RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work - Fatherland

UNIVERSITÉ DE DSCHANG
UNIVERSITY OF DSCHANG
Scholae Thesaurus DschangensisIbiCordum

BP 96, Dschang (Cameroun) –
Tél. /Fax (237) 233 45 13 81
Website:http://www.univ-dschang.org.
E-mail : udsrectorat@univ-dschang.org

FACULTE DES SCIENCES
FACULTY OF SCIENCES

Département de Mathématiques et Informatique

Department of Mathematics and Computer Science

BP 67, Dschang (Cameroun)
Tél./Fax (237) ...E-mail : faculte.sciences@univ-dschang.org

Code/Intitulé de la Matière **INF 417–> Complexités et Algorithmiques avancées**

THEME :
LES B-ARBRES

Rédigé par :

N°	Noms et Prénom	Matricule
1	DAOUD AHMAT YOUNOUS	
2	DEFFO FOKO Martinien	
3	TIOGUE MATSINGUIA Auréole Pelerine	
4	KANNAHBET ZEUH	CM-UDS-17SCI2254

Option : Réseaux et Services Distribué / Intelligence Artificielle
Classe LMD : Master 1 (INF4)

Sous la supervision de :

Dr KENGNE Vianey

ANNEE ACADEMIQUE : 2021-2022

SOMMAIRE

LISTE DES FIGURES

Introduction

Le monde en constante évolution et dans un but d'optimisation de la représentation des données en mémoire et bien d'autres, il en existe notamment plusieurs types de structure de données. Nous avons par exemple les arbres binaires de recherche, les arbres rouges et noirs, les arbre B équilibrés. Dans le cadre de ce travail nous nous intéresserons aux Arbres B équilibrés.

Les arbres B ont été inventés en 1970 par Rudolf Bayer et Edward M. McCreight dans les laboratoires de recherche de Boeing. Le but était de pouvoir gérer les pages d'index de fichiers de données, en tenant compte du fait que le volume des index pouvait être si grand que seule une fraction des pages pouvait être chargée en mémoire vive.

La suite de notre travail se s'attardera tout d'abord sur une généralisation dudit concept, ensuite sur les opérations élémentaires y afférentes puis sur les différents algorithmes et complexité en appuis et enfin nous y donnerons les intérêts et quelques applications.

I. Rappels sur les arbres

1) Etiquette, clé

Un arbre dont tous les nœuds sont nommés est dit étiqueté. L'étiquette (ou nom du sommet) représente la "Clé" du nœud ou bien l'information associée au nœud. Ci-dessous un arbre étiqueté dans les entiers entre 1 et 10 :

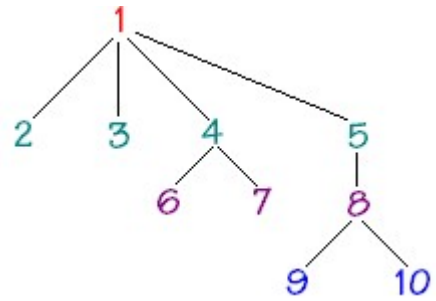


Figure 1: Illustration étiquette, clé

2) Racine, nœud, branche, feuille

Nous rappelons la terminologie de base sur les arbres sur le schéma ci-dessous :

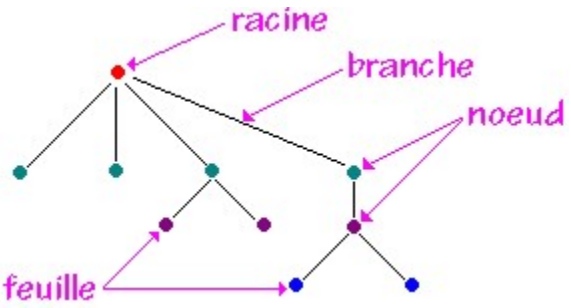


Figure 2 : Illustration racine, nœud, feuille

3) Hauteur, profondeur ou niveau d'un nœud

Nous conviendrons de définir la hauteur (ou profondeur ou niveau) d'un nœud X comme égale au nombre de nœuds à partir de la racine pour aller jusqu'au nœud X. En reprenant l'arbre précédant et en notant h la fonction hauteur d'un nœud :

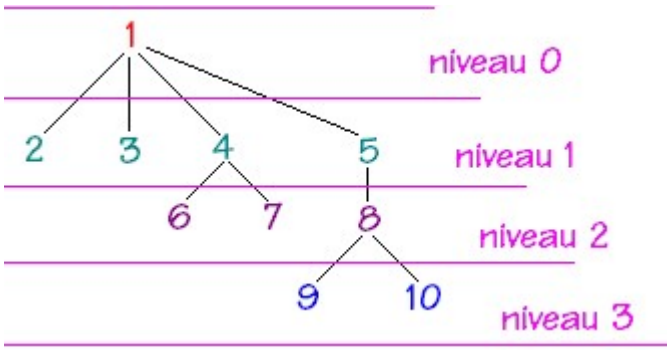
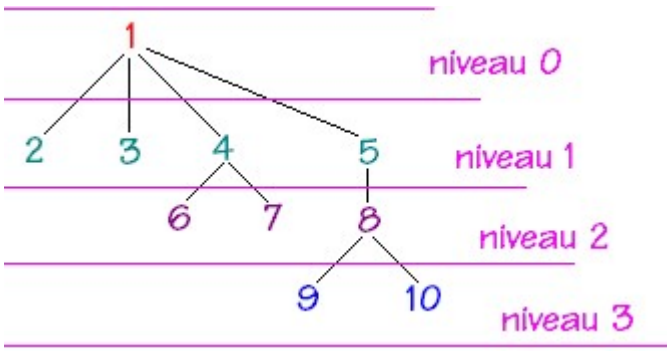


