

## 3.1 Funções Reais de Várias Variáveis Reais: Limites, Continuidade, Derivação parcial e Diferenciabilidade

(baseado em slides de edições anteriores de Cálculo II)

Universidade de Aveiro, 2024/2025

Cálculo II – C

# Resumo dos Conteúdos

- 1 Noções Topológicas em  $\mathbb{R}^n$
- 2 Domínio, contradomínio, gráfico e conjuntos de nível
- 3 Limites e continuidade
- 4 Derivação Parcial e Derivadas Direcionais
- 5 Diferenciabilidade e Planos Tangentes
- 6 Regra da cadeia
- 7 Derivação implícita

## Distância

Consideramos em  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$  a distância euclidiana (usual):

$$d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

para  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

### Exemplos

1. Em  $\mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$ . Logo, a distância entre  $x$  e  $y$  corresponde ao comprimento do segmento de reta que une  $x$  a  $y$ .
2. Em  $\mathbb{R}^2$ , sendo  $X = (x_1, x_2)$  e  $Y = (y_1, y_2)$ ,  
 $d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ . Logo, pelo Teorema de Pitágoras, a distância entre  $X$  e  $Y$  corresponde ao comprimento do segmento de reta (em  $\mathbb{R}^2$ ) que une  $X$  a  $Y$ .

## Bola aberta e bola fechada

### Notação:

Usualmente, iremos denotar os pontos de  $\mathbb{R}^n$  por letras maiúsculas, os subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  por letras caligráficas e os números reais por letras minúsculas.

### Definições:

Sejam  $P \in \mathbb{R}^n$  e  $r \in \mathbb{R}^+$ .

- Ao conjunto

$$B_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, P) < r\},$$

chamamos **bola aberta** de **centro  $P$**  e **raio  $r$** .

- Ao conjunto

$$\overline{B}_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, P) \leq r\},$$

chamamos **bola fechada** de **centro  $P$**  e **raio  $r$** .

## Exemplos

- Se  $n = 1$ , a bola aberta de centro  $p \in \mathbb{R}$  e raio  $r > 0$  são todos os pontos do intervalo aberto  $]p - r, p + r[$ .
- Se  $n = 2$ , a bola aberta de centro  $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$  e raio  $r > 0$  são todos os pontos do círculo de centro  $P$  e raio  $r$  sem incluir a circunferência pois, sendo  $X = (x_1, x_2)$ ,

$$d(X, P) < r \Leftrightarrow (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 < r^2.$$

- Se  $n = 3$ , a bola aberta de centro  $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$  e raio  $r > 0$  é a esfera de centro  $P$  e raio  $r$  sem incluir a superfície esférica.

## Ponto interior e ponto fronteiro

### Definições:

Sejam  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $P \in \mathbb{R}^n$ .

- ①  $P \in \mathcal{D}$  é um **ponto interior** de  $\mathcal{D}$  se

$$\exists r > 0 \quad B_r(P) \subset \mathcal{D}.$$

Ao conjunto de todos os pontos interiores a  $\mathcal{D}$  chamamos de **interior de  $\mathcal{D}$**  e denotamos esse conjunto por  **$\text{int}(\mathcal{D})$** .

- ②  $P \in \mathbb{R}^n$  é um **ponto fronteiro** de  $\mathcal{D}$  se

$$\forall r > 0 \quad B_r(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \quad \wedge \quad B_r(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset.$$

Ao conjunto de todos os pontos fronteiros de  $\mathcal{D}$  chamamos de **fronteira de  $\mathcal{D}$**  e denotamos esse conjunto por  **$\text{fr}(\mathcal{D})$** .

# Conjunto aberto/ fechado/ limitado

## Observações:

- 1  $P \in \text{int}(\mathcal{D}) \Rightarrow P \in \mathcal{D}$
- 2 Pode ocorrer que  $P \in \text{fr}(\mathcal{D})$  e  $P \notin \mathcal{D}$ .

## Definições: Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- 1  $\mathcal{D}$  é **aberto** se  $\mathcal{D} = \text{int}(\mathcal{D})$ .
- 2  $\mathcal{D}$  é **fechado** se  $\text{fr}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ .
- 3  $\mathcal{D}$  é **limitado** se existir uma bola fechada que contém o conjunto  $\mathcal{D}$  (isto é,  $\exists r \in \mathbb{R}^+, \exists C \in \mathbb{R}^n : \mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$ ).

## Exemplo:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge x + y < 1) \vee (1 < x < 3 \wedge 0 < y < 2)\}$$

- $fr(\mathcal{D}) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$  onde

$$\mathcal{F}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 0 \wedge y \leq 1) \vee (x > 0 \wedge x + y = 1)\}$$

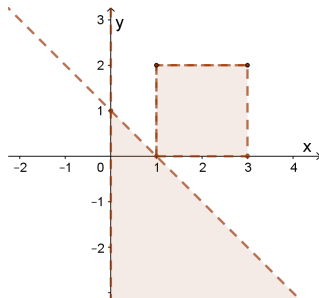
$$\mathcal{F}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 1 \vee x = 3) \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y = 0 \vee y = 2) \wedge 1 \leq x \leq 3\}.$$

$fr(\mathcal{D}) \not\subseteq \mathcal{D}$ , logo  $\mathcal{D}$  não é fechado.

- $\mathcal{D}$  não é limitado.
- $int(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ , logo  $\mathcal{D}$  é aberto.

Ilustração:





# Ponto de acumulação e ponto isolado

## Definições:

Seja  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- 1  $P \in \mathbb{R}^n$  é um **ponto de acumulação** de  $\mathcal{D}$  se qualquer bola aberta centrada em  $P$  contém pontos de  $\mathcal{D}$  distintos de  $P$ , isto é, se

$$\forall r > 0 \quad B_r(P) \cap (\mathcal{D} \setminus \{P\}) \neq \emptyset.$$

- 2  $P \in \mathcal{D}$  é um **ponto isolado** de  $\mathcal{D}$  se não é ponto de acumulação de  $\mathcal{D}$ .

