Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2024/2025

Folha 1 - Lógica de primeira ordem e demonstração automática

1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:

    a) $\exists y \, P(x, y)$

    b) $(\forall x \, (P(x) \to Q(x))) \to (\neg(P(x)) \vee Q(y))$

    c) $\exists x \, (P(y, z) \wedge \forall y(\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$;

    d) $P(a, f(a, b))$;

    e) $\exists x \, (P(x) \to \neg Q(x))$;

    f) $\forall x \, ((P(x) \wedge C(x)) \to \exists y L(x, y))$.

    NOTA. x, y, z, a, b são variáveis.

2. Exprima por meio de fórmulas bem formadas as seguintes afirmações:

    a) Todas as aves têm penas.

    b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais.

    c) Todos os insectos são mais leves do que algum mamífero.

    d) Nenhum número é menor do que zero.

    e) Zero é menor do que qualquer número.

    f) Alguns números primos não são pares.

    g) Todo o número par é número primo.

3. No que se segue, $c(x)$, $s(x)$ e $d(x)$ representam as afirmações «x é uma explicação clara», «x é satisfatória» e «x é uma desculpa», respectivamente. Admita que o universo do discurso para x é o conjunto de todos os textos em Português. Traduza as seguintes fórmulas bem formadas para linguagem comum:

    a) $\forall x \; c(x) \to s(x)$;

    b) $\exists x \; d(x) \; \wedge \; \neg \; s(x)$;

    c) $\exists x \; d(x) \; \wedge \; \neg \; c(x)$.

4. Seja Π o conjunto dos subconjuntos de pontos de um certo plano. Tomando Π para universo e utilizando apenas os três predicados

   $r(x)$ representa «x é uma recta»,

   $c(x)$ representa «x é uma circunferência»,

   $i(x, y)$ representa «a intersecção de x e y é não vazia»,

   traduza em lógica de predicados cada uma das afirmações seguintes:

   a) Toda a recta intersecta alguma circunferência.

   b) Alguma recta não intersecta alguma circunferência.

   c) Nenhuma recta intersecta todas as circunferências.

5. Escreva as seguintes frases usando lógica de primeira ordem, com recurso aos predicados Casa(x) («x é uma casa»); Grande(x) («x é grande»); Cara(x) («x é cara»); Apartamento(x) («x é um apartamento»); PMenor(x, y) («preço de x é menor do que o preço de y»).

   a) Todas as casas grandes são caras.

   b) Qualquer apartamento custa menos do que pelo menos uma casa grande.

6. Usando o predicado gosta(x, y) (x «gosta de» y), exprima por meio de uma fórmula a afirmação:

   a) Toda a gente tem alguém que gosta de si;

   b) As pessoas de quem todos gostam também gostam de si próprias.

   c) Formule a negação da proposição indicada na alínea (a) e escreva uma frase em linguagem comum que traduza essa negação.

7. Obtenha, na forma mais simplificada possível, a negação da seguinte fórmula

$$\forall y\ \exists x\ \ (\ (\ q(x) \to p(y)\ )\ \vee\ (\ p(y) \wedge q(x)\ )\ )\ .$$

8. Considere a fórmula

$$Q: \quad \forall x\, \exists y\, ((t(x) \wedge v(y, x)) \to \neg p(x, y))$$

   para uma interpretação com o domínio $\mathbb{N}$ e onde $t(x)$ representa «$x > 1$», $v(y, x)$ representa «$y = x + 1$» e $p(x, y)$ representa «x divide y».

   a) Diga, justificando, qual o valor lógico de Q.

   b) Qual o valor lógico da fórmula $(t(x) \wedge v(y, x)) \to \neg p(x, y)$ para a valoração V com $V(x) = 1$ e $V(y) = 2$.

9. Considere um universo X com os objetos A, B e C (isto é, X=$\{A, B, C\}$) e uma linguagem onde α, β e γ são símbolos de constante, f é um símbolo de função com um argumento e R é um símbolo de predicado com dois argumentos. Considere a seguinte interpretação:

símbolos de constante: $\alpha \mapsto A$, $\beta \mapsto A$ e $\gamma \mapsto B$;

símbolo de função f: $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = C$.

símbolo de predicado R: $\{(B, A), (C, B), (C, C)\}$.

Com esta interpretação, avalie as seguintes fórmulas:

a) $R(\alpha, \beta)$;

b) $\exists x\, f(x) = \beta$;

c) $\forall w\, R(f(w), w)$.

10. Para cada fórmula seguinte determine, se possível, um modelo e uma interpretação em que a mesma seja não válida:

    a) $\forall x\, (P(x, a) \to \neg Q(x, a))$, onde a denota um símbolo de constante;

    b) $\exists x\, \exists y\, ((P(x, y) \wedge \forall z\, (\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$.

