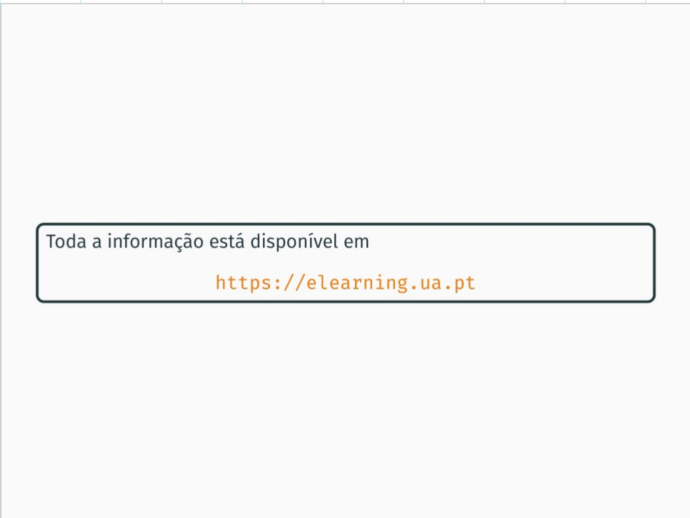
Aula 1

0Apresent_
MD2024-25



Carga horária semanal e unidades ECTS (UC 47166) 4 (4)

- **Horas presenciais semanais**: 4h TP (Teórico-Práticas, 2h+2h) + 1h OT
- **Horas de estudo autónomo semanais**: 4 horas
- **Unidades ECTS**: 6

Objetivos e Competências 5 (5)

- **Objetivos**
  Formação em matemática discreta que permita a compreensão de modelos matemáticos de natureza combinatória, muito comuns em computação, telecomunicações, indústria de processadores, desenho de circuitos integrados, criptografia e segurança na transmissão de comunicações, sistemas de tráfego, etc.
- **Competências**
  Capacidade de desenvolvimento de raciocínios lógico-dedutivos e de demonstração de resultados em contextos onde as entidades envolvidas têm natureza discreta; capacidade de desenvolvimento de algoritmos de cálculo combinatório com recurso a paradigmas lógicos, a identidades combinatórias clássicas, a relações de recorrência e a funções geradoras; capacidade de resolução de problemas combinatórios representados por grafos.

Docentes e Turmas 6 (6)

Turmas (Aulas)	Docente	OT
TP1 (29), TP3(29)	**António Jorge Monteiro Neves**	**OT1**
TP2 (28)	Maria Elisa Carrancho Fernandes	OT4/OT5
TP5 (28), TP7 (28)	Paula Cristina Roque da Silva Rama	**OT3**
TP4 (28), TP6 (28)	Rui Filipe Alves Silva Duarte	**OT2**
TP8 (28)	Nelson José Rodrigues Faustino	OT4/OT5

nfaust@ua.pt 11.2.14

Horário Atendimento (além das OTs)

3ª feira: 18:00 - 19:00 (Sala 11.2.14)
6ª feira: 10:00 - 11:00 (Sala 11.2.14)

(por cortesia, procure sempre enviar um e-mail caso pretenda comparecer num destes horários)

Orientação Tutorial (OT) 7 (7)

- Aulas OT (Orientação Tutorial)

- **OT1**: Segundas, 16h-17h, Anf. 11.1.2;
- **OT2**: Segundas, 18h-19h, Sala 11.1.30;
- **OT3**: Terças, 19h-20h, Sala 11.1.30;
- **OT4/OT5**: Quintas, 18h-19h, Sala 11.1.28;

Nota importante:

Os alunos devem avisar o respetivo docente (por email) se tencionam frequentar a aula OT, até **às 14h do mesmo dia**.

No caso das OTs de 5ª feira, enviar SEMPRE e-mail para os dois docentes

Os alunos podem frequentar qualquer uma das aulas **OT**.

- Fórum MSTeams

Funciona ainda em permanência um fórum de apoio à aprendizagem dos

- **Fórum MSTeams**

Funciona ainda em permanência um fórum de apoio à aprendizagem dos estudantes e ao seu trabalho autónomo através do qual é dado *feedback* a dúvidas e questões que podem ser colocadas *online* usando os recursos do Microsoft Teams (MSTeams), ao qual podem aceder através de ***https://bit.ly/3kqsPeX***

dois docentes
(maria.elisa@ua.pt ; nfaust@ua.pt)

PROGRAMA PREVISTO 8 (8)

O programa

1. Lógica de primeira ordem e demonstração automática (1LPO)
2. Princípios de Enumeração Combinatória (2PEC)
3. Agrupamentos e Identidades Combinatórias (3AIC)
4. Recorrência e Funções geradoras (4RFG)
5. Elementos de Teoria dos Grafos (5ETG)

BIBLIOGRAFIA 9 (9)

Em *https://elearning.ua.pt* no sítio da UC 47166-MD é disponibilizado um **Texto de Apoio**, Folhas de Exercícios e bibliografia principal:

1. D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta*: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos, Escolar Editora, 2009 (versão revista em 2011).
2. D. M. Cardoso, P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (versão revista em 2015).
3. António Jorge Neves, Maria Paula Carvalho, *Estudo Autónomo: um objeto de aprendizagem ativa*, Matemática Discreta 2016-2017, Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, Setembro de 2017.
4. J. S. Pinto, *Tópicos de Matemática Discreta*, Universidade de Aveiro, 1999.
5. K. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw-Hill Education, 8th Ed., 2019.