Figure 3 : Illustration profondeur d'un nœud

Pour atteindre le nœud étiqueté 9, il faut parcourir le lien 1--5, puis 5--8, puis enfin 8—9 soient 4 nœuds donc 9 est de profondeur ou de hauteur égale à 4, soit h(9) = 4. Pour atteindre le nœud étiqueté 7, il faut parcourir le lien 1--4, et enfin 4--7, donc 7 est de profondeur ou de hauteur égale à 3, soit h(7)=3. Par définition la hauteur de la racine est égale à 1 mais Certains auteurs adoptent une autre convention pour calculer la hauteur d'un nœud : la racine a pour hauteur 0 et donc n'est pas comptée dans le nombre de nœuds, ce qui donne une hauteur inférieure d'une unité à notre définition.

4) Chemin d'un nœud

On appelle chemin du nœud X la suite des nœuds par lesquels il faut passer pour aller de la racine vers le nœud X :



Chemin du nœud 10 = (1, 5, 8,10)
Chemin du nœud 9 = (1, 5, 8,9)
Chemin du nœud 7 = (1, 4,7)
Chemin du nœud 5 = (1,5)
Chemin du nœud 1 = (1)

Figure 4 : Chemin d'un nœud

Remarquons que la hauteur h d'un nœud X est égale au nombre de nœuds dans le chemin :

h(X) = NbrNoeud(Chemin(X)).

5) Degré d'un nœud

Par définition le degré d'un nœud est égal au nombre de ses descendants (enfants). Soient les deux exemples ci-dessous :

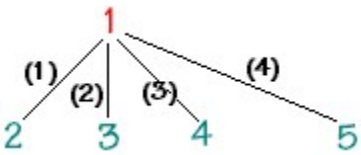


Figure 5 : degré d'un nœud

Le nœud 1 est de degré 4, car il a 4 enfants

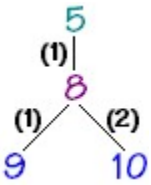


Figure 6 : degré d'un nœud

Le nœud 5 n'ayant qu'un enfant son degré est 1. Le nœud 8 est de degré 2 car il a 2 enfants.

6) Hauteur ou profondeur d'un arbre

Par définition c'est le nombre de nœuds du chemin le plus long dans l'arbre. La hauteur h d'un arbre correspond donc au nombre de niveau maximum :

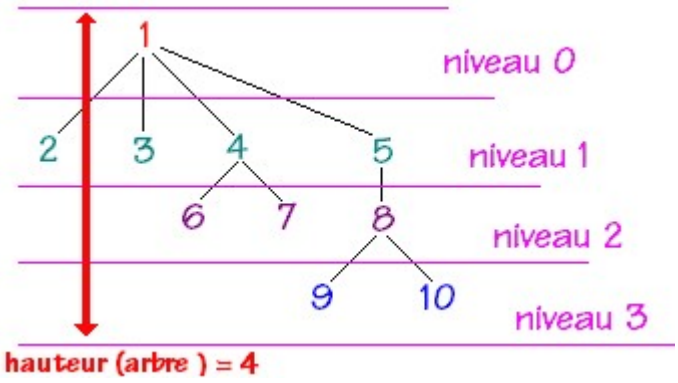
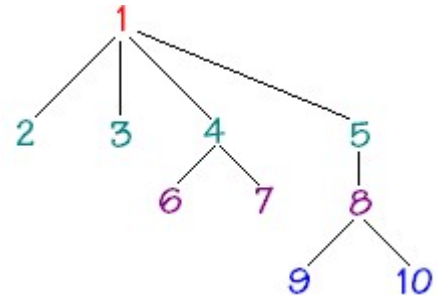


Figure 7 : Hauteur d'un arbre

La hauteur de l'arbre ci-dessous :

7) Degré d'un arbre

Le degré d'un arbre est égal au plus grand des degrés de ses nœuds : Soit à répertorier dans l'arbre ci-dessous le degré de chacun des nœuds :



d°(1) = 4 d°(2) = 0
d°(3) = 0 d°(4) = 2
d°(5) = 1 d°(6) = 0
d°(7) = 0 d°(8) = 2
d°(9) = 0 d°(10) = 0

Figure 8: Degré d'un arbre

La valeur maximale est 4, donc cet arbre est de degré 4.

