UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cálculo II C

Teste 1

16/04/2025

Avaliação Contínua

Duração: 1h30

Nº mec. ________________ **Nome** ____

Comece por escrever o seu número e nome nas quatro folhas do enunciado. Cada folha contém uma questão, a que deve responder na própria folha (frente e verso), justificando claramente a sua resposta. Uma resposta do GeoGebra, sem justificação, não tem qualquer cotação. Boa sorte!

1. (5,0 val.) Estude a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência diga, justificando, se são simplesmente convergentes ou absolutamente convergentes.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi) + n}{n^3}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \mathrm{e}^n}{n^n}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^n}$.

Continuação da resposta à pergunta número 1:

Nº mec. ________________ **Nome:** ____

2. (5,0 val.) Determine o raio e domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando para que valores de x são simplesmente convergentes e absolutamente convergentes.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} x^n.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n} (x+1)^n.$

Continuação da resposta à pergunta número 2:

Nº mec. ________________ **Nome:** ____

3. (5,0 val.) Considere a função $f(x) = x\ln(1+x)$.

   (a) A partir da expansão $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $|x| < 1$, determine a série de MacLaurin de f, indicando o seu intervalo de convergência.

   (b) Utilize a série obtida na alínea anterior para determinar $f^{(100)}(0)$.

   (c) Calcule a derivada de f e diga, justificando, qual é a sua série de MacLaurin, e respetivo intervalo de convergência.

Continuação da resposta à pergunta número 3:

Nº mec. ____________________ **Nome:** ____

4. (5,0 val.) Considere a função f, definida em $]-\pi,\pi[$ por $f(x)=x^2$ para $x\in[0,\pi[$ e $f(x)=-x^2$ para $x\in]-\pi,0]$. Seja g uma extensão periódica de f a $\mathbb{R}$, de período 2π.

   (a) Esboce o gráfico de f e diga, justificando, se f é par ou ímpar.

   (b) Na série de Fourier de g, que coeficientes são nulos? Justifique.

   (c) Determine a série de Fourier de g.

   (d) Esboce o gráfico da soma da série da alínea anterior no intervalo $[-3\pi,3\pi]$.

Continuação da resposta à pergunta número 4:

Nº mec. ______________ **Nome:** ____

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1 \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{b}{n}\right)^n = e^b \quad (b \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad \text{se} \quad a > 1 \quad (k \in \mathbb{R})$$

Integração por partes

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Fórmula e série de Taylor

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{T_c^n f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{R_c^n f(x)}.$$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Série de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

Continuação da resposta à pergunta número ____