## Observações:

- 1 Um ponto de acumulação de  $\mathcal{D}$  não pertence necessariamente a  $\mathcal{D}$ .
- 2 Um ponto isolado de  $\mathcal{D}$  pertence sempre ao conjunto  $\mathcal{D}$ .

## Ponto de acumulação e ponto isolado

**Exercício:** Mostre que todo o ponto interior de  $\mathcal{D}$  é um ponto de acumulação de  $\mathcal{D}$ .

**Exemplo:**

Considere o seguinte subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)\} \cup \{(2, 0)\}.$$

$(0, 0)$  e  $(-2, 0)$  são pontos de acumulação de  $\mathcal{L}$ , indique outros!

$(2, 0)$  é um ponto isolado de  $\mathcal{L}$ , existem outros?

► ilustração gráfica

Este conjunto é limitado e não é aberto, justifique.

Será fechado?

**Definição:**

Uma **função real de  $n$  variáveis reais de domínio  $\mathcal{D}$**  é uma aplicação

$$\begin{aligned} f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

que associa de forma única a cada elemento de  $\mathcal{D}$  um número real.

**Definição:** Seja  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Ao conjunto

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o **contradomínio de  $f$** .

**Definição:** Seja  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Ao conjunto

$$\mathcal{G}_f = \{(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x_1, \dots, x_n), \text{ com } (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o **gráfico de  $f$** .

# Exemplos

- ❶ Seja  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ . O domínio de  $f$  é

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

O contradomínio de  $f$  é  $CD_f = \mathbb{R}^+$

- ❷ Seja  $f(x, y, z) = \frac{1}{z^3}$ . O domínio de  $f$  é

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$$

(todo o espaço  $\mathbb{R}^3$  excepto o plano  $z=0$ ).

O contradomínio de  $f$  é  $CD_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

# Exemplos

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = 2x - y$ . ▶ esboço gráfico  
 $D_f = \mathbb{R}^2$  e  $CD_f = \mathbb{R}$ ; O gráfico de  $f$  é o plano de equação  $z = 2x - y$ .
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . ▶ esboço gráfico  
 $D_f = \mathbb{R}^2$  e  $CD_f = \mathbb{R}_0^+$ ; O gráfico de  $f$ ,  
 $\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = x^2 + y^2\}$ , é um parabolóide circular.
- $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x, y) = 4 - y^2$ . ▶ esboço gráfico  
 $D_g = \mathbb{R}^2$  e  $CD_g = ]-\infty, 4]$ ;  
 $\mathcal{G}_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = 4 - y^2\}$  (cilindro parabólico).
- $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(x, y) = x^2 - y^2$ . ▶ esboço gráfico  
 $D_h = \mathbb{R}^2$  e  $CD_h = \mathbb{R}$ ;  
 $\mathcal{G}_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = x^2 - y^2\}$  (parabolóide hiperbólico).
- $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $s(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ . ▶ esboço gráfico  
 $D_s = \mathbb{R}^2$  e  $CD_s = [-1, 1]$ ;  
 $\mathcal{G}_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = \sin(x^2 + y^2)\}$ .

# Curvas de Nível/ Superfícies de Nível

## Definições:

Seja  $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $k \in CD_f$ . Ao conjunto

$$\mathcal{N}_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}$$

chamamos **conjunto de nível  $k$  de  $f$** .

## Observações:

Para  $n = 2$ , o conjunto  $\mathcal{N}_k$  passa a denotar-se por  $\mathcal{C}_k$  e a designar-se por **curva de nível  $k$  de  $f$** . Geometricamente, obtêm-se as curvas de nível  $k$  intersectando o  $\mathcal{G}_f$  com o plano horizontal de cota  $k$ .

Para  $n = 3$ , o conjunto  $\mathcal{N}_k$  passa a denotar-se por  $\mathcal{S}_k$  e a designar-se por **superfície de nível  $k$  de  $f$** .

**Nota:** Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

# Exemplos

- ①  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x, y) = 4 - y^2$ .

$CD_g = ] - \infty, 4]$ . Para  $k \leq 4$ , a curva de nível  $k$  de  $g$  é

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: k = 4 - y^2\}.$$

Se  $k = 4$ ,  $C_k$  é a reta de equação  $y = 0$ ; para  $k < 4$ ,  $C_k$  é a união das retas de equações  $y = \sqrt{4 - k}$  e  $y = -\sqrt{4 - k}$ . [▶ applet](#)

- ②  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(x, y) = x^2 - y^2$ .  $CD_h = \mathbb{R}$ .

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: k = x^2 - y^2\}, \text{ com } k \in \mathbb{R} \quad \text{▶ applet}$$

Para  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , a curva de nível  $k$  é a hipérbole de equação  $x^2 - y^2 = k$ . Para  $k = 0$ ,  $C_k$  é a reunião das retas de equações  $y = x$  e  $y = -x$ .

- ③  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y, z) = 2x - 5y + 3z$ . Para cada  $k \in \mathbb{R}$ , a superfície de nível  $k$  de  $f$  é o plano ortogonal ao vetor  $(2, -5, 3)$  que passa no ponto  $(0, 0, \frac{k}{3})$ .

# Limite de uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^p$

## Definições:

- Uma **sucessão  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de pontos em  $\mathbb{R}^p$**  é uma aplicação de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{R}^p$ , que a cada  $n$  faz corresponder  $X_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np})$ .
- Seja  $L \in \mathbb{R}^p$ . Dizemos que a **sucessão  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $L$**  se, para todo o  $r > 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $X_n \in B_r(L)$ , para todo o  $n \geq m$ . Escreve-se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = L$ .

