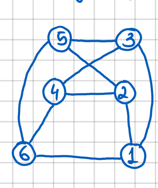
Folha 5

(13) Rodar o segundo grafo 90° esq.



$G = (V, E)$ $V = \{a, b, c, d, e, f\}$

$g(a) = 5$
$g(b) = 3$
$g(c) = 4$
$g(d) = 2$
$g(e) = 6$
$g(f) = 1$

$g: V(G) \to V(H)$ bijeção (correspondência)

$xy \in E(G) \iff g(x)\, g(y) \in E(H)$

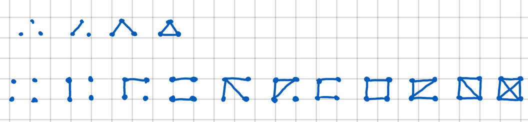
par

g é isomorfismo

$G \cong H$

(12)

a) 

b) 

(15) $\mathcal{E}(G) + \mathcal{E}(G^c) = \mathcal{E}(K_m) = \binom{14}{2}$

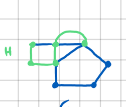
$(G \cong G^c) \longrightarrow (\underbrace{\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(G^c)}_{2\mathcal{E}(G)})$

$= 2\mathcal{E}(G) = \binom{m}{2} \Longrightarrow$ nº de arestas (a partir de m vértices)

$= \underbrace{2\mathcal{E}(G)}_{\text{par}} = \binom{14}{2} = \frac{14 \times 13}{2} = \underbrace{7 \times 13}_{\text{ímpar}}$

$\therefore$ G não pode ser isomorfo ao seu complementar

Subgrafo



H

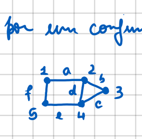
G

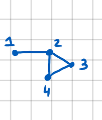
H é subgrafo $\overset{\text{próprio } (H \neq G)}{}$ de G

Se H é subgrafo de G e $V(H) = V(G)$ então o subgrafo H diz-se abrangente

Subgrafo induzido

$\Longrightarrow$ por um conjunto de vértices



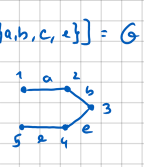
$G[\{1,2,3,4\}] =$ 

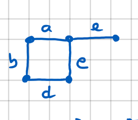
$\|$

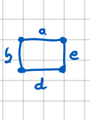
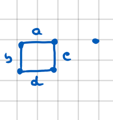
$G - 5$

$\Longrightarrow$ por um conjunto de arestas

$G[\{a, b, c, e\}] = G - \{f, d\}$



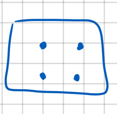


$G[\{a,b,c,d\}] =$  $\neq$ $G - e =$ 

o vértice fica e só se retira a aresta "e"

Grafo nulo

$\overset{1}{\bullet}$ Trivial



Grafo nulo (K_4^c) ↳ complementar do completo de ordem $m = 4$

Dimensão = 0

PARTE II — grafos não orientados

Passeio de um grafo

$P = (v_0, c_1, v_1, c_2, v_2, \dots, c_k, v_k)$

vértice inicial

vértice final

vértices intermédios

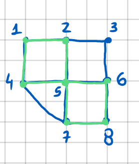
$c_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

aresta tem que estar entre vértices

Em grafos simples (s/ lacetes e arestas duplas ou paralelas)

$P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$

- Trajeto — é um passeio sem arestas repetidas
- Circuito — trajeto fechado ($v_{inicial} = v_{final}$)



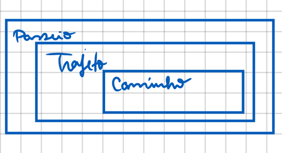
$C = (1, 2, 5, 7, 8, 6, 5, 4, 1)$

pode repetir vértices

- Caminho — trajeto sem vértices repetidos
- Ciclo

$(\underbrace{v_0, v_1, v_2, \dots, v_k}_{\text{caminho}}, v_0)$

Num ciclo só o vértice inicial e final coincidem



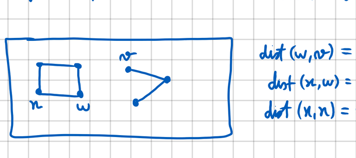
Comprimento de um passeio = nº de arestas (contando as arestas repetidas)

$\overset{P}{\bullet\!\!-\!\!\bullet}$ $\text{com}(P) = 1$

$P \quad \bullet$ $\text{com}(P) = 0$

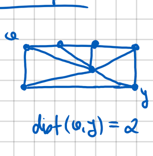
Distância entre u e y, $u, y \in V(G)$ $\Longrightarrow$ u e y são vértices de G

$\Longrightarrow$ comprimento do caminho mais curto entre u e y



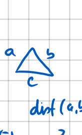
$dist(w, v) = \infty$
$dist(x, w) = 1$
$dist(x, x) = 0 \longrightarrow$ se x tiver lacete, $dist(x,x)$ continua a ser 0 porque importa o caminho + curto

exemplo



$dist(u, y) = 2$

$dist(u, y) \leq dist(u, z) + dist(y, z)$

desigualdade Δ $\Longrightarrow$  $a = b = c = 3$

$dist(a,b) \leq dist(a,c) + dist(b,c)$

$\iff 3 \leq 3 + 3$

$\iff 3 \leq 6$ ✓

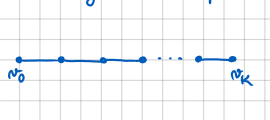
Teorema

G simples e finito

- G contém um caminho P tal que $\text{comp}(P) \geq \delta(G)$
- se $\delta(G) \geq 2$ então G contém um ciclo C tal que $\text{Comp}(C) \geq \delta(G) + 1$

Demonstração

- Seja P um trajeto de comprimento máximo

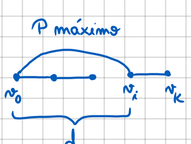


$\delta(G) \leq d(v_0) \leq \underline{\text{comp}(P)}$

porque se v_0 é adjacente a um vértice que não está em P, P não é máximo, o que é uma contradição.

