



Ficha de Exercícios 1
Séries numéricas

1. Determine o termo geral da sucessão das somas parciais, S_n , e, em caso de convergência, indique a soma S de cada uma das seguintes séries:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n; & \text{(d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right); & \text{(g)} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n}{n+2} \right); \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} 2n; & \text{(e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right); & \text{(h)} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n-1} \right). \\ \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n+3}; & \text{(f)} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \left(\frac{\pi}{n+2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \right); & \end{array}$$

Resolução:

1. (a) Sendo $n \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente,

$$S_n = \sum_{k=1}^n 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = -2(1-2^{n+1}) = 2^{n+1} - 2,$$

(uma vez que S_n é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica de razão $r = 2$ e primeiro termo $a = 2$). Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^{n+1} - 2) = +\infty,$$

podemos concluir que a série dada é divergente.

1. (f) Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente e $a_n = \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)$. Uma vez que

$$S_n = \sum_{k=2}^n (a_{k+2} - a_k) = \sum_{k=2}^n a_{k+2} - \sum_{k=2}^n a_k = \sum_{k=4}^{n+2} a_k - \sum_{k=2}^n a_k = \left(\sum_{k=4}^n a_k + a_{n+1} + a_{n+2} \right) - \left(a_2 + a_3 + \sum_{k=4}^n a_k \right),$$

podemos concluir que

$$S_n = a_{n+1} + a_{n+2} - a_2 - a_3 = \sin \left(\frac{\pi}{n+1} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{n+2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} \right).$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \left(\frac{\pi}{n+1} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{n+2} \right) - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{2+\sqrt{3}}{2},$$

podemos concluir que a série dada é convergente e a sua soma é igual a $-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

2. Calcule, se possível, a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} + b_n \right]$, sabendo que a sucessão das somas parciais associadas à série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é dada por $S_n = \sqrt[n]{\frac{e}{n^n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Resolução: Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{e}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} = 0$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente e tem soma igual a 0. Pelas propriedades das séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} + b_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n.$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n$ é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{4}$ e primeiro termo $\frac{1}{2}$, podemos concluir que esta série é convergente e tem soma igual a $S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} + b_n \right] = \frac{2}{3}.$$

3. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica, **convergente** e de **soma igual a S**. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[3a_n + \frac{2}{3^n} \right]$.

4. Determine, se existir, a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, onde $u_n = \begin{cases} 1 + 2(n-1) & \text{se } n < 4 \\ \left(\frac{2}{3} \right)^n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$.

5. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(a+1)^n}$ (onde a é um parâmetro real, com $a \neq -1$).

- (a) Determine os valores de a para os quais a série dada é convergente.
- (b) Para um dos valores encontrados na alínea anterior, determine a soma da série.

6. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais.

i Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, então a série converge.

ii Se a série converge, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

iii Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$, então a série diverge.

(b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e só se:

i. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = 0$;

ii. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k < 1$;

iii. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = S \in \mathbb{R}$.

7. Estude a natureza das séries seguintes:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2 - 2}}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$(q) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} (1+2n)^{\frac{1}{n}}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$(r) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{50}\right)}{2^n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \text{sen}\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)$$

$$(k) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{n^3}$$

$$(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$(d) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$(l) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n} \quad (0 < b < 1)$$

$$(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n! + n - 1}$$

$$(e) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$(m) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{d^n} \quad (d > 0)$$

$$(u) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n + 1}{2^n - 1}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5 + n^3}}$$

$$(n) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$$

$$(v) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n \cos(n\alpha)}{n^{2n}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$(o) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$$

$$(w) \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2 + 1}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[(-1)^n + 5]^n}$$

$$(p) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$(x) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad (\text{Sugestão: } (\ln n)^{\ln n} > n^2 \text{ para } n \text{ suficientemente grande})$$

Resolução:

7. (d) Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$$

e $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente (porque é uma série harmónica de ordem $p = 1$), então, pelo Critério do Limite, a série dada é divergente.

7. (e) 1º Processo (Critério do Integral): seja $f : [3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Uma vez que $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, podemos concluir que, para todo o $x \in [3, +\infty[$, $f'(x) < 0$. Logo f é (estritamente) decrescente no seu domínio. Pelo Critério do Integral, podemos concluir que a série dada (de termos positivos) e o integral impróprio $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ têm a mesma natureza. Uma vez que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b \frac{1}{x} \ln x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_3^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln b)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} \right) = +\infty,$$

podemos concluir que o integral impróprio $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ é divergente. Conclusão: a série dada é divergente.

2º Processo: Critério do Limite (muito mais simples, verifique!).

7. (f) Como

$$0 < \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+n^3}} < \frac{n+1}{\sqrt{2n^5}} \leq \frac{n+n}{\sqrt{2n^5}} = \frac{2n}{\sqrt{2n^5}} = \sqrt{2} \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}$ é convergente, pelo Critério de Comparação, a série dada é convergente.

Nota: como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ é convergente (porque é uma série harmónica de ordem $p = 3/2 > 1$), então, pelas propriedades das séries, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{2} \frac{1}{n^{3/2}}$ também é convergente.

7. (m) Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{d^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{d} = +\infty$$

então, pelo Critério da Raiz, a série dada divergente.

7. (s) Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \cdot 2^2(n+2)(n+1)!}{(n+2)^n(n+2)^2} \cdot \frac{(n+1)^n(n+1)}{2 \cdot 2^n(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

então, pelo Critério do Quociente, a série dada é absolutamente convergente, logo convergente.

8. Estude a natureza das séries seguintes:

$$(a) \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4+1} + \frac{5}{9+1} + \frac{7}{16+1} + \dots$$

$$(b) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

9. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos, tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3}$ e

$a_n = b_n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$.