## Prova-se que:

- $L$  é único, quando existe.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np}) = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$  sse  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{ni} = \ell_i$ , para todo o  $i = 1, 2, \dots, p$ .



## Exemplos de sucessões vetoriais convergentes/ não convergentes

- A sucessão de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $X_n = (\frac{1}{n}, 2)$  converge para  $L = (0, 2)$ .
- A sucessão de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $X_n = (3 + (\frac{1}{2})^n, n \sin(\frac{1}{n}))$  converge para  $L = (3, 1)$ .
- A sucessão de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $X_n = ((-1)^n, (\frac{1}{2})^n, \frac{1}{n})$  não é convergente.

## Conceito de Limite

### Definição:

Seja  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  um ponto de acumulação de  $\mathcal{D}$  e  $\ell \in \mathbb{R}$ . Dizemos que o limite de  $f$  quando  $X$  tende para  $A$  é  $\ell$  se, para qualquer sucessão  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de pontos em  $\mathcal{D} \setminus \{A\}$  convergente para  $A$ , a correspondente sucessão das imagens  $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $\ell$ .

Nesse caso, escreve-se

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell.$$

### Observação:

Prova-se que o limite, quando existe, é único.

## Exemplo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

porque dada uma qualquer sucessão  $(x_n, y_n)$  de pontos de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (0,0),$$

se tem que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = 0,$$

uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \right| \leq 1$$

(o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo).

# Propriedades algébricas dos limites

## Proposição:

Sejam  $f, g: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A$  um ponto de acumulação de  $\mathcal{D}$ . Se

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{X \rightarrow A} g(X) = \ell_2,$$

então

- 1  $\lim_{X \rightarrow A} (f + g)(X) = \ell_1 + \ell_2;$
- 2  $\lim_{X \rightarrow A} (\lambda f)(X) = \lambda \ell_1$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R};$
- 3  $\lim_{X \rightarrow A} (fg)(X) = \ell_1 \ell_2;$
- 4  $\lim_{X \rightarrow A} \left( \frac{f}{g} \right) (X) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ , se  $\ell_2 \neq 0$ .

# Limite de funções

Seja  $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

## Observação:

- Para  $n = 1$ , isto é, para funções reais de uma única variável real (f.r.v.r.), só há duas formas de nos aproximarmos de um ponto  $a \in \mathbb{R}$  para calcular  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ : "à esquerda" e "à direita" do ponto  $a$ , o que corresponde a calcular os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

- Para  $n = 2$  há uma infinidade de formas de nos aproximarmos de um ponto  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ . Observação análoga quando  $n \geq 3$ . É por este motivo que o cálculo de limites de funções com mais do que uma variável é mais complicado do que o cálculo de limites de f.r.v.r.

## Limite segundo um conjunto

### Definição:

Seja  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathcal{R}$  um subconjunto de  $\mathcal{D}$  para o qual  $A$  é ponto de acumulação. Chama-se **limite de  $f$  quando  $X$  tende para  $A$ , segundo o conjunto  $\mathcal{R}$** , ao limite quando  $X$  tende para  $A$  da restrição de  $f$  a  $\mathcal{R}$ , i.e.,

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in \mathcal{R}}} f(X) = \lim_{X \rightarrow A} f|_{\mathcal{R}}(X)$$

### Exemplo:

Sendo  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in \mathcal{R}}} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^2} = 1.$$

**Nota:** Do limite calculado não se pode concluir que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$  existe!

## Averiguação da não existência de limite, usando limites segundo conjuntos:

## Proposição:

- Se existe algum  $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ , nas condições da definição, tal que  

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in \mathcal{R}}} f(X) \text{ não existe, então não existe } \lim_{X \rightarrow A} f(X).$$
- Se existem  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{D}$ , nas condições da definição, tais que  

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in \mathcal{R}_1}} f(X) \neq \lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in \mathcal{R}_2}} f(X), \text{ então não existe } \lim_{X \rightarrow A} f(X).$$

## Exemplos:

- ❶ Vamos estudar o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x + \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right)$ .

Observe-se que  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$  e que  $(0, 0)$  é ponto de acumulação do domínio da função. Seja  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in D_f : x = 0\}$ .

Uma vez que  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{R}}} \left( x + \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{y}$  não existe,

então o limite dado também não existe.

- ❷ **Existe**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$  ? Observe-se que  $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Sejam

$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in D_f : y = 0\}$  e  $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in D_f : x = 0\}$ .

Uma vez que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{R}_1}} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0 \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{R}_2}} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1,$$

então o limite dado não existe.



**Exercício:**

Mostre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

não existe, verificando que os limites segundo os conjuntos

$$\mathcal{R}_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : y = mx\},$$

onde  $m \in \mathbb{R}$ , existem, mas variam com  $m$ .

**Nota:** Os limites segundo retas (ou semirretas) são usualmente designados por limites direcionais.

# Exercícios

- 1 Mostre que não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ .
- 2 Averigue da existência de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{2x^2 + y^4}$ .

## Averiguação da existência de limite usando limites segundo conjuntos

### Proposição:

Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , subconjuntos de  $\mathcal{D}$  tais que  $A$  é um seu ponto de acumulação e  $\mathcal{D} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \dots \cup \mathcal{R}_k$ . Se  $\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in \mathcal{R}_i}} f(X) = \ell$ , para todo o  $i = 1, 2, \dots, k$ , então  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell$ .

### Nota:

Os subconjuntos  $\mathcal{R}_i$  são em número finito. Esta proposição, na prática, é de difícil utilização genérica. Aplica-se com êxito em algumas situações, como a seguinte.

