ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής

Ερευνητική Εργασία

Ολοκληρώματα Διαδρομών και εφαρμογές στην Υπερσυμμετρική Κβαντομηχανική

Κωνσταντίνος Αυγεράκης
ΑΜ 202100009

Επιβλέπων:
Ιωάννης Παπαδημητρίου

Αθήνα, Μάιος 2024

Abstract

In this research project, we delve into the semi-classical approach to calculating the quantum propagator using Feynman Path integrals. Through the application of the stationary phase approximation, stemming from the principle of least action in classical mechanics, we derive the Van Vleck Formula. This formula proves exact for quadratic potentials, i.e. for the harmonic oscillator. Furthermore, our project extends its investigation into Supersymmetric Quantum Mechanics, a framework that intertwines bosonic and fermionic degrees of freedom. Through Path Integrals, Grassmann Algebra, and localization techniques in this context, where the stationary phase approximation is exact, the Witten index is computed. This index offers a profound topological invariant that characterizes the underlying supersymmetric system.

Περίληψη

Σε αυτή την ερευνητική εργασία εμβαθύνουμε στην ημικλασσική προσέγγιση του υπολογισμού του κβαντικού διαδότη χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα διαδρομών. Μέσω της εφαρμογής της προσέγγισης στάστιμης φάσης η οποία πηγάζει από την αρχή στάσιμης δράσης της κλασσικής μηχανικής, εξάγουμε την σχέση Van Vleck. Αυτή η σχέση ισχύει επακριβώς για τετραγωνικά δυναμικά όπως ο αρμονικός ταλαντωτής. Επιπρόσθετα, επεκτείνουμε την μελέτη μας στην Υπερσυμμετρική Κβαντομηχανική, ένα πλαίσιο το οποίο εμπλέκει μποζονικούς και φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας. Τέλος, μέσω των ολοκληρωμάτων διαδρομών, της άλγεβρας Grassmann και της τοπικοποίησης, κατά την οποία η προσέγγιση στάσιμης φάσης πλέον είναι ακριβής, υπολογίζουμε τον δείκτη Witten, ο οποίος είναι μία τοπολογικά απαράλλαχτη ποσότητα που χαρακτηρίζει το μελετούμενο υπερσυμμετρικό σύστημα.

1 Το Ολοκλήρωμα Διαδρομών

1.1 Εισαγωγικά Λόγια

Στις αρχικές δεκαετίες του 20ου αιώνα οι πρώτοι φορμαλισμοί της Κβαντομηχανικής αρχίσαν να υλοποιούνται, συγκεκριμένα μέσω του Erwin Schrödinger (Εξίσωση Schrödinger), του Werner Heisenberg (Μηχανική των Πινάκων) και άλλων, οι οποίοι ήταν όλοι ισοδύναμοι. Στην συνέχεια το 1933 ο Paul Dirac έχοντας παρατηρήσει τον κεντρικό ρόλο που παίζει η δράση στην Κλασσική Μηχανική άρχισε να σκέφτεται μία πιθανή σύνδεση της με την Κβαντομηχανική. Έπειτα από προσεκτική σκέψη πρότεινε ότι η δράση πάνω στη κλασσική διαδρομή ενδέχεται να συνδέεται με τον διαδότη στη Κβαντομηχανική. Το 1948 αυτή η ιδέα τελειοποιήθηκε από τον Richard Feynman, ο οποίος έδειξε ότι οποιαδήποτε πιθανή διαδρομή (όχι μόνο η κλασσική) που ικανοποιεί τις δοθείσες αρχικές και τελικές συνθήκες συνεισφέρει στον διαδότη. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την δημιουργία ενός νέου -και ισοδύναμου με τους υπόλοιπους- φορμαλισμού της κβαντομηχανικής με όνομα “Ολοκληρώματα Διαδρομών” τα οποία βασίζονται σε Λαγκραντζιανές σε αντίθεση με την χρήση των Χαμιλτονιανών στην εξίσωση του Schrödinger.

Το ολοκλήρωμα διαδρομών έχει ευρεία χρήση σε διάφορους τομείς της σύγχρονης φυσικής όπως τα στοιχειώδη σωμάτια, η συμπυκνωμένη ύλη και η στατιστική φυσική δίοτι απλοποιεί ιδιαίτερα περίπλοκα προβλήματα (υπολογισμός διαδότη και συνάρτησης επιμερισμού). Ο σκοπός λοιπόν αυτής της εργασίας θα είναι πρώτον, να εξηγήσουμε την σημασία του ολοκληρώματος διαδρομών δείχνοντας ότι ικανοποιεί την εξίσωση Schrödinger. Ο κύριος σκοπός μας όμως θα είναι να παρουσιάσουμε έναν άμεσο τρόπο υπολογισμού του μέσω της εξίσωσης Van Vleck. Επιπρόσθετα, θα μελετήσουμε εφαρμογές του ολοκληρώματος διαδρομών στην Κβαντομηχανική, συγκεκριμένα θα εξετάσουμε υπερσυμμετρία και localization, διότι με αυτά τα εργαλεία θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον δείκτη Witten ο οποίος είναι εξαιρετικά σημαντικός για την περιγραφή ενός υπερσυμμετρικού συστήματος μιας και μας δίνει πληροφορία για την θεμελιώδη υπερσυμμετρική κατάσταση στην οποία υπάρχει περίπτωση να σπάσει η υπερσυμμετρία. Το εντυπωσιακό είναι ότι στο πλάισιο της τοπικοποίησης όταν υπάρχει υπερσυμμετρία, η προσέγγιση στάσιμης φάσης δεν είναι πλέον προσεγγιστική και μας δίνει ακριβή αποτελέσματα!

1.2 Ο Διαδότης

Ο διαδότης είναι συνάρτηση δύο χωροχρονικών σημείων, αρχικής θέσης και χρόνου(x, t) και τελικής θέσης και χρόνου (x_0, t_0) [3]. Ορίζεται σαν τα στοιχεία πίνακα του τελεστή χρονικής εξέλιξης στον χώρο των θέσεων $U(t, t_0)$:

$$K(x, t; x_0, t_0) = \langle x|U(t, t_0)|x_0\rangle \tag{1}$$

Τώρα θα δούμε κάποιες ιδιότητες του διαδότη. Θα αρχίσουμε χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη του τελεστή χρονικής εξέλιξης $U(t_0, t_0) = 1$ που συνεπάγεται σε:

$$K(x, t_0; x_0, t_0) = \langle x|x_0\rangle = \delta(x - x_0) \tag{2}$$

Αυτό έχει να κάνει με την κανονικοποίηση που απαιτούμε για την συνεχή μεταβλητή x. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση χρονικής εξέλιξης:

$$i\hbar\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}(t)U(t, t_0) \tag{3}$$

Με αυτό στο νου, μπορούμε να εξάγουμε μια εξίσωση χρονικής εξέλιξης για τον διαδότη:

$$i\hbar\frac{\partial K(x, t; x_0, t_0)}{\partial t} = \langle x|\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t}|x_0\rangle = \langle x|\hat{H}(t)U(t, t_0)|x_0\rangle$$

$$= H(t)\langle x|U(t,t_0)|x_0\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right)K(x,t;x_0,t_0) \tag{4}$$

Παρατηρούμε ότι ο διαδότης αποτελεί λύση της χρονοεξαρτώμενης εξίσωσης Schrödinger, οπότε καταλαβαίνουμε ότι αναπαριστά ένα πλάτος πιθανότητας (Σημειώνουμε ότι στη προηγούμενη εξίσωση χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό hat στην Χαμιλτονιανή όταν δρα σε ket και δεν τον χρησιμοποιούμε όταν δρα απλώς σαν διαφορικός τελεστής). Πιο συγκεκριμένα ο διαδότης είναι λύση της χρονοεξαρτώμενης εξίσωσης Schrödinger με αρχικές συνθήκες δ-συνάρτησης. Από αυτό καταλαβαίνουμε την κοντινή σχέση που έχει με τις συναρτήσεις Green της ίδιας εξίσωσης [4]. Αξίζει να σημειωθεί ότι το γεγονός ότι οι αρχικές συνθήκες είναι σχετικά περιορισμένες δεν μας πειράζει, μιας και μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε τον διαδότη για να προσδιορίσουμε την γενική λύση της εξίσωσης Schrödinger με αρχικές συνθηές $\psi(x,t_0)$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle = \langle x|U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle = \int dx_0\,\langle x|U(t,t_0)|x_0\rangle\,\langle x_0|\psi(t_0)\rangle$$

$$= \int dx_0 K(x,t;x_0,t_0)\psi(x_0,t_0) \tag{5}$$

Μία ωραία ερμηνεία της φυσικής σημασίας της εξίσωσης (5) γίνεται μέσω της αρχής του Huygens όπου το τελικό κυματοπακέτο συντελείται από την συμβολή των κυμάτων που προέρχονται απο κάθε ξεχωριστή σημειακή πηγή [5].

1.3 Ολοκλήρωμα Διαδρομών σε Μία Διάσταση

Σε αυτό το σημείο, θα εξάγουμε την μορφή του ολοκλήρώματος διαδρομών σε μία μόνο διάσταση μιας και η γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις είναι αρκετά απλή. Η Χαμιλτονιανή μας θα είναι η:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Όπως καταλαβαίνουμε η Χαμιλτονιανή είναι χρονοανεξάρτητη οπότε θέτουμε $t_0 = 0$ και $U(t) = exp(-iH\frac{t}{\hbar})$. Στο επόμενο βήμα θα θεωρήσουμε τον τελικό χρόνο t σταθερό και θα διαμερίσουμε το διάστημα $[0,t]$ σε πολύ μικρότερα διαστήματα εύρους $\varepsilon = \frac{t}{N}$, έτσι ώστε $[U(\varepsilon)]^N = U(t)$. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε:

$$U(\varepsilon) = e^{-i\varepsilon\frac{T+V}{\hbar}} \tag{6}$$

Είναι σημαντικό να λάβουμε υπόψιν ότι οι τελεστές της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας δεν μετατίθενται οπότε δεν μπορούμε απλώς να πάρουμε το γινόμενο των εκθετικών $U(\varepsilon) = e^{-i\varepsilon\frac{T}{\hbar}}e^{-i\varepsilon\frac{V}{\hbar}}$, ευτυχώς όμως επειδή θεωρούμε το ε πολύ μικρό (παίρνουμε το όριο $\varepsilon \to 0$ ή $N \to \infty$) κάνουμε μία απλή προσέγγιση αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor:

$$U(\varepsilon) = 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}(T+V) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = e^{-i\varepsilon\frac{T}{\hbar}}e^{-i\varepsilon\frac{V}{\hbar}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{7}$$

Τώρα υψώνοντας την εξίσωση (7) στην N-οστή δύναμη, χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Bernoulli και αξιοποιώντας το γεγονός ότι $\mathcal{O}(\varepsilon^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$ προκύπτει ότι:

$$U(t) = [e^{-i\varepsilon\frac{T}{\hbar}}e^{-i\varepsilon\frac{V}{\hbar}}]^N + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \tag{8}$$

Ακολούθως ο διαδότης λαμβάνει τη μορφή:

$$K(x,x_0,t) = \lim_{N\to\infty}\langle x|[e^{-i\varepsilon\frac{T}{\hbar}}e^{-i\varepsilon\frac{V}{\hbar}}]^N|x_0\rangle \tag{9}$$

