

Session : Principale

Documents et Internet **NON** autorisés

Semestre : 1

Classes : 3^{ème} A & B

Techniques d'Estimation pour l'Ingénieur

Nombre de pages : 3

Date : 16/01/2024

Heure : 11h

Durée : 1h.30

NB : La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : (6 points)

À jeun, la glycémie, taux de sucre dans le sang exprimé en grammes par litre, suit la loi normale de moyenne m et d'écart-type σ supposés inconnus.

Un échantillon aléatoire (X_1, \dots, X_n) iid de taille $n = 20$ est sélectionné. On s'intéresse à l'estimateur \bar{X}_n de la moyenne m .

1. (1 pt) Déterminer l'espérance et l'écart-type de \bar{X}_n .
2. (2 pt) Quelle est la loi de \bar{X}_n ?
3. (2 pt) Si on suppose que la valeur de σ est connue, la réponse à la question précédente serait-elle différente ? justifier votre réponse.
4. (1 pt) Que peut-on dire de la loi de \bar{X}_n si la loi du taux de glycémie n'est pas supposée normale ?

Exercice 2 : (14 points)

N.B : les trois parties sont indépendantes.

Anticipant le fait que certains passagers ne se présentent pas le jour du vol, une compagnie aérienne souhaite vendre un nombre n de billets supérieur à la capacité d'embarquement de ses avions. Les avions de la compagnie ont une capacité de 230 passagers.

Un cabinet d'experts lui affirme que la probabilité qu'un passager se présente le jour du vol est égale à $p = 0,95$. Soit la v.a $Y_i, i = 1 \dots n$ qui prend la valeur 1 si le passager se présente le jour du vol, 0 sinon.

Partie I

1. (1 pt) Donner la loi de Y_i , puis son espérance et sa variance.
2. Soit $n = 235$ le nombre de billets vendus, on définit maintenant $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ la variable aléatoire qui représente le nombre de personnes, parmi les n , qui se présentent au départ. On suppose que les voyageurs ont des comportements indépendants.
 - a. (1 pt) Quelle est la loi de X , Justifier. Donner son espérance et sa variance.
 - b. (1 pt) Justifier qu'on peut approcher la loi de X par la loi normale de moyenne np et d'écart-type $\sqrt{np(1-p)}$.
3.
 - a. (1 pt) Quelle est la probabilité qu'il y aura un excès de passagers le jour du vol ?
 - b. (1 pt) Avec ce nombre n de billets vendus, la compagnie peut-elle s'assurer que tout le monde puisse monter dans l'avion, avec une probabilité d'au moins 95% ?
 - c. (1 pt) La compagnie considère qu'elle peut prendre un peu plus de risques. Elle souhaite vendre un nombre maximal n de billets vérifiant $\mathbb{P}(X \geq 230) \leq 0,05$. Trouver ce nombre n .

Partie II

Après quelques semaines de mise en pratique de sa politique de surbooking, la compagnie fait un premier bilan : sur la base d'un échantillon iid $(V_1..V_{200})$ de 200 vols effectués choisis au hasard, 45 vols ont été déclaré **surchargés**.

1. (1 pt) Quel est le caractère observé lors de ce bilan ? Quelle est sa nature ?
2. (1 pt) Donner une estimation ponctuelle de la proportion des vols surchargés ?
3. (2 pt) Au niveau de confiance de 90%, donner une estimation I_1 par intervalle de confiance de cette proportion.
4. (1 pt) Sans faire le calcul, comment pourrait-on obtenir un intervalle de confiance de précision égale à 0,02 avec le même échantillon sélectionné ?

Partie III

Parfois les personnes victimes du surbooking, refusent d'embarquer et renoncent tout simplement le vol, alors la compagnie aérienne est dans l'obligation de leurs proposer le remboursement intégral de leur billet d'avion. Afin de minimiser ses pertes, la compagnie décide de limiter la proportion des vols surchargés à 12%.

1. (2 pt) Elle observe 300 vols indépendants, et constate que 34 vols sont surchargés . Au seuil de risque de 5%, détailler les différentes étapes du test d'hypothèses suivant :

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,12 \\ H_1 : p \geq 0,12 \end{cases}$$

2. (1 pt) À partir de quelle proportion peut-on conclure que la compagnie dépasse la proportion tolérée ?

Loi normale réduite : probabilités unilatérales

Cette table donne p tel que $P(Z > a) = p$, où Z est la loi normale réduite

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,50000	0,49601	0,49202	0,48803	0,48405	0,48006	0,47608	0,47210	0,46812	0,46414
0,10	0,46017	0,45620	0,45224	0,44828	0,44433	0,44038	0,43644	0,43251	0,42858	0,42465
0,20	0,42074	0,41683	0,41294	0,40905	0,40517	0,40129	0,39743	0,39358	0,38974	0,38591
0,30	0,38209	0,37828	0,37448	0,37070	0,36693	0,36317	0,35942	0,35569	0,35197	0,34827
0,40	0,34458	0,34090	0,33724	0,33360	0,32997	0,32636	0,32276	0,31918	0,31561	0,31207
0,50	0,30854	0,30503	0,30153	0,29806	0,29460	0,29116	0,28774	0,28434	0,28096	0,27760
0,60	0,27425	0,27093	0,26763	0,26435	0,26109	0,25785	0,25463	0,25143	0,24825	0,24510
0,70	0,24196	0,23885	0,23576	0,23270	0,22965	0,22663	0,22363	0,22065	0,21770	0,21476
0,80	0,21186	0,20897	0,20611	0,20327	0,20045	0,19766	0,19489	0,19215	0,18943	0,18673
0,90	0,18406	0,18141	0,17879	0,17619	0,17361	0,17106	0,16853	0,16602	0,16354	0,16109
1,00	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
1,10	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
1,20	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	0,10565	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
1,30	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08691	0,08534	0,08379	0,08226
1,40	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
1,50	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
1,60	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	0,05050	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
1,70	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	0,03754	0,03673
1,80	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938
1,90	0,02872	0,02807	0,02743	0,02680	0,02619	0,02559	0,02500	0,02442	0,02385	0,02330
2,00	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831
2,10	0,01786	0,01743	0,01700	0,01659	0,01618	0,01578	0,01539	0,01500	0,01463	0,01426
2,20	0,01390	0,01355	0,01321	0,01287	0,01255	0,01222	0,01191	0,01160	0,01130	0,01101
2,30	0,01072	0,01044	0,01017	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,40	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,50	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
2,60	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,70	0,00347	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,80	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,90	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139
3,00	0,00135	0,00131	0,00126	0,00122	0,00118	0,00114	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100
3,10	0,00097	0,00094	0,00090	0,00087	0,00084	0,00082	0,00079	0,00076	0,00074	0,00071
3,20	0,00069	0,00066	0,00064	0,00062	0,00060	0,00058	0,00056	0,00054	0,00052	0,00050
3,30	0,00048	0,00047	0,00045	0,00043	0,00042	0,00040	0,00039	0,00038	0,00036	0,00035
3,40	0,00034	0,00032	0,00031	0,00030	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024
3,50	0,00023	0,00022	0,00022	0,00021	0,00020	0,00019	0,00019	0,00018	0,00017	0,00017
3,60	0,00016	0,00015	0,00015	0,00014	0,00014	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011
3,70	0,00011	0,00010	0,00010	0,00010	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00008
3,80	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005
3,90	0,00005	0,00005	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003
4,00	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002