Distância, Ortogonalidade, Projeção Ortogonal, Mínimos Quadrados

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A **Folha Prática 4**

Produto interno, externo, ângulo

1. Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$, $u = (1, -2, 1)$ e $v = (-1, 1, 0)$.
   (a) Calcule $u + v$ e $3u - 2v$.
   (b) Indique, justificando, se u e v são vetores perpendiculares. E colineares?
   (c) Determine o ângulo entre os vetores:
      i. u e v; ii. u e $-v$; iii. $u + v$ e $u - v$.
   (d) Apresente um vetor unitário com a direção do vetor u.
   (e) Encontre todos os vetores com a direção de u e comprimento 2. De entre estes, indique os que têm:
      i. o sentido de u; ii. o sentido oposto a u.
   (f) Escreva o vetor u como soma de um vetor com a direção de v e um vetor ortogonal a v.
   (g) Determine todos os vetores perpendiculares a u e a v.
   (h) Encontre todos os vetores perpendiculares a u.

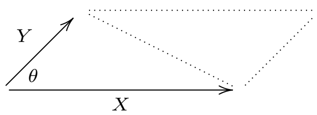
2. Mostre que o triângulo de vértices nos pontos $(2, 3, -4)$, $(3, 1, 2)$ e $(-3, 0, 4)$ é isósceles.

3. Encontre todos os vetores que fazem um ângulo de $\pi/3$ com $(1, 0, 0)$.

4. Sendo X e Y vetores de $\mathbb{R}^n$, mostre que
   (a) $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$;
   (b) se X e Y são ortogonais, então $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

5. Sejam $X = (2, -1, 1)$ e $Y = (0, 2, -1)$ dois vetores em $\mathbb{R}^3$.
   (a) Calcule o produto externo (ou produto vetorial) $X \times Y$.
   (b) Verifique que o vetor $X \times Y$ é ortogonal quer a X quer a Y.

6. Considere o paralelogramo (e o triângulo) com lados correspondentes aos vetores X e Y como na figura.



   (a) Verifique que
      i. a altura do paralelogramo é igual a $||Y|| \sin(\theta)$, sendo a base do paralelogramo o lado correspondente ao vetor X e $\theta = \measuredangle(X, Y)$;
      ii. a área do paralelogramo é $A_{\square} = \|X \times Y\|$;
      iii. a área do triângulo é $A_{\triangle} = \frac{1}{2}\|X \times Y\|$.
   (b) Determine a área
      i. do paralelogramo de lados dados pelos vetores $(3, -1, -1)$ e $(1, 2, 1)$;
      ii. do triângulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$;
      iii. dos vários paralelogramos com vértices em $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 2, 1)$.

7. Sejam $X = (1, 2, 0)$ e $Y = (1, -1, 1)$ dois vetores em $\mathbb{R}^3$.
   (a) Determine todos os vetores ortogonais a X e Y.
   (b) Calcule a área do paralelogramo de vértice na origem e lados correspondentes aos vetores X e Y.

8. Mostre que, sendo X e Y vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$,
   (a) X e Y são colineares se e só se $X \times Y = 0$;
   (b) $\|X \times Y\|^2 + (X \cdot Y)^2 = \|X\|^2\|Y\|^2$.

Distâncias, bases ortonormadas, projeção ortogonal

9. Determine uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases},$$

assim como uma equação vetorial e uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto $P = (2, 2, 1)$ e que contém a reta $\mathcal{R}$.

10. Determine os pontos de $\mathbb{R}^3$ equidistantes dos pontos $A = (-1, 0, 2)$ e $B = (1, -1, 1)$.

11. Considere o ponto $A = (3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$ e o plano $\mathcal{P}$ de equação cartesiana $y + z = -1$.
   (a) Escreva uma equação vetorial da reta ortogonal ao plano $\mathcal{P}$ e que passa pelo ponto A.
   (b) Calcule a distância do ponto A ao plano $\mathcal{P}$, por dois processos distintos.

