:

#### 1. Segunda Lei de Kirchhoff:

Uma das equações básicas usadas em circuitos elétricos é

$$L \cdot I'(t) + R \cdot I(t) = E(t)$$

onde

$L$  = indutância ( $L \in \mathbb{R}$ )

$R$  = resistência ( $R \in \mathbb{R}$ )

$I(t)$  = intensidade de corrente no tempo  $t$

$E(t)$  = voltagem no tempo  $t$ .

## 2. Movimento harmónico de uma mola:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx$$

$m$  = massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical

$x(t)$  = deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola

$k > 0$  constante de mola (Ver figura).

## 3. Modelo logístico (modelo de crescimento populacional):

$$P'(t) = c P(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K} \right)$$

$P(t)$  = número de indivíduos na população no tempo  $t$

$c$  = constante que traduz o crescimento relativo da população

$K > 0$  constante designada por “capacidade de suporte”.

# Equação diferencial ordinária

**Definição:** Chama-se **equação diferencial ordinária (EDO)**, a toda equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{EDO})$$

ou, equivalentemente,

$$\longrightarrow F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x$  é a **variável independente** e  $y = y(x)$  é uma função desconhecida que depende de  $x$  (**variável dependente**).

**Definição:** Chama-se **ordem de uma EDO** à maior ordem da derivada que aparece na equação.

**Definição:** Uma EDO diz-se estar na **forma normal** quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Caso contrário, diz-se que a EDO está escrita na **forma implícita**.

## Exemplos:

1

$$-y' + x^3 - 1 = 0$$

é uma equação diferencial de ordem 1, onde  $x$  é a variável independente e  $y$  a variável dependente.

2

$$3t \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

é uma equação diferencial de ordem 2, onde  $t$  é a variável independente e  $x$  a variável dependente.

3

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2x \left( \frac{dy}{dx} \right)^4 + xy$$

é uma equação diferencial de ordem 3, onde  $x$  é a variável independente e  $y$  a variável dependente. A EDO está na forma normal.

# Solução de uma EDO

**Definição:** Chama-se **solução da equação diferencial**

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

num intervalo  $I$ , a toda a função  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com derivadas finitas até à ordem  $n$ , tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

**Exemplo:**  $\varphi_1(x) = \sin x$  e  $\varphi_2(x) = \cos x - \sin x$  são duas soluções (em  $\mathbb{R}$ ) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!



## Mais terminologia associada a uma EDO de ordem $n$

**Integral geral:** Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando  $n$  constantes arbitrárias; o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração (ou resolução) da EDO.

**Solução particular (ou integral particular):** Solução que se obtém a partir do integral geral.

**Solução singular:** Solução que não se obtém a partir do integral geral.

**Solução geral:** Conjunto de todas as soluções.



**Exemplo:**  $(y')^2 - 4y = 0$ .

- Determinação de um **integral geral**:

$$\begin{array}{rcl} (y')^2 - 4y & = & 0 \\ (y')^2 & = & 4y \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{rcl} y' & = & 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0 \\ y'(y)^{-\frac{1}{2}} & = & 2, \quad y > 0 \end{array} \right.$$

integrando em ordem a  $x$ ,

$$\int y'(x) (y(x))^{-\frac{1}{2}} dx = \int 2 dx, \quad y > 0,$$

determinando as primitivas e simplificando, obtem-se o seguinte **integral geral**:  $y = (x + C)^2$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ .

- Notar que  $y = 0$  é também solução da EDO, mas não pertence ao integral geral obtido. Logo, esta solução é uma **solução singular** da EDO.
- Tomando no integral geral  $C = 0$  e  $C = 1$ , obtem-se duas **soluções particulares**:  $y = x^2$  e  $y = (x + 1)^2$ , respetivamente.

## Problema de valores iniciais

**Definição:** Chama-se **problema de valores iniciais** (PVI) (ou **problema de Cauchy**) a todo o problema que consiste em encontrar **a solução (ou soluções)** de uma dada **equação diferencial** satisfazendo **certas condições** (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

**Exemplo:**  $y = -\frac{x^3}{6} + 1$  é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifique!

# Existência e unicidade de solução para um PVI

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, *i.e.*, do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em  $x_0$ ), desde que a função  $f$  satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO lineares (mais à frente).

