Álgebra Linear e Geometria Analítica

Formas Quadráticas, Critério de Sylvester

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Formas quadráticas

Definição (forma quadrática)

Uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é uma função

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

que pode ser definida por $Q(X) = X^T A X$, onde $X \in \mathbb{R}^n$ e A é uma matriz $n \times n$ simétrica. A matriz A é chamada a matriz da forma quadrática.

Exemplo :

- A forma quadrática com matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ é $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2.$$

- Considere a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2.$$

Escreva $Q(x_1, x_2)$ na forma X^TAX, onde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, e A é uma matriz simétrica.

Mudança de variável numa forma quadrática

Consideremos a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $X \in \mathbb{R}^n$, A uma matriz $n \times n$ simétrica, e seja P uma matriz $n \times n$ invertível.
Apliquemos a mudança de variável

$$X = PY$$

Nota: Y é o vetor das coordenadas de X na base de $\mathbb{R}^n$ cujos vetores são as colunas de P.

Logo,

$$X^T AX = (PY)^T APY = Y^T (P^T AP)Y.$$

A matriz $P^T AP$ é a "nova matriz" da forma quadrática.

Se P é uma matriz ortogonal e $P^T AP = D$ é uma matriz diagonal, temos que

$$X^T AX = Y^T DY$$

Teorema: Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica. Então existe uma mudança de variável $X = PY$, onde P é uma matriz ortogonal, que transforma a forma quadrática $X^T AX$ na forma quadrática $Y^T DY$ (onde D é uma matriz diagonal), que não tem termos cruzados. Dizemos que a mudança de variável $X = PY$ diagonaliza a forma quadrática.

Nota: P é uma matriz ortogonal tal que $P^T AP = D$.

Exemplo: Consideremos a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2.$$

Vamos diagonalizar Q.
Temos que $Q(x_1, x_2) = X^T AX$, onde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ é ortogonal e é tal que } P^T AP = D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(ver Exemplo 5 dos slides anteriores). Logo, aplicando a mudança de variável $X = PY$, onde $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ obtemos que a forma quadrática pode ser representada por $Y^T DY = 3y_1^2 - y_2^2$.

Classificação das formas quadráticas

Definição Uma forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é:

1. definida positiva se $Q(X) > 0, \ \ \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\};$
2. semi-definida positiva se $Q(X) \geq 0, \ \ \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\};$
3. definida negativa se $Q(X) < 0, \ \ \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\};$
4. semi-definida negativa se $Q(X) \leq 0, \ \ \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\};$
5. indefinida se nenhuma das anteriores se verifica.

Exemplo : Classifique as seguintes formas quadráticas

- $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_2^2;$
- $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2;$
- $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2;$
- $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_2^2.$

Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica e P uma matriz $n \times n$ ortogonal tal que

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os valores próprios de A. Logo, aplicando a mudança de variável $X = PY$, obtemos

$$X^T A X = Y^T D Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

onde

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

.

Teorema: Uma forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde A é uma matriz simétrica, é:

1. definida positiva se e só se todos os valores próprios de A são positivos;
2. semi-definida positiva se e só se todos os valores próprios de A são não negativos;
3. definida negativa se e só se todos os valores próprios de A são negativos;
4. semi-definida negativa se e só se todos os valores próprios de A são não positivos;
5. indefinida se nenhuma das anteriores se verifica.

Uma submatriz principal de A é uma matriz que se obtém de A eliminando linhas e colunas em pares correspondentes. O determinante de uma submatriz principal chama-se menor principal.

Exemplo: Consideremos

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Os menores principais de ordem 2 são:

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 5, \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 26, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

Critério de Sylvester

O Critério de Sylvester permite classificar uma forma quadrática sem calcularmos os seus valores próprios.

Notação: Seja A uma matriz $n \times n$.
Vamos denotar por A_k a submatriz de A que se obtém eliminando as últimas $n-k$ linhas e colunas de A. A Δ_k chamamos o menor principal dominante de A de ordem k

Exemplo: Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Os menores principais dominantes de A são:

$$\Delta_1 = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_3 = |A| = 3$$

Teorema (Critério de Sylvester):

Uma forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde A é uma matriz simétrica, é:

1. definida positiva se e só se os menores principais dominantes de A são positivos;
2. semi-definida positiva se e só se todos os menores principais de A são não negativos;
3. definida negativa se e só se os menores principais dominantes de A de ordem par são positivos e os de ordem ímpar são negativos;
4. semi-definida negativa se e só se os menores principais de A de ordem par são não negativos e os de ordem ímpar são não positivos;
5. indefinida se nenhuma das anteriores se verifica.

Exemplo: Consideremos a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Q é definida positiva porque os menores principais dominantes de A:

$$\Delta_1 = 10, \quad \Delta_2 = 5, \quad \Delta_3 = 3$$

são positivos.

Note-se que o polinómio característico de A é $|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 16\lambda^2 - 36\lambda + 3$. Os seus valores próprios são $\lambda_1 \approx 0,08665$, $\lambda_2 \approx 2,6006$ e $\lambda_3 \approx 13,31275$ que são positivos.

Exemplo: Consideremos a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. Os menores principais dominantes de A são:

$$\Delta_1 = -10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_3 = |A| = -3.$$

Logo Q é definida negativa porque os menores principais dominantes de A de ordem par são positivos e os de ordem ímpar são negativos.

Exemplo: Consideremos a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Os menores principais de ordem 1 de A são:

$$|1| = 1, \quad |1| = 1, \quad |4| = 4.$$

Os menores principais de ordem 2 são:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

O menor principal de ordem 3 é:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo Q é semi-definida positiva porque os menores principais de A de ordem 1 são não negativos, os menores principais de A de ordem 2 são não negativos e o menor principal de ordem 3 é não negativo.

Nota: os menores principais dominantes de A são $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 0$ e $\Delta_3 = 0$.

Exemplo: Consideremos a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Os menores principais de ordem 1 de A são:

$$|-1| = -1, \;\; |-1| = -1, \;\; |-4| = -4.$$

Os menores principais de ordem 2 são:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4, \; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4.$$

O menor principal de ordem 3 é:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, Q é semi-definida negativa porque os menores principais de A de ordem 1 são não positivos, os menores principais de A de ordem 2 são não negativos e o menor principal de ordem 3 é não positivo.

Exemplo: Consideremos a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Os menores principais dominantes de A são:

$$\Delta_1 = |2| = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8.$$

Como $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_3 < 0$ temos que a forma quadrática é indefinida.