ERL Homogéneas

$$X_m = C_1 X_{m-1} + C_2 X_{m-2} + \dots + C_K X_{m-K}, \quad m \geq K$$

Soluções: $X_m = q^m \ (q \neq 0)$

substituindo $\rightarrow q^m - C_1 q^{m-1} - C_2 q^{m-2} - \dots - C_K q^{m-K} = 0, \ m \geq K$

$m = K$: $\underbrace{q^K - C_1 q^{K-1} - C_2 q^{K-2} - \dots - C_K \overbrace{q^{K-K}}^{q^0 = 1}}_{P(q) - \text{Polinómio Característico}} = 0$ (Eq. Característica)

Nºs de Fibonacci vs Nºs de Lucas (Ex 13 Folha 4)

Nºs de Fibonacci $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$

(TPC) $\begin{cases} F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, \ m \geq 2 \\ F_1 = F_0 = 1 \end{cases}$

Nºs de Lucas $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$

(sala) $\begin{cases} L_m = L_{m-1} + L_{m-2}, \ m \geq 2 \\ L_1 = 2 \\ L_0 = 1 \end{cases}$

[Ambas as sucessões são geradas pela mesma equação de recorrência
$X_m = X_{m-1} + X_{m-2}, \ m \geq 2$]

$X_m = q^m$

$q^m = q^{m-1} + q^{m-2}, \ m \geq 2$

$\Leftrightarrow \underbrace{q^m - q^{m-1} - q^{m-2}}_{P(q)} = 0 \quad \boxed{m=2}$

$P(q) = q^2 - q - 1$
(polinómio característico)

Fórmula resolvente (raízes de $P(q)$)

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ \vee \ q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ambas as raízes q_1 e q_2 têm multiplicidade 1)

Solução geral:

$$L_m = \alpha q_1^m + \beta q_2^m = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m, \ m \geq 0$$

Determinação de α e β (usando casos iniciais)

$\begin{matrix}(m=0) \\ (m=1)\end{matrix} \begin{cases} L_0 = 2 \\ L_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\beta = 1 \end{cases}$

Eq matricial equivalente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(det(A) tem que ser não nulo)

$\det(A) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \neq 0$ (é sistema de Cramer)

Regra de Cramer:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{(\cancel{1}+\sqrt{5}) - \cancel{1}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - \sqrt{5})}{\sqrt{5}} = 1$$

Conclusão: $L_m = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m, \ m \geq 0$

Exemplo:

$$\begin{cases} X_m = -3X_{m-1} - 3X_{m-2} - X_{m-3}, \ m \geq 3 \\ X_0 = 0 \\ X_1 = -1 \\ X_2 = 2 \end{cases}$$

Eq. Característica ($X_m = q^m, \ q \neq 0$)

$q^m + 3q^{m-1} + 3q^{m-2} + q^{m-3} = 0, \ m \geq 3$

$m = 3$:

$1q^3 + 3q^2 + 3q + 1 = 0$

```
      1         0
     1 1        1
    1 2 1       2
   1 3 3 1      3
```

linha 3 do Δ Pascal

$\Leftrightarrow (q-1)^3 = 0$

$q = -1$ é uma raiz do polinómio característico de multiplicidade 3

Situação geral

$X_m = \alpha_1 (-1)^m + \alpha_2 m (-1)^m + \alpha_3 m^2 (-1)^m, \ m \in \mathbb{N}$ $(\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\})$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são constantes

Cálculo de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$\begin{matrix}(m=0) \\ (m=1) \\ (m=2)\end{matrix} \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = -1 \\ X_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_2 - \alpha_3 = -1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \end{cases} \overset{(\times(-1))}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \end{cases} \overset{L_2 = L_2 - L_3 (??)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$

Conclusão:

$(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ definida por $X_m = m(-1)^m$ Solução do PVI

Raízes Complexas:

Raízes na forma $z = a + ib$ e $\overset{\text{conjugado de } z}{\bar{z}} = a - ib$

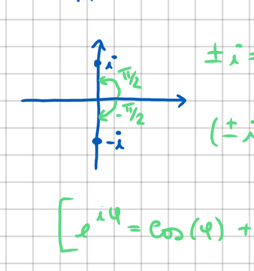
(Ex: $q^2 + 1 = 0$) $\boxed{i = \sqrt{-1}}$

$q^m(q^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow q^{m+2} + q^m = 0, \ X_m = q^m$

