Revisões Cap 4

Teste 2 (2022/2023)

3) a_n = nº de seq. em 0, 1 e X, que não tem algarismos consecutivos

a) $a_1 = 3$

comprimento sequência

0
1
X

$a_2 = 5$

$0\ \underline{X}$ → não pode ter 0 ou 1 (não pode ser consecutivos) ①

$1\ \underline{X}$ ①

$X\ \underset{0,1,X}{\_}$ ③

$a_3 =$

$0\ \underline{X}\ \underset{0,1,X}{\_}$ ③

$1\ \underline{X}\ \underset{0,1,X}{\_}$ ③

$X\ \underbrace{\underset{0}{\_}\ \underset{1}{\_}}_{a_2}\ X$ ②

a_n = nº de seq. a começar em 0 + nº de seq. a começar em 1 + nº de seq. a começar em X

$0\ X\ \underset{a_{n-2}}{\_\_\_\_}$

$1\ X\ \underset{a_{n-2}}{\_\_\_\_}$

$\underbrace{X\ \underset{0,1}{\_}\ \_\_\_\_}_{a_{n-1}}$

$a_n = a_{n-2} + a_{n-2} + a_{n-1} = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

$a_2 = 5$
$a_1 = 3$

b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (2a_{n-2} + a_{n-1}) x^n$

$\boxed{n \geq 3 \rightarrow \text{"exclui" 1º e 2º termos}}$

$= 3x + 5x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} 2a_{n-2}\, x^{n} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}\, x^{n}$

$n-2 \to n$, $n \to n+2$, $3-2=1$; $n-1 \to n$, $n \to n+1$, $3-1=2$

$= 3x + 5x^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n+1}$

$= 3x + 5x^2 + 2x^2 f(x) + x\,(f(x) - \underbrace{a_1 x}_{\text{retirar o termo adicional}})$

$= 3x + 5x^2 + 2x^2 f(x) + x f(x) - 3x^2$

$f(x) = 3x + 2x^2 + (2x^2 + x) f(x)$

$(1 - 2x^2 - x) f(x) = 3x + 2x^2$

$f(x) = \dfrac{3x + 2x^2}{1 - 2x^2 - x}$

c) Usando a eq. característica

$a_{n-0} - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0 \Longrightarrow$ profundidade 2

profundidade $= 0 - (-2) = 2$

$q^2 - q - 2 = 0$

$q = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$

$q = 2 \ \vee\ q = -1$

$a_n = A\, 2^n + B\,(-1)^n$

Ex

$a_{n+2} + 2a_{n-3} = 0$

maior índice − menor índice = profundidade

$2 - (-3) = 5$

$q^5 + 2 = 0$

Determinar A e B pelas condições iniciais

$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2A - B \\ 5 = 4A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2A - 5 + 4A \\ B = 5 - 4A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 6A \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ B = 5 - 4 \times \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ B = \frac{15}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$a_n = \frac{4}{3} 2^n - \frac{1}{3} (-1)^n$

Usando a função geradora

$f(x) = \dfrac{3x + 2x^2}{1 - x - 2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

$a_n = ?$

$\dfrac{3x + 2x^2}{1 - x - 2x^2} = x \cdot \dfrac{3 + 2x}{\underbrace{1 - x - 2x^2}} = \dfrac{3 + 2x}{-2(x+1)(x - \frac{1}{2})} = \dfrac{3 + 2x}{(x+1)(1-2x)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{1-2x}$

$1 - x - 2x^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$

$3x + 2 = (1-2x) A + (x+1) B$

$(\ldots)$

$\Leftrightarrow A = \frac{1}{3} \ \wedge\ B = \frac{8}{3}$

$f(x) = \dfrac{x}{3} \left(\underbrace{\dfrac{1}{1+x}}_{\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n} + \dfrac{8}{1-2x} \right)$

$= \dfrac{x}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n + 8 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^{n}}{3} + \dfrac{8}{3} \cdot 2^{n} \right) x^{n+1}$

$n \to n-1$, $n+1 \to n$, $0 \to 1$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{3} + \dfrac{8}{3} \times 2^{n-1} \right)}_{a_n} x^n$

② $f(x) = (1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \ldots)^4$

$= (M - x^3 M)\, M^4 = (1 - x^3)\, M^5 = (1 - x^3) \times \dfrac{1}{(1-x)^5} = \dfrac{1 - x^3}{(1-x)^5}$