Και το τελικό αποτέλεσμα είναι (αν θέσουμε $x = x_N$):

$$\lim_{N\to\infty}\int dx_1\ldots dx_{N-1}\,\langle x_N|e^{-i\varepsilon\frac{T}{\hbar}}e^{-i\varepsilon\frac{V}{\hbar}}|x_{N-1}\rangle\,\langle x_{N-1}|\ldots|x_1\rangle\ \langle x_1|e^{-i\varepsilon\frac{T}{\hbar}}e^{-i\varepsilon\frac{V}{\hbar}}|x_0\rangle \tag{10}$$

Σε αυτό το βήμα θα υπολογίσουμε τα στοιχεία πινάκων που εμφανίζονται στην εξίσωση (10) για τυχαία bra $\langle x_{j+1}|$ και ket $|x_j\rangle$ χρησιμοποιώντας την μορφή του ταυτοτικού τελεστή στον χώρο των ορμών (παρόμοια λογική με αυτή που ακολουθήσαμε προηγουμένως για των χώρο των θέσεων):

$$\langle x_{j+1}|e^{-i\varepsilon\frac{T}{\hbar}}e^{-i\varepsilon\frac{V}{\hbar}}|x_j\rangle = \int dp\,\langle x_{j+1}|e^{-i\varepsilon\frac{\hat{p}^2}{2m\hbar}}|p\rangle\;\langle p|e^{-i\varepsilon\frac{V(\hat{x})}{\hbar}}|x_j\rangle \tag{11}$$

Οι τελεστές $\hat{x}$ και $\hat{p}$ δρουν σε ιδιοκαταστάσεις τους οπότε έχουμε:

$$\int dp\; e^{-i\varepsilon\frac{p^2}{2m\hbar}}e^{-i\varepsilon\frac{V(x)}{\hbar}}\;\langle x_{j+1}|p\rangle\;\langle p|x_j\rangle \tag{12}$$

Εδώ χρειάζεται να αξιοποιήσουμε τη σχέση:

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}e^{i\frac{px}{\hbar}} \tag{13}$$

Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει αν λύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών για τον τελεστή της ορμής και κανονικοποιώντας το συγκρίνοντας με τον μετασχηματισμό Fourier από τον χώρο θέσεων στον χώρο ορμών. Αν τώρα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (12):

$$\frac{e^{-i\varepsilon\frac{V(x_j)}{\hbar}}}{2\pi\hbar}\int dpe^{-ap^2+bp}\quad \text{όπου } a=\frac{i\varepsilon}{2m\hbar},\ \text{ και } b=\frac{i}{\hbar}(x_{j+1}-x_j) \tag{14}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε το γνωστό Γκαουσιανό ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει γραμμικό όρο:

$$\int dxe^{-ax^2+bx} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{4a}} \tag{15}$$

Και το αποτέλεσμα είναι:

$$\langle x_{j+1}|e^{-i\varepsilon\frac{T}{\hbar}}e^{-i\varepsilon\frac{V}{\hbar}}|x_j\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}}exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left[m\frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2\varepsilon^2}-V(x_j)\right]\right\} \tag{16}$$

Καταληκτικά, αν αντικαταστήσουμε αυτή την έκφραση στην εξίσωση (10) προκύπτει η διακριτοποιημένη μορφή του ολοκληρώματος διαδρομών:

$$K(x_0,x,t) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}\right)^{\frac{N}{2}}\int dx_1\ldots dx_{N-1}\;exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\left[\frac{m(x_{j+1}-x_j)^2}{2\varepsilon^2}-V(x_j)\right]\right\} \tag{17}$$

Πλέον, έχουμε επιτυχώς εξάγει μία έκφραση του διαδότη σε μορφή ολοκληρώματος διαδρομών, όμως είναι εύκολο να χαθεί η ουσία στις πράξεις. Γι'αυτό είναι σημαντικό να δώσουμε μία εποπτική παρουσίαση του αποτελέσματος μας, ώστε να το καταλάβουμε καλύτερα. Αρχικά ορίσαμε μία καμπύλη $x(t)$ την οποία διαμερίσαμε με την βοήθεια μίας ακολουθίας αριθμών $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ όπου το x_0 και το x_N ήταν σταθερές και παίζανε τον ρόλο της αρχικής και της τελικής θέσης, ενώ όλα τα υπόλοιπα σημεία τα αντιμετωπίσαμε ώς μεταβλητές. Επειδή ολοκληρώνουμε κάθε μεταβλητή σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς, κατανοούμε ότι αυτό που πρακτικά κάνουμε είναι το να ολοκληρώσουμε πάνω σε έναν άπειρο αριθμό διαδρομών x(t) στον χώρο μας, με μόνη προυπόθεση αυτές να ικανοποιούν τα αρχικά και τελικά σημεία στους δεδομένους χρόνους ασχέτως από το αν είναι επιτεύξιμα κλασσικά ή όχι.

Σε αυτό το σημείο θα είναι χρήσιμο να εστιάσουμε στο όρισμα του εκθετικού εντός του ολοκληρώματος στην εξίσωση (17). Εδώ, αν θέσουμε $\varepsilon = \Delta t$ και $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ στον εκθέτη εμφανίζεται ένα άθροισμα Riemann πολλαπλασιασμένο με μία σταθερά, συγκεκριμένα:

$$\Delta t\sum_{j=0}^{N-1}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t}\right)^2 - V(x_j)\right] \tag{18}$$

Στο όριο που $N \to \infty$ το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα:

$$A\left[x(\tau)\right] = \int_0^t d\tau \left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - V(x)\right] = \int_0^t d\tau \; L\left(x(\tau), \dot{x}(\tau)\right) \tag{19}$$

Σε αυτή την έκφραση, εμφανίζεται η κλασσική Λαγκραντζιανή L, και συγκεκριμένα η δράση A πάνω στην διαδρομή $x(\tau)$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις πληροφορίες το ολοκλήρωμα διαδρομών γίνεται[2]:

$$K(x, x_0, t) = \mathcal{C} \int d[x(\tau)] \; exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^t L \, d\tau\right) \tag{20}$$

Εδώ, το $\mathcal{C}$ είναι απλώς η σταθερά που προέκυψε στην διακριτοποιημένη μορφή, και το $d[x(\tau)]$ είναι το στοιχείο όγκου πάνω στον απειροδιάστατο χώρο των διαδρομών.

1.4 Στοιχεία Κλασσικής Μηχανικής

Στην παρούσα φάση θα υπενθυμίσουμε κάποια πράγματα από την κλασσική μηχανική τα οποία θα μας φανούν χρήσιμα στη συνέχεια. Αρχικά, κάνουμε λόγο για την αρχή του Hamilton, η οποία σαν εξίσωση συναρτησοειδούς έχει τη μορφή:

$$\frac{\delta A}{\delta x(t)} = 0 \Leftrightarrow \delta \int L \, dt = 0 \tag{21}$$

Η αρχή αυτή μας υποδεικνύει ότι αν υπολογίσουμε την δράση σε μία διαδρομή που παρεκκλίνει κατά έναν πολύ μικρό παράγοντα $\delta x(t)$ από την κλασσική $x(t)$, τότε η δράση θα αλλάξει κάτα όρους $\delta x(t)^2$ και άνω, δηλαδή η δράση καθιστάται στάσιμη για τη κλασσική διαδρομή $x(t)$. Σημειώνουμε ότι η παρέκκλιση $\delta x(t)$ δεν επηρεάζει τις συνοριακές μας συνθήκες, γι'αυτό για δεδομένους αρχικούς και τελικούς χρόνους t_0 και t_1 ισχύει $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$. Ας το δούμε αυτό πιο αναλυτικά υπολογίζοντας την δράση σε μία διαδρομή $x(t)$:

$$A[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V\left(x(t)\right)\right] dt \tag{22}$$

Εν συνεχεία εισάγουμε την παρέκκλιση $\delta x(t)$:

$$A[x(t) + \delta(x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}m\left[\dot{x}(t) + \delta\dot{x}(t)\right]^2 - V\left(x(t) + \delta x(t)\right) \, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{\frac{1}{2}m\left[\dot{x}(t)^2 + \dot{x}(t)\delta\dot{x}(t) + \delta\dot{x}(t)^2\right] - V\left(x(t)\right) - V'\left(x(t)\right)\delta x(t) - V''\left(x(t)\right)\delta x(t)^2 - \ldots\right\} dt$$

$$= T_0 + T_1 + T_2 + \ldots \tag{23}$$

Εδώ ο κάθε όρος περιέχει μία συγκεκριμένη δύναμη του $\delta x(t)$, για παράδειγμα ο T_2 περιέχει $\delta x(t)^2$. Προφανώς ο T_0 αντιστοιχεί στην δράση για την κλασσική διαδρομή x(t). Ο T_1 σύμφωνα με την αρχή του Hamilton είναι αναγκαστικά μηδέν και με μία παραγοντική ολοκλήρωση και αξιοποίηση των συνοριακών συνθηκών για την παρέκκλιση $\delta x(t)$ μας δίνει:

$$T_1 = \int_{t_0}^{t_1} \left[-m\ddot{x} - V'\left(x(t)\right)\right]\delta x(t) \, dt = 0 \tag{24}$$

Γνωρίζοντας όμως ότι η παρέκκλιση $\delta x(t)$ είναι τυχαίας φύσεως καταλήγουμε στον μηδενισμό του ορίσματος του ολοκληρώματος, άρα και στον δεύτερο νόμο του Newton:

$$m\ddot{x} = -V'(x) \tag{25}$$

Πολύ συχνά, στη βιβλιογραφία, η αρχή του Hamilton αναφέρεται και ως "Αρχή της ελάχιστης δράσης", αυτό το όνομα όμως εμπεριέχει λάθος μιας και η δράση δεν είναι πάντοτε ελάχιστη όταν την υπολογίσουμε στη κλασσική διαδρομή, γι'αυτό και είναι πιο σωστό να την λέμε 'Αρχή στάσιμης δράσης'. Εμείς θα απαντήσουμε την ερώτηση για το άμα είναι ελάχιστη ή μέγιστη αξιοποιώντας τον όρο T_2. Αυτός, με μία παραγοντική ολοκλήρωση καταλήγει να παίρνει τη μορφή:

$$T_2 = \int_{t_0}^{t_1} \delta x(t) \left[-\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{2} V''(x(t)) \right] \delta x(t)\, dt \tag{26}$$

Αν εδώ ορίσουμε τον τελεστή B:

$$b = -\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{2} V''(x(t)) \tag{27}$$

Το ολοκλήρωμα λαμβάνει την μορφή:

$$T_2 = \langle \delta x | B | \delta x \rangle \tag{28}$$

Προφανώς αν $T_2 > 0$ τότε η δράση είναι πράγματι ελάχιστη στην κλασσική διαδρομή, ενώ αν $T_2 < 0$ θα είναι μέγιστη. Το T_2 θα είναι θετικό αν όλες οι ιδιοτιμές του τελεστή B είναι θετικές, και θα είναι αρνητικό αν είναι όλες αρνητικές. Αν κάποιες ιδιοτιμες είναι θετικές και κάποιες αρνητικές τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε. Αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε να το εξάγουμε αν αναπτύξουμε το δx στην βάση των ιδιοανυσμάτων του B.