## Problema de valores na fronteira

**Definição:** Chama-se **problema de valores na fronteira** (ou **problema de fronteira**) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

**Exemplo:** O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. **Qual é?**

## Equações de variáveis separáveis

**Definição:** Uma equação de variáveis separáveis é uma EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad (\text{com } q(y) \neq 0)$$

para  $p$  e  $q$  dependentes apenas de  $x$  e de  $y$ , respetivamente.

### Determinação dum integral geral

- 1 Escrever a equação na forma (variáveis separadas):

$$q(y)y' = p(x) \quad (1)$$

ou, na forma diferencial,  $q(y)dy = p(x)dx$ .

- 2 O integral geral da equação (1) é dado por  $\int q(y) dy = \int p(x) dx$ . Logo, o integral geral é dado por  $Q(y) = P(x) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , onde  $Q(y)$  é uma primitiva de  $q(y)$  e  $P(x)$  é uma primitiva de  $p(x)$ .

## Exemplo

**Exemplo:**  $y' = \frac{1}{y}e^x, y \neq 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

$$yy' = e^x.$$

O integral geral é dado por:

$$\int y \, dy = \int e^x \, dx.$$

Logo  $\frac{y^2}{2} = e^x + K, K \in \mathbb{R}$  e, portanto,

$$y^2 = 2e^x + C, C \in \mathbb{R}$$

é um integral geral da EDO.

## Exemplo

**Exemplo:**  $y' + xy = 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

Logo 
$$\frac{1}{y}y' = -x, \quad \text{para } y \neq 0.$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int x dx,$$

e, portanto,

$$\ln |y| = -\frac{x^2}{2} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{-\frac{x^2}{2} + K}$$

$$|y| = Ae^{-\frac{x^2}{2}}, \quad A \in \mathbb{R}^+$$

$$y = Be^{-\frac{x^2}{2}}, \quad B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Como  $y = 0$  também é solução da EDO, obtém-se o integral geral:

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## Equações diferenciais lineares de primeira ordem

**Definição:** Uma **equação diferencial linear de primeira ordem** é uma equação do tipo

$$a_0(x) y' + a_1(x) y = b(x)$$

onde  $a_0, a_1, b$  são funções definidas num certo intervalo  $I$ , com  $a_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x) y = q(x).$$

Quando  $b \equiv 0$  (logo  $q \equiv 0$ ), a equação diz-se **incompleta** ou **homogénea**.

**Nota:** Se  $q \equiv 0$  ou se  $p$  e  $q$  forem funções constantes a EDO é de variáveis separáveis.

### Exemplos:

- $y' + xy = 1$  equação diferencial linear de 1.<sup>a</sup> ordem completa.
- $y' + xy = 0$  equação diferencial linear de 1.<sup>a</sup> ordem incompleta (ou homogénea).



**Resolução** de uma **EDO linear** de 1.<sup>a</sup> ordem usando um fator integrante

**Método de resolução:** para resolver a equação

$$y' + p(x)y = q(x), \quad x \in I$$

devemos

- ① determinar o **fator integrante**  $\mu(x) = e^{P(x)}$ , onde  $P(x)$  é uma primitiva de  $p(x)$ ;
- ② multiplicar ambos os membros da equação por  $\mu(x)$  (no primeiro membro vamos obter  $(\mu(x) \cdot y)'$ );
- ③ integrar em ordem a  $x$ .

**Resolução de uma EDO Linear de 1.<sup>a</sup> Ordem usando um Fator Integrante****Exemplo:** A EDO da página 15,

$$y' + xy = 0,$$

que resolvemos como equação de variáveis separáveis, é uma EDO linear de 1.<sup>a</sup> ordem.

Podemos resolvê-la, mais rapidamente, usando o fator integrante  $\mu(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ . Multiplicando ambos os membros da equação por  $\mu(x)$  obtemos

$$e^{\frac{x^2}{2}} y' + e^{\frac{x^2}{2}} xy = 0,$$

isto é,

$$\left( e^{\frac{x^2}{2}} y \right)' = 0.$$

Integrando vem

$$e^{\frac{x^2}{2}} y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é  $y = C e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Resolução de uma EDO Linear de 1.<sup>a</sup> Ordem usando um Fator Integrante**Exemplo:**

$$y' - y = -e^x$$

Como uma primitiva de  $p(x) = -1$  é  $P(x) = -x$ , um fator integrante da EDO é  $e^{-x}$ . Multiplicando ambos os membros da equação por  $e^{-x}$  obtemos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -1$$

i.e.,

$$\frac{d}{dx} (e^{-x}y) = -1.$$

Integrando vem

$$e^{-x}y = \int (-1) dx = -x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é

$$y = (C - x)e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$



## PVI associado a EDO linear de primeira ordem

**Teorema (Existência e unicidade de solução):** Se  $p$  e  $q$  são funções contínuas num intervalo  $I$ , então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