AVALIAÇÃO DISCRETA (AD) 10 (10)

Inicialmente, no PACO, todos os alunos estão associados à **AD**, a qual inclui quatro elementos de avaliação **MiniTeste 1 (MT1), Teste 1 (T1), MiniTeste 2 (MT2), Teste 2 (T2)**, tendo como objetivo motivar a aprendizagem dos estudantes de forma faseada por tópicos da matéria, de acordo com a seguinte calendarização:

- **MT1 (10%)**: nas aulas **de 10 e 11 de março**, avaliando tópicos de 1LPO;
- **T1 (40%)**: **11 de abril (sexta-feira, 16h30m)**, sobre 1LPO, 2PEC, 3AIC;
- **MT2 (10%)**: nas aulas **de 14, 15 e 16 de maio**, sobre 4RFG;
- **T2 (40%)**: na data da época normal de exames (11 a 25 de junho) a fixar pelo Conselho Pedagógico, avaliando tópicos de 4RFG e 5ETG;

"Save the dates"

Classificação Final de AD (NAD) 11 (11)

A nota **NAD** será o arredondamento às unidades do valor calculado pela fórmula:

$$\textbf{NAD} = \max(\textbf{NCMT}, \textbf{NSMT}),$$ (Melhor das Médias)

onde

$$\textbf{NCMT} = 0.1\,\textbf{MT1} + 0.4\,\textbf{T1} + 0.1\,\textbf{MT2} + 0.4\,\textbf{T2}$$ (Com mini-testes)

$$\textbf{NSMT} = 0.5\,\textbf{T1} + 0.5\,\textbf{T2}$$ (Sem Contar Com mini-testes)

Avaliação Final (AF) 12 (12)

- Os alunos que pretendam optar por AF devem, **até ao dia 10 de março**, alterar no PACO a sua avaliação para **AF**.
- Os alunos em **AF** realizam um **Exame Final (EF)** na data da época normal de exames, o qual avalia toda a matéria lecionada ao longo do semestre, sendo a classificação final, **NAF**, dada pelo arredondamento às unidades da nota obtida em **EF**.

Obs: Por defeito, todos os estudantes estão inscritos em avaliação discreta.

Época de Recurso 13 (13)

- O **Exame de Recurso (ER)** (ocorre entre 30 de junho e 11 de julho) incide sobre toda a matéria lecionada, estando automaticamente inscritos para este exame todos os alunos que não tenham ainda obtido aprovação.
- Os estudantes que pretendam efetuar **melhoria de nota na Época de Recurso** devem efetuar a respetiva inscrição nos prazos legais via PACO.
- **Classificação final da época de recurso (NER)** será o arredondamento às unidades da nota calculada pela fórmula:

$$\textbf{NER} = \max(\textbf{NRCMT}, \textbf{NRSMT}), \text{ onde}$$

$$\textbf{NRCMT} = 0.1\,\textbf{MT1} + 0.1\,\textbf{MT2} + 0.8\,\textbf{ER}$$

$$\textbf{NRSMT} = \textbf{ER}$$

Prova de Defesa de Nota

Em todo e qualquer caso, se a **classificação final** resultante da aplicação das regras anteriores for **superior a 16 valores**, pode ser exigida uma **prova de avaliação complementar de defesa de nota**.

Fórmulas

Na lógica proposicional, uma proposição é uma afirmação que apenas toma o valor verdadeiro ou falso, mas não os dois ao mesmo tempo. Temos então alguns exemplos de proposições:

Exemplos (Proposição)

#1 D. Afonso Henriques foi o primeiro rei de Portugal. (Verdadeiro)

#2 Hoje é segunda-feira. (Falso) ooo Seria verdadeiro se a aula tivesse sido ontem

#3 4 é um número da sequência de Fibonacci (Falso) 1, 1, 2, 3, 5, ...

#4 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um número irracional. (Verdadeiro) → irracional

(Todas as proposições acima têm um valor de verdade bem definido)

Exemplos (Não são proposições)

#5 $\frac{16x}{64x} = \frac{1}{4}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

#6 $2m > m$, para todo o $m \in \mathbb{Z}$

#7 Deus existe (Para os crentes SIM; Para os agnósticos NÃO.)

Exercício: Corrija as afirmações #5 e #6 de modo a que passem a ser proposições.

A partir deste momento, podemos fazer a distinção entre dois tipos de proposições:

- atómicas: proposições onde o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido livremente.
- compostas: proposições compostas por outras proposições, ligadas pelos conectivos, onde o valor de verdade depende do valor de verdade das componentes.

> *Nota* 1.1.1. Existem ainda dois símbolos especiais que serão tidos como proposições atómicas: $\perp$ e $\top$. Mais à frente veremos o que estes representam.

Conectivos que iremos adotar:

- $\wedge$ representará a **conjunção** (« ... e ... »);
- $\vee$ representará a **disjunção** (« ... ou ... »);
- $\neg$ representará a **negação** (« não ... »);
- $\to$ representará a **implicação** ou **condicional** (« Se ... então ... »);
- $\leftrightarrow$ representará a **dupla implicação** ou **equivalência** (« ... se e só se ... »).

Em Concreto: Se p e q são proposições atómicas, então as proposições abaixo são proposições compostas:

↳ Conjunção de p e q (lê-se "p e q")

$p \wedge q$

↳ Disjunção de p e q (lê-se "p ou q")

$p \vee q$

↳ Negação de p (lê-se "não p")

$\neg p$

$\neg p$

⟶ A proposição q é uma consequência da proposição p. (lê-se "p implica q")

$$p \longrightarrow q$$

⟶ A proposição p é equivalente à proposição q (lê-se "p se e só se q")

$$p \longleftrightarrow q$$

Exercício 6, Folha 0

6. Escreva cada uma das seguintes afirmações na forma "se p então q".

a) Chove sempre que o vento sopra de Sul.

b) É necessário caminhar 20 quilómetros para chegar ao topo do Everest.

c) As rosas florirão se estiver calor durante uma semana.

d) A garantia está ativa só se tiveres comprado o computador há menos de um ano.

e) Para ser aprovado na disciplina, é suficiente obter 10 valores na nota final.

$p \longrightarrow q$

6a) p = " O vento sopra de sul "
q = " Chove "

6b) p = " Chegar ao topo do Evereste "
q = " Caminhar 20 quilómetros "

(a afirmação " É necessário " refere-se à implicação ←)

6c)
p = " Estiver calor durante a semana "

q = " As rosas florirão "

6d) p = " A garantia está activa "

q = " Compraste o computador há menos de um ano "

6e) p = " Obter 10 valores na nota final "

q = " Ser aprovado na disciplina " ...