8) Taille d'un arbre

On appelle taille d'un arbre le nombre total de nœuds de cet arbre :

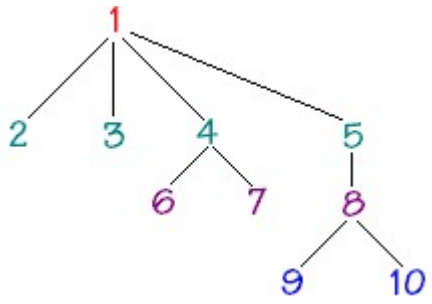


Figure 9: Taille d'un arbre

Cet arbre a pour taille 10 (car il a 10 nœuds)

II. Généralité

a) Définition

Les B-arbres (ou B-Tree) sont une structure de définition de données en arbre équilibré utilisée dans les domaines tels que :

- Systèmes de gestion de fichiers : ReiserFS (version modifiée des B-arbres) ou Btrfs (B-Tree file system) ;
- Bases de données : gestion des index

  Les B-arbres reprennent le concept d'arbre binaire de recherche (ABR) équilibré mais en stockant dans un nœud **k** les valeurs nommées clés et en référençant k + 1 sous arbres, minimisant ainsi la taille de l'arbre et réduisant le nombre d'opération d'équilibrage ; Les arbre sont utilisés pour un stockage sur disque (Unité de masse).

Un B-arbre d'ordre m est un arbre tel que :

- Chaque nœud contient k clés triées avec : **m ≤ k ≤ 2m** pour un nœud non racine et **1 ≤ k ≤ 2m** pour un nœud racine.
- Chaque chemin de la racine à une feuille est de même longueur à 1 près
- Un nœud est :
  - Soit terminal : C'est une feuille
  - Soit possède (k + 1) fils tels que les clés du ième fils ont des valeurs comprises entre les valeurs du (i-1) ème et ième clés du père.

b) Implémentation

Un arbre B est implémenté par un arbre enraciné. Un nœud est étiqueté par :

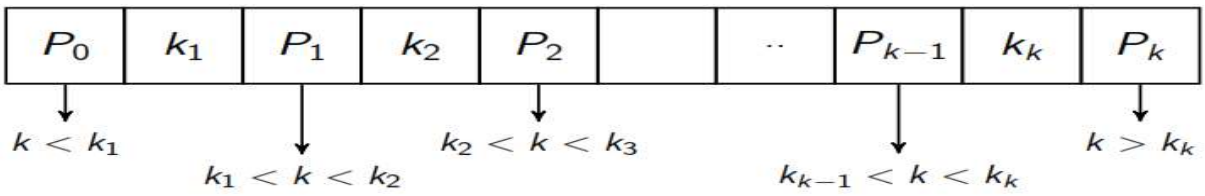
- Un entier n qui correspond au nombre de clefs contenues dans le nœud x.
- n clefs notées $c_1, \ldots, c_n$.
- Un booléen indiquant si x est une feuille ou non.
- $n+1$ pointeurs notés $p_1, \ldots, p_{n+1}$ associés aux fils $f_1, \ldots, f_{n+1}$ de x. Une feuille ne contient pas de pointeurs.

De plus, un arbre B vérifie ces propriétés :

- Toutes les feuilles ont la même profondeur, à savoir la hauteur h de l'arbre.
- Si x n'est pas une feuille :
  - Pour $2 \leq i \leq n$, pour toute clef k du fils f_i : $c_{i-1} \leq k \leq c_i$.
  - pour toute clef k du fils f_1: $k \leq c_1$.
  - pour toute clef k du fils f_{n+1} : $c_n \leq k$.
- Si x n'est ni une feuille, ni la racine, n est compris entre L-1 et U-1.

c) Structure d'un nœud

- k clés triées
- $k+1$ pointeurs tels que :
  - Tous sont différents de NIL si le nœud n'est pas une feuille
  - Tous à NIL si le nœud est une feuille



d) Capacité d'un B-arbre

La capacité d'un B-arbre désigne le nombre total minimum et maximum des clés évalué en fonction de la hauteur et de l'ordre de l'arbre. Soit un B-arbre d'ordre m et de hauteur h :

- Nombre de clés minimal est : **2*(m+1) -1**
- Nombre de clés maximal est **: (2*m+1)** $^{h+1}$**-1**

Pour un stockage sur disque un Nœud équivaut à bloc donc un ensemble de secteur.

Exemple : B-Arbre d'ordre 2

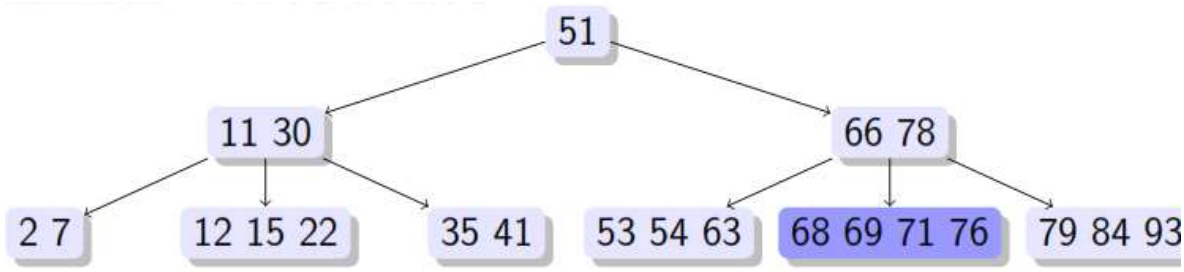


Figure 10 : Exemple B-arbre d'ordre 2

Chaque nœud, sauf la racine contient k clés avec $2 \leq k \leq 4$ et la racine contient k clé(s) avec $1 \leq k \leq 4$