**Exemplo:** O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem como solução única  $y = -xe^x$ , para  $x \in \mathbb{R}$ . **Porquê?**

# Equações diferenciais homogêneas



**Definição:** Chama-se **equação diferencial homogênea** a toda a EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = f(x, y)$$

onde  $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é **homogênea de grau zero**, i.e.,

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{tais que } (\lambda x, \lambda y) \in \mathcal{D}.$$

**Exemplo:**

$$y' = \underbrace{\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}}_{f(x,y)}$$

$f$  é homogênea de grau zero pois, desde que  $\lambda \neq 0$ ,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda x \lambda y + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = f(x, y).$$

## Determinação do integral geral de uma equação diferencial homogénea:

- 1 Certifique-se que a equação na forma:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

é homogénea;

- 2 Em (1), fazer a mudança de variável  $y = zx$ :

$$z'x + z = g(z), \quad (2)$$

onde  $g(z) = f(1, z)$ ;

- 3 Resolver a EDO de variáveis separáveis (2) (nas variáveis  $x$  e  $z$ );
- 4 No integral geral obtido fazer  $z = \frac{y}{x}$  (regressar às variáveis iniciais).

## Exemplo

**Exemplo:** Voltando ao Exemplo da página 21:

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

Ora,

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad x \neq 0,$$

Através da substituição  $y = zx$ , obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{1}{1 + z^2} z' = \frac{1}{x},$$

com integral geral dado por

$$\operatorname{arctg} z = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte, um integral geral da equação homogênea dada tem a forma

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln |x| + C, \quad i.e., \quad y = x \operatorname{tg} (\ln |x| + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

# Equação diferencial de Bernoulli

**Definição:** Uma equação diferencial de Bernoulli é uma EDO da forma:

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

## Observações:

- Se  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$ , a equação é linear de 1.<sup>a</sup> ordem.
- Se  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha \neq 1$ , a equação é redutível a uma EDO linear de 1.<sup>a</sup> ordem, usando a mudança de variável  $z = y^{1-\alpha}$ .

De facto, a equação de Bernoulli pode escrever-se na forma

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

(eventualmente com  $y \neq 0$ ). Com a substituição  $z = y^{1-\alpha}$ , chegamos à equação linear de 1.<sup>a</sup> ordem:

$$z' + (1 - \alpha)a(x)z = (1 - \alpha)b(x).$$



## Exemplo

**Exemplo:** A equação

$$y' + y = e^x y^2$$

é uma equação de Bernoulli (com  $\alpha = 2$ ). Fazendo  $z = 1/y$  ( $y \neq 0$ ) obtemos

$$z' - z = -e^x,$$

cujo integral geral é

$$z = (C - x) e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

► Ver página 19

Assim, um integral geral da equação de Bernoulli é

$$y = \frac{e^{-x}}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

# Equações diferenciais lineares de ordem arbitrária

**Definição:** Uma equação diferencial linear de ordem  $n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , é uma equação da forma:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

onde

$$b: I \rightarrow \mathbb{R};$$

$$a_i: I \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, \dots, n, \text{ com } a_0(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in I.$$



coeficientes da equação

- Se  $b \equiv 0$ , a equação diz-se **incompleta** (ou homogénea); caso contrário, a equação diz-se **completa** (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de **linear de coeficientes constantes**.

# Exemplos

①

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

EDO linear homogénea de segunda ordem.

②

$$e^x y' - \cos x y = x$$

EDO linear completa de primeira ordem.

③

$$y^{(5)} + 2y' = 0$$

EDO linear homogénea de quinta ordem com coeficientes constantes.

## Equação homogénea associada a uma EDO linear

**Nota:** Se na equação

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

tomarmos  $b(x) \equiv 0$ , obtemos a chamada **equação homogénea associada**.