12. Seja $\mathcal{P}$ plano que contém os pontos $A = (1, 2, 1), B = (0, 0, 3), C = (1, -1, 1)$.
   (a) Determine uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$.
   (b) Calcule a distância do ponto $Q = (1, 2, 3)$ ao plano $\mathcal{P}$.

13. Considere o ponto $P = (-1, 1, 2)$ e a reta $\mathcal{F}$ que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$.
   (a) Escreva uma equação cartesiana do plano que contém o ponto P e é perpendicular à reta $\mathcal{F}$.
   (b) Calcule a distância do ponto P à reta $\mathcal{F}$, por dois processos distintos.

14. Verifique se os conjuntos de vetores seguintes são ortogonais:
   (a) $\{(1, 2, 1), (0, -1, 2), (0, 2, 1)\}$;
   (b) $\{(1, 2, -1, 1), (0, -1, -2, 0), (1, 0, 0, -1)\}$.

15. Indique para que valores de a e b o conjunto $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (a, \frac{\sqrt{2}}{2}, -b)\right\}$ é ortonormado.

16. Sejam $X_1 = (4/5, 0, 3/5)$, $X_2 = (0, 1, 0)$, $X_3 = (-3/5, 0, 4/5)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Verifique que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calcule o vetor $[X]_{\mathcal{B}}$ para $X = (1, 1, 1)$, usando o facto de $\mathcal{B}$ ser uma base ortonormada.
   (c) Calcule a matriz de mudança da base $\tilde{\mathcal{B}} = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ para a base $\mathcal{B}$.
   (d) Calcule $[Y]_{\mathcal{B}}$, sabendo que

$$[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

17. Sejam $X, Y_1, \ldots, Y_n$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Mostre que se X é ortogonal a $Y_1, \ldots, Y_n$, então X é também ortogonal a qualquer vetor do subespaço gerado por $Y_1, \ldots, Y_n$.

18. Considere o plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $X_1 = (1, 1, 0)$ e $X_2 = (0, 0, 1)$.
   (a) Determine uma base ortonormada de $\mathcal{P}$.
   (b) Determine a projeção ortogonal do vetor $X = (2, -2, 1)$ sobre o plano $\mathcal{P}$.
   (c) Determine a distância do ponto $(2, 1, 1)$ ao plano $\mathcal{P}$.

19. Calcule as projeções ortogonais de $X = (4, 0, -9)$ e $Y = (2, 7, -1)$ sobre o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(0, 1, 0), (1/2, 0, \sqrt{3}/2)$.

20. Diga se a seguinte afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando convenientemente.
   (a) Todo o conjunto ortonormado de 5 vetores em $\mathbb{R}^5$ é uma base em $\mathbb{R}^5$.
   (b) Seja $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ um conjunto com a propriedade de que $u_i \cdot u_j = 0$ para $i \neq j$ então S é um conjunto ortonormado.

(c) Seja $S = \{v_1, v_2\}$ um conjunto ortogonal de vetores e α_1, α_2 escalares. Então $\{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2\}$ é também um conjunto ortogonal de vetores.

21. Utilizando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortonormada de:

(a) $< (1, 1, 0), (0, 1, 1) >$;

(b) $< (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 4, -1, 0) >$.

Método dos Mínimos Quadrados

22. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 11 \end{bmatrix}^T$. Sabendo que a solução dos mínimos quadrados do sistema inconsistente $Ax = b$ é $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$, encontre o erro dos mínimos quadrados na solução dos mínimos quadrados.

23. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -5 \end{bmatrix}^T$.

(a) Encontre a solução dos mínimos quadrados e calcule o erro dos mínimos quadrados associado.

(b) O que se pode dizer àcerca da solução dos mínimos quadrados de $Ax = b$ quando b é ortogonal às colunas de A.

24. Encontre uma solução dos mínimos quadrados de $Ax = b$:

(a) construindo as equações normais para $\hat{x}$.
(b) Resolvendo para $\hat{x}$.

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 1 \end{bmatrix}^T$.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}^T$.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.