Το τελευταίο στοιχείο της κλασσικής μηχανικής που πρέπει να αξιοποιήσουμε είναι η κύρια συνάρτηση Hamilton η οποία παρουσιάζει κάποιες χρήσιμες ιδιότητες. Αυτή πρόκειται απλώς για τον όρο T_0 δηλαδή στην δράση υπολογισμένη για την κλασσική διαδρομή. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι η φυσική διαδρομή για δεδομένες αρχικές και τελικές συνθήκες δεν είναι πάντοτε μοναδική. Ένα απλό παράδειγμα που το επιβεβαιώνει αυτό, είναι αυτό του απλού αρμονικού ταλαντωτή ο οποίος αρχικά βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και τελικά στην έστω δεξιά ακραιά του θέση. Μιας και η κίνηση είναι περιοδική, έχουμε πρακτικά άπειρες κλασσικές διαδρομές που ικανοποιούν τις αρχικές και τελικές συνθήκες. Γι'αυτό και στην συνέχεια -όταν χρειάζεται- θα ξεχωρίζουμε με τη χρήση ενός δείκτη την συγκεκριμένη κλασσική διαδρομή στην οποία αναφερόμαστε. Ορίζουμε λοιπόν την κύρια συνάρτηση Hamilton για μία κλασσική διαδρομή $x_b(t)$:

$$S_b(x_0, t_0, x_1, t_1) = A\left[x_b(t)\right] \tag{29}$$

Αυτή η συνάρτηση, ικανοποιεί τις εξείς εξισώσεις (δεν θα τις αποδείξουμε εδώ) [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_b}{\partial x_1} &= p_1, & \frac{\partial S_b}{\partial t_1} &= -H_1 \\ \frac{\partial S_b}{\partial x_0} &= -p_0, & \frac{\partial S_b}{\partial t_0} &= H_0 \end{aligned} \tag{30}$$

Εδώ τα p,H αντιστοιχούν σε ορμές και Χαμιλτονιανές και οι δείκτες αντιπροσωπεύουν το αρχικό και το τελικό σημείο. Τέλος είναι καλό να σημειωθεί ότι παρόλο που το S και το A έχουν το όνομα "δράση", το S αναφέρεται σε συνάρτηση που εξαρτάται άμεσα από το αρχικό και το τελικό σημείο της διαδρομής, ενώ το A σε συναρτησοειδές που εξαρτάται από την συνάρτηση $x(t)$.

1.5 Προσέγγιση Στάσιμης Φάσης

Στην συνέχεια θα αναλύσουμε μία προσέγγιση για ολοκληρώματα των οποίων τα ορίσματα ταλαντώνονται πολύ γρήγορα, η οποία θα μας επιτρέψει να δώσουμε μία καλή προσέγγιση για το ολοκλήρωμα διαδρομών αλλά θα μας δώσει και μία όμορφη συμφωνία με την κλασσική μηχανική. Θα αρχίσουμε με ένα μονοδιάστατο ολοκλήρωμα της μορφής:

$$\int e^{i\frac{\varphi(x)}{\kappa}}\, dx \tag{31}$$

Η προσέγγισή μας δουλεύει στην περίπτωση όπου η παράμετρος κ είναι αρκετά μικρή ώστε η φάση του μιγαδικού αριθμού στο όρισμα να αλλάζει πολύ γρήγορα. Για να καταλάβουμε διαισθητικά αυτό που θα κάνουμε φανταζόμαστε το ολοκλήρωμα σαν ένα άθροισμα διανυσμάτων στο μιγαδικό επίπεδο με μοναδιαίο μέτρο (όπως η ολοκληρωτέα ποσότητα). Οπότε, για τα x στα οποία η συνάρτηση $\varphi(x)$ αλλάζει σημαντικά, λόγω της πολύ ευαίσθητης σε αλλαγές φάσης, τα διανύσματα αυτά τείνουν να σχηματίζουν κύκλους με αποτέλεσμα σχεδόν να αλληλοαναιρούνται δίνοντας εξαιρετικά μικρό αποτέλεσμα, σχεδόν μηδέν [9]. Υπάρχει μία εξαίρεση βεβαίως για τις γειτονίες γύρω απο τα ονομαζόμενα κρίσιμα σημεία $\bar{x}$ στα οποία η φάση είναι στάσιμη δηλαδή:

$$\frac{d\varphi}{dx}(\bar{x}) = 0 \tag{32}$$

Στις περιοχές αυτές η συνάρτηση $\varphi(x)$ αλλάζει πολύ πιο αργά με αποτέλεσμα τα προστιθέμενα διανύσματα να σχηματίζουν μεταξύ τους πολύ μικρές γωνίες, δηλαδή σε προσέγγιση να είναι συγγραμικά. Η πρόσθεση αυτών βεβαίως θα μας δώσει ένα μη μηδενικό αποτέλεσμα το οποίο πρέπει να λάβουμε υπόψιν. Για να αξιοποιήσουμε λοιπόν αυτές τις ιδέες στο ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε αρχικά αναπτύσσουμε την συνάρτηση φ κατά Taylor περί το κρίσιμο σημείο $\bar{x}$:

$$\varphi(x) = \varphi(\bar{x}) + \frac{y^2}{2}\varphi''(\bar{x}) + \dots \tag{33}$$

όπου $y = x - \bar{x}$ και ο γραμμικός όρος έχει παραληφθεί λόγω της φύσης του κρίσιμου σημείου $\bar{x}$. Παραλείποντας λοιπόν όρους μεγαλύτερης τάξης από y^2 και αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int e^{i\frac{\varphi(x)}{\kappa}}\, dx \approx e^{i\frac{\varphi(\bar{x})}{\kappa})} \int e^{iy^2\frac{\varphi''(\bar{x})}{2\kappa}}\, dy \tag{34}$$

Εδώ χρησιμοποιούμε το γνωστό Γκαουσιανό ολοκλήρωμα με πλήρως μιγαδικό εκθέτη:

$$\int e^{icy^2}\, dy = e^{i\nu\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|c|}}\ ,\ \text{όπου } \nu = sgn(c) \tag{35}$$

Και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int e^{i\frac{\varphi(x)}{\kappa}}\, dx = e^{i\nu\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\pi\kappa}{|\varphi''(\bar{x})|}}e^{i\frac{\varphi(\bar{x})}{\kappa}} \tag{36}$$

Προφανώς αυτό το αποτέλεσμα ισχύει με την προϋπόθεση ότι το $\varphi''(\bar{x})$ δεν είναι πολύ μικρό ή μηδέν, σε εκείνη την περίπτωση παίρνουμε όρους μεγαλύτερης τάξης, κάτι που δεν θα μας απασχολήσει προς το παρόν. Επίσης, όπως είναι αναμενόμενο η συνάρτηση $\varphi(x)$ μπορεί να έχει πάνω από ένα κρίσιμο σημείο, άρα πρέπει να τα συμπεριλάβουμε όλα το οποίο κάνουμε με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\int e^{i\frac{\varphi(x)}{\kappa}}\, dx = \sum_b e^{i\nu_b\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\pi\kappa}{|\varphi''(\bar{x_b})|}}e^{i\frac{\varphi(\bar{x_b})}{\kappa}} \tag{37}$$

Τώρα θα γενικεύσουμε αυτή τη προσέγγιση για πολυδιάστατα ολοκληρώματα δηλαδή θέλουμε να δούμε την προσέγγιση για το:

$$\int e^{i\frac{\varphi(x)}{\kappa}}\, d^n x \ , \ \text{όπου } x = (x_1 \ldots, x_n) \tag{38}$$

Όπως και πριν ξαναορίζουμε τα κρίσιμα σημεία $\bar{x}$ ως:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \tag{39}$$

Και αναπτύσσουμε την $\varphi(x)$ κατά Taylor περί το κρίσιμο σημείο:

$$\varphi(x) = \varphi(\bar{x}) + \frac{1}{2}\sum_{k,l} y_k y_l \frac{\partial^2 \varphi(\bar{x})}{\partial x_k \partial x_l} \tag{40}$$

όπου έχει απαληφθεί ο γραμμικός όρος και $y = x - \bar{x}$. Αντικαθιστούμε λοιπόν στο ολοκλήρωμα:

$$\int e^{i\frac{\varphi(x)}{\kappa}}\, d^n x = e^{i\frac{\varphi(\bar{x})}{\kappa}} \int exp\left(\frac{i}{2\kappa}\sum_{k,l} y_k y_l \frac{\partial^2 \varphi(\bar{x})}{\partial x_k \partial x_l}\right) d^n y \tag{41}$$

Εδώ τώρα θα χρησιμοποιήσουμε έναν μετασχηματισμό $z = Ry$, όπου R είναι ένας ορθογώνιος πίνακας (ισχύει $R^T = R^{-1}$). Έτσι αν γράψουμε το όρισμα του αθροίσματος στον εκθέτη σε μορφή πολλαπλασιασμού πινάκων έχουμε:

$$\sum_{k,l} y_k y_l \frac{\partial^2 \varphi(\bar{x})}{\partial x_k \partial x_l} = y^T A y = (R^{-1}z)^T A R z = z^T R A R^{-1} z = z^T \Lambda z = \sum_k \lambda_k z_k^2 \tag{42}$$

Εδώ ορίσαμε ως A τον πίνακα $A_{kl} = \frac{\partial^2 \varphi(\bar{x})}{\partial x_k \partial x_l}$, και ο πίνακας Λ που παρουσιάζεται είναι ο πίνακας που ως διαγώνια στοιχεία έχει τις ιδιοτιμές του πίνακα A, ο οποίος διαγωνιοποιήθηκε μέσω του ορθογώνιου μετασχηματισμού R. Σημειώνουμε επίσης ότι επειδή εξ'ορισμού ισχύει $detR = 1$ στον μετασχηματισμό θα ισχύει $d^n y = d^n z$, τελικά θα έχουμε:

$$\int e^{i\frac{\varphi(x)}{\kappa}}\, d^n x = e^{i\frac{\varphi(\bar{x})}{\kappa}} \int exp\left(\frac{i}{2\kappa}\sum_k \lambda_k z_k^2\right) d^n z \tag{43}$$

Αυτό που προέκυψε είναι ένα γινόμενο απο n Γκαουσιανά ολοκληρώματα με πλήρως μιγαδικό εκθέτη όπως αναφέραμε στην εξίσωση (35). Αν επίσης λάβουμε υπόψιν ότι το γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα A είναι ίσο με την ορίζουσα του τότε προκύπτει:

$$\int e^{i\frac{\varphi(x)}{\kappa}}\, d^n x = e^{\iota\nu\frac{\pi}{4}} (2\pi\kappa)^{\frac{n}{2}} \left| det \frac{\partial^2 \varphi(\bar{x})}{\partial x_k \partial x_l}\right|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi(\bar{x})}{\kappa}} \tag{44}$$

Όπου $\nu = \nu_+ - \nu_-$ και $\nu_\pm$ είναι αντίστοιχα ο αριθμός των θετικών και των αρνητικών ιδιοτιμών του πίνακα A. Τέλος φυσικά πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας την περίπτωση που η $\varphi(x)$ έχει πάνω από ένα κρίσιμο σημείο, αυτό εύκολα μας δίνει:

$$\int e^{i\frac{\varphi(x)}{\kappa}}\, d^n x = \sum_b e^{i\nu_b\frac{\pi}{4}} (2\pi\kappa)^{\frac{n}{2}} \left| det \frac{\partial^2 \varphi(\bar{x}_b)}{\partial x_k \partial x_l}\right|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi(\bar{x}_b)}{\kappa}} \tag{45}$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε μία προσέγγιση για τα πολυδιάστατα ολοκληρώματα η οποία μπορεί να εφαρμοστεί και στο ολοκλήρωμα διαδρομών.

