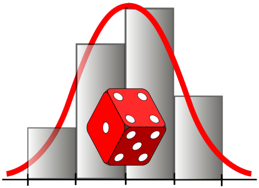
Estimation paramétrique ponctuelle & distribution d'échantillonnage



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

UNESCO Chair "Project-based learning" ESPRIT School of engineering, Tunisia

Plan

1. Introduction
    - Notion d'échantillonnage
    - Notion d'estimation paramétrique
2. Estimation paramétrique ponctuelle
    - Qualités des estimateurs
    - Méthodes d'estimation ponctuelle
        - Estimateur par méthode des moments (EMM)
        - Estimateur par la méthode du maximum de vraisemblance (EMV)

4. Distribution d'échantillonnage
    - Distribution échantillonnale de la moyenne $\overline{X_n}$
    - Distribution échantillonnale de la variance S_n^2
    - Distribution échantillonnale de la proportion F

- Estimation par méthode des moments (E.M.M)

L'idée de base de cette méthode est d'utiliser les moments d'ordre 1 et 2:

-**Moment d'ordre** 1 pour estimer la moyenne $\mathbb{E}_\theta(X)$ par une moyenne empirique :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

-**Moment non centré d'ordre** 2 pour estimer $\mathbb{E}_\theta(X^2)$ par :

$$\overline{X_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

-**Moment centré d'ordre** 2 pour estimer la variance $\mathbb{V}_\theta(X)$ par une variance empirique :

$$\overline{X_n^2} - (\overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - (\overline{X}_n)^2$$

Si le paramètre à estimer est l'espérance de la loi des X_i, alors on peut l'estimer par la moyenne empirique de l'échantillon.
Autrement dit, si $\theta = \mathbb{E}(X)$, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments (E.M.M) est :

$$\widehat{\theta}_n = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Plus généralement, pour $\theta \in \mathbb{R}$, si $\mathbb{E}_\theta[X] = \varphi(\theta)$, où φ est une fonction bijective, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments est

$$\widehat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\overline{X_n})$$

Exemple N°1:

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$échantillon qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer l'estimateur de λ par la méthode des moments.

Solution

$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \frac{1}{\lambda} = \varphi(\lambda)$, avec :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \frac{1}{t} \\ \\ \varphi^{-1}(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

et par la suite l'estimateur de θ par la méthode des moments est

$$\widehat{\lambda} = \varphi^{-1}(\overline{X_n}) = \frac{1}{\overline{X}_n}$$

Exemple N°2 :

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$échantillon qui suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, \theta])$.
Déterminer l'estimateur de θ par la méthode des moments.

Solution

$\mathbb{E}_\theta(X_1) = \frac{\theta}{2} = \varphi(\theta)$, avec :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \frac{t}{2} \\ \\ \varphi^{-1}(t) = 2t \end{cases}$$

et par la suite l'estimateur de θ par la méthode des moments est

$$\widehat{\theta} = \varphi^{-1}(\overline{X_n}) = 2\overline{X}_n$$