- $\delta(G) \geq 2$

P máximo



Como $\delta(G) \geq 2$, v_0 é adjacente a um vértice de P

Seja v_i o vértice de P adjacente a v_0 que está a uma distância de v_0 maior possível

$d(v_0) \leq d = \underset{P}{dist}(v_0, v_i)$

Considere o ciclo C

$\text{comp}(C) = d + 1$

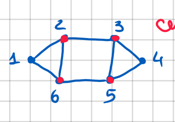
$\delta(G) \leq d(v_0) \leq \text{comp}(C) - 1$

$\text{comp}(C) \geq \delta(G) + 1$

Cintura de G

$g(G)$ = comprimento do ciclo com menor comprimento

Excentricidade de v = distância máxima a v



Centro de G

G

$e(1) = 3$ (vértice + distante é o 4 e $dist(1,4) = 3$)

$e(2) = 2 = e(6) = e(3) = e(5)$

- diâmetro — excentricidade MÁX
- raio — excentricidade MIN
- centro — vértices que têm excentricidade mínima

$r(G) = 2$
$diam(G) = 3$
$2, 3, 5, 6 \to$ centro

$\boxed{r(G) \leq diam(G) \leq 2r(G)}$

esc. mín — esc. máx

Sejam $x, y \in V(G)$ tais que $dist(x,y) = diam(G)$. Seja c um vértice do centro

tem exc MÁX = raio

$\boxed{e(c) = r(c)}$

$diam(G) = \underbrace{dist(x,y) \leq \overbrace{dist(x,c)}^{\leq e(c)} + \overbrace{dist(y,c)}^{\leq e(c)}}_{\text{desigualdade } \Delta} \leq$

$\leq 2e(c) = 2r(c)$

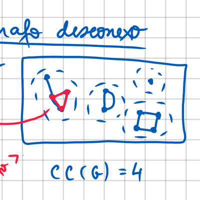
Grafos conexos

para $x, y \in V(G)$

$dist(x,y) < \infty$

isto é, existe um caminho entre x e y

Grafo desconexo



NÃO é CC(G) pois está contido num subgrafo

$CC(G) = 4$

- componente conexa de G
  - subgrafo de G
  - conexo
  - maximal (i.e, não ser subgrafo de outro subgrafo de G conexo)

G conexo $\iff CC(G) = 1$

$\boxed{\text{Se } G \text{ é conexo, } \mathcal{E}(G) \geq \mathcal{V}(G) - 1}$ $\xrightarrow{\text{demonstração}}$

Para termos um grafo conexo com n vértices precisamos de $n-1$ arestas.

$\mathcal{E}(G) = 0$ $\quad \underset{\mathcal{V}(G)=1}{\bullet}$ $\quad \mathcal{E}(G) = \mathcal{V}(G) - 1$

Vamos supor que o teorema é válido para grafos conexos c/ nº de arestas inferiores a $\mathcal{E}(G)$.

$H = G - e$, $e \in \mathcal{E}(G)$

$CC(H) \leq 2$, mínimo são 2

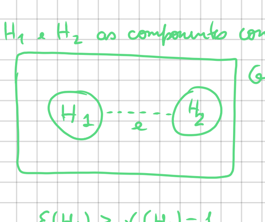
$CC(H) = 1 \Longrightarrow \mathcal{E}(H) \geq \mathcal{V}(H) - 1$

$\iff \mathcal{E}(G) - 1 \geq \mathcal{V}(G) - 1$

$\iff \mathcal{E}(G) \geq \mathcal{V}(G)$ ✓

$CC(H) = 2$

Sejam H_1 e H_2 as componentes conexas de H



$\mathcal{E}(H_1) \geq \mathcal{V}(H_1) - 1$

$\mathcal{E}(H_2) \geq \mathcal{V}(H_2) - 1$

$\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H_1) + \mathcal{E}(H_2) + 1 \to e$

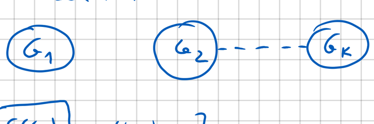
$\geq \mathcal{V}(H_1) - 1 + \mathcal{V}(H_2) \cancel{-1} \cancel{+1}$

$= \mathcal{V}(G) - 1$

$\therefore \mathcal{E}(G) \geq \mathcal{V}(G) - 1$

G desconexo

$CC(G) = K$



$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E}(G_1) \geq \mathcal{V}(G_1) - 1 \\ \mathcal{E}(G_2) \geq \mathcal{V}(G_2) - 1 \\ \vdots \\ \mathcal{E}(G_k) \geq \mathcal{V}(G_k) - 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Somando tudo}} \mathcal{E}(G) \geq \mathcal{V}(G) - CC(G)$

Folha 5

(25) $CC(G) = 4$
$\mathcal{E}(G) = 20$
$\mathcal{V}(G) \leq 24$

R: 24 vértices

(11)

a) $\underbrace{d(v)}_{G \to K} + \underset{G^c}{d(v)} = \underset{K_m}{d(v)}$

$d_{G^c}(v) = (m-1) - K$

G é K-regular $\iff G^c$ é $[(m-1)-K]$ regular