**Exercício:** Sendo  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x, y) = \begin{cases} -5x^2y + 1 & \text{se } y < 0 \\ 1 + x^2 + y^2 & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$

calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

## Duas proposições — cálculo de alguns limites

**Proposição:** [Produto de um infinitésimo por uma função limitada]

Sejam  $f, g: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A$  um ponto de acumulação de  $\mathcal{D}$ .

Se  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = 0$  e se  $g$  é uma função limitada em  $\mathcal{D} \cap B_r(A)$ , para algum  $r > 0$ , então  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)g(X) = 0$ .

**Proposição:** [Mudança de variável]

Sejam  $f, u: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g$  uma função real de variável real tal que  $f(X) = g(u(X))$ . Se

$$\lim_{X \rightarrow A} u(X) = c \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow c} g(z) = \ell,$$

e  $g$  é contínua ou não está definida em  $c$ , então

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \lim_{z \rightarrow c} g(z) = \ell.$$

## Exercícios:

Usando as proposições do slide anterior (escolhendo a que se adequa), calcule os seguintes limites:

$$① \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{e^{x-y} - 1}{y - x}$$

$$② \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$$

# Continuidade

## Definição:

Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \in \mathcal{D}$ . Se  $P$  é um ponto de acumulação de  $\mathcal{D}$ ,  $f$  diz-se **contínua em  $P$**  se  $\lim_{X \rightarrow P} f(X) = f(P)$ .

Caso  $P$  seja **ponto isolado** de  $\mathcal{D}$ , consideramos que  **$f$  é contínua** em  $P$ .  
Ao conjunto de pontos onde  $f$  é contínua chamamos domínio de continuidade de  $f$ .

## Proposição:

Se  $f, g: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas em  $P \in \mathcal{D}$  e  $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(\mathcal{D}) \subseteq I$ , é contínua em  $f(P)$ , então

- ①  $f + g$ ,  $fg$  e  $\lambda f$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , são contínuas em  $P$ .
- ②  $\frac{f}{g}$  é contínua em  $P$ , desde que  $g(P) \neq 0$ .
- ③  $\alpha \circ f$  é contínua em  $P$ .

# Exercícios

- 1 Determine o domínio de continuidade da função  $f$  definida por  $f(x, y) = \frac{3xy - 5x^3}{y^3 - xy}$ .

- 2 Mostre que  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é descontínua em  $(0, 0)$ .

- 3 Mostre que  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy - 2y}{(x-1)^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

não é contínua em  $(1, 0)$ .

## Derivada parcial em ordem a $x$

Sejam  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$ . Fixando  $y = b$ , fica definida a função real de variável real  $x$ ,  $g_b$ , definida por

$$\begin{aligned} g_b : \{x \in \mathbb{R} : (x, b) \in \mathcal{D}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_b(x) = f(x, b). \end{aligned}$$

À derivada de  $g_b$  em  $x = a$ , caso exista, chama-se **derivada parcial de  $f$  em ordem a  $x$  em  $(a, b)$**  e denota-se por  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ . Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real<sup>a</sup>.

**Notação alternativa:**  $f'_x(a, b)$ .

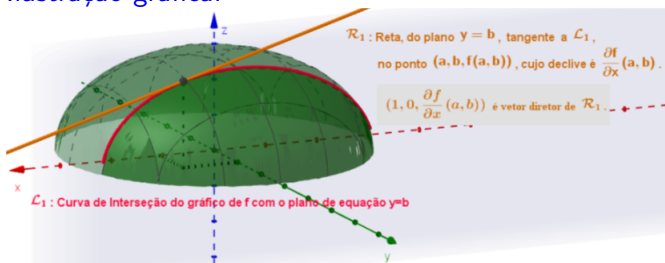
<sup>a</sup>Podem considera-se derivadas iguais a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) mas, neste contexto, não irão ser relevantes



Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a  $x$ 

- ① A derivada parcial de  $f$  em ordem a  $x$  no ponto  $(a, b)$  é o declive da reta  $\mathcal{R}_1$  tangente à curva de interseção do gráfico de  $f$  com o plano vertical  $y = b$ , no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .

Ilustração gráfica:



▶ applet

▶ outra applet

- ② A reta  $\mathcal{R}_1$  tem equações cartesianas:
- $$\begin{cases} y = b \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) \end{cases}$$
- ③  $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b))$  é vetor diretor de  $\mathcal{R}_1$ .

## Derivada parcial em ordem a $y$

Seja  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$ . Fixando  $x = a$ , fica definida a função real de variável real  $y$ ,  $g_a$ , definida por

$$\begin{aligned} g_a : \{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in \mathcal{D}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto g_a(y) = f(a, y). \end{aligned}$$

À derivada de  $g_a$  em  $y = b$ , caso exista, chama-se **derivada parcial de  $f$  em ordem a  $y$  em  $(a, b)$**  e denota-se por  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ . Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

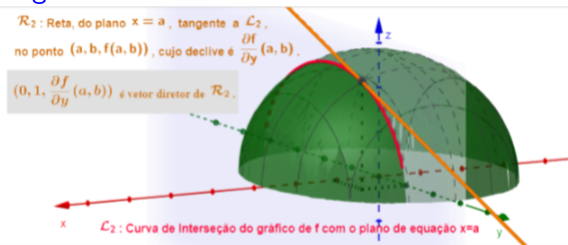
caso este limite exista e seja um número real.

**Notação alternativa:**  $f'_y(a, b)$ .

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a  $y$ 

- ❶ A derivada parcial de  $f$  em ordem a  $y$  no ponto  $(a, b)$  é o declive da reta  $\mathcal{R}_2$  tangente à curva de interseção do gráfico de  $f$  com o plano vertical  $x = a$ , no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .

Ilustração gráfica:



► applet

► outra applet

- ❷ A reta  $\mathcal{R}_2$  tem equações cartesianas:

$$\begin{cases} x = a \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \end{cases}$$

- ❸  $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$  é vetor diretor dessa reta.