- **Conception Détaillée**

```
Type ArbreB = ^Noeud
Type Noeud = Structure
    nbCles : NaturelNonNul
    cles : Tableau[1..MAX] de Valeur
    sousArbres : Tableau[0..MAX] de ArbreB
finstructure
... tel que le type Valeur possède un ordre total
```

III. Algorithme et structure d'un B-Arbre

1) Création d'un B-Arbre

a) Algorithme

***ALGO**: B-arbre*

Début

***Type** Barbre = Nœud*

Type** Nœud = **Structure

*nbClés : **Naturel_Non_Nul***

*clés : **Tableau** [1..MAX] de **Valeur***

sous_Arbres : Tableau [0..MAX] de Barbre

Finstructure

#Valeur = Possède des valeurs ordonnées

Fin

b) Complexité

Nombre d'opérations oe =0

Nombre d'affectations oa =1

Nombre de comparaisons oc =0

Nombre de boucles eb=0

O(1) : Complexité constante car ici il n'y a que identification des différentes variables constituant le B-arbre.

2) Recherche dans un B-arbre

a) Principe

Soit une clé **C** ;

A partir de la racine pour chaque nœud examiné :

- Si la clé **C** est présente alors retourner la clé C ;
- Si C < K_1 alors rechercher dans le sous-arbre le plus à gauche via le pointeur P
- Si C > K_k alors rechercher dans le sous-arbre le plus à droite via le pointeur P
- Si K < C < K_{i+1} alors rechercher la clé C dans le sous arbre via le pointeur P
- Si l'arbre est vide le pointeur vaut NIL et il y a échec.

Remarque : la recherche peut se faire à travers les processus de dichotomie.

b) Algorithmes

***ALGO** : RechercheCleBarbre*

Fonction estPresent (a : B-Arbre, c : Valeur) : Booleen

Début

Si a==NIL alors

*Retourner **FAUX** ;*

Sinon

Si c<a.cles[1] alors

Retourner estPresent(a.sousArbres[0],c) ;

Sinon

Si c>a.cles[a.nbCles] alors

Retourner estPresent(a.sousArbre[a.nbCles] , c) ;

Sinon

```
                    RechercherDansNoeud(a,c,res,ssArbre) ;
            Si res alors
            Retourner VRAI ;
        Sinon
    Retourner estPresent(ssArbre) ;
                Finsi
            Finsi
    Finsi
Finsi
Fin
```

```
ALGO : RechercheCleBarbre
Procedure rechercherDansNoeud(E n : Nœud, c : Valeur, S estPresent :Booleen,sousArbre -Arbre)
Declaration g, d, m : Naturel&NonNul
Début
g ← 1;
d ← n.nbCles;
            tant que g ≠ d faire
                m ← (g+d) div 2 ;
                si n.cles[m] = c alors
                    d ← m;
                sinon
            g ← m+1;
            finsi
            fintanque
        si n.cles[g]==c alors
  estPresent ← VRAI;
  sousArbre ← NIL;
        sinon
  estPresent ← FAUX;
        sousArbre ← n.sousArbres[g-1];
 finsi
Fin
```

c) Complexité

Calcul de la complexité de la fonction **rechercherDansNoeud**(E n : Nœud, c : Valeur, S estPresent : Booleen,sousArbre :B-Arbre)**:**

Soit **oe** le nombre d'opérations, **ae** le nombre d'affectations, **ce** le nombre de comparaisons.

Tn= ae +n/2(oe + ae +ce) +ce

Tn=O (n/2)

Complexité de la procédure de recherche =O (log(n));

Calcul de la complexité de la procédure **estPresent (a : B-Arbre, c : Valeur)** :

Complexité = O (log(n));

Complexité total ALGO : RechercheCleBarbre :

Complexité = O (log2(n));

3. Insertion dans un B-arbre

a) Principe

- L'insertion se fait récursivement au niveau des feuilles

- Si un nœud a alors plus $2m + 1$ clés, il y a éclatement du nœud et remontée (grâce à la récursivité) de la clé médiane au niveau du père

- Il y a augmentation de la hauteur de l'arbre lorsque la racine se retrouve avec $2m + 1$ clés (l'augmentation de la hauteur de l'arbre se fait donc au niveau de la racine)

b) Algorithme

On suppose posséder les fonctions/procédures suivantes :

- **fonction** creerFeuille **(**c : **Tableau [**1..MAX**] de** Valeur, nb : **NaturelNonNul):** ArbreB

- **fonction** estUneFeuille **(**a : ArbreB**) : Booleen**

- **fonction** eclatement **(**a : ArbreB, ordre : **NaturelNonNul) :** ArbreB

(**précondition(s)** a.nbCles>2*ordre)

- **fonction** positionInsertion **(**a : ArbreB, c : Valeur**) : NaturelNonNul**

- **procédure** insererUneCleDansNoeud **(E/S** n : Noeud, **E** c : Valeur, pos :**NaturelNonNul)**

- **procédure** insererUnArbreDansNoeud **(E/S** n : Noeud, **E** a : ArbreB, pos : **NaturelNonNul)**

