UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cálculo II C

18/06/2025

Exame final

Duração: 2h30

Justifique claramente as suas respostas. Uma resposta do GeoGebra, sem justificação, não tem qualquer cotação. Boa sorte!

1. (4,0 val.) Estude a convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde são simplesmente e absolutamente convergentes.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x-2)^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}x^{2n+1}$

2. (3,0 val.) Considere a função definida por $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$. Utilizando a expansão $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, determine a série de MacLaurin da derivada de f.

3. (4,0 val.) Determine a série de Fourier da extensão periódica de período 2π da função definida por $f(x) = -x$, $x \in [-\pi, \pi[$.

4. (3,0 val.) Considere a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-y} & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$$

   (a) Calcule, ou mostre que não existe, o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

   (b) Estude a continuidade de f no seu domínio.

5. (3,0 val.) Considere a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Estude as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

   (b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1,1)$ segundo a direção do vetor $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

6. (3,0 val.) Determine os extremos globais da função definida por $f(x,y) = x^2y$ no conjunto definido por $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6 = 0$.

Formulário

Série de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big[a_n \cos(nx) + b_n \ \sin(nx)\big]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{sen}(nx)\, dx$$

Derivadas parciais e direcionais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

$$D_U f(P) = \lim_{h\to 0} \frac{f(P+hU) - f(P)}{h}$$

$$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U$$

Plano tangente

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Regra da cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

Teorema da função implícita

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$