## Derivação parcial: exemplos

Na prática, para determinar a derivada parcial de  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  em ordem a uma das suas variáveis, determina-se a derivada de  $f$  como se ela dependesse apenas dessa variável (usando as regras de derivação, se possível), considerando a outra variável como constante.

### Exemplos:

- ❶ Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x^2 + xy + \ln(1 + y^2)$ . Para todo o  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , existem as **derivadas parciais** de  $f$  em ordem a  $x$  e a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + \frac{2y}{1 + y^2}.$$

- ❷ Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = e^{-x^2+y^2} + x - 3y$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xe^{-x^2+y^2} + 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{-x^2+y^2} - 3.$$

Em particular,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 1$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2e - 3$ .

## Derivação parcial: exemplo

De modo semelhante se definem as derivadas parciais de uma função com  $n$  variáveis reais:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

### Exemplo:

Seja  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y, z) = \cos(xy^2) + \ln(zy^3)$ .

Para todo o  $(x, y, z) \in \mathcal{D}$ , tem-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -y^2 \sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2xy \sin(xy^2) + \frac{3}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{z}.$$

## Derivação parcial: exercícios

Em alguns casos, temos de usar a definição para determinar as derivadas parciais. Tal como nas funções de uma variável, deve usar-se as definições para determinar as derivadas parciais num ponto  $P$ , se na vizinhança do ponto  $P$  a função não está definida por uma expressão analítica única.

### Exercícios:

- ❶ Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

- ❷ Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{se } x \neq y \\ x^3 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) = 3$  e que  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 2)$  não existe.

## Derivadas parciais de ordem superior

### Definições e notação:

Seja  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivadas parciais em ordem a  $x$  e a  $y$ , em algum conjunto de pontos no interior de  $\mathcal{D}$ . As funções

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}$$

com domínio nos conjuntos de pontos onde cada uma existe, terão, ou não, derivadas em ordem a  $x$  e a  $y$  nesse conjunto. As **derivadas parciais de ordem 2 de  $f$**  são as funções (definidas nos pontos onde existem):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

# Derivadas parciais de ordem superior

## Observações:

① A  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  chamamos **derivadas parciais mistas**.

② No caso geral, as derivadas parciais mistas são distintas, isto é, pode ocorrer:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

③ De modo análogo, se definem as derivadas parciais de 3ª ordem, etc.



## Exemplo

### Exemplo:

Seja  $f$  a função real de domínio  $\mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y) = x^3y + 5xy + \sin(y^2)$ . Verifique que, para todo o  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2y + 5y & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^3 + 5x + 2y \cos(y^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6xy & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2 \cos(y^2) - 4y^2 \sin(y^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= 3x^2 + 5 & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 3x^2 + 5\end{aligned}$$

**Nota:** Neste exemplo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Contudo, esta igualdade nem sempre se verifica. Veja-se, por exemplo o exemplo da página seguinte.

## Exemplo

### Exemplo:

Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Prova-se que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

(bastante trabalhoso, pois é necessário usar a definição de derivada).

## Teorema de Schwarz (em $\mathbb{R}^2$ )

**Nota:** O seguinte teorema garante que, em determinadas condições, as derivadas parciais mistas de uma dada função  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são iguais.

**Teorema de Schwarz (em  $\mathbb{R}^2$ ):** Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$ .

Se existem  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  numa bola aberta centrada em  $(a, b)$  e se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  é contínua em  $(a, b)$ , então existe  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$  e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b).$$

**Nota:** O Teorema de Schwarz pode ser enunciado para funções definidas em subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$ .

## Função de classe $C^k$ ; Corolário do Teorema de Schwarz

### Definição:

Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\mathcal{D}$  aberto, e  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dizemos que  $f$  é de classe  $C^k$  em  $\mathcal{D}$  se  $f$  possuir todas derivadas parciais até à ordem  $k$  contínuas em todo o ponto de  $\mathcal{D}$ .

Notação:  $f \in C^k(\mathcal{D})$ .

### Corolário do Teorema de Schwarz (em $\mathbb{R}^2$ ):

Seja  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\mathcal{D}$  aberto. Se  $f \in C^2(\mathcal{D})$ , então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b),$$

para todo o  $(a, b) \in \mathcal{D}$ .

**Nota:** De modo análogo se pode enunciar o Corolário do Teorema de Schwarz para funções com  $n \geq 3$  variáveis reais.

## Derivadas Direcionais

As derivadas parciais de  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são casos particulares de derivadas chamadas **derivadas direcionais** (segundo os vetores  $U = (1, 0)$  ou  $U = (0, 1)$ , consoante o caso).

### Definição:

Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P \in \text{int}(\mathcal{D})$  e  $U$  um vetor unitário de  $\mathbb{R}^n$ . A derivada direcional de  $f$  segundo  $U$  no ponto  $P$  é o seguinte limite, caso exista e seja finito,

$$D_U f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + hU) - f(P)}{h}.$$

Interpretação geométrica (caso  $n=2$ ):

► applet

$D_U f(P)$ , com  $P = (a, b)$ , dá informação sobre a variação da cota dos pontos no gráfico de  $f$ , ao passar por  $(a, b, f(a, b))$ , quando é colocado um ponto  $X$  no domínio da função a deslocar-se na direção de  $U$ .

## Exemplo de função com todas as derivadas direcionais num ponto e descontínua nesse ponto

### Exemplo:

Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Observe-se que  $f$  não é contínua no ponto  $(0, 0)$ , pois não existe limite de  $f$  nesse ponto.