$\boxed{\dfrac{1}{(1-x)^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\binom{5}{n}\!\right) x^n}$

$M = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$

$1 + x + x^2 = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots}_{M} - \underbrace{(x^3 + x^4 + \ldots)}_{x^3 M}$

$f(x) = (1 - x^3) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\binom{5}{n}\!\right) x^n$

$(1 - x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$ — x^5, x^8

$\Longrightarrow a_8 = \left(\!\binom{5}{8}\!\right) - \left(\!\binom{5}{5}\!\right) = \binom{12}{8} - \binom{9}{5} = \dfrac{12!}{8!\,4!} - \dfrac{9!}{4!\,5!}$

③ $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3$, $n \geq 2$

$a_0 = 1$
$a_1 = 0$

$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 3$

$p = 0 - (-2) = 2$

Eq. característica

$q^2 - 4q + 4 = 0$

$q = 2 \longrightarrow$ multiplicidade 2

Solução da eq. homogénea

$a_n^H = A\, 2^n + Bn\, 2^n$

$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{polinómio de grau 0}}}{3}$ $= 2^n$

$a_n^P = C\, 2^n n^\alpha \longrightarrow \alpha$ = multiplicidade de $\boxed{2}$ — depende da base

$a_n^P = C \cdot n^\alpha$, $\alpha \longrightarrow$ multiplicidade de $\boxed{1}$ na eq. característica $= 0$

$a_n^P = C$

$\Leftrightarrow C - \cancel{4C} + \cancel{4C} = 3$

$\Leftrightarrow C = 3$

$a_n^P = 3$ $\quad \therefore a_n = A\, 2^n + Bn\, 2^n + 3$

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = A + 3 \\ 0 = 2A + 2B + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ 4 - 3 = 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \therefore a_n = -2^{n+1} + n\, 2^{n-1} + 3$, $n \geq 1$

2020/2021 (ver slides)

① $a_n = 4a_{n-2} + 2^n$, $n \geq 2$

$a_0 = 2$
$a_1 = 1$

$a_n - 4a_{n-2} = 2^n$

$q^2 - 4 = 0$

$q \pm 2$

$a_n^H = A\, 2^n + B(-2)^n$

$a_n^P = C\, 2^n n^\alpha$ $\quad \alpha$ = multiplicidade de $\boxed{2}$ na eq. característica

$a_n^P = C\, 2^n n$

$C\, 2^n n - 4C\, 2^{n-2}(n-2) = 2^n$

$\Leftrightarrow \cancel{4C}n - \cancel{4C}n + 8C = 4$

$\Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$

$a_n^P = 2^{n-1} n$

$a_n = A\, 2^n + B(-2)^n + 2^{n-1} n$

$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = A + B \\ 1 = 2A - 2B + 1 \end{cases} \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$ $\quad \therefore a_n = 2^n + (-2)^n + 2^{n-1} n$

Usando a função geradora

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (4a_{n-2} + 2^n) x^n$

$= 2 + x + \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-2}\, x^{n} + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n$

$n-2 \to n$, $n \to n+2$, $n=2 \to n=0$

$= 2 + x + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + (2x)^2 \sum_{n=2}^{\infty} (2x)^{n-2}$

$n-2 \to n$, $2 \to 0$

$f(x) = 2 + x + 4x^2 f(x) + (2x)^2 \dfrac{1}{1-2x}$

$(1 - 4x^2) f(x) = 2 + x + \dfrac{4x^2}{1-2x}$

$\Leftrightarrow (1 - 4x^2) f(x) = \dfrac{(2+x)(1-2x) + 4x^2}{1-2x}$

$\Leftrightarrow (1 - 4x^2) f(x) = \dfrac{2 + x - 4x - 2x^2 + 4x^2}{1-2x}$

$\Leftrightarrow (1 - 4x^2) f(x) = \dfrac{2 - 3x + 2x^2}{1-2x}$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2 - 3x + 2x^2}{(1-4x^2)(1-2x)}$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2 - 3x + 2x^2}{(1-2x)(1+2x)(1-2x)} = \dfrac{A}{1-2x} + \dfrac{B}{1+2x} + \dfrac{C}{1-2x}$

$f(x) = A \times \dfrac{1}{1-(-2x)} + B \times \dfrac{1}{1-2x} + C \cdot \dfrac{1}{(1-2x)^2}$

$= A \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n + B \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\binom{2}{n}\!\right) (2x)^n$