$\Leftrightarrow X_{m+2} = -X_m \rightarrow X_{m+2} = 0X_{m+1} - X_m$

$X_m = \alpha (i)^m + \beta (-i)^m, \ \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{C}$



$\pm i = e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$

$(\pm i)^m = \left(e^{\pm i \frac{\pi}{2}}\right)^m = e^{\pm i \frac{m\pi}{2}}, \ m \in \mathbb{N}_0$

$[e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] \longrightarrow$ Fórmula de Moivre

Caso $|z| = 1$:

$z = e^{i\varphi}, \ \bar{z} = e^{-i\varphi}$

$X_m = \alpha z^m + \beta \bar{z}^m$

$= \alpha e^{im\varphi} + \beta e^{-im\varphi} = \alpha(\cos(m\varphi) + i \sin(m\varphi)) + \beta(\cos(m\varphi) - i \sin(m\varphi)) = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{A \in \mathbb{R}} \cos(m\varphi) + \underbrace{i(\alpha-\beta)}_{B \in \mathbb{R}} \sin(m\varphi)$

$e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) + i \sin(m\varphi)$

$e^{-im\varphi} = \cos(m\varphi) - i \sin(m\varphi)$

$\cos$: f. par, $\sin$: f ímpar

$$z^m = r^m e^{im\varphi}$$

Parte real: $a_m = r^m \cos(m\varphi)$

Parte Imaginária: $b_m = r^m \sin(m\varphi)$

$X_m = \alpha a_m + \beta b_m$ [Solução geral]

Exemplo: Raízes Complexas

$$\begin{cases} a_{m+2} = a_{m+1} - a_m, \ m \geq 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$a_m = q^m \ (q \neq 0)$

$q^{m+2} = q^{m+1} - q^m, \ m \geq 0$

$\Leftrightarrow q^{m+2} - q^{m+1} + q^m = 0 \quad \boxed{m=0} \rightarrow q^2 - q + 1 = 0$ (Eq. Característica)

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \quad (i = \sqrt{-1})$$

$q_1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

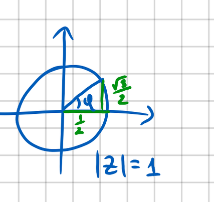
$q_2 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

Portanto, para $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

z e $\bar{z}$ são raízes do Polinómio característico

Representação na forma polar

$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$



$\varphi = \arg(z)$

$\tan \varphi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$z^m = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^m$

$= e^{i\frac{m\pi}{3}}$

$= \cos\left(\frac{m\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{m\pi}{3}\right)$

Condições iniciais

$\begin{matrix}(m=0) \\ (m=1)\end{matrix} \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \overbrace{\cos(0)}^{1} + \cancel{\beta \overbrace{\sin(0)}^{0}} = 0 \\ \underbrace{\cancel{\alpha \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)}}_{0 \quad \frac{1}{2}} + \beta \underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Solução PVI

$$a_m = 2\frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{m\pi}{3}\right), \ m \in \mathbb{N}$$

Casos ERL não homogéneas

(NH) $X_m = C_1 X_{m-1} + C_2 X_{m-2} + \dots + C_K X_{m-K} + d_m$

Ideia:

$X_m = a_m + b_m$

a_m - Solução geral da eq homogénea

b_m - Solução particular de (NH)

Exemplo (A)

$X_m - 3X_{m-1} + 2X_{m-2} = 2^m, \ m \in \mathbb{N}$

$b_m = B 2^m$

Exemplo (B)

$X_m - 3X_{m-1} + 2X_{m-2} = 3^m, \ m \in \mathbb{N}$

$b_m = B 3^m$

Eq. homogénea (Ambos os exemplos)

$a_m - 3a_{m-1} + 2a_{m-2} = 0, \ m \geq 2$

$a_m = q^m \ (q \neq 0)$

$\therefore q^m - 3q^{m-1} + 2q^{m-2} = 0$

$m = 2$: $q^2 - 3q + 2 = 0 \Leftrightarrow (q-1)(q-2) = 0$

($q = 1$ e $q = 2$ raízes de multiplicidade 1)

$a_m = \alpha + \beta 2^m, \ m \in \mathbb{N}$

[Solução geral ERL homogénea]

Exemplo A

teríamos que procurar soluções particulares da forma $b_m = B m 2^m$

Exemplo B

$b_m = B 3^m, \ m \in \mathbb{N}$