Ter pelo menos 10 valores.

7 Sejam p, q, r variáveis que representam as proposições

p: *Sou responsável*;

q: *Passo a Matemática Discreta*;

r: *Vou de férias para as Bermudas.* (ou Bariloche)

Traduza as frases seguintes por meio de fórmulas proposicionais.

a) Se passar a Matemática Discreta, vou de férias para as Bermudas.

b) Para ir de férias para as Bermudas é suficiente que eu seja responsável.

($\longleftarrow$)

c) Passo a Matemática Discreta só se for responsável.

($\longrightarrow$)

d) Para passar a Matemática Discreta é necessário que eu seja responsável.

($\longrightarrow$)

e) Se passar a Matemática Discreta então vou de férias para as Bermudas caso seja responsável.

($\longrightarrow$) esta afirmação é uma proposição composta.

a) Trata-se de uma implicação:

Solução: $q \rightarrow r$

b) A afirmação dada é equivalente à seguinte afirmação:

"Se eu for responsável, vou de férias para as Bermudas"

Solução: $p \rightarrow r$

c) A afirmação dada é equivalente a

"Se eu passar a Matemática Discreta, então sou responsável"

Solução: $q \rightarrow p$

d) A mesma solução do item c), pois tratam-se de afirmações equivalentes.

d) A $\boxed{\text{mesma solução do item c)}}$, pois tratam-se de afirmações equivalentes.

e) Proposição Composta : $p \to r$

"Vou de férias para as Bermudas, caso seja responsável"
(equivalente à afirmação do item b))

Se ... então : A proposição Composta $p \to r$
é uma Consequência da proposição atômica
q

$\boxed{\text{Solução : } q \to (p \to r)}$

Fórmulas Bem Formadas

Uma **fórmula (bem formada)** é uma sequência finita de símbolos de um determinado alfabeto que é parte de uma linguagem formal. No caso da lógica proposicional, as fórmulas (bem formadas) são ditas **fórmulas proposicionais** e o alfabeto a considerar é composto pelos símbolos relativos aos conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow, \perp, \top$ e uma escolha de variáveis proposicionais (diferentes destes símbolos), tipicamente denotados por $p, q, r, \ldots$. As fórmulas proposicionais podem então ser definidas recursivamente de acordo com as regras que abaixo se apresentam:

$\top$ - Tautologia
$\perp$ - Contradição

1. cada variável é uma fórmula e $\perp$ ~~and~~ e $\top$ são fórmulas.
2. Se φ e ψ são fórmulas, então as expressões

$$(\neg\psi), \quad (\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

   são fórmulas.

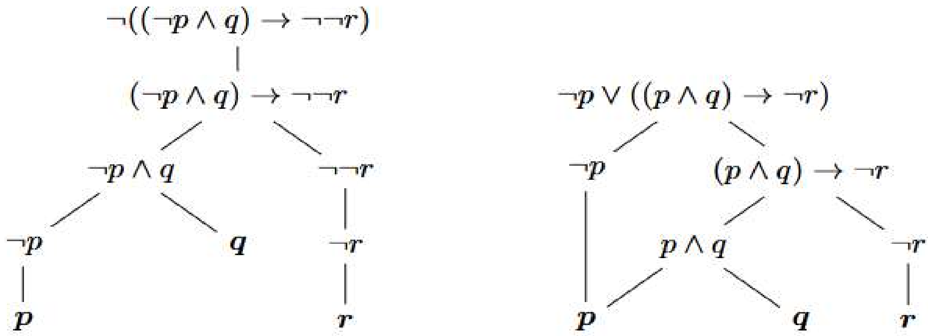
Nota 1.1.3. Para tornar a notação menos pesada, vamos suprimir os parêntesis externos. A título de exemplo, escreveremos $\varphi \vee (\psi \rightarrow \xi)$ em vez de $(\varphi \vee (\psi \rightarrow \xi))$. Adicionalmente, entenderemos que $\neg$ tem uma «ligação mais forte» (ou seja, aplica-se primeiro) do que os outros conetivos, ou seja, escreveremos $\neg\varphi \vee \psi$ em vez de $(\neg\varphi) \vee \psi$.

Exemplo 1.1.4. Se considerarmos p, q e r três variáveis, podemos ter os seguintes exemplos de fórmulas:

- $\perp,\ \top,\ p,\ q,\ r, \ldots$
- $p \vee q,\ p \rightarrow \perp,\ \neg\perp, \ldots$
- $(p \wedge q) \leftrightarrow q,\ (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q), \ldots$
- $(p \wedge q) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow q), \ldots$

No entanto, se considerarmos o mesmo conjunto de variáveis, as sequências $(\perp\top)$, (pqr), $p\neg$, $p \leftrightarrow \vee$, $(\top \rightarrow)$, $(p \wedge q) \rightarrow r)$ ou $(p\wedge \rightarrow q)$ não são fórmulas.

Exemplo 1.1.5. As expressões $\neg((\neg p \land q) \to \neg\neg r)$ e $\neg p \lor ((p \land q) \to \neg r)$ são fórmulas. Efectivamente, se considerarmos as variáveis p, q, r, podemos seguir as árvores de construcção ilustradas abaixo.



Valoração (ou Interpretação)

Definição 1.1.6. Uma **valoração** (ou **interpretação**) de um conjunto V de variáveis proposicionais é uma função $v: V \to \{0, 1\}$, onde 0 representa o valor lógico «falso» e 1 representa o valor lógico «verdadeiro».

Nota 1.1.7. Como visto anteriormente, os símbolos $\perp$ e $\top$ representam proposições atómicas especiais. Para qualquer valoração v, vamos convencionar $v(\top) = 1$ e $v(\perp) = 0$.

Tautologia $(\top)$ tem sempre valoração 1;

Contradição $(\perp)$ tem sempre valoração 0.