Se  $U = (u_1, u_2)$ , com  $\|U\| = 1$ , então

$$D_U f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 u_1 u_2^2}{h^2 u_1^2 + h^4 u_2^4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4}.$$

Logo

$$D_U f(0, 0) = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1} & \text{se } u_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } u_1 = 0. \end{cases}$$

## Diferenciabilidade:

O que será para uma função com mais do que uma variável?

Como se pode constatar com o exemplo do slide anterior, a existência das derivadas parciais (ou mesmo de todas as derivadas direcionais) de  $f$  num ponto  $P$ , não garante a continuidade de  $f$  em  $P$ . Recorde que para  $n = 1$ , a existência de derivada finita (diferenciabilidade) num ponto é garantia da continuidade nesse ponto.

Em  $\mathbb{R}^n$ , para  $n \geq 2$ , qual será a noção de função diferenciável num ponto?

Vamos responder a essa questão para  $n = 2$ , recordando o caso  $n = 1$ . Para dimensões superiores é só fazer a adaptação devida.

## Caso $n = 1$ : diferenciabilidade/reta tangente

Seja  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $a \in \text{int}(\mathcal{D})$ . Então, existe e é finito o seguinte limite:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

e, portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h}{h} = 0.$$

Tomando  $\epsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h}{h}$ , obtemos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \epsilon(h) \cdot h, \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Deste modo, numa vizinhança de  $a$ ,  $f$  fica "bem aproximada" pela reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ , a que corresponde a chamada linearização de  $f$  em torno de  $a$ :  $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ .



## Caso $n=2$ : diferenciabilidade/plano tangente (I)

Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P = (a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$ . Considere que existem  $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$ . Recorde-se que

$$U_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(P)) \quad \text{e} \quad U_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(P))$$

são **vetores diretores** das retas tangentes às **curvas de interseção** do gráfico de  $f$  com  **$y = b$**  e  **$x = a$** , no ponto  $(a, b, f(a, b))$ , respetivamente.

Os vetores  $U_1$  e  $U_2$  são não colineares e, portanto, existe o **plano,  $\mathcal{T}$ , que passa em  $(a, b, f(a, b))$  e contém  $U_1$  e  $U_2$** . Atendendo a que o vetor  $N = (-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1)$  é ortogonal a ambos,

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

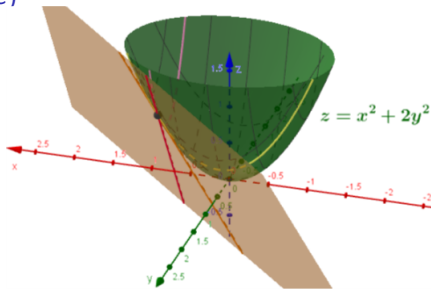
é uma equação cartesiana do **plano  $\mathcal{T}$** . 

## Caso $n=2$ : diferenciabilidade/plano tangente (II)

Nas funções diferenciáveis (ver definição no slide seguinte)  $f$  fica "bem aproximada" em redor de  $(a, b)$  pelos valores assumidos no plano  $\mathcal{T}$ , ou seja, pela sua linearização em torno de  $(a, b)$ :

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Ilustração Gráfica: (plano tangente)



## Função Diferenciável (caso $n = 2$ )

### Definição:

Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$ . Dizemos que  $f$  é **diferenciável em  $(a, b)$**  se existem as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  e

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

**Nota:** Observe-se que se  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , então, numa vizinhança de  $(a, b)$ ,  $f$  fica "bem aproximada" pelo plano de equação

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

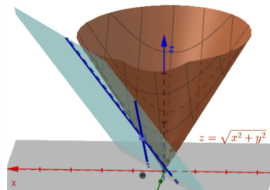
## Dois exemplos (abordagem gráfica) <sup>1</sup>:

- 1 Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A função  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ , mas é diferenciável em qualquer outro ponto.

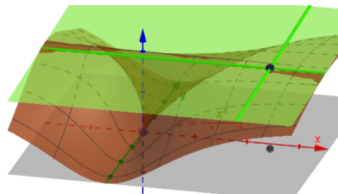
► [applet](#)



- 2 Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

A função  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ , mas é diferenciável em qualquer outro ponto.



<sup>1</sup>Ver à frente, as justificações das afirmações.

## Condições suficientes de diferenciabilidade

### Teorema:

Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ . Se existem  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  numa bola aberta centrada em  $P$  e se pelo menos uma dessas derivadas é contínua em  $P$ , então  $f$  é diferenciável em  $P$ .

### Corolário:

Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ . Se  $f$  é de classe  $C^1$  numa bola aberta centrada em  $P$ , então  $f$  é diferenciável em qualquer ponto dessa bola.

### Exercício:

Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Use o Teorema anterior (ou o Corolário), para concluir que  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , se  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

# Condição necessária de diferenciabilidade

## Teorema:

Se  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ , então  $f$  é contínua em  $P$ .

## Nota:

O Teorema anterior tem a seguinte formulação equivalente:

Se  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  não é contínua em  $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ , então  $f$  não é diferenciável em  $P$ .

## Exercício:

Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Use o Teorema anterior, para concluir que  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ .

# Plano Tangente e Vetor Normal ao Gráfico de uma Função

**Definições:** Seja  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$ .

O plano de equação

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é o **plano tangente ao gráfico<sup>a</sup> de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$** . ( [▶ ver slide 49](#) )

Dizemos que o vetor

$$N = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1 \right)$$

é um **vetor ortogonal ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$** .

A reta com vetor diretor  $N$  que passa em  $(a, b, f(a, b))$  é chamada de **reta ortogonal (ou normal) à superfície  $z = f(x, y)$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$** .

---

<sup>a</sup>superfície de equação  $z = f(x, y)$

## Exercício: Plano tangente e reta normal

### Exercício:

Seja  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ . Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto  $P = (1, -1, 2)$ .