- **procédure** inserer **(E/S** a : ArbreB, **E** c : Valeur, ordre : **NaturelNonNul)**

debut a←insertion(a,c,ordre)

- **fin**

```
Fonction insertion (a : ArbreB, c : Valeur, ordre : NaturelNonNul) : ArbreB
        Déclaration tab : Tableau[1..MAX] de Valeur
        debut
                si a = NIL alors
                        tab[1] ←c
                        retourner creerFeuille(tab,1)
                        sinon
                        pos← positionInsertion(a,c)
                        si estUneFeuille(a) alors
                        insererUneCleDansNoeud(a^,c,pos)
                        si a^.nbCles≤2*ordre alors
                        retourner a
                        sinon
                        retourner eclatement(a, ordre)
                        finsi
                        sinon
                        ssArbre a^.sousArbres[pos]
                        temp insertion(ssArbre,c,ordre)
                        si ssArbre = temp alors
                        retourner a
                        sinon
                        insererUnArbreDansNoeud(a^,temp,pos)
                        si a^.nbCles≤2*ordre alors
                        retourner a
                        sinon
                        retourner eclatement(a, ordre)
                finsi
                        finsi
                finsi
                finsi
fin
```

Exemple 1 : Insertion dans un nœud plein :

Principe : Eclatement du nœud en deux :

- Les (deux) plus petites clés restent dans le nœud
- Les (deux) plus grandes clés sont insérées dans un nouveau nœud
- Remontée de la clé médiane dans le nœud père

Insertion d'une clé dans un B-arbre d'ordre 2 (Insertion de 75)

On veut insérer la clé 75, on procède ainsi : On effectue tout d'abord la recherche et le repérage du nœud concerné, on vérifie à partir de l'ordre de l'arbre si le nombre de clé est atteint dans le nœud :

- Si le nœud n'est pas saturé on insère la clé 75 et on réordonne les valeurs des clés du nœud,
- Si le nœud est saturé, on effectue l'éclatement du nœud et la remonté de la clé médiane vers le nœud père.

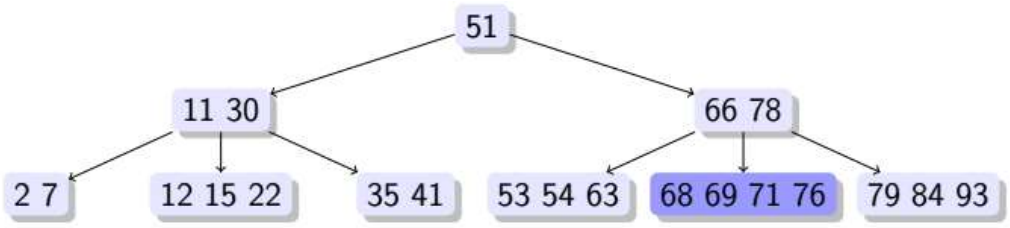


Figure 11 : arbre avant insertion

Rappel : ici nombre de clés par nœud = 4

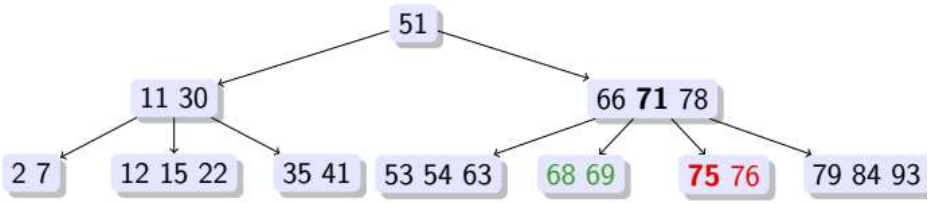


Figure 12:Arbre après insertion d'une clé

Exemple 2 : Insertion dans un nœud plein avec augmentation de la hauteur de l'arbre

Dans le cas de l'insertion dans un nœud plein qui produit une augmentation de la hauteur de l'arbre la méthode peut se décrire ainsi :

- Insertion dans un nœud plein telle que présentée précédemment (insertion de la nouvelle clé suivie de l'éclatement du nœud et de la remontée de la clé médiane au nœud père),
- Ensuite il y a éclatement du nœud père et création du nouveau nœud père ou d'une nouvelle **racine** (cas où le nœud père était la racine et l'ordre était atteint).
- Enfin il y a eu Augmentation d'une ou plusieurs unité(s) de la hauteur du B-arbre

Arbre-B d'ordre 2

Exemple : Insertion de 9

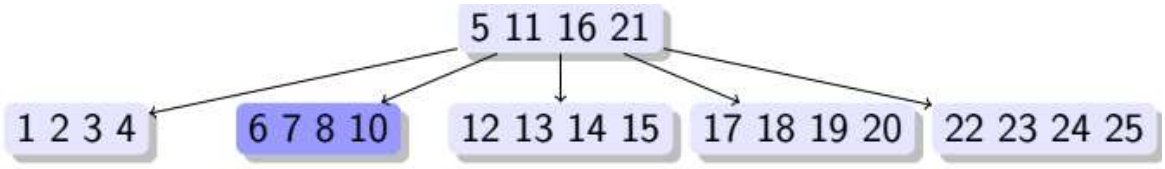


Figure 13: arbre initial avant éclatement

- Insertion clé **9** → Eclatement + remontée de la clé **8** au nœud père
- Remontée de la clé **8** au nœud père →Eclatement + création nouvelle racine