Exemplo 1.1.8. Se p e q forem variáveis proposicionais, então uma valoração do conjunto $V = \{p, q\}$ poderá ser a função $v: V \to \{0, 1\}$ tal que $v(p) = 1$ e $v(q) = 0$.

Efectivamente, a valoração apresentada é uma das quatro possíveis atribuições de verdade para um conjunto V com duas variáveis proposicionais.

Tabelas de Verdade (Interpretação de Conectivos)

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

Negação

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Disjunção

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Conjunção

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implicação

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Equivalência

Exemplo 1.1.10 (Apontamentos Teóricos)

Se $v : \{p, q\} \to \{0, 1\}$ é tal que

$p \mapsto 1$ e $q \mapsto 0$, qual é a valoração da fórmula

$$\neg p \to (p \vee q) \; ?$$

Resolução: A nossa fórmula composta pode ser interpretada com base nas tabelas de verdade da

(i) Negação (ii) Disjunção (iii) Implicação

Pela tabela de verdade da negação, obtemos $v(\neg p) = 0$;

Por outro lado, a tabela de verdade da disjunção, garante-nos que

$v(p \vee q) = 1$. Logo, pela tabela de verdade da implicação segue

que $v(\neg p \to (p \vee q)) = 1$.

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\varphi = \neg p$

$\psi = p \vee q$

Observação: Com base na tabela de verdade da implicação, é possível concluir que a valoração $v(p) = 1$ é suficiente para garantir que a fórmula composta tenha valoração 1.

Exercício: Defina uma valoração $v : \{p, q\} \longrightarrow \{0, 1\}$ para a qual se verifica

$$v(\neg p \longrightarrow (p \vee q)) = 0.$$

Exercício 1, Folha 0

1. Determine valores de verdade para as variáveis proposicionais p, q e r, para os quais o valor de verdade da fórmula bem formada $(p \vee q \to r) \wedge p \to (r \to q)$ seja falso.

1. A fórmula pode ser escrita na forma $\varphi \to \psi$, onde

$\varphi = (p \vee q \to r) \wedge p$ e $\psi = r \to q$

Assim, pela tabela de verdade abaixo, a fórmula é falsa se

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ é verdadeiro (1)
e
ψ é falso (0)

↳ Para assegurarmos que φ é verdadeiro (1) teremos de garantir que $p \vee q \to r$ e p são ambas verdadeiras (1). Em particular, a fórmula atómica p é verdadeira.

↳ Por outro lado, para assegurarmos que ψ é falso (0) teremos que assegurar que r é verdadeiro (1) e q é falso (0)

Ora, como a fórmula composta é formada pelas fórmulas atómicas p, q e r, segue que a valoração $v : \{p, q, r\} \to \{0, 1\}$, definida por

$v(p) = 1$, $v(q) = 0$ e $v(r) = 1$

garantem-nos que a fórmula atómica dada é sempre falsa.

Tautologia, Contingência e Contradição

Definição 1.1.12. Uma fórmula diz-se:

- uma **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tiver o valor lógico 1 para cada interpretação;
- uma **contingência** (ou **fórmula consistente**) se existir uma interpretação com valor lógico 1;
- uma **contradição** (ou **inconsistência**) quando não for uma consistência, ou seja, quando tiver valor lógico 0 para cada interpretação.

Para a verificação das tautologias, contingências e contradições, a técnica mais intuitiva a utilizar será o preenchimento da tabela de verdade associada à fórmula em questão (resume o estudo particular de cada valoração que se possa fazer nas variáveis proposicionais). Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

Exemplos (Tautologia): $(p \wedge q) \to q$ e $p \to (p \vee q)$ são tautologias (i.e. são sempre afirmações verdadeiras)

$\varphi = p \wedge q$

$\psi = q$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Coluna de 1's

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

esta situação nunca ocorre.

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

coluna de 1's

Exemplos (Contradição): $(p \wedge q) \wedge (\neg q)$ é uma contradição, assim como $\neg(p \to (p \vee q))$. (Porquê?)

Exemplo (Contingência):

$p \longrightarrow p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$	$p \longrightarrow p \wedge q$
0	1	0	1
0	0	0	1
1	1	1	1
1	0	0	0

Definição 1.1.14. As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes lógicas** ($\varphi \equiv \psi$) quando φ e ψ tem o mesmo valor lógico, para cada valoração.

Nota 1.1.15. $\varphi \equiv \psi$ se e só se a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo 1.1.16. Temos que $(\neg p \vee q) \equiv (p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$. Efectivamente,

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

$(p \to q) \equiv (\neg p \to \neg p)$

Aula 2

1LPO_MD2
023-24_h...

Equivalências (de Interesse)

EXEMPLOS 25 (21)

Verificam-se as equivalências

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \qquad (p \vee q) \equiv (q \vee p)$$ Comutatividade

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)) \qquad ((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$$ associatividade

$$(p \wedge p) \equiv p \qquad (p \vee p) \equiv p$$ idempotência

$$(p \wedge \top) \equiv p \qquad (p \vee \bot) \equiv p$$ elemento neutro

$$(p \wedge \bot) \equiv \bot \qquad (p \vee \top) \equiv \top$$ elemento absorvente

bem como as leis de distributividade

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad (p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

as leis de De Morgan

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \qquad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q),$$

e a lei da contraposição e da dupla negação

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p) \qquad \neg\neg p \equiv p.$$

Formas Normais

Definição 1.1.19. Uma fórmula φ é dita um **literal** se φ for uma variável ou a negação de uma variável.

Teorema 1.1.20. *Para cada $j \in J$ (com J um conjunto de índices), seja L_j um literal. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) $\bigvee_{j \in J} L_j$ *é uma tautologia.*

ii) $\bigwedge_{j \in J} L_j$ *é uma contradição.*

iii) *Existem índices distintos $j_1, j_2 \in J$ tais que $L_{j_1} = \neg L_{j_2}$.*

Exemplos (Fórmulas Literais)

#1 "Estou a perceber a aula" pode ser expressa por uma fórmula literal.