1.6 Εφαρμογή της Προσέγγισης Στάσιμης Φάσης στο Ολοκλήρωμα Διαδρομών

Συγκεκριμένα θα την εφαρμόσουμε στην διακριτοποιημένη μορφή του ολοκληρώματος διαδρομών που εξάγαμε στο δεύτερο εδάφιο και πρόκειται για την εξίσωση (17). Εδώ το αντίστοιχο κ που είχαμε προηγουμένως πρόκειται για το $\hbar$ το οποίο θα το πάρουμε να είναι πολύ μικρό, δηλαδή δουλεύουμε στο κλασσικό όριο. Η αντίστοιχη συνάρτηση $\varphi(x)$ θα είναι:

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_N) = \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{m(x_{j+1} - x_j)^2}{2\varepsilon^2} - V(x_j) \right] \tag{46}$$

Ψάχνουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία αυτής της συνάρτησης οπότε την παραγωγίζουμε και βρίσκουμε:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \varepsilon \left[\frac{m}{\varepsilon^2}(2x_k - x_{k+1} - x_{k-1}) - V'(x_k) \right] \tag{47}$$

Και για την δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{m}{\varepsilon} Q_{kl} \ , \ \text{όπου } Q_{kl} = 2\delta_{kl} - \delta_{k+1,l} - \delta_{k-1,l} - \frac{\varepsilon^2}{m} V''(x_k)\delta_{kl} \tag{48}$$

Εδώ ο πίνακας Q_{kl} είναι $N-1$ διαστάσεων όπου ισχύει $k, l = 1, \ldots, N-1$ μιας και όπως αναφέραμε και στο δεύτερο εδάφιο τα σημεία x_0 και x_N είναι σταθερά. Τώρα συγκεκριμένα για τα κρίσιμα σημεία:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow m \frac{\bar{x}_{k+1} - 2\bar{x}_k + \bar{x}_{k-1}}{\varepsilon^2} = -V'(\bar{x}_k) \tag{49}$$

Όμως αυτό που προέκυψε είναι απλώς μια διακριτοποιημένη μορφή του δεύτερου νόμου του Newton:

$$m \frac{d^2 \bar{x}(\tau)}{d\tau^2} = -V'(\bar{x}) \tag{50}$$

Εδώ το $\bar{x}(\tau)$ πρόκειται για μία κλασσική διαδρομή που ικανοποιεί τις συνθήκες $\bar{x}(0) = x_0$ και $\bar{x}(t) = x$. Αυτό που πρακτικά κάναμε λοιπόν είναι ότι δείξαμε ότι σε αυτή τη προσέγγιση, στο ολοκλήρωμα διαδρομών τελικά θα συνεισφέρουν μόνο οι διαδρομές που ειπακούν στον δεύτερο νόμο του Newton. Άρα μόνο αν η $\varphi(x)$ δεν αλλάζει σημαντικά σε μικρές παρεκκλίσεις από τις διαδρομές $x(\tau)$ που προσδιορίσαμε (δηλαδή τις κλασσικές) τότε αυτές θα ληφθούν υπόψιν στην προσέγγιση για το ολοκλήρωμα διαδρομών. Με άλλα λόγια δείξαμε με έναν διακριτοποιημένο τρόπο την ισοδυναμία της αρχής του Hamilton με τις εξισώσεις του Newton. Αυτό μας οδηγεί στο ότι η $\varphi(x)$ στο όριο $N \to \infty$ ταυτίζεται με την κύρια συνάρτηση του Hamilton για την κλασσική διαδρομή $x(\tau)$:

$$\lim_{N \to \infty} \varphi(\bar{x}) = S(x, x_0, t) \tag{51}$$

Αυτό θα φανεί χρήσιμο για τον όρο $e^{i\frac{\varphi(\bar{x})}{\kappa}}$ στην εξίσωση (45). Εν συνεχεία, θα ασχοληθούμε με την ορίζουσα και τα πρόσημα των ιδιοανυσμάτων του πίνακα $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l}$, στην ορίζουσα θα προσκολλήσουμε και τον προπαράγοντα της εξισωσης (17) δηλαδή τον:

$$\left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} = e^{-iN\frac{\pi}{4}} \left(\frac{m}{2\pi \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \tag{52}$$

Αυτός είναι ανάλογος του $\varepsilon^{\frac{N}{2}}$ το οποίο σημαίνει ότι για να πάρουμε πεπερασμένο τελικό αποτέλεσμα πρέπει η ορίζουσα του $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l}$ να είναι ανάλογη του ε^{-N} όμως σύμφωνα με την εξίσωση (48) έχουμε:

$$det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} \right) = \left(\frac{m}{\varepsilon} \right)^{N-1} det Q_{kl} \tag{53}$$

Τελικά λοιπόν πρέπει η ορίζουσα του Q_{kl} να είναι ανάλογη του $\frac{1}{\varepsilon}$ ώστε το τελικό αποτέλεσμα για τον διαδότη να μην αποκλίνει. Αν τώρα επιπλέον θέσουμε $c_k = \frac{\varepsilon^2}{m}V''(x_k)$, έτσι ο πίνακας Q_{kl} παίρνει την μορφή:

$$\begin{pmatrix} 2-c_1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2-c_2 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 2-c_3 & -1 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{54}$$

Σε αυτόν εδώ τον πίνακα είναι πολύ εύκολο να τον αναλύσουμε σε υποορίζουσες D_k σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer και να βρούμε για αυτές έναν αναδρομικό τύπο:

$$D_{k+1} = (2 - c_{k+1})D_k - D_{k-1} \tag{55}$$

Και στην συνέχεια αντικαθιστώντας το c_{k+1} σύμφωνα με το πως το θέσαμε προηγουμένως προκύπτει:

$$m\frac{D_{k+1} - 2D_k + D_{k-1}}{\varepsilon^2} = -V''(\bar{x}_{k+1})D_k \tag{56}$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι η D_k αποκλίνει ως $\frac{1}{\varepsilon}$ καθώς $N \to \infty$, θέτουμε $D_k = \frac{F_k}{\varepsilon}$. Η F_k θα ικανοποιεί την ίδια εξίσωση με την D_k, και λαμβάνοντας το όριο $N \to \infty$ πηγαίνουμε σε μία εξίσωση με συνεχείς μεταβλητές η οποία θα είναι:

$$m\frac{d^2F(\tau)}{d\tau^2} = -V''\left(\bar{x}(\tau)\right)F(\tau) \tag{57}$$

Το μόνο που μας λείπει για αυτή την διαφορική εξίσωση είναι κάποιες αρχικές συνθήκες. Συγκεκριμένα παρατηρώντας τον πίνακα Q_{kl} έχουμε ότι $D_0 = 1$ και ότι $D_1 = 2 - \frac{\varepsilon^2}{m}V''(\bar{x}_1)$, άρα $F_0 = \varepsilon$ και:

$$F(0) = \lim_{N\to\infty} \varepsilon = 0 \tag{58}$$

Και ομοίως χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου:

$$F'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_1 - F_0}{\varepsilon} = \lim_{N\to\infty}\left[2 - \frac{\varepsilon^2}{m}V''(\bar{x}_1) - 1\right] = 1 \tag{59}$$

Τώρα μας μένει να λύσουμε την διαφορική εξίσωση (57) για να προσδιορίσουμε την F(τ) για την οποία ισχύει:

$$D(\tau) = \frac{F(\tau)}{\varepsilon} = \lim_{N\to\infty} detQ_{kl} \tag{60}$$

Η διαφορική εξίσωση αυτή θυμίζει πάρα πολύ το πρόβλημα των κοντινών τροχιών της Κλασσικής Μηχανικής, το οποίο και θα αναπτύξουμε. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε δύο τροχιές στον χώρο των φάσεων, μία "κλασσική" με αρχικές συνθήκες x_0, p_0 που καταλήγει στο σημείο $x(t), p(t)$ και μία με πολύ κοντινές αρχικές συνθήκες $x_0 + \delta x_0, p_0 + \delta p_0$ που καταλήγει στο σημείο $x(t) + \delta x(t), p(t) + \delta p(t)$. Το $dx(t)$ τώρα, με χρήση του κανόνα της αλυσίδας μπορεί να γραφεί:

$$x = x(x_0, p_0, t) \Rightarrow \delta x(t) = \frac{\partial x}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial x}{\partial p_0}\delta p_0 \tag{61}$$

Χρησιμοποιώντας για τις δύο διαδρομές τώρα τον δεύτερο νόμο του Newton:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -V'\left(x(t)\right) \qquad m\frac{d^2\left(x(t) + \delta x(t)\right)}{dt^2} = -V'\left(x(t) + \delta x(t)\right) \tag{62}$$

Κρατώντας μόνο γραμμικούς όρους στην δεύτερη αναπτύσσοντας το δυναμικό κατά Taylor μας μένει η εξίσωση:

$$m\frac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = -V''\left(x(t)\right)\delta x(t) \tag{63}$$

Όμως η εξίσωση που ικανοποιεί το $\delta x(t)$ είναι ακριβώς η ίδια με την εξίσωση (57) που εμέις θέλουμε να επιλύσουμε! Έτσι αν για την εξίσωση (61) θεωρήσουμε κατ' αναλογία με τις αρχικές συνθήκες που έχουμε για το F: $\delta x_0 = 0$ και $\delta p_0 = m\delta\dot{x}(0) = m$ καταλήγουμε στο ότι:

$$F(\tau) = m\frac{\partial x}{\partial p_0} \tag{64}$$

Σε αυτή την φάση είναι τετριμμένο να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που ικανοποιεί η κύρια συνάρτηση Hamilton που έχουμε αναφέρει στην σχέση (30) και να καταλήξουμε στο συμπέρασμα:

$$F(\tau) = -m\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}\right)^{-1} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} detQ_{kl} = -\frac{m}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}\right)^{-1} \tag{65}$$

Όπως παρατηρούμε όμως στο αποτέλεσμα υπάρχει η κατάλληλη εξάρτηση από το ε ώστε η ορίζουσα του πίνακα $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_l}$ μαζί με τον παράγοντα που αναφέραμε στην εξίσωση (52) μας δίνει ένα πεπερασμένο αποτέλεσμα που εκφράσαμε μέσω της κύριας συνάρτησης του Hamilton, δηλαδή της κλασσικής δράσης. Τώρα, για να τελειώσουμε τον υπολογισμό μας, μένει να υπολογίσουμε τα πρόσημα των ιδιοτιμών του πίνακα $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_l}$ ώστε να υπολογίσουμε την φάση του σταθερού όρου στον τελικό μας τύπο για τον διαδότη. Αρχικά, εφ'όσον έχουμε στο σύνολο N-1 ιδιοτιμές αρκει να βρούμε (αυθαίρετη επιλογή) το πλήθος των αρνητικών ιδιοτιμών αφού:

$$\nu = \nu_+ + \nu_- = N-1 \Rightarrow \nu = N-1-2\nu_- \tag{66}$$

Πέρα όμως από τον όρο $e^{i\nu\frac{\pi}{4}}$ που έχουμε στην σχέση (45), υπάρχει και όρος που βγάλαμε στην εξίσωση (52) $e^{-iN\frac{\pi}{4}}$ έτσι η ολική φάση του σταθερού όρου προκύπτει να είναι:

$$e^{-iN\frac{\pi}{4}}e^{i\nu\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{-i\mu\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{i}}e^{-i\mu\frac{\pi}{2}} \ , \ \text{όπου } \mu = \nu_- \tag{67}$$

Όμως ο αριθμός μ που πρόκειται για τον αριθμό αρνητικών ιδιοτιμών του πίνακα $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_l}$ στο όριο $N\to\infty$ γίνεται το πλήθος των αρνητικών ιδιοτιμών του διαφορικού τελεστή B που ορίσαμε στην σχέση (26), τον οποίο μελετήσαμε όταν απαντούσαμε την ερώτηση για το αν η δράση είναι πράγματι ελάχιστη όταν την υπολογίζουμε για την κλασσική διαδρομή. Σε εκείνο το εδάφιο δείξαμε ότι μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές αυτού του τελεστή είναι θετικές η δράση θα είναι ελάχιστη. Τελικά λοιπόν όταν για τη διαδρομή που μελετάμε η δράση είναι ελάχιστη, αυτή η επιπλέον φάση εξαφανίζεται, ενώ αν δεν είναι τότε απαιτείται ο επιπλέον όρος $e^{-i\mu\frac{\pi}{2}}$.