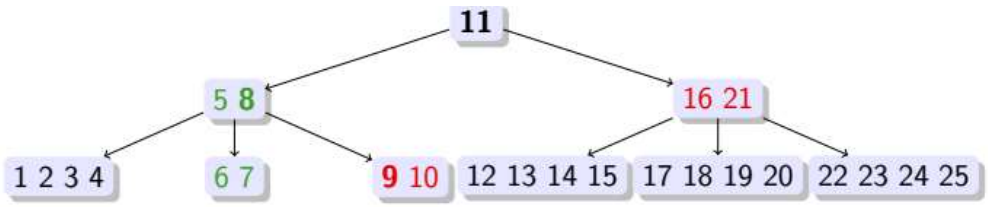


Figure 14 : arbre après éclatement et insertion

Complexité=O (log(n)) ;

1. Suppression dans un B-arbre

a) Principe

Dans un B-arbre la suppression des clés se fait toujours au niveau des feuilles ; Si la clé à supprimer n'est pas dans une feuille, alors on la remplace par la plus grande valeur des plus petites clés (ou plus petite valeur des plus grandes clés) et on supprime cette dernière. Si la suppression de la clé d'une feuille (récursivement d'un nœud) amène à avoir moins de **m** clés dans un nœud : on fait une combinaison (fusion) de ce nœud avec un nœud voisin (avant ou près) et on descend la clé associant ces deux nœuds (avec éclatement du nœud si nécessaire), la récursivité de ce principe pouvant amener à diminuer la hauteur de l'arbre par le haut.

Exemple 1 de suppression : combinaison avec un nœud voisin

Le B-arbre est d'ordre 2, le nombre de clés par nœud non racine > 1 ; Pour la suppression de la clé 25, on procède comme suit :

- Combinaison avec un nœud voisin ([12 14] et 20),
- Descente de la clé médiane (ici 15),
- Suppression du nœud.

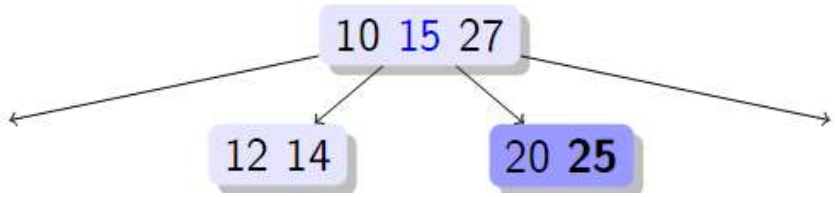


Figure 15 : Exemple B-Arbre d'ordre 2 avec suppression de la clé 25

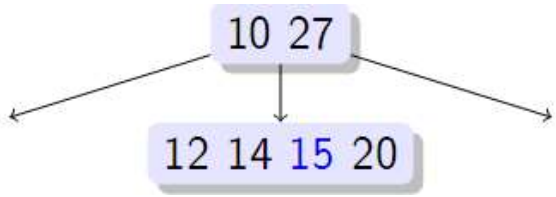


Figure 16 : combinaison avec le nœud voisin et décente de la clé médiane

Exemple 2 de suppression : Avec éclatement d'un nœud

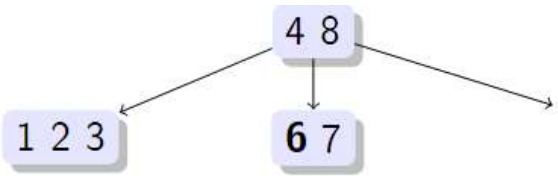


Figure 17 : suppression avec éclatement du nœud

Dans cet exemple, le nombre de clés par nœud non racine est < 5 et > 1 ; on veut supprimer la clé **6**, on procède comme suit : Suppression clé **6**, Combinaison des clés **[1 2 3]** et **7** puis descente de la clé **4** au nœud fils; ensuite redistribution des clés et remontée de clé médiane.

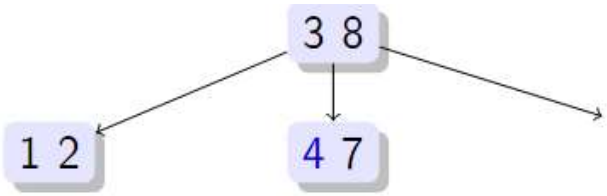


Figure 18 : suppression et éclatement du nœud avec redistribution des clés et remontée de la clé médiane

Exemple 3 de suppression : Avec un nombre de clé inférieur à m

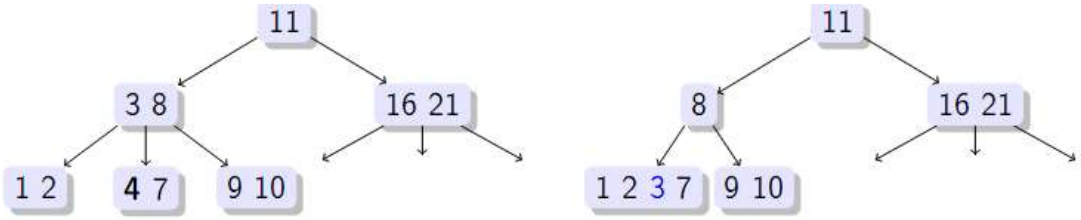


Figure 19 : suppression avec nombre de clé < m

On veut supprimer la clé 4 :

On effectue tout d'abord une Combinaison des clés ([1 2] et 7) et une descente de la clé 3 ; Combinaison des clés (8 et [16 21]) et descente de la clé 11. Ceci entraine une diminution d'une unité de la hauteur de notre B-arbre.