#2 "Não te vi ontem" também pode ser expressa por uma fórmula literal.

#3 "Não vejo nada" pode ser expressa como uma dupla negação. Neste caso, não se trata de uma afirmação literal.

#1 p = "Estou a perceber a aula".

#2 $\neg q$, onde q = "Vi-te ontem".

#3 $\neg\neg r$, onde r = "Vejo".

Exemplos (Teorema 1.1.20)

(A) $p \vee q \vee \neg p \vee r \equiv \top$

(i) ⟺ (iii)

Obs: Para concluirmos que

(A) é Tautologia ($\top$) e

(B) é Contradição ($\perp$)

(B) $p \wedge q \wedge r \wedge \neg p \equiv \perp$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

(A) é Tautologia $(\top)$ e

(B) é Contradição $(\perp)$

Começámos pelo item (iii) do Teorema 1.1.20.

Definição 1.1.21. Dizemos que a fórmula φ está na **forma normal conjuntiva (FNC)** quando $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ (para algum conjunto de índices I) e onde cada φ_i é da forma $\bigvee_{j \in J} L_j$ (para algum conjunto de índices J), com L_j literais. Nestas circunstâncias, diremos que as componentes φ_i serão $\vee$-**cláusulas**.

Nota 1.1.22. Muitas das vezes, consideramos ainda a forma normal conjuntiva dual, a **forma normal disjuntiva (FND)**. Neste caso, uma fórmula φ estará nessa forma quando $\varphi = \bigvee_{i \in I} \varphi_i$, onde cada φ_i da forma $\bigwedge_{j \in J} L_j$, com L_j literais.

Exemplo 1.1.23. Consideremos as variáveis proposicionais p, q, r.

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r$ é uma FNC. (p ; q ; r ; $\neg r$ ↪ Fórmulas literais)
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee \neg r$ é uma FND.
- $p \wedge q \wedge r$ é uma FNC e uma FND.
- $(p \wedge (q \vee r)) \vee q$ não é nem FNC, nem FND.

- $\underbrace{(p \vee q)}_{\varphi_1 =} \wedge \underbrace{(p \vee r)}_{\varphi_2} \wedge \underbrace{\neg r}_{=\varphi_3}$

  φ_1, φ_2 ↪ Conjunção de fórmulas literais.

  φ_3 ↪ Fórmula literal.

  (FNC) Fórmula na Forma Normal Conjuntiva

- $\underbrace{(p \wedge q)}_{=\varphi_4} \vee \underbrace{(p \wedge r)}_{=\varphi_5} \vee \underbrace{\neg r}_{\varphi_3}$

  φ_4, φ_5 ↪ Disjunção de fórmulas literais

  φ_3 ↪ Fórmula literal.

  (FND) Fórmula na Forma Normal Disjuntiva.

- $p \wedge q \wedge r$ é uma FNC por se tratar de uma conjunção de três fórmulas literais.

  Por outro lado, é uma única FND. (ver definições)

- $(p \wedge (q \vee r)) \vee q$

  ↪ Bastaria p.e trocar "$\wedge$" por "$\vee$" para ser simultaneamente uma fórmula na FNC e FND.

Exercício: Diga, justificando, se $(p \vee (q \wedge r)) \vee q$ é uma fórmula na forma FNC e/ou FND.

Teorema 1.1.25. *Toda a fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na FNC (FND).*

A ideia por trás do resultado acima apresentado passa pela aplicação sucessiva das equivalências lógicas ligadas aos conectivos de implicação e equivalência, assim como das leis de De Morgan e das leis de distributividade:

$$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$
$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q), \qquad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q),$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$
$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

4. Sem usar tabelas de verdade mostre que:

a) $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ é uma tautologia; $(\top)$

b) $(\neg(p \rightarrow q)) \wedge (q \wedge \neg r)$ é uma contradição; $(\perp)$

c) $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$ é uma contingência. (Conseguimos apenas simplificar a fórmula por intermédio de equivalências.)

4 a) $((p \vee q) \wedge \neg p) \longrightarrow q$

$\equiv \neg((p \vee q) \wedge \neg p) \vee q$ [propriedade $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$]

$\equiv (\neg(p \vee q) \vee p) \vee q$ [Leis de Morgan e Dupla Negação]

$\equiv \neg(p \vee q) \vee (p \vee q)$ [Associatividade]

$\equiv \top$ [Tautologia] (Teorema 1.1.20)

4b) $(\neg(p \rightarrow q)) \wedge (q \wedge \neg r)$

$\equiv (\neg(\neg p \vee q)) \wedge (q \wedge \neg r)$ $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

$\equiv (p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge \neg r)$ [Leis de Morgan e Dupla Negação]

$\equiv p \wedge (\neg q \wedge q) \wedge \neg r$ [Associatividade $\wedge$]

$\equiv p \wedge \perp \wedge \neg r$ [$\neg q \wedge q \equiv \perp$]

$\equiv \perp$ [$\perp$ elemento absorvente "$\wedge$"] (Teorema 1.1.20)

$\equiv \quad \bot$ $\qquad$ [$\bot$ elemento absorvente $\wedge$]
(Teorema 1.1.20)

4c) $\big((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)\big) \longrightarrow (p \rightarrow \neg r)$

$\equiv \big((\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee r)\big) \longrightarrow (\neg p \vee \neg r)$ $\qquad$ $[(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg \varphi \vee \psi)]$

$\equiv (\neg p \vee (q \vee \neg q) \vee r) \longrightarrow (\neg p \vee \neg r)$ $\qquad$ [Associatividade]

↳ é uma Tautologia

$\equiv \top \longrightarrow (\neg p \vee \neg r)$ $\qquad$ [Teorema 1.1.20]

$\equiv \bot \vee (\neg p \vee \neg r)$ $\qquad$ $[\neg \top \equiv \bot]$

$\equiv \neg p \vee \neg r$ $\qquad$ [" $\bot$ " elemento neutro $\vee$]

$\equiv p \rightarrow \neg r$ $\qquad$ (não é Tautologia, tampouco contradição)

Verificação via Tabela de Verdade:

p	r	$\neg r$	$p \rightarrow \neg r$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

A fórmula $p \rightarrow \neg r$ toma valorações 0 e 1. Logo não é Tautologia nem Contingência.