1.7 Η σχέση του Van Vleck

Συγκεντρώνοντας όλη την πληροφορία του προηγούμενου εδαφίου μπορούμε να δώσουμε πλέον μία έκφραση για τον ημικλασσικό υπολογισμό του διαδότη σε μορφή ολοκληρώματος διαδρομών:

$$K(x,x_0,t) = \frac{e^{-i\mu\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi i\hbar}}\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}\right|^{\frac{1}{2}} exp\left[\frac{i}{\hbar}S(x,x_0,t)\right] \tag{68}$$

Αυτό βέβαια ισχύει μόνο αν έχουμε μία μόνο κλασσική διαδρομή που ικανοποιεί τα αρχικά και τα τελικά μας χωροχρονικά σημεία. Σε περίπτωση που υπάρχει πάνω από μία τέτοια διαδρομή λοιπόν:

$$K(x,x_0,t)=\sum_b \frac{e^{-i\mu_b\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi i\hbar}}\left|\frac{\partial^2 S_b}{\partial x\partial x_0}\right|^{\frac{1}{2}} exp\left[\frac{i}{\hbar}S_b(x,x_0,t)\right] \tag{69}$$

Η γενίκευση για τις τρεις διαστάσεις δεν είναι δύσκολη και δίνει πολύ παρόμοιο αποτέλεσμα το οποίο είναι:

$$K(\vec{x},\vec{x_0},t)=\sum_b \frac{e^{-i\mu_b\frac{\pi}{2}}}{(2\pi i\hbar)^{\frac{3}{2}}}\left|det\frac{\partial^2 S_b}{\partial\vec{x}\partial\vec{x_0}}\right|^{\frac{1}{2}} exp\left[\frac{i}{\hbar}S_b(\vec{x},\vec{x_0},t)\right] \tag{70}$$

Τελικά, η σχέση του Van Vleck μας δίνει μία **προσέγγιση** του ολοκληρώματος διαδρομών λαμβάνοντας υπόψιν τις συνεισφορές των κλασσικών διαδρομών που αφορούν την κίνηση από ενα δεδομένο αρχικό χωροχρονικό σημείο σε ένα τελικό καθώς και μικρές μεταβολές έως και δεύτερης τάξης γύρω από αυτές τις διαδρομές. Παρόλ' αυτά, το καλό με την εξίσωση του Van Vleck είναι ότι σε περιπτώσεις όπου το δυναμικό είναι πολυώνυμο έως και δευτέρου βαθμού (συμπεριλαμβάνονται περιπτώσεις όπως το ελεύθερο σωματίδιο και ο αρμονικός ταλαντωτής) τότε παύει να είναι προσεγγιστικός και μας δίνει ακριβώς τον διαδότη αφού δεν θα υπάρχουν μεταβολές τρίτης τάξης και άνω για να έχουμε καλύτερη προσσέγγιση. Επίσης σε διαφορετικές περιπτώσεις που θα μελετήσουμε στη συνέχεια, όπου στο μελετούμενο σύστημα υπάρχει υπερσυμμετρία, μέσω της τεχνικής της τοπικοποίησης, η προσέγγιση στάσιμης φάσης μας δίνει και πάλι ακριβή αποτελέσματα!

1.8 Ισοδυναμία του Ολοκληρώματος Διαδρομών με την εξίσωση Schrödinger

Στην παρούσα φάση θα δείξουμε πιο αναλυτικά τον λόγο που ο διαδότης σε μορφή ολοκληρώματος διαδρομών είναι απολύτως ισοδύναμος με την εξίσωση του Schrödinger. Για λόγους ομοιομορφίας με την προηγούμενη ανάλυση μας θα δουλέψουμε σε μία διάσταση. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση Schrödinger είναι:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x,t) \tag{71}$$

Τώρα για μία πολύ μικρή χρονική διάδοση από $t=0$ έως $t=\epsilon$ αν κάνουμε τα αντίστοιχα αναπτύγματα στα οποία οι όροι τάξης ϵ^2 και άνω θα θεωρηθούν μικροί, έτσι καταλήγουμε:

$$\psi(x,\epsilon)=\psi(x,0)-\frac{i\epsilon}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x,0)+\mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{72}$$

Την ίδια μικρή διάδοση στον χρόνο θα κάνουμε χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα διαδρομών χρησιμοποιώντας την σχέση (5):

$$\psi(x,\epsilon)=\int K(x,x_0,\epsilon)\psi(x_0,0)\,dx_0 \tag{73}$$

Τώρα για τον διαδότη χρησιμοποιούμε την διακριτοποιημένη μορφή του που έχουμε στην σχέση (17) δηλαδή:

$$K(x_0,x,t)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{N}{2}}\int dx_1\ldots dx_{N-1}\; exp\left\{\frac{i\epsilon}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\left[\frac{m(x_{j+1}-x_j)^2}{2\epsilon^2}-V(x_j)\right]\right\} \tag{74}$$

Όμως εδώ έχουμε χρόνο ϵ οπότε απο όλο το άθροισμα στον εκθέτη χρειαζόμαστε μόνο έναν όρο από αυτό το άθροισμα, δηλαδή είναι περιττή η ολόκληρη διαμέρηση του διαστήματος $[x_0, x]$ σε υποδιαστήματα μιας και το χρονικό διάστημα το οποίο περνάει είναι εξαιρετικά μικρό. Γι'αυτό θέτουμε $N = 1$ άρα:

$$K(x, x_0, \epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[\frac{i\epsilon}{\hbar}\left(\frac{m(x-x_0)^2}{2\epsilon^2} - V(x_0)\right)\right] \tag{75}$$

Τώρα θέτουμε $x_0 = x + \xi$ και έτσι προκύπτει:

$$\psi(x, \epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int exp\left[\frac{im\xi^2}{2\epsilon\hbar} - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(x+\xi)\right]\psi(x+\xi, 0)\, d\xi \tag{76}$$

Σε αυτή την έκφραση θέλουμε να κάνουμε κατάλληλα αναπτύγματα ώστε να την συγκρίνουμε με την σχέση (72). Γενικά εμείς θα παρατηρήσουμε ότι στο ολοκλήρωμα αυτό οι κύριες συνεισφορές θα είναι στις περιοχές όπου το ξ είναι τάξης $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ λόγω του όρου $exp\left(\frac{im\xi^2}{2\epsilon\hbar}\right)$. Έτσι παίρνωντας ότι το ξ είναι αρκετά μικρό μπορούμε να πάρουμε τα αναπτύγματα για τα $\psi(x+\xi, 0)\ exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar}V(x+\xi)\right)$ και να κρατήσουμε μόνο όρους έως τάξης ϵ:

$$\psi(x, \epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int exp\left(\frac{im\xi^2}{2\epsilon\hbar}\right)\left[1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(x+\xi)\right]\left[\psi(x,0) + \xi\frac{d\psi}{dx}(x,0) + \frac{1}{2}\xi^2\frac{d^2\psi}{dx^2}(x,0)\right] d\xi \tag{77}$$

Εν συνεχεία, αναπτύσσουμε ξανά τον όρο του δυναμικού με αποτέλεσμα να μένει $V(x)$ μιας και όλοι οι υπόλοιποι όροι του αναπτύγματος θα είναι τάξης $\epsilon^{\frac{3}{2}}$ και άνω. Τέλος, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο όρος $\xi\frac{d\psi}{dx}(x,0)$ είναι περιττός οπότε αφού ολοκληρωθεί μηδενίζεται, αυτό είναι θετικό μιας δεν θέλουμε στο τελικό αποτέλεσμα να παρουσιάζονται τάξης κλασματικών δυνάμεων του ϵ. Κάνοντας τους απαραίτητους πολλαπλασιασμους τώρα έχουμε:

$$\begin{aligned}\psi(x, \epsilon) &= \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\psi(x,0) - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(x)\psi(x,0)\right)\int exp\left(\frac{im\xi^2}{2\epsilon\hbar}\right) d\xi \\ &+ \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{i\epsilon}{2\hbar}\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)\int exp\left(\frac{im\xi^2}{2\epsilon\hbar}\right)\xi^2\, d\xi\end{aligned} \tag{78}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τα γνωστά γκαουσιανά ολοκληρώματα:

$$\int exp\left(\frac{im\xi^2}{2\epsilon\hbar}\right) d\xi = \sqrt{\frac{2\pi i\epsilon\hbar}{m}} \qquad\qquad \int exp\left(\frac{im\xi^2}{2\epsilon\hbar}\right)\xi^2\, d\xi = \frac{i\epsilon\hbar}{m}\sqrt{\frac{2\pi i\epsilon\hbar}{m}} \tag{79}$$

Και έτσι αν για ακόμη μία φορά αγνοήσουμε όρους υψηλότερης τάξης απο ε προκύπτει:

$$\psi(x, \epsilon) = \psi(x, 0) - \frac{i\epsilon}{\hbar}\psi(x,0) + \frac{i\epsilon\hbar}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}(x,0) \tag{80}$$

Η οποία έκφραση μπορούμε πολύ εύκολα να διακρίνουμε ότι είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που δίνει η εξίσωση Schrödinger σύμφωνα με την σχέση (72).