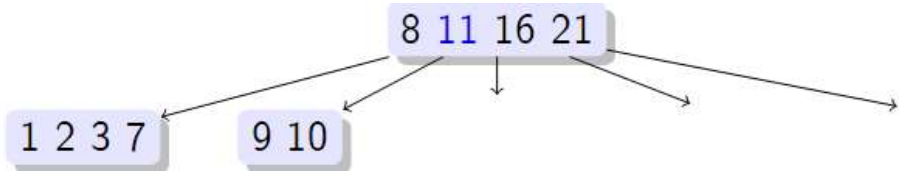


Figure 20 : suppression nbre clé < m : diminution de la hauteur

Exemple 4 de suppression : dans un nœud non feuille

Principe :

Pour effectuer une telle suppression, on procède comme suit :

- Tout d'abord on effectue la recherche d'une clé adjacente **A** à la clé à supprimer puis on choisit la plus grande du sous arbre gauche ;
- On effectue le remplacement de la clé à supprimer par **A**
- On supprime la clé remplacée du sous arbre gauche.

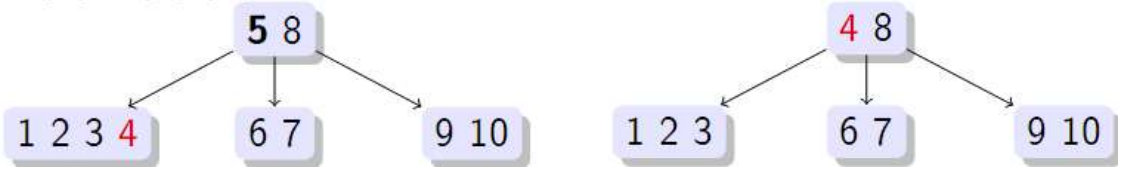


Figure 21 : suppression nœud non feuille

On veut supprimer la clé 5 du nœud racine de notre figure précédente, on procède ainsi : Recherche de la plus grande clé adjacente à 5 dans le sous arbre gauche ici 4 ; on effectue ensuite une permutation entre la clé 5 de la racine et 4 du nœud feuille, enfin on supprime la clé 5.

Algorithmes

Fonction plusGrandeValeur (a : B-Arbre) : Valeur

précondition(s) a ≠ NIL ;

Fonction positionCleDansNoeudRacine (a : B-Arbre, c : Valeur) : Entier

précondition(s) a ≠ NIL

Fonction positionSsArbrePouvantContenirValeur (a : Arbre, c : Valeur) : Naturel

Procedure freres (E a : B-Arbre, posSSArbre : Naturel,S frereG, frereD : B-Arbre)

précondition(s) a ≠ NIL et a.sousArbres[posSsArbre] ≠ NIL ;

Procedure supprimerCleDansNoeudFeuille (E/S n : Nœud, E c : Valeur)

Procedure copierValeurs(S tDest ; Tableau[1..MAX] de Valeur, E tSource : Tableau[1..MAX] de Valeur, indiceDebutDest, indiceDebutSource, nb : NaturelNonNul)

précondition(s) indiceDebutSource+nb < MAX et indiceDebutDest+nb <MAX;

Procedure decalerVersGaucheClesEtSsArbres (E/S n : Noeud, E aPartirDe : NaturelNonNul, nbCran : NaturelNonNul)