Exercícios 5.a), 5.d)

5 de fevereiro de 2025 21:44

5. Usando tautologias apropriadas, transforme as seguintes fórmulas na forma normal conjuntiva.

[Aplicação Prática do Teorema 1.1.25]

a) $p \vee (q \wedge (\neg p))$; [Está na forma normal disjuntiva]

b) $\neg((\neg p) \wedge (\neg q))$; ⟶ Usar leis de Morgan, seguido de dupla negação.

c) $(p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$. [Está na forma normal disjuntiva]

d) $(q \wedge \neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

5a)

$$p \vee (q \wedge (\neg p)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p)$$ [distributividade]

$$\equiv (p \vee q) \wedge T$$ [$p \vee \neg p \equiv T$]

$$\equiv p \vee q$$ [T elemento neutro $\wedge$]

5d)

$$(q \wedge \neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv$$

$$\equiv (q \vee \neg p) \wedge \underbrace{(q \vee \neg q)}_{\text{Tautologia}} \wedge \underbrace{(\neg p \vee \neg p)}_{\text{Idempotência}} \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg q)$$

$$\equiv (q \vee \neg p) \wedge T \wedge (\neg p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg q)$$

$$\equiv \neg p \wedge (r \vee \neg q)$$ [Propriedade absorvente]

7. Sejam p, q, r variáveis que representam as proposições

p: *Sou responsável*;

q: *Passo a Matemática Discreta*;

r: *Vou de férias para as Bermudas.*

Traduza as afirmações seguintes por meio de fórmulas proposicionais.

a) Se passar a Matemática Discreta, vou de férias para as Bermudas. $q \to r$

b) Para ir de férias para as Bermudas é suficiente que eu seja responsável.

c) Passo a Matemática Discreta só se for responsável.

d) Para passar a Matemática Discreta é necessário que eu seja responsável.

e) Se passar a Matemática Discreta então vou de férias para as Bermudas caso seja responsável. $q \to (p \to r)$

8. Escreva a negação das afirmações das alíneas a) e e) do exercício anterior.

Negação de 8a) $\neg(q \to r) \equiv \neg(\neg q \vee r) \equiv q \wedge \neg r$

"Passo a Matemática Discreta e não vou de férias para as Bermudas"
($\neg$)

Negação de 8e) $\neg(q \to (p \to r)) \equiv$

$\equiv \neg(\neg q \vee (\neg p \vee r))$

$\equiv q \wedge p \wedge \neg r$

$\equiv p \wedge q \wedge \neg r$ (Comutatividade de p e q)

"Sou responsável, passo a Matemática Discreta e não vou de férias para as Bermudas"
($\neg$)

Definição 1.1.29. Um conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ dir-se-á **consistente** quando existir uma interpretação que é modelo de todas as fórmulas em $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, i.e., se existir uma interpretação que avalia todas as fórmulas de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ em 1.

Exemplo 1.1.30. Consideremos as variáveis proposicionais p, q e um conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\neg p, p \to q, q\}$. Rapidamente conseguimos ver que Γ é consistente: basta considerar a valoração tal que $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 1$.

Consequência Semântica e Demonstrações

Definição 1.1.32. Uma fórmula ψ diz-se **consequência semântica** (ou **consequência lógica**) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a valoração, se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ têm valor 1, então ψ tem valor 1. Neste caso, escrevemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

Exemplo 1.1.33. Vamos verificar que $q \vee \neg p$ é consequência de $p \vee q$ e $p \to q$, ou seja, que $p \vee q, p \to q \vDash q \vee \neg p$.

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$	
0	0	0	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	$\leftarrow$
1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	0	1	$\leftarrow$

Teorema 1.1.34. *Dadas fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e ψ, temos que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ se e só se $((\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi)$ for uma tautologia.*

Teorema 1.1.42. *Seja ψ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Então $\Gamma \vDash \psi$ se e só se o conjunto $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ é inconsistente.*

[Regras de Resolução :]

a regra de resolução:

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \qquad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}\,(\text{Res})\,, \qquad \text{para fórmulas } \varphi, \psi, \theta.$$

Em particular, se tivermos $\theta = \perp$ e $\theta = \varphi = \perp$, conseguimos derivar, respectivamente),

$$\frac{\neg\psi \qquad \psi \vee \varphi}{\varphi} \qquad \text{e} \qquad \frac{\neg\psi \qquad \psi}{\perp}$$

Escrevemos $\Gamma \vdash \perp$ quando existe uma dedução de $\perp$ a partir de $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Notação

Em síntese :

Teorema 1.1.34

$\boxed{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m \vDash \psi} \Longleftrightarrow \boxed{(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \varphi_m) \to \psi \equiv \top}$

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \vDash \psi} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow, "\text{Teorema 1.1.42}"'] & \boxed{(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \varphi_m) \to \psi \equiv \top} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{(Negação de Tautologia é Contradição)}"] \\
 & \boxed{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \neg\psi \vdash \bot}
\end{tikzcd}
$$

Algoritmo (Método de Resolução)

O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL) 44 (34)

Teorema

Para as cláusulas $\theta_1, \dots, \theta_n$,

$$\{\theta_1, \dots, \theta_n\} \text{ é inconsistente} \quad \text{se e só se} \quad \theta_1, \dots, \theta_n \vdash \bot.$$

Nota

Como cada resolvente a partir de $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ corresponde a um conjunto de literais, então só há um número finito destes resolventes.