2 Φερμιόνια, Υπερσυμμετρία και Localization

2.1 Φερμιονικός Αρμονικός Ταλαντωτής

Υπενθυμίζουμε τον απλό αρμονικό ταλαντωτή (μποζονικό) που γνωρίζουμε από την κβαντομηχανική, για τον οποίο ισχύει $H = \omega\hbar(a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \frac{\omega\hbar}{2}\{a^\dagger, a\}$ και $[a, a^\dagger] = 1$, όπου a και $a^\dagger$ οι τελεστές καταστροφής και γέννεσης αντίστοιχα για τους οποίους προφανώς $[a, a] = 0$ και $[a^\dagger, a^\dagger] = 0$. Το σύστημα του φερμιονικού αρμονικού ταλαντωτή είναι το ίδιο μόνο που αντικαθιστουμε τους μεταθέτες με αντιμεταθέτες, και ορίζουμε νέους τελεστές καταστροφής και γέννεσης ψ και $\psi^\dagger$ [7]. Δηλαδή έχουμε:

$$\{\psi, \psi\} = 0 \qquad \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0 \qquad \{\psi, \psi^\dagger\} = 1 \qquad H = \frac{\omega\hbar}{2}[\psi^\dagger, \psi] = \omega\hbar(\psi^\dagger\psi - \frac{1}{2}) \tag{81}$$

Προφανώς από αυτές τις ιδιότητες καταλαβαίνουμε $\psi^2 = \psi^{\dagger 2} = 0$. Εδώ ορίζουμε κατ' αναλογία με την μποζονική περίπτωση τον τελεστή αρίθμησης κβάντων δηλαδή $N = \psi^\dagger\psi$, γι'αυτόν ισχύει:

$$N^2 = \psi^\dagger\psi\psi^\dagger\psi = \psi^\dagger\psi(1 - \psi\psi^\dagger) = -\psi^\dagger\psi^2\psi^\dagger + \psi^\dagger\psi = N \Rightarrow N^2 = N \tag{82}$$

Από το αποτέλεσμα αυτό καταλαβαίνουμε ότι ο τελεστής N είναι προβολικπος οπότε έχει ιδιοτιμές μόνο 0 και 1, άρα έχουμε δύο καταστάσεις με τις οποίες μπορούμε να περιγράψουμε το σύστημα, τις $|0\rangle$ και $|1\rangle$, για τις οποίες ισχύει $N|0\rangle = 0$ και $N|1\rangle = |1\rangle$. Είναι απλή άσκηση να δείξουμε ότι ισχύει:

$$\psi|0\rangle = 0 \qquad \psi^\dagger|0\rangle = |1\rangle \qquad \psi^\dagger|1\rangle = 0 \qquad \psi|1\rangle = |0\rangle \tag{83}$$

Αν λάβουμε υπόψιν ότι $\psi^2 = \psi^{\dagger 2} = 0$ καταλαβαίνουμε ότι δεν γίνεται να έχουμε άλλες καταστάσεις γι'αυτό το σύστημα, αυτό μας παραπέμπει στην απαγορευτική αρχή του Pauli και μας δίνει μία πρώτη αιτιολόγηση για τον λόγο που ονομάσαμε το σύστημα, φερμιονικό αρμονικό ταλαντωτή.

2.2 Συνοχικές Καταστάσεις

Σημαντικές για την περιγραφή ενός κβαντικού συστήματος είναι οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή καταστροφής, η αλλιώς συνοχικές καταστάσεις (coherent states). Για αυτές έχουμε :

$$\hat{\Psi}|\psi\rangle = \psi|\psi\rangle \tag{84}$$

Χρησιμοποιήσαμε λίγο πιο αυστηρό συμβολισμό για να μη μπερδέψουμε τον τελεστή με την ιδιοτιμή του. Εδώ αν ξαναδράσουμε με τον τελεστή $\hat{\Psi}$ στο δεξί μέλος θα έχουμε $\psi^2|\psi\rangle$ όμως το αριστερό μέλος θα μηδενιστεί επειδή $\hat{\Psi}^2 = 0$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα $\psi^2 = 0$, η ψ όμως αν απλώς είναι μηδέν το σύστημα μας είναι τετριμμένο. Γι'αυτό ορίζουμε εξ'αρχής μία νέα άλγεβρα, όπου η ψ ονομάζεται μεταβλητή Grassmann. Αυτό μπορεί να φαίνεται περίεργο αλλά το σκεπτικό είναι ακριβώς το ίδιο με τον ορισμό της φανταστικής μονάδας $i = \sqrt{-1}$.

2.3 Άλγεβρα Grassmann

Τώρα θα μιλήσουμε λίγο πιο αυστηρά για την άλγεβρα Grassmann. Η άλγεβρα αυτή αποτελείται από n αντικείμενα $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ τα οποία φτιάχνουν ένα διανυσματικό χώρο πάνω στο πεδίο των μιγαδικών. Γι'αυτά ισχύει $\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \Rightarrow \theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$ άρα γενικά για οποιοδήποτε i έχουμε $\theta_i^2 = 0$. Από αυτή την ιδιότητα καταλαβαίνουμε ότι ένα γινόμενο με άρτιο αριθμό μεταβλητών Grassmann συμπεριφέρεται σαν πραγματικός αριθμός. Με αυτό στο νού μπορούμε να κάνουμε μία $\mathscr{Z}_2$ βαθμονόμηση. Συγκεκριμένα δίνουμε σε αντικείμενα, βαθμό $\mathscr{Z}_2$ το -1 όταν περιέχουν περιττό αριθμό Grassmann μεταβλητών και τα ονομάζουμε Grassmann περιττά ή φερμιονικές μεταβλητές. Επίσης δίνουμε βαθμό $\mathscr{Z}_2$ το +1 σε αντικείμενα που περιέχουν άρτιο αριθμό Grassmann μεταβλητών και τα ονομάζουμε Grassmann άρτια, ή μποζονικές μεταβλητές.

Πέρα από τα βασικά κομμάτια αυτής της άλγεβρας, μας ενδιαφέρει να ορίσουμε διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό για τις μεταβλητές αυτές. Γενικότερα αδυνατούμε να δώσουμε διαισθητικές γεωμετρικές ερμηνείες για παραγώγους και ολοκληρώματα όπως στις πραγματικές συναρτήσεις, οπότε θα συμπεριφερθούμε σε αυτές τις διαδικασίες σαν να είναι γραμμικοί τελεστές με κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες. Γενικά στους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι εξείς ιδιότητες:

$$[x_i, x_j] = 0 \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, x_i\right] = \delta_{ij} \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] = 0 \tag{85}$$

Αυτοί οι μεταθέτες είναι αρκετοί ώστε να μου δώσουν όλη τη πληροφορία της παραγώγισης αν χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα μίας συνάρτησης f, γι'αυτό επεκτείνουμε αυτή τη πληροφορία στις μεταβλητές Grassmann χρησιμοποιώντας αντιμεταθέτες, δηλαδή ορίζουμε έναν γραμμικό τελεστή $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ τέτοιο ώστε:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \theta_j}, \theta_i\right\} = \delta_{ij} \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial \theta_j}, \frac{\partial}{\partial \theta_i}\right\} = 0 \tag{86}$$

Με βάση αυτές τις ιδιότητες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αναπτύγματα συναρτήσεων με μεταβλητές Grassmann και να βγάλουμε οτιδήποτε χρειαστεί. Οι συναρτήσεις αυτές όμως έχουν μια ιδιαιτερότητα. Αρχικά ας δούμε ένα γενικό ανάπτυγμα μίας μεταβλητής:

$$f(\theta) = a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3 + \dots \tag{87}$$

Οι όροι $\theta^2, \theta^3, \dots$ εξ'ορισμού μηδενίζονται, άρα η πιο γενική συνάρτηση μίας μεταβλητής Grassmann είναι γραμμική (ομοίως για δύο μεταβλητές θα είναι διγραμμική , για τρεις τριγραμμική κλπ.). Ας δούμε πως θα δράσει η παράγωγος σε αυτή:

$$f(\theta) = a + b\theta \to \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial 1}{\partial \theta}a + \frac{\partial \theta}{\partial \theta}b \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \theta} = b \tag{88}$$

Στη συνέχεια θα δούμε πως θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα. Γενικά ο τρόπος που ορίσαμε τη παράγωγο δεν μας αφήνει περιθώριο να ορίσουμε μία "αντίστροφη" διαδικασία της γι'αυτό το ολοκλήρωμα θα το δούμε ξανά σαν ένα γραμμικό τελεστή ο οποίος θα ικανοποιεί μία ιδιότητα των πραγματικών ολοκληρωμάτων. Για μία πραγματική συνάρτηση η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ισχύει:

$$\int dx f(x+a) = \int dx f(x) \tag{89}$$

Έτσι ορίζουμε το ολοκλήρωμα στις μεταβλητές Grassmann ώς έναν γραμμικό τελεστή ο οποίος έχει την ιδιότητα:

$$\int d\theta f(\theta+\eta) = \int d\theta f(\theta) \tag{90}$$

Εδώ αν βάλουμε $f(\theta) = a + b\theta$:

$$\int d\theta (a + b\theta + b\eta) = \int d\theta (a + b\theta) \Rightarrow \int d\theta b\eta = 0 \Rightarrow \int d\theta = 0 \tag{91}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι περίεργο όμως δεν χρειάζεται να μας προβληματίσει, μιας και το μόνο που χρειάζεται να ισχύει για να μην είναι τετριμμένη η ολοκλήρωση που ορίσαμε είναι: $\int d\theta\theta \neq 0$, έτσι για να μην υπάρχει πρόβλημα ορίζουμε:

$$\int d\theta\theta = 1 \tag{92}$$

Η γενίκευση στις περισσότερες διαστάσεις γίνεται ακριβώς με την ίδια λογική όπου αντί για διαφορικό $d\theta$ έχουμε γινόμενο διαφορικών $d^n\theta = d\theta_n \dots d\theta_1$ και για να είμαστε συνεπείς με τις ιδιότητες των μεταβλητών Grassmann ο κατάλληλος ορισμός είναι:

$$\int d^n\theta \theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \tag{93}$$

Όπου ε είναι το πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο Levi-Civita. Αξιοποιώντας αυτόν τον ορισμό μπορούμε να διακρίνουμε ότι ισχύει:

$$detA = \int d\bar{\psi}^n d\psi^n e^{-\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j} \tag{94}$$

Αυτό προκύπτει αφού αναπτύξουμε το εκθετικό, και χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες της ολοκλήρωσης Grassmann και τον ορισμό της ορίζουσας.

2.4 Υπερσυμμετρική Κβαντομηχανική

Αρχίζουμε με έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ στον οποίο έχουμε μία βαθμονόμηση $\mathcal{Z}_2$ διαχωρίζοντας μποζονικές και φερμιονικές καταστάσεις με βάση έναν τελεστή $(-1)^F$ (F είναι ο τελεστής N που συζητήσαμε προηγουμένως και τον γράφουμε F αφού παραπέμπει σε φερμιονικό αριθμό):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^B \oplus \mathcal{H}^F \tag{95}$$

Γενικά $(-1)^F = 1$ σε καταστάσεις του $\mathcal{H}^B$ και $(-1)^F = -1$ σε καταστάσεις του $\mathcal{H}^F$. Έχοντας αυτά στο νου, αρχικά επιλέγουμε έναν ερμιτιανό τελεστή H ως την Χαμιλτονιανή του συστήματος μας η οποία είναι κατάλληλη ώστε να συντελείται από τον τελεστή Q (που ονομάζεται υπερφορτίο) και τον ερμιτιανό συζυγή του $Q^\dagger$ ως έχειν:

$$\{Q, Q^\dagger\} = 2H \tag{96}$$

Οι τελεστές Q και $Q^\dagger$ έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0 \qquad\qquad \{Q, (-1)^F\} = \{Q^\dagger, (-1)^F\} = 0 \tag{97}$$

Εύκολα από τα παραπάνω προκύπτει ότι $[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Ehrenfest τα υπερφορτία διατηρούνται. Επίσης μπορούμε να δείξουμε ότι η μέση τιμή της Χαμιλτονιανής είναι πάντα θετική:

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{2}(\ \langle\psi|QQ^\dagger|\psi\rangle +\ \langle\psi|Q^\dagger Q|\psi\rangle = \frac{1}{2}(||Q\,|\psi\rangle\,||^2 + ||Q^\dagger\,|\psi\rangle\,||^2) \geq 0 \tag{98}$$

Τώρα αν έχουμε μία ιδιοκατάσταση της Χαμιλτονιανής με ιδιοτιμή μηδέν, από αυτό το αποτέλεσμα καταλαβαίνουμε ότι αυτή η κατάσταση θα ικανοποιεί ταυτόχρονα τις εξείς συνθήκες:

$$H\,|\psi\rangle = 0 \qquad\qquad Q\,|\psi\rangle = 0 \qquad\qquad Q^\dagger\,|\psi\rangle = 0 \tag{99}$$

Μια τέτοια κατάσταση ονομάζεται θεμελιώδης υπερσυμμετρική κατάσταση. Τώρα μπορούμε επίσης να διακρίνουμε ότι $[H, Q^\dagger Q] = 0 \Rightarrow [H, (-1)^F] = 0$. Αυτό σε συνδυασμό με την σχέση (97), μας οδηγεί στο ότι ο τελεστής H αφού δράσει σε μία μποζονική (φερμιονική) κατάσταση μας οδηγεί σε μία άλλη μποζονική (φερμιονική) κατάσταση, ενώ οι τελεστές που αντιστοιχούν στα υπερφορτία μας πάνε από το ένα είδος κατάστασης στο άλλο.