ALGO : Suppression B-arbre

```
Procedure supprimer(E/S a : B-Arbre, E c : Valeur, ordre : NaturelNonNul)
Begin
        a ← suppression(a,c,ordre,NIL,NIL,uneCle) ;
End
FIN_ALGO
Fonction suppression(a : B-Arbre, c : Valeur, ordre : NaturelNonNul, frereG, frereD : B-
Arbre, clePere : Valeur) : B-Arbre
Déclaration . . .
Début
    si a = NIL alors
        retourner a ;
    sinon
        pos ← positionCleDansNoeudRacine(a,c) ;
        si estUneFeuille(a) alors
            si pos = -1 alors
                retourner a ;
            sinon
                si frereG = NIL et frereD = NIL et a.nbCles=1 alors
                    desallouer(a) ;
                sinon
                    # supprimer c dans une feuille
                    supprimerCleDansNoeudFeuille(a,c) ;
                finsi
            finsi

        sinon
            si pos = -1 alors
                posSsArbre ← positionSsArbrePouvantContenirValeur(a,c) ;
            sinon
                cleRemplacement ← plusGrandeValeur(a.sousArbres[pos-1]) ;
                a.valeurs[pos] ← cleRemplacement ;
                c ← cleRemplacement posSsArbre ← pos-1 ;
            finsi
            freres(a,posSsArbre,frereG,frereD)
        finsi
    finsi
Fin

Fonction supprimerCleDansNoeudFeuille(a,c)
Début
    si a.nbCles ≥ ordre ou (frereG = NIL et frereD = NIL) alors
        retourner a ;
    sinon
        si frereG 6= NIL alors
            copierValeurs(tab,frereG.valeurs,1,1,frereG.nbCles) ;
```

```
                    tab[frereG.nbCles+1] ← clePere ;
                    copierValeurs(tab,a.valeurs,frereG.nbCles+2,1,a.nbCles) ;
                    nb ← 1+a.nbCles+frereG.nbCles ;
                    desallouer(frereG) ;
                sinon
                    copierValeurs(tab,a^.valeurs,1,1,a.nbCles) ;
                    tab[a.nbCles+1] ← clePere ;
                    copierValeurs(tab,frereD.valeurs,a.nbCles+2,1,frereD.nbCles) ;
                    nb ← 1+a.nbCles+frereD.nbCles ;
                    desallouer(frereD) ;
                finsi
                res ← creerFeuille(tab,nb)
                desallouer(a) ;
                si nb>2*ordre alors
                    retourner eclatement(res, ordre) ;
                finsi
                retourner res ;
        finsi
Fin

Fonction freres(a,posSsArbre,frereG,frereD)
Début
        res←suppression(a.sousArbres[posSsArbre],c,ordre,frereG,frereD,a.valeurs[
        posSsArbre])
        si res.nbCles=1 alors
                a.valeurs[posSsArbre] ← res.valeurs[1] ;
                a.sousArbres[posSsArbre-1] ← res.sousArbres[0] ;
            a.sousArbres[posSsArbre] ← res.sousArbres[1] ;
        sinon
                decalerVersGaucheClesEtSsArbres(a^,posSsArbre,1)
                a.sousArbres[posSsArbre] ← res ;
        finsi
        retourner a
Fin
```

Calcul de la complexité de l'algorithme de suppression :

Calcul de la complexité de la procédure **ALGO** : Suppression B-arbre

Nombre d'opérations eo =n/2

Nombre d'affectations ea = n/2

Nombre de comparaisons ec =n/2

Nombre de boucles eb=1

Complexité=O (log(n)) ;

IV. Intérêt de B-arbre

Les b-arbres apportent de solides avantages en termes de rapidité et d'efficacité par rapport à d'autres mises en œuvre lorsque la plupart des nœuds sont dans le stockage secondaire, comme le disque dur. En maximisant le nombre de nœuds enfants pour chaque nœud, la hauteur de l'arbre est réduite, l'opération d'équilibrage est nécessaire moins souvent et donc l'augmentation de l'efficacité. En général, ce nombre est réglé de telle sorte que chaque nœud occupe tout un groupe de secteurs : ainsi étant donné que les opérations de bas niveau pour accéder au disque de cluster, il réduit au minimum le nombre d'accès à elle. Ils offrent d'excellences performances par rapport aux deux opérations de recherche et ceux de rénovation, car les deux peuvent être faites avec la complexité logarithmique et par utilisation des procédures très simples. Sur eux, il est également possible d'effectuer un traitement séquentiel d'archivage primaire sans qu'il soit nécessaire de le soumettre à une réorganisation.

- **Quelques variantes de B-arbre**

- **B+ arbre :**

Dans un B+ arbres, les données sont enregistrées dans les feuilles. Les nœuds internes contiennent juste des clés qui sont utilisées pour diriger la recherche vers la feuille considérée.

- **B* arbres :**

Similaires aux B- arbre, mais occupés au 2/3

- **Compact B-arbre :**

Similaire aux B-arbres, seulement les nœuds sont occupés à au moins 90%.

Conclusion

En somme, il était question pour nous de faire le tour de la question concernant les b-arbre donc de détailler sa structure et l'analyser à travers ses différentes opérations d'algorithmes pouvant être de recherche, d'insertion et de suppression. Ces algorithmes ont une complexité de O (log n) au pire des cas ce qui fait des B-arbre une structure de données efficace. Même si les B-arbres possèdent des propriétés intéressantes, ils n'en demeurent pas moins que des désavantages subsistent pour quelques applications, illustré par le fait qu'il peut peuvent nécessiter plusieurs opérations de regroupements ou d'éclatement après une opération insertion ou de suppression.

Bibliographie

- (en) Rudolf Bayer, *Binary B-Trees for Virtual Memory*, ACM-SIGFIDET Workshop 1971, San Diego, California, Session 5B, pp. 219-235.
- (en) Rudolf Bayer et McCreight, E. M. *Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes*. *Acta Informatica* 1, 173-189, 1972.
- Introduction-à-l'algorithmique-Cours-et-exercices-corrigés Dunod, Paris, 2004, pour la présente édition ISBN 2 10 003922 9

Webographie

https://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_B

https://rmdiscala.developpez.com/cours/LesChapitres.html/Cours4/Chap4.7.htm

http://igm.univ-mlv.fr/~mac/ENS/DOC/barbr_17.pdf

https://www.labri.fr/perso/maylis/ASDF/supports/notes/FILM/B-arbreExemples.pdf