Como  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$  são contínuas em  $\mathbb{R}^2$ , podemos concluir que  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ . O plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P = (1, -1, f(1, -1))$  tem equação

$$z = f(1, -1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)(y + 1),$$

ou, equivalentemente,

$$2x - 2y + z = 6.$$

A reta normal ao gráfico de  $f$  no ponto  $P$  tem equação:

$$(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(2, -2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



# Vetor Gradiente e Derivadas Direcionais

## Definição:

Seja  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com derivadas parciais de 1.<sup>a</sup> ordem em  $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ . Ao vetor

$$\nabla f(P) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

chamamos **gradiente de  $f$  em  $P$** .

## Teorema:

Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $\mathcal{D}$ ,  $P \in \text{int}(\mathcal{D})$  e  $U \in \mathbb{R}^n$  um vetor unitário. Então existe a derivada direcional de  $f$  segundo  $U$  no ponto  $P$  e

$$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U,$$

onde  $\cdot$  representa o produto interno (usual) de vetores em  $\mathbb{R}^n$ .

# Interpretações Geométricas do Gradiente (caso $n = 2$ )

► applet

- Sejam  $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $\mathcal{D}$ ,  $P \in \text{int}(\mathcal{D})$  e  $U \in \mathbb{R}^2$  um vetor unitário. Usando a definição de produto interno, tem-se que

$$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U = \|\nabla f(P)\| \cos \theta, \text{ onde } \theta = \angle(\nabla f(P), U).$$

Assim, a derivada direcional máxima em  $P$  ocorre na direção e sentido correspondente a  $\theta = 0$ , ou seja, na direção e sentido do vetor gradiente de  $f$  em  $P$ .

O vetor  $\nabla f(P)$  fornece a direção e sentido na qual  $f$ , em redor de  $P$ , apresenta maior crescimento.

- Nas condições anteriores, se  $P = (a, b)$  e  $f(a, b) = k$ , pode provar-se que o vetor gradiente de  $f$  em  $(a, b)$  é ortogonal à reta tangente à curva de nível  $\mathcal{C}_k$ , que passa em  $(a, b)$ . Isto é,

$\nabla f(a, b)$  é ortogonal à curva de nível de  $f$  que passa em  $(a, b)$ .

# Interpretação geométrica do gradiente (caso $n = 3$ ):

## Plano tangente a uma superfície de nível

Seja  $h: \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  função diferenciável em  $\mathcal{B}$ ,

$\mathcal{S}_k = \{(x, y, z) \in \mathcal{B} : h(x, y, z) = k\}$  uma sua superfície de nível e  $P \in \mathcal{S}_k$ .

Pode provar-se que:

O vetor gradiente de  $h$  em  $P$  é ortogonal a  $\mathcal{S}_k$  em  $P$ .

Assim, se  $\nabla h(P) \neq (0, 0, 0)$ , então a equação do plano tangente a  $\mathcal{S}_k$  no ponto  $P$  é dada por

$$\nabla h(P) \cdot \overrightarrow{PX} = 0,$$

i.e., o plano tangente à superfície de equação  $h(x, y, z) = k$  em  $P = (a, b, c)$  tem por equação:

$$(x - a) \frac{\partial h}{\partial x}(a, b, c) + (y - b) \frac{\partial h}{\partial y}(a, b, c) + (z - c) \frac{\partial h}{\partial z}(a, b, c) = 0.$$

## Exemplo de determinação de plano tangente a uma superfície de nível

Consideremos o elipsoide de equação  $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 49$  e  $P = (1, -2, 3)$  um ponto desse elipsoide. Pretendemos determinar uma equação do plano tangente ao elipsoide no ponto  $P$ .

O elipsoide pode ser encarado como a superfície de nível 49 da função  $h$  de domínio  $\mathbb{R}^3$  tal que  $h(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2$ . Note que  $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$ , uma vez que, para todo o  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = 8x, \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = 18y \text{ e } \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

Assim,  $\nabla h(P) = (8, -36, 6)$  e, portanto, uma equação do plano tangente ao elipsoide em  $P$  é

$$8(x - 1) - 36(y + 2) + 6(z - 3) = 0.$$

## Regra da cadeia

A regra da cadeia é usada para derivar uma função composta.

Começemos por recordar a **Regra da cadeia** para funções de uma única variável. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções diferenciáveis,  $y = f(x)$  e  $x = g(t)$ . Logo,  $y(t) = f(g(t))$  e

$$y'(t) = f'(g(t))g'(t) = f'(x)x'(t),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Para funções com mais do que uma variável, a **Regra da Cadeia** tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de derivação de uma função composta.

# Regra da cadeia

## Regra da cadeia (Caso 1):

Suponha-se que  $z = f(x, y)$  é uma função diferenciável nas variáveis  $x$  e  $y$ , onde  $x = g(t)$  e  $y = h(t)$  são funções diferenciáveis de  $t$ . Então  $z$  é uma função diferenciável de  $t$  e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

**Nota:** Como é frequente escrever  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  em vez de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , respetivamente, a Regra da Cadeia pode ser escrita na forma

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

# Regra da cadeia

## Exercício:

Seja  $z = x^2y + 3xy^4$ , onde  $x = \sin(2t)$  e  $y = \cos t$ . Determine  $\frac{dz}{dt}$  quando  $t = 0$ .