11. Transforme as seguintes fórmulas na forma normal disjuntiva prenex e na forma normal conjuntiva prenex:

    a) $(\forall x\, S(x)) \to (\exists z\, P(z))$;

    b) $\neg(\forall x\, (S(x) \to P(x)))$;

    c) $\forall x\, (P(x) \to (\exists y\, Q(x, y)))$;

    d) $\exists x\, (\neg(\exists y\, P(x, y)) \to (\exists z\, (Q(z) \to R(x))))$;

    e) $\forall x\, \exists y\, \exists z\, ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$.

12. Encontre a forma normal (standard) de Skolem das seguintes fórmulas:

    a) $\neg((\forall x\, P(x)) \to (\exists y\, P(y)))$

    b) $\neg((\forall x\, P(x)) \to (\exists y\, \forall z\, Q(y, z)))$

    c) $\forall x\, \exists y\, \exists z\, ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$

13. Mostre que o conjunto

$$S = \{P \vee R, \neg Q \vee R, \neg S \vee Q, \neg P \vee S, \neg Q, \neg R\}$$

    é inconsistente.

14. Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

    a) $\Theta = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}$, $E = P(h(x), z, f(z))$;

    b) $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}$, $E = F(a, h(a), x, h(y))$;

15. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas indique, justificando, se são ou não unificáveis. Em caso afirmativo, encontre um seu unificador mais geral. Tenha em atenção que «a» e «b» denotam símbolos de constantes.

    a) $\{P(f(x), z), P(y, a)\}$;

    b) $\{P(f(x), x), P(z, a)\}$;

    c) $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\}$;

    d) $\{S(x, y, z), S(u, g(v, v), v)\}$;

    e) $\{P(x, x), P(y, f(y))\}$;

    f) $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\}$;

    g) $\{Q(f(x), y), Q(z, g(w))\}$.

16. Considerando o conjunto de fórmulas bem formadas

$$\{C(x, \text{SenhorAneis}, y), C(\text{Maria}, z, f(t)), C(w, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul}))\}$$

    indique se é unificável e, no caso afirmativo, determine o unificador mais geral.

17. Averigúe se as seguintes cláusulas admitem um factor. Em caso afirmativo, determine-o.

    a) $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a))$;

    b) $P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y)$.

18. Encontre as possíveis resolventes (se existirem) dos seguintes pares de cláusulas:

    a) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, b)$ e $C_2 : P(a) \vee Q(a, b)$;

    b) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, x)$ e $C_2 : \neg Q(a, f(a))$.

19. Considere as seguintes fórmulas da lógica de primeira ordem:

    F1: $\forall x\, (G(x) \to \forall y(P(y) \to L(x, y)))$

    F2: $\exists x\, G(x)$

    F3: $\exists x\, \forall y\, (P(y) \to L(x, y))$

    Usando o princípio da resolução mostre que F3 é consequência de F1 e F2.

20. Considere as seguintes afirmações:

    - Todo o aluno da Universidade de Aveiro que estuda com afinco passa a Matemática Discreta.
    - O João é um aluno da Universidade de Aveiro.
    - O João estuda com afinco.

    a) Exprima as afirmações anteriores como fbf's do cálculo de predicados.

b) Prove, usando o princípio da resolução, que o João passa a Matemática Discreta.

21. Considere as seguintes afirmações, no universo dos animais:

- Os animais com pelos são mamíferos.
- Os ursos são animais com pelos.
- Os coelhos são mamíferos.
- O Winnie é um urso.
- O Bugsbunny é um coelho.
- O Sylvester é um animal com pelos.

a) Represente-as em lógica de primeira ordem.

b) Usando o Princípio de Resolução, responda às seguintes perguntas:

(i) O Winnie é mamífero?

(ii) Quais são os mamíferos?

(iii) Quem é que tem pelos?

22. Considere cada um dos símbolos de predicado SH(x), IH(x) e TSP(x) cuja interpretação é a seguinte:

- SH(x) representa «x é um super-herói»;
- IH(x) representa «x é um infra-herói»;
- TSP(x) representa «x tem super poderes».

Vamos admitir que são conhecidos os seguintes factos: **(i)** Os super-heróis têm super poderes; **(ii)** Existe alguém que não tem super poderes; **(iii)** Só existem super-heróis ou infra-heróis.

a) Explicite os factos (i), (ii) e (iii) com fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem, utilizando os símbolos de predicado acima definidos.

b) Admitido (i), (ii) e (iii) como factos verdadeiros, aplicando o princípio da resolução, demonstre que existe pelo menos um infra-herói.