Γενικά τώρα αν θεωρήσουμε ότι έχουμε διακριτό ενεργειακό φάσμα μπορούμε να επεκτείνουμε την βαθμονόμηση σε κάθε ενεργειακό επίπεδο:

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n^B \oplus \mathcal{H}_n^F \tag{100}$$

Ορίζοντας τώρα τον τελεστή $Q_1 = Q + Q^\dagger$ για τον οποίο ισχύει $Q_1^2 = 2H$ καταλαβαίνουμε ότι σε κάθε ξεχωριστό ενεργειακό επίπεδο: $Q_1^2 = 2E_n \to detQ_1 \neq 0$. Αυτός ο τελεστής όπως δείξαμε είναι αντιστρέψιμος και μας πηγαίνει από το ένα είδος κατάστασης (φερμιονική - μποζονική) στην άλλη. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε έναν 1-1 μετασχηματισμό ανάμεσα στους χώρους $\mathcal{H}^B$ και $\mathcal{H}^F$ δηλαδή έναν ισομορφισμό. Δηλαδή σε κάθε ενεργειακό επίπεδο ο μποζονικός και φερμιονικός υπόχωρος έχουν ίδια διάσταση άρα έχουν και ίδιο αριθμό καταστάσεων. Αυτή η λογική καταρρέει στην θεμελιώδη ενεργειακή στάθμη όπου $n = 0$ και $Q_1^2 = 0$ και δεν έχουμε αναγκαστικά ίδιο αριθμό φερμιονικών και μποζονικών καταστάσεων.

2.5 Δείκτης Witten

Με αφορμή το γεγονός ότι στην θεμελιώδη στάθμη δεν έχουμε τον ίδιο αριθμό φερμιονικών και μποζονικών καταστάσεων ορίζουμε τον δείκτη Witten $Tr(-1)^F$:

$$Tr(-1)^F = Tr(-1)^F e^{-\beta H} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(dim\mathcal{H}_n^B - dim\mathcal{H}_n^F\right) = dim\mathcal{H}_0^B - dim\mathcal{H}_0^F \tag{101}$$

Πράγματι ο δείκτης Witten είναι ακριβώς αυτή η διαφορά στον αριθμό των φερμιονικών και μποζονικών καταστάσεων που συζητήσαμε προηγουμένως. Ο δείκτης Witten είναι μια εξαιρετικά σημαντική ποσότητα καθώς μας δίνει πληροφορία για το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας αλλά ταυτόχρονα μας προσφέρει μια επίγνωση για το πόσο ευαίσθητο είναι το σύστημα σε διαταραχές. Σημειώνουμε ότι το β που χρησιμοποιήθηκε είναι θετικο και παίζει τον ρόλο που παίζει το $\beta = \frac{1}{k_b T}$ στην Στατιστική Φυσική. Το πολύ θετικό με την ποσότητα αυτή, είναι ότι μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός ολοκληρώματος διαδρομών και εν τέλει βγάζουμε ότι δεν έχει καμία εξάρτηση από το β!

2.6 Φερμιονικά Ολοκληρώματα Διαδρομών

Σε αυτό το κομμάτι γίνεται η ένωση με το πρώτο μέρος της εργασίας. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές που αναπτύξαμε προηγουμένως τροποποιημένες κατάλληλα ώστε να χρησιμοποιήσουμε συνοχικές καταστάσεις του φερμιονικού αρμονικού ταλαντωτή και τις μεταβλητές Grassmann για να γράψουμε τον δείκτη Witten ως ολοκλήρωμα διαδρομών [6]. Η συνοχική κατάσταση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η:

$$|\psi\rangle = |0\rangle - \psi\,|1\rangle \tag{102}$$

Σημειώνουμε ότι ακολουθούμε τη σύμβαση ότι η κατάσταση $|0\rangle$ είναι Grassmann άρτια ενώ η κατάσταση $|1\rangle$ είναι Grassmann περιττή. Εύκολα επίσης επιβεβαιώνουμε ότι αυτή η κατάσταση είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή καταστροφής με ιδιοτιμή ψ. Τώρα σκοπός μας είναι να ορίσουμε κατάλληλα τον μοναδιαίο τελεστή, αυτός προκύπτει να είναι:

$$\int d^2\psi e^{-\bar{\psi}\psi}\,|\psi\rangle\,\langle\bar{\psi}| = \hat{I} \tag{103}$$

Συγκεκριμένα αυτό προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το $|\psi\rangle$ και αναπτύξουμε το εκθετικό (θα έχουμε μόνο διγραμμικό όρο):

$$e^{-\bar{\psi}\psi}\,|\psi\rangle\,\langle\bar{\psi}| = (1 - \bar{\psi}\psi)(|0\rangle - \psi\,|1\rangle)(\langle 0| - \bar{\psi}\,\langle 1|) \tag{104}$$

Αν κάνουμε τις πράξεις, και χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των μεταβλητών Grassmann θα καταλήξουμε εύκολα στο αποτέλεσμα $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ δηλαδή στον μοναδιαίο τελεστή.

Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\int d\bar{\psi} d\psi \left\langle -\bar{\psi} \middle| \Omega \middle| \psi \right\rangle e^{-\bar{\psi}\psi} = Tr\Omega \tag{105}$$

Έχοντας αυτά στο νου μπορούμε να αρχίσουμε να σχηματίζουμε τη μορφή του δείκτη Witten:

$$\int d\bar{\psi} d\psi \left\langle -\bar{\psi} \middle| e^{-\beta H} \middle| \psi \right\rangle e^{-\bar{\psi}\psi} = Tre^{\beta H} \tag{106}$$

Στην συνέχεια σπάμε τον τελεστή σε γινόμενο N επιμέρους ίδιων τελεστών:

$$e^{-\beta H} = \left(e^{-\frac{\beta}{N}H}\right)^N \text{ όπου } \frac{\beta}{N} \to 0 \Rightarrow e^{-\beta H} = \left(e^{-\epsilon H}\right)^N = (1-\epsilon H)^N \tag{107}$$

Εισάγοντας στην έκφραση (106) την ταυτότητα N-2 φορές με την ίδια λογική που χρησιμοποιήσαμε στην σχέση (10) μόνο που η ταυτότητα τώρα δίνεται από την σχέση (103):

$$Tre^{-\beta H} = \int \prod_0^{N-1} d\bar{\psi}_i d\psi_i \left\langle -\bar{\psi}_0 \middle| 1-\varepsilon H \middle| \psi_{N-1} \right\rangle e^{-\bar{\psi}_{N-1}\psi_{N-1}} \left\langle -\bar{\psi}_{N-1} \middle| 1-\varepsilon H \middle| \psi_{N-2} \right\rangle e^{-\bar{\psi}_{N-2}\psi_{N-2}}$$

$$\left\langle \bar{\psi_{N-2}} \middle| \ldots \middle| \psi_1 \right\rangle e^{-\bar{\psi}_1\psi_1} \left\langle \bar{\psi}_1 \middle| 1-\epsilon H \middle| \psi_0 \right\rangle \tag{108}$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε το στοιχείο $\left\langle -\bar{\psi}_{i+1} \middle| 1-\varepsilon H \middle| \psi_i \right\rangle$. Γενικά $H = H(\psi^\dagger, \psi)$ άρα:

$$\left\langle \bar{\psi}_{i+1} \middle| 1-\varepsilon H \middle| \psi_i \right\rangle = \left\langle \bar{\psi}_{i+1} \middle| 1-\varepsilon H(\bar{\psi}_{i+1}, \psi_i) \middle| \psi_i \right\rangle = \left\langle \bar{\psi}_{i+1} \middle| \psi_i \right\rangle e^{-\epsilon H(\bar{\psi}_{i+1}, \psi_i)} \tag{109}$$

Όμως για το $\left\langle \bar{\psi} \middle| \psi \right\rangle$ έχουμε:

$$\left\langle \bar{\psi} \middle| \psi \right\rangle = (\langle 0| - \langle 1| \bar{\psi})(|0\rangle - \psi |1\rangle) = \langle 0|0\rangle + \langle 1|\bar{\psi}\psi|1\rangle = 1 + \bar{\psi}\psi = e^{\bar{\psi}\psi} \tag{110}$$

Άρα έχουμε:

$$\left\langle -\bar{\psi}_{i+1} \middle| 1-\varepsilon H \middle| \psi_i \right\rangle = e^{\bar{\psi}_{i+1}\psi_i} e^{-\epsilon H(\bar{\psi}_{i+1}, \psi_i)} \tag{111}$$

Προτού συνεχίσουμε την ανάλυση αναφέρουμε ότι γενικά στις κβαντικές θεωρίες πεδίου, τα φερμιονικά πεδία όταν στραφούν κατά γωνία 2π αποκτούν ένα αρνητικό πρόσημο, στη δικιά μας περίπτωση αυτό σημαίνει ότι $-\bar{\psi}_0 \to \bar{\psi}_N$, δηλαδή έχουμε αντιπεριοδικές οριακές συνθήκες. Αφού χρησιμοποιήσουμε τώρα την σχέση (111) στην σχέση (108) και λάβουμε υπόψιν το γεγονός ότι έχουμε αντιπεριοδικές οριακές συνθήκες, καταλήγουμε:

$$Tre^{-\beta H} = \int \prod_0^{N-1} d\bar{\psi}_i d\psi_i e^{\bar{\psi}_{i+1}\psi_i} e^{-\varepsilon H(\bar{\psi}_{i+1}, \psi_i)} e^{\bar{\psi}_i\psi_i}$$

$$\Rightarrow Tre^{-\beta H} = \int \prod_0^{N-1} d\bar{\psi}_i d\psi_i exp\left[\left[\left(\frac{\bar{\psi}_{i+1} - \bar{\psi}_i}{\varepsilon}\psi_i - H(\bar{\psi}_{i+1}, \psi_i)\right)\varepsilon\right]\right]$$

$$\Rightarrow Tre^{-\beta H} = \int \prod_0^{N-1} d\bar{\psi}_i d\psi_i exp\left[\varepsilon \sum_0^{N-1}\left[\frac{\bar{\psi}_{i+1} - \bar{\psi}_i}{\varepsilon}\psi_i - H(\bar{\psi}_{i+1}, \psi_i)\right]\right] \tag{112}$$

Εδώ μπορούμε να διακρίνουμε ότι στον εκθέτη έχει σχηματιστεί ένα άθροισμα Riemann το οποίο μπορούμε να μετατρέψουμε σε ολοκλήρωμα. Επιπρόσθετα επειδή θέλουμε να σχηματίσουμε τον δείκτη Witten εντάσουμε στην έκφραση μας τον επιπλέον όρο $(-1)^F$ ο οποίος μετατρέπει τις αντιπεριοδικές οριακές μας συνθήκες σε περιοδικές.