Pela Regra da cadeia, concluímos que:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

donde

$$\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4) \cdot 2 \cos(2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t).$$

Não é necessário substituir as expressões de  $x$  e de  $y$  em função de  $t$ . Simplesmente observe que, quando  $t = 0$ , temos  $x(0) = \sin 0 = 0$  e  $y(0) = \cos 0 = 1$ , donde

$$\frac{dz}{dt}(0) = (0 + 3) \cdot 2 \cos(0) + (0 + 0)(-\sin 0) = 6.$$

# Regra da cadeia

## Regra da cadeia (Caso 2):

Suponha-se que  $z = f(x, y)$  é uma função diferenciável nas variáveis  $x$  e  $y$ , onde  $x = g(s, t)$  e  $y = h(s, t)$  são funções diferenciáveis de  $s$  e de  $t$ . Então  $z$  é uma função diferenciável e

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

## Notas:

- 1 A Regra da Cadeia (Caso 2) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

- 2 O Caso 2 da Regra da Cadeia contém três tipos de variáveis:  $s$  e  $t$ , que são variáveis independentes;  $x$  e  $y$ , chamadas variáveis intermédias;  $z$ , que é a variável dependente.



# Regra da cadeia

## Exercício:

Seja  $z = x \sin y + 1$ , onde  $x(s, t) = st^2$  e  $y(s, t) = st$ . Determine  $\frac{\partial z}{\partial s}$  e  $\frac{\partial z}{\partial t}$ .

Pela Regra da cadeia, concluímos que:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \sin y \cdot t^2 + x \cos y \cdot t = t^2 \sin(st) + st^3 \cos(st)$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \sin y \cdot 2st + x \cos y \cdot s = 2st \sin(st) + s^2 t^2 \cos(st).$$

## Regra da cadeia

A Regra da cadeia (Caso 2) pode ser generalizada para o caso em que a variável dependente  $z$  é uma função de  $n$  variáveis intermédias  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , cada uma das quais, por seu turno, é função de  $m$  variáveis independentes  $t_1, t_2, \dots, t_m$ .

### Regra da cadeia (Caso 2 generalizado):

Suponha-se que  $z$  é uma função diferenciável de  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , onde cada função  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , é uma função diferenciável de  $m$  variáveis  $t_1, t_2, \dots, t_m$ .

Então  $z$  é uma função diferenciável de  $t_1, t_2, \dots, t_m$  e, para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}.$$

## Funções definidas explicitamente e implicitamente

- Se  $y = g(x)$ , dizemos que  $y$  é uma **função explícita da variável  $x$** .
- Na equação  $f(x, y) = 0$ ,  $y$  não aparece como função explícita de  $x$ . Se, para cada  $x$ , existir um só  $y$  que resolva a equação, dizemos que  $f(x, y) = 0$  define  $y$  como **função implícita de  $x$** .

### Exemplo:

Dada a equação  $x^2 + y - 1 = 0$ , conclui-se que  $y = 1 - x^2$ . Logo, podemos concluir que a equação dada define implicitamente  $y$  como função de  $x$ :  $y = g(x)$  onde  $g(x) = 1 - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (observe-se que esta equação não define implicitamente  $x$  como função de  $y$ ).

**Nota:** Dada uma equação do tipo  $f(x, y) = 0$ , nem sempre é possível explicitar  $y$  como função de  $x$  nem  $x$  como função de  $y$ . Considere-se, por exemplo, as equações:  $e^y + yx + x^5 - 2x^2 = 0$  e  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ .

# Funções definidas implicitamente

## Questão:

Como podemos saber, sem recorrer à explicitação, se uma dada equação

$$f(x, y) = 0$$

define implicitamente uma das variáveis em função da outra? Além disso, em caso afirmativo, como calcular (se existir) a derivada da variável dependente relativamente à variável independente?

O **Teorema da função implícita** (a demonstração sai do âmbito desta UC) permite responder à questão colocada (se estivermos nas condições do teorema).

# Teorema da função implícita

## Teorema da função implícita (para duas variáveis):

Sejam  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  um aberto,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivadas parciais contínuas e  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$  tal que  $f(x_0, y_0) = 0$ . Se

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

então a equação  $f(x, y) = 0$  define implicitamente  $y$  como função de  $x$ ,  $y = g(x)$ , numa vizinhança de  $(x_0, y_0)$ . Além disso, a função  $g$  é diferenciável numa vizinhança de  $x_0$  e

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}.$$

**Nota:** Em vez de  $g'(x)$  podemos escrever  $y'(x)$ .

# Teorema da função implícita

## Exercício:

Determine  $y'$  se  $x^3 + y^3 = 6xy + 1$ .

Seja  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy - 1$ . Observe-se que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 6y$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 6x$  são contínuas em  $\mathbb{R}^2$ . Pelo Teorema da função implícita, se  $(x_0, y_0)$  satisfaz a equação dada e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , a equação define implicitamente  $y$  como função de  $x$  numa vizinhança de  $(x_0, y_0)$ . Além do mais, numa vizinhança de  $x_0$ , tem-se que  $y'(x) = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$ .

## Notas:

1. Observe-se que conseguimos determinar a derivada de  $y = g(x)$  em ordem a  $x$  sem recorrer ao conhecimento explícito da função  $g$ !
2. Em particular, para  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  (observe-se que  $f(0, 1) = 0$  e estamos nas condições do Teorema da função implícita), tem-se que  $y'(0) = 2$ .

# Teorema da função implícita

## Exercício:

Pretende-se saber se a equação  $e^y + yx + x^5 - 2x^2 = 0$  define implicitamente  $y$  como função de  $x$  numa vizinhança do ponto  $(x_0, y_0) = (1, 0)$  (verifique que  $(1, 0)$  satisfaz a equação dada).

Seja  $f(x, y) = e^y + yx + x^5 - 2x^2$ . Observe-se que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + 5x^4 - 4x$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^y + x$  são contínuas em  $\mathbb{R}^2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 2 \neq 0$ . Logo, pelo Teorema da função implícita, a equação dada define implicitamente  $y$  como função de  $x$  numa vizinhança de  $(1, 0)$  e

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)} = -\frac{1}{2}.$$

**Nota:** O Teorema da função implícita pode ser generalizado para funções com  $n \geq 3$  variáveis reais (não iremos estudar este caso geral).