23. São conhecidos os seguintes factos:

- Todo e qualquer cavalo é mais rápido do que todo e qualquer galgo;
- Existe pelo menos um galgo que é mais rápido do que todo e qualquer coelho;
- Para todos e quaisquer x, y e z, se x é mais rápido do que y e y é mais rápido do que z, então x é mais rápido do que z.
- Roger é um coelho;

- Harry é um cavalo.

a) Usando os predicados

- Cavalo(x) representa «x é um cavalo»;
- Galgo(x) representa «x é um galgo»;
- Coelho(x) representa «x é um coelho»;
- MaisRápido(x, y) representa «x é mais rápido do que y»;

represente os factos conhecidos na lógica de primeira ordem.

b) Mostre, usando resolução, que Harry é mais rápido do que Roger.

Algumas soluções

1 a) x livre, y ligada

b) x livre e ligada, y livre

c) x ligada, y livre e ligada, z livre

d) a e b livres

e) x ligada

f) x ligada, y ligada.

2 a) $\forall x\,(\text{ave}(x) \to \text{tempenas}(x))$

b) $\forall x \forall y\,((\text{criança}(x) \wedge \text{pai}(x,y)) \to \text{maisnovo}(x,y))$

c) $\forall x\ \text{insecto}(x) \to \exists y\ (\text{mamifero}(y) \wedge \text{maisleve}(x,y))$

d) $\forall x\ (\text{numero}(x) \to x \geq 0)$

e) $\forall x\ (\text{numero}(x) \to 0 < x)$

f) $\exists x\,(\text{primo}(x) \wedge \neg\text{par}(x))$

g) $\forall x\,(\text{par}(x) \to \text{primo}(x))$

3 a) Todas as explicações claras são satisfatórias;

b) Algumas desculpas não são satisfatórias;

c) Há desculpas que não são explicações claras.

4 a) $\forall x\ (\ r(x)\ \to\ \exists y\ \ (\ c(y)\ \wedge\ i(x,y)\ )\ )$

b) $\exists x\ \exists y\ (\ r(x)\ \wedge\ c(y)\ \wedge\ \neg\ i(x,y)\ )$

c) $\forall x\ (\ r(x)\ \rightarrow \exists y\ (\ c(y)\ \wedge\ \neg i(x,y))\ )$

5 a) $\forall x\, ((\text{Casa}(x) \wedge \text{Grande}(x)) \rightarrow \text{Cara}(x))$

b) $\forall x\, (\text{Apartamento}(x) \rightarrow \exists y\, (\text{Casa}(y) \wedge \text{Grande}(y) \wedge \text{PMenor}(x,y)))$

6 a) $\forall x\ \exists y\ \text{gosta}(y,x)$

b) $\forall x\ ((\forall y\ \text{gosta}(y,x))\ \rightarrow\ \text{gosta}(x,x))$

c) $\exists x\ \forall y\ \neg\text{gosta}(y,x)$; Existe alguém de quem ninguém gosta.

7 $\exists y \forall x\ \neg\,(q(x) \rightarrow p(y))$

8 a) A proposição Q é *Verdadeira*.

b) Valor lógico da proposição: *Verdadeiro*;

9 a) Falsa;

b) Falsa;

c) Verdadeira.

11 a) $\exists x\, \exists z\ (\neg S(x) \vee P(z))$ (ou $\exists x\ (\neg S(x) \vee P(x))$)

b) $\exists x\, (S(x) \wedge \neg P(x))$

c) $\forall x\, \exists y\, (\neg P(x) \vee Q(x,y))$

d) $\exists x\ \exists y\ \exists z\ (P(x,y)\ \vee\ \neg Q(z)\ \vee\ R(x))$

e) $\forall x \exists y \exists z\ ((\neg P(x,y) \vee R(x,y,z)) \wedge (Q(x,z) \vee R(x,y,z)))$, na forma normal conjuntiva.

12 a) $\forall x\ \forall y\ (P(x)\ \wedge\ \neg P(y)) \equiv \forall z\, \bot$

b) $\forall x\ \forall y\ (P(x)\ \wedge\ \neg Q(y, f(x,y)))$ (ou $\forall x\ (P(x)\ \wedge\ \neg Q(x, f(x))))$

c) $\forall x\ ((\neg P(x, f(x))\ \vee\ R(x, f(x), g(x)))\ \wedge\ (Q(x, g(x))\ \vee\ R(x, f(x), g(x))))$

14 Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

a) $E\Theta = P(h(a), g(x), f(g(x)))$

b) $E\Theta = F(a, h(a), f(y), h(a))$

15 a) $\{f(x)/y, a/z\}$

b) $\{a/x, f(a)/z\}$

c) Não

d) $\{u/x, g(v,v)/y, v/z\}$

e) Não.

f) Não.

g) $\{f(x)/z, g(w)/y\}$

17 a) $P(a) \vee Q(f(a))$

b) $P(f(y)) \vee Q(f(y), y)$

18 a) $Q(a, b)$

b) Não existe