**Exemplo:** A equação homogénea associada à equação completa

$$y'' + y = \cos(x)$$

é a equação:

$$y'' + y = 0.$$

## Solução geral de uma EDO linear completa

**Teorema:** A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

**Exemplo:**

$$y' - 2y = e^{5x}.$$

A equação homogénea associada é a equação

$$y' - 2y = 0,$$

cuja solução geral é dada por  $y_h = C e^{2x}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ .

Uma solução da EDO completa é  $y_p = \frac{1}{3} e^{5x}$  [Verifique!]. Assim, a solução geral da equação completa é

$$y = \underbrace{C e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3} e^{5x}}_{y_p}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## EDO linear homogênea – Conjunto das soluções

Considere-se a EDO:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (1)$$

onde  $a_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , com  $a_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

**Teorema:** Sejam  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- (i)  $y \equiv 0$  é solução de (1);
- (ii) Se  $y$  e  $w$  são soluções de (1), então  $y + w$  é solução de (1);
- (iii) Se  $y$  é solução de (1), então  $\alpha y$  é solução de (1);

Isto é, o conjunto das soluções de (1) é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais de variável real definidas em  $I$ .

## EDO linear homogénea – Conjunto das soluções (cont.)

**Teorema:** Toda a equação linear homogénea de ordem  $n$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

num dado intervalo  $I$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n$  contínuas em  $I$ ;  $a_0(x) \neq 0$  para todo o  $x \in I$ ) admite  $n$  soluções  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  linearmente independentes e qualquer sua solução,  $y$ , pode escrever-se como sua combinação linear, *i.e.*,

$$y = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n, \text{ para } C_j \in \mathbb{R}.$$

**Definição:** Qualquer conjunto de  $n$  soluções linearmente independente de uma EDO linear homogénea de ordem  $n$  é designado por sistema fundamental de soluções dessa equação.

**Nota:** De acordo com o teorema anterior, um sistema fundamental de soluções é uma base do subespaço vetorial das soluções da EDO linear homogénea.

## Conjunto fundamental de soluções— matriz Wronskiana

**Proposição:** Sejam  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  soluções de uma EDO linear homogénea de ordem  $n$ , nas condições do slide anterior.  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  é um conjunto fundamental de soluções se e só se a matriz

$$\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

é invertível, para todo o  $x \in I$ .

**Nota:** A matriz  $\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  é designada por **matriz Wronskiana** e ao seu determinante chama-se **Wronskiano**.



**Exemplo:**

$$y'' + y = 0 \quad (2)$$

Observe-se que  $\varphi_1(x) = \cos x$ ,  $\varphi_2(x) = \sin x$  são soluções desta equação.

► Ver página 7.

Como  $\mathcal{W}(\sin x, \cos x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$  é invertível (porque o Wronskiano tem determinante não nulo), podemos concluir que:

$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$  é sistema fundamental de soluções de (2).

Logo, a solução geral da equação é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$



## Observações:

### ① As funções do tipo

$$x^k e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{e} \quad x^k e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

com  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , são linearmente independentes (em particular, as funções seno, cosseno, exponencial e do tipo potência são linearmente independentes).

- ② A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para  $n > 1$ , não existe um método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
- ③ Se a EDO linear homogénea tiver **coeficientes constantes**, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do polinómio caraterístico (ver slides seguintes).

## EDO linear homogénea com coeficientes constantes

Uma EDO linear homogénea de ordem  $n$  com coeficientes constantes tem a forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  com  $a_0 \neq 0$ .

Polinómio caraterístico (ou polinómio associado) :

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n.$$

**Observação:** As  $n$  raízes do polinómio caraterístico  $P(r)$  permitem determinar  $n$  soluções linearmente independentes da equação homogénea, cada uma associada a cada uma dessas raízes (ver como no slide seguinte). Portanto, permitem determinar a solução geral da equação homogénea associada.

## Construção de um sistema fundamental de soluções (base do subespaço das soluções) de uma EDO linear com coeficientes constantes e homogênea

Considerem-se as raízes de  $P(r)$  identificadas e, para cada uma delas, proceda-se à seguinte associação de soluções (no final do processo ter-se-á  $n$  soluções linearmente independentes):

- **1.º Caso:** A raíz  $r$  é real simples.

**Solução:**  $e^{rx}$

- **2.º Caso:** A raíz  $r$  é real de multiplicidade  $k$ .

**Soluções:**  $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}$

- **3.º Caso:** As raízes são complexas conjugadas simples:  $\alpha + \beta i$  e  $\alpha - \beta i$ .