Resolução: Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3} < 1$ então, pelo Critério da Raiz, podemos concluir que a série

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente e, portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ (pela Condição necessária de convergência). Como

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3} \neq 0$, então, pela Condição necessária de convergência, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

é divergente. Pelas propriedades das séries, $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ é divergente.

10. Sejam $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Demonstre que se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq b_n, \forall n \geq n_0$ e se

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é convergente.

11. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso afirmativo, indique se são absolutamente ou simplesmente convergentes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}; & \text{(e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+3n^2+4}; & \text{(i)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}; \\
 \text{(b)} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}; & \text{(f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}; & \text{(j)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}; \\
 \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}; & \text{(g)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{e^n+1}; & \text{(k)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right); \\
 \text{(d)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}; & \text{(h)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^2; & \text{(l)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cos(n)}{e^n+2n+1}.
 \end{array}$$

12. Sabendo que as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são tais que

$$\sum_{n=1}^8 a_n = 15, \quad a_n = \left(\frac{3}{2} \right)^n, \quad \text{para } n \geq 9 \quad \text{e} \quad b_n > a_n, \quad \text{para } n > 20,$$

estude a natureza das séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

13. Considere as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$.

- (a) Estude a natureza de cada uma das séries.
 (b) Indique o limite do termo geral das séries.

- (c) Sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{n!}{n^n} + b_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$, indique a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Justifique.

14. Uma bola de borracha cai de uma altura de 10 metros. Sempre que bate no chão, a bola sobe $2/3$ da distância percorrida anteriormente. Qual é a distância total percorrida pela bola (até ficar em repouso)?

15. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_1 \neq 0$ e $a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

16. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^2}{3^n n^2}$ sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

17. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos tal que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ é convergente. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \text{ é convergente.}$$

18. Mostre que se $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ converge.

Resolução: Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, então, pela Condição necessária de convergência, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$$

(porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$) então, pelo Critério do limite, as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ têm a mesma natureza. Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ é convergente.

Exercícios de revisão

19. Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{n!} \right)$ e, em caso de convergência, indique a sua soma.
20. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples:
 - (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)!}$.
 - (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+2)}$.
 - (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + \cos(3n)}{n^{\frac{5}{2}} + n}$.
 - (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
 - (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.
21. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos convergente. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:
 - (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) + a_n \right)$.
 - (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{3 + a_n^2}$.
22. Mostre que, se $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2$ também converge.
23. Mostre que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries convergentes de termos positivos, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n b_n}$ converge.
(Sugestão: Comece por mostrar que $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+, \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.)

24. Estude a natureza das seguintes séries, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta.

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)}{n^{5/2} + 7n + 3}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{n^2}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Soluções

1. (a) $S_n = 2^{n+1} - 2$; a série não é convergente; (e) $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}$, $S = -\frac{3}{2}$;
 (b) $S_n = n(n+1)$; a série não é convergente; (f) $S_n = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+2}\right)$, $S = -\frac{2+\sqrt{3}}{2}$;
 (c) $S_n = \frac{27}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right]$; $S = \frac{27}{8}$; (g) $S_n = \ln(2) - \ln(n+1) - \ln(n+2)$; a série não é convergente;
 (d) $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$; (h) $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{25}{12}$, $S = -\frac{25}{12}$.
2. $\frac{2}{3}$.
3. $3S + 1$.
4. $\frac{259}{27}$
5. (a) $a \in]-\infty, -6[\cup]4, +\infty[$. (b) —
6. (a) i. Falso; ii. Verdadeiro; iii. Verdadeiro.
 (b) i. Falso; ii. Falso; iii. Verdadeiro.
7. (a) Divergente; (i) Convergente; (q) Convergente;
 (b) Divergente; (j) Convergente; (r) Convergente;
 (c) Divergente; (k) Divergente; (s) Convergente;
 (d) Divergente; (l) Convergente; (t) Convergente;
 (e) Divergente; (m) Divergente; (u) Divergente;
 (f) Convergente; (n) Convergente; (v) Convergente;
 (g) Convergente; (o) Divergente; (w) Convergente;
 (h) Convergente; (p) Convergente; (x) Convergente.
8. (a) Divergente; (b) Convergente.
9. Divergente.
10. —
11. (a) Simplesmente convergente; (e) Absolutamente convergente; (i) Absolutamente convergente;
 (b) Simplesmente convergente; (f) Absolutamente convergente; (j) Absolutamente convergente;
 (c) Absolutamente convergente; (g) Absolutamente convergente; (k) Simplesmente convergente;
 (d) Simplesmente convergente; (h) Divergente; (l) Absolutamente convergente.

12. São ambas divergentes.
13. (a) São ambas absolutamente convergente;
(b) 0 (pela condição necessária de convergência);
(c) Convergente.
14. 50 metros.
15. Absolutamente convergente.
16. $\frac{\pi^2+3}{6}$.
17. —
18. —
19. A série de Mengoli dada é convergente e o seu valor é $-\frac{3}{2}$
20. (a) Absolutamente convergente (Sugestão: Usar o Critério da Razão ou o Critério da Raiz)
(b) Simplesmente convergente (Sugestão: Usar o Critério do Limite para estudar a série dos módulos e o Critério de Leibniz)
(c) Absolutamente convergente (Sugestão: Estudar a série dos módulos usando o Critério de Comparação)
(d) Simplesmente convergente
(e) Divergente
21. (a) Série divergente (Sugestão: Usar a Condição Necessária de Convergência)
(b) Série convergente (Sugestão: Estudar natureza da série dos módulos usando o Critério do Limite ou o Critério de Comparação)
22. —
23. —
24. (a) A série é absolutamente convergente.
(b) A série é absolutamente convergente.
(c) A série é simplesmente convergente.
(d) A série é divergente.