O algoritmo

Para verificar se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$:

1. Converter as fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ na forma normal conjuntiva.
2. Negar a fórmula ψ e converter $\neg\psi$ na forma normal conjuntiva.
3. Aplicar a regra de resolução às cláusulas obtidas acima até ou
   - obtém-se $\bot$ e neste caso verifica-se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, ou
   - não se aplica mais a regra de resolução (sem obter $\bot$) e neste caso não se verifica $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

9. Utilizando o método de resolução, justifique que

a) $p,\ p \rightarrow q \models q$ (regra de inferência "Modus ponens");

b) $p \rightarrow q,\ \neg q \models \neg p$ ("Modus tollens");

c) $p \vee q,\ p \rightarrow r,\ q \rightarrow r \models r$.

9c) Queremos demonstrar que $p \vee q$, $p \rightarrow r$, $q \rightarrow r$ e $\neg r$ conduzem a uma contradição. (i.e $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r, \neg r \vdash \perp$) [Teorema 1.1.42]

1. $p \vee q$ [Hipótese]
2. $\neg p \vee r$ [Hipótese na FNC]
3. $\neg q \vee r$ [Hipótese na FNC]
4. $\neg r$ [Hipótese]
5. $q \vee r$ [Res (1,2)]
6. r [Res (3,5)]
7. $\perp$ [Res (4,6)]

[Como queríamos demonstrar] (c.q.d)

Princípio de Resolução (cont. aula anterior)

Teorema 1.1.34

$$\boxed{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \models \psi} \iff \boxed{(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \varphi_m) \to \psi \equiv \top}$$

$\Updownarrow$ (Negação de Tautologia é Contradição)

Teorema 1.1.42

$$\boxed{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \models \psi} \iff \boxed{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \neg\psi \vdash \bot}$$

Regras:

$$\frac{\neg\varphi \vee \psi \qquad \varphi \vee \theta}{\psi \vee \theta}\ (Res)$$

$$\frac{\neg\varphi \qquad \varphi \vee \psi}{\psi}\ (Res)$$

$$\frac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\ (Res)$$

Exercícios 10.a), 10.b), 10.c) - Folha 0

10. Utilizando o método de resolução, verifique a correção de cada uma das seguintes deduções:

a) Chove se e só se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.

b) Chove se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.

$(\rightarrow)$ c) Se o mordomo cometeu o crime, então ele vai estar nervoso quando interrogado. O mordomo estava nervoso quando interrogado. Logo, o mordomo cometeu o crime.

d) r é uma condição suficiente para q. Além disso, verifica-se r ou a negação de p. Logo, se q não for verdadeiro, não se verifica p.

e) De $\neg(p \vee q)$ deduz-se $\neg p$.

Logo $(\models)$

↪ Consequência Semântica

10 a)

p = "Chove" q = "levo o guarda chuva"

$p \leftrightarrow q, \neg q \models \neg p$?

✓ 1.	$\neg p \vee q$	Fórmula $p \rightarrow q$ na FNC
2.	$p \vee \neg q$	Fórmula $q \rightarrow p$ na FNC
✓ 3.	$\neg q$	Hipótese
✓ 4.	p	Negação de $\neg p$
✓ 5.	$\neg p$	Res (1,3)
6.	$\perp$	Res (4,5)

Cláusula não é necessária

(eliminar "se" na afirmação)

10 b) $\cancel{q \rightarrow p}, \neg q \models \neg p$

$p \rightarrow q$

(substituir "se" por "só se" na afirmação.)

(Modus Tollens)

↪ Ver Exercício 9.b)

10 c) p = "O Mordomo Cometeu o Crime"

q = "O Mordomo estava nervoso quando interrogado"

$p \rightarrow q, \cancel{q} \models \cancel{p}$

$\quad\quad\quad\;\; p \quad\; q$

(Modus Ponens)

↳ Ver Exercício 9.a)

(Trocar a ordem de "p" e "q" na afirmação)

Alfabeto de 1ª Ordem

Definição 1.2.1. Um **alfabeto de 1ª ordem** consiste:

1. numa colecção de **variáveis**;
2. nos **símbolos** «$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \top, \bot$» da lógica proposicional; (aulas última semana)
3. nos **quantificadores**: os símbolos «$\exists$» (existe) e «$\forall$» (para todos);
4. no símbolo de **igualdade** «$=$».

Além dos pontos expostos acima, e dependendo do contexto, podemos ainda ter:

- uma coleção de **símbolos de constantes**;
- uma coleção de **símbolos de função** (cada símbolo de função tem uma **aridade** $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos);
- uma coleção de **símbolos de predicado** (ou **relação**) (cada símbolo de predicado tem uma **aridade** $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos);

Exemplo 1.2.2. O alfabeto da teoria dos espaços vectoriais reais consiste (além dos símbolos da lógica e das variáveis):

- de um símbolo constante «0»;
- para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, de um símbolo de função «$\alpha \cdot -$» de uma variável;
- um símbolo de função «$+$» de duas variáveis.

Termo

Definição 1.2.3. Vamos introduzir o conceito de **termo** de forma recursiva:

- cada variável e cada símbolo de constante são termos;
- se f é um símbolo de função de aridade n e se $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ também é um termo.

Exemplo 1.2.4. Consideremos uma linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo constante a, um símbolo de função unária i e um símbolo de função binária m. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a;
- $i(a), i(x), m(z, y), m(a, z), \ldots$;
- $m(i(x), x), i(m(z, a)), m(m(a, y), i(x)), \ldots$.

(Função de um ou mais termos transforma variáveis em variáveis)

Comunidade da Universidade de Aveiro:

Docentes
Discentes
Funcionários
(...)

Funções

Nelson, José, Maria,...] → Variáveis

docente (Nelson) → variável
discente (Maria) → variável
funcionário (José) → variável.

função aulas – "dar aulas"

docente

"O Professor Nelson dá aulas à estudante Maria."

discente.

aulas (docente(Nelson), discente(Maria))

aulas(x,y) → x lecciona aulas a y → Quem é y? [função discente]

↳ Quem é x? [função docente]

↳ Quem é x?