**Soluções:**  $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  e  $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

- **4.º Caso:** As raízes são complexas conjugadas:  $\alpha + \beta i$  e  $\alpha - \beta i$ , com multiplicidade  $k$ .

**Soluções:**  $e^{\alpha x} \cos(\beta x), xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \cos(\beta x),$   
 $e^{\alpha x} \sin(\beta x), xe^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \sin(\beta x).$

## Exemplo

**Exemplo:**  $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 4y' + 8y = 0$

Polinómio característico:  $r^5 + 2r^4 + 4r^3 + 8r^2 + 4r + 8$ .

Raízes do polinómio característico:

$-2$  (simples);  $i\sqrt{2}$  e  $-i\sqrt{2}$ , raízes duplas.

Sistema fundamental de soluções:

$$SFS = \{e^{-2x}, \cos(\sqrt{2}x), x \cos(\sqrt{2}x), \sin(\sqrt{2}x), x \sin(\sqrt{2}x)\}.$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = B e^{-2x} + (C_1 + C_2 x) \cos(\sqrt{2}x) + (D_1 + D_2 x) \sin(\sqrt{2}x),$$

com  $B, C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$ .

# Método dos coeficientes indeterminados

Método para determinar uma solução particular, aplicável às  
EDO lineares de coeficientes constantes completas

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \quad (3)$$

com  $b(x)$  da forma:

$$b(x) = B_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad b(x) = B_m(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

onde  $B_m(x)$  denota um polinómio de grau  $m \in \mathbb{N}_0$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Prova-se que existe uma solução particular da equação (3) do tipo

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} (Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x)) \quad (4)$$

onde:

- (i)  $k$  é a multiplicidade de  $\alpha + i\beta$ , se  $\alpha + i\beta$  for raiz do polinómio característico da equação homogénea associada a (3); senão,  $k = 0$ ;
- (ii)  $Q(x), R(x)$  são polinómios de grau  $m$  cujos coeficientes terão de ser determinados usando a EDO (3) e a expressão para a solução (4).

## Exemplo

**Exemplo:**  $y' - 3y = e^{3x}$ . Como

$$e^{3x} = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com  $P_m(x) \equiv 1$  (grau zero),  $m = 0$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0$  e 3 é raiz do polinómio característico, com multiplicidade 1, então a solução particular a procurar é da forma

$$y_p = x e^{3x} A, \quad \text{com } A \in \mathbb{R} \text{ a determinar.}$$

Substituindo  $y_p$  e  $y_p'$  na equação:

$$\underbrace{A e^{3x} + 3Ax e^{3x}}_{y_p'} - 3(\underbrace{Ax e^{3x}}_{y_p}) = e^{3x}$$

obtemos  $(A - 1)e^{3x} = 0$ , e portanto  $A = 1$ . Assim,  $y_p = x e^{3x}$ .

## PVI associado a uma EDO linear de ordem arbitrária

**Teorema (Existência e unicidade de solução):** Se  $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$  e  $b(x)$  são funções contínuas num intervalo  $I$ ,  $a_0(x) \neq 0$ , para todo o  $x \in I$ , então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1}, \end{cases}$$

onde  $x_0 \in I$  e  $\beta_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ , são números reais dados, tem nesse intervalo uma e uma só solução.

**Exemplo:** O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$$

tem uma solução única em  $\mathbb{R}$ . **Porquê? Qual?**



## Exemplo de aplicação das transformadas de Laplace na resolução de um PVI

**Exemplo:** Vamos determinar a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação dada (admitindo que  $y(t)$  tem transformada de Laplace,  $Y(s)$ ), conclui-se que:

$$s^2 Y(s) + 2s Y(s) + 10 Y(s) = \mathcal{L}\{1\}. \quad [\text{Porquê?}]$$

Daqui resulta que

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = \frac{1}{s}, \text{ i.e., } Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (s > 0).$$

Uma vez que

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (s > 0),$$

a solução do problema pode ser determinada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{10} \frac{1}{s} - \frac{1}{10} \frac{s+2}{s^2+2s+10}\right\}(t) \quad s > 0 \\ &= \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) - \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2+9}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{1}{(s+1)^2+9}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}(t) - \frac{1}{10} e^{-t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-t} \cos(3t) - \frac{1}{30} e^{-t} \sin(3t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$