[função docente]

[função discente]

Fórmula

Definição 1.2.5. Da mesma forma que fizemos para os termos, vamos agora introduzir, recursivamente, o conceito de **fórmula**. Comecemos com os **átomos** (ou **fórmulas atómicas**):

- $P(t_1, \ldots, t_n)$ é um átomo, onde P é um símbolo de predicado com n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos;
- $t_1 = t_2$ é um átomo, onde t_1, t_2 são termos;
- $\perp$ e $\top$ são átomos; ($\perp$ - Contradição ; $\top$ - Tautologia)

↳ $P(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ - pode ser interpretado como [os termos] $t_1, t_2, \ldots, t_m$ têm a propriedade P.

↳ Exemplo : $\underbrace{\frac{15}{25}}_{\text{Termo } t_1} = \overbrace{\frac{3}{5}}^{\text{Termo } t_2}$ ↳ "As frações $\frac{15}{25}$ e $\frac{3}{5}$ são equivalentes"

Construção recursiva de fórmulas

A partir daqui, e considerando os átomos como «elementos primitivos», podemos construir recursivamente as fórmulas a partir dos conectivos lógicos e dos quantificadores apresentados anteriormente:

- se φ e ψ são fórmulas, então

$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\neg\varphi), \quad \perp, \quad \top,$$

  são fórmulas;
- se φ é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$ são fórmulas.

$\forall$ - quantificador universal.

$\exists$ - quantificador existencial.

Exemplo 1.2.6.

$$\underbrace{\forall x, y, z\ \underbrace{\overbrace{(x < y)}^{\text{fórmula}} \rightarrow \overbrace{(\underbrace{x + z}_{\text{termo}} < \underbrace{y + z}_{\text{termo}})}^{\text{fórmula}}}_{\text{fórmula}}}_{\text{fórmula}}$$

Exemplo Anterior : $\underbrace{\text{docente(Nelson)} \wedge \text{discente(Maria)} \wedge \text{aulas(Nelson, Maria)}}$

Lê-se "Nelson é Docente e Maria é Discente e Nelson dá aulas a Maria"

Outros Exemplos : #1 O funcionário José não é natural de Aveiro.

$funcionário(Jose) \wedge \neg aveiro(Jose)$

#2 Todos os funcionários não são reformados

$$\forall_x \left(funcionario(x) \longrightarrow \neg reformado(x) \right)$$

#3 Nem todos os funcionários e professores são naturais de Aveiro.

$$\exists_{x,y} \left(funcionario(x) \wedge professor(y) \wedge \neg aveiro(x) \wedge \neg aveiro(y) \right)$$

Variáveis Livres e Ligadas

Definição 1.2.9. A ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **ligada** se esta estiver dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa mesma variável. Por outro lado, a ocorrência de uma variável dir-se-á **livre** se não for ligada.

Nota 1.2.10. Uma variável numa fórmula φ dir-se-á livre quando ocorrer pelo menos uma vez livre em φ. Adicionalmente, diremos que φ é **fechada** quando esta não tiver variáveis livres.

Nota 1.2.7. Nas fórmulas da forma $\forall x \varphi$ (resp. $\exists x \varphi$), dizemos que a fórmula φ é o **alcance do quantificador** $\forall$ (resp. $\exists$).

Exemplo 1.2.8. Atentemos nas seguintes fórmulas. . .

- $\forall x\ (\text{gato}(x) \to \text{garras}(x))$: o alcance de «$\forall$» é «$(\text{gato}(x) \to \text{garras}(x))$».
- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \land (a < x)$: o alcance de «$\forall$» é «$\exists y\ x < y$», enquanto que o alcance de «$\exists$» é «$x < y$».
- $\forall x\ \exists y\ (x < y \land a < x)$: o alcance de «$\forall$» é «$\exists y\ (x < y \land a < x)$», enquanto que o alcance de «$\exists$» é «$x < y \land a < x$».

Exercícios 1a),1b),1c), Folha 1

1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:

   a) $\exists y\, P(x, y)$ x - livre ; y ligada

   b) $(\forall x\, (P(x) \to Q(x))) \to (\neg(P(x)) \vee Q(y))$ x livre e ligada ; y livre

   c) $\exists x\, (P(y, z) \wedge \forall y(\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$; x ligada ; y livre e ligada ; z livre

   d) $P(a, f(a, b))$;

   e) $\exists x\, (P(x) \to \neg Q(x))$;

   f) $\forall x\, ((P(x) \wedge C(x)) \to \exists y L(x, y))$.

NOTA. x, y, z, a, b são variáveis.

Exercícios 2 b),2c),2f), Folha 1

2. Exprima por meio de fórmulas bem formadas as seguintes afirmações:

a) Todas as aves têm penas.

b) Todas as $\boxed{\text{crianças}}$ são $\boxed{\text{mais novas}}$ que os $\boxed{\text{seus pais.}}$

c) Todos os $\boxed{\text{insectos}}$ são $\boxed{\text{mais leves}}$ do que algum $\boxed{\text{mamífero}}$.

d) Nenhum número é menor do que zero.

e) Zero é menor do que qualquer número.

f) Alguns $\boxed{\text{números primos}}$ não são $\boxed{\text{pares.}}$ → Negação

g) Todo o número par é número primo.

Alíneas a), d), e), g

Trabalho de Casa

Todos / Todas → Refere-se a quantificador universal.

a) $\forall_{x,y} \left(\text{criança}(x) \wedge \text{pai}(x,y) \rightarrow \text{maisnovo}(x,y) \right)$

criança(x) – "x é criança"

pai(x,y) – "y é pai de x"

mais novo(x,y) – "x é mais novo que y"

Quantificador universal $\forall$ – usado para descrever o universo de pais e filhos

b) $\forall_x \quad \text{insecto}(x) \rightarrow \exists_y \left(\text{mamífero}(y) \wedge \text{maisleve}(x,y) \right)$

Quant. $\forall$ → usado para descrever universo dos insectos.

Quant. $\exists$ → usado para descrever um mamífero com determinadas características

c)

$$\exists_x \left(primo(x) \wedge \neg par(x) \right)$$