Τέλος το αποτέλεσμα μας θα είναι:

$$Tr(-1)^F e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}(\tau)\mathcal{D}\psi(\tau)e^{-\int_0^\beta d\tau\bar{\psi}\dot{\psi}+H(\bar{\psi},\psi)} \tag{113}$$

Έτσι πλέον έχουμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία για να υπολογίσουμε τον δείκτη Witten ενός συστήματος με Χαμιλτονιανή $H(\bar{\psi},\psi)$.

2.7 Υπερσυμμετρικό Σωματίδιο σε Δυναμικό

Σε αυτή την φάση θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε αυτά που έχουμε αναλύσει έως τώρα σε ένα παράδειγμα, υπολογίζοντας τον δείκτη Witten για ένα υπερσυμμετρικό σωματίδιο που κινείται εντός κατάλληλου δυναμικού V(x). Θεωρούμε ένα σύστημα που περιγράφεται από την Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + i\bar{\psi}\dot{\psi} - \frac{1}{2}\left(h'(x)\right)^2 - \frac{1}{2}h''(x)[\bar{\psi},\psi] \tag{114}$$

Αυτή η Lagrangian είναι ζήτημα άλγεβρας να δείξει κανείς ότι αλλάζει μόνο κατά μία τέλεια χρονική παράγωγο κάτω από τον ακόλουθο μετασχηματισμό, δηλαδή είναι απαράλλαχτη κάτω από την υπερσυμμετρία:

$$\delta x = \epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi \qquad \delta\psi = \epsilon(i\dot{x} + h'(x)) \qquad \delta\bar{\psi} = \bar{\epsilon}(-i\dot{x} + h'(x)) \tag{115}$$

Αν χρησιμοποιηθεί το θεώρημα της Noether, μπορούμε να βρούμε το διατηρούμενο υπερρεύμα και αντίστοιχα τα υπερφορτία Q και $Q^\dagger$ τα οποία συντελούν την Χαμιλτονιανή μας σύμφωνα με την άλγεβρα της Υπερσυμμετρικής Κβαντομηχανικής, όμως αυτό δεν θα μας απασχολήσει. Εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε τον δείκτη Witten σύμφωνα με την μορφή ολοκληρώματος διαδρομών που εξάγαμε προηγουμένως. Ταυτόχρονα όμως θα προσπαθήσουμε να αναφερθούμε στο γιατί η ύπαρξη αυτής της υπερσυμμετρίας μας απλοποιεί έντονα το πρόβλημα και μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ακριβώς το ολοκλήρωμα διαδρομών για τον δείκτη Witten. Τον δείκτη Witten θα τον εκφράσουμε μέσω ολοκληρώματος διαδρομών χρησιμοποιώντας την σχέση (113), συγκεκριμένα προκύπτει:

$$Tr(-1)^F e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}(\tau)\mathcal{D}\psi(\tau)e^{-\int_0^\beta d\tau\bar{\psi}\dot{\psi}+\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}(h'(x))^2+h''(x)\bar{\psi}\psi} \tag{116}$$

2.8 Localization - Τοπικοποίηση

Θα προσπαθήσουμε να εκλογικεύσουμε την τεχνική του Localization (τοπικοποίηση) χωρίς να χρησιμοποιήσουμε πολύ αυστηρό φορμαλισμό. Αρχικά θεωρούμε ένα ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης τριών μεταβλητών $\int dxdydzf(x,y,z)$, σε αυτό το ολοκλήρωμα μπορούμε να κάνουμε έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων π.χ. σε σφαιρικές οι κυλινδρικές συντεταγμένες. Αν όταν πάμε σε σφαιρικές συντεταγμένες η συνάρτηση είναι κατάλληλη ώστε να είναι συμμετρική στη στερεά γωνία (ανεξάρτητη των ϑ,φ), το ολοκλήρωμα σπάει σε $\int d\Omega \int drr^2 f(r)$, πρακτικά περιορίσαμε το διαφορικό που έχει να κάνει με την στερεά γωνία. Παρόμοια αποτελέσματα μπορούμε να έχουμε και σε ολοκληρώματα με μεταβλητές Grassmann, τα οποία παρουσιάζουν υπερσυμμετρίες (συμμετρίες που συμπεριλαμβάνουν Grassmann μεταβλητές). Σε αυτή την περίπτωση τα διαφορικά που απομονώνονται είναι της μορφής $\int d\theta_i$ όμως αυτό από τους κανόνες της Grassmann ολοκλήρωσης είναι μηδέν! Πολύ πιθανό όμως είναι να υπάρχει ένα σύνολο σημείων τα οποία παραμένουν απαράλλαχτα κάτω από την μελετούμενη υπερσυμμετρία οπότε η αλλαγή συντεταγμένων θα αποτύγχανε. Καλό παράδειγμα για να καταλάβουμε σε τι αναφερόμαστε είναι το σημείο $r = 0$ στις σφαιρικές και το $\rho = 0$ στις κυλινδρικές συντεταγμένες. Το σημαντικό λοιπόν είναι ότι ολοκληρώματα που δεν αλλάζουν κάτω από μία συγκεκριμένη υπερσυμμετρία τοπικοποιούνται στα στάσιμα σημεία (fixed points) της υπερσυμμετρίας. Για περισσότερες τεχνικές λεπτομέρειες μπορεί κανείς να μελετήσει την πηγή [1].

2.9 Υπολογισμός Δείκτη Witten με χρήση Localization

Αρχικά ψάχνουμε τα στάσιμα σημεία για την υπερσυμμετρία και βρίσκουμε ότι ικανοποιούν την σχέση $\dot{x} = h'(x_c) = 0$. Έτσι στο ολοκλήρωμα απλά κάνουμε τον μετασχηματισμό $x = x_c + \xi$ και αναπτύσσουμε την $h(x)$ και τις παραγώγους της, τελικά το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$Tr(-1)^F e^{-\beta H} = \sum_{x_c} \int \mathcal{D}\xi(\tau)\mathcal{D}\bar{\psi}(\tau)\mathcal{D}\psi(\tau) exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \frac{1}{2}\xi\left(-\partial_t^2 + (h'(x_c))^2\right)\xi + \bar{\psi}\left(\partial_t + h''(x_c)\right)\psi\right\} \tag{117}$$

Για το δεύτερο κομμάτι του εκθέτη, χρησιμοποιούμε την σχέση (94) και καταλήγουμε απλά στην ορίζουσα του διαφορικού τελεστή $\partial_t + h''(x_c)$, για το πρώτο κομμάτι αναπτύσσουμε τα ξ σε ανάπτυγμα των ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή $-\partial_t^2 + (h'(x_c))^2$ και αλλάζουμε κατάλληλα το διαφορικό ώστε να ολοκληρώνουμε στους συντελεστές του αναπτύγματος. Η διαδικασία αυτή μας οδηγεί σε πολλαπλά γκαουσιανά ολοκληρώματα, ο υπολογισμός των οποίων είναι τετριμμένος, το τελικό αποτέλεσμα μας δίνει:

$$\int \mathcal{D}\xi(\tau) exp\left\{\frac{1}{2}\xi\left(-\partial_t^2 + (h'(x_c))^2\right)\xi\right\} = \frac{1}{\sqrt{det(-\partial_t^2 + (h'(x_c))^2)}} \tag{118}$$

Αφού χρησιμοποιήσαμε λοιπόν επιχειρήματα τοπικοποίησης ο δείκτης witten έγινε απλώς:

$$Tr(-1)^F e^{-\beta H} = \sum_{x_c} \frac{det\left(\partial_t + h''(x_c)\right)}{\sqrt{det\left(-\partial_t^2 + (h'(x_c))^2\right)}} \tag{119}$$

Το μόνο που μας μένει είναι να υπολογίσουμε τις ορίζουσες που εμφανίστηκαν στην τελική έκφραση, αυτές θα υπολογιστούν ως το γινόμενο των ιδιοτιμών των δύο διαφορικών τελεστών, οι ιδιοτιμές του κάθε τελεστή είναι αρκετά εύκολο να υπολογιστούν οπότε θα της πάρουμε έτοιμες. Αρχίζουμε με την έκφραση του παρανομαστή η οποία θα μας δώσει:

$$\frac{1}{\sqrt{det(-\partial_t^2 + (h'(x_c))^2)}} = \prod_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \omega^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\omega}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \omega^2\right]^{-1} \tag{120}$$

Εδώ έχουμε θέσει $\omega = h'(x_c)$. Στην συνέχεια βγάζουμε έναν κοινό παράγοντα και:

$$\frac{1}{\sqrt{det(-\partial_t^2 + (h'(x_c))^2)}} = \frac{1}{\omega}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi k}{\beta}\right)^{-2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \left(\frac{\beta\omega}{2\pi n}\right)^2\right) \tag{121}$$

Το δεύτερο γινόμενο το θεωρούμε γνωστό και δίνει αποτέλεσμα $\frac{2}{\beta\omega} sinh\frac{\beta|\omega|}{2}$, το απόλυτο εισάγεται διότι το ω έχει θεωρηθεί θετικό (απαίτηση στην διαδικασία εύρεσης των ιδιοτιμών). Το πρώτο γινόμενο μας προβληματίζει έντονα γιατί αποκλίνει! Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε ένα τέχνασμα επικαλώντας συγκεκριμένες τιμές της συνάρτησης ζ για να άρουμε αυτή την απόκλιση [8]. Γενικά η συνάρτηση ζ ορίζεται ως:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{122}$$

Το διάσημο - και στο ευρύτερο κοινό - αποτέλεσμα είναι το $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, το οποίο χρησιμοποιείται στην θεωρία χορδών για να βρεθούν οι κρίσιμες διαστάσεις μίας χορδής, παρόμοιο σκεπτικό θα ακολουθήσουμε και εμείς.

Αρχικά ορίζουμε την συνάρτηση ζ_1:

$$\zeta_1(s) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2s} \zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^{-2s} \tag{123}$$

Στην συνέχεια παραγωγίζουμε αυτή τη σχέση και έπειτα θέτουμε s=0 και καταλήγουμε:

$$2log\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)\zeta(0) + 2\zeta'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} log\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^{-2s} \tag{124}$$

Παίρνοντας το εκθετικό και των δύο μελών έχουμε:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^{-2} = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2\zeta(0)} e^{2\zeta'(0)} \tag{125}$$

Σε αυτή τη φάση χρησιμοποιούμε τις τιμές $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ και $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}log(2\pi)$, άρα τελικά έχοντας άρει την απόκλιση καταλήγουμε:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^{-2} = \frac{1}{\beta} \tag{126}$$

Τελικά λοιπόν:

$$\frac{1}{\sqrt{det(-\partial_t^2 + (h'(x_c))^2)}} = \frac{1}{2sinh(\frac{\beta\omega}{2})} \tag{127}$$

Τέλος, θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία για τον διαφορικό τελεστή $\partial_t + h''(x_c)$, λαμβάνουμε ξανά έτοιμες τις ιδιοτιμές του και:

$$\begin{aligned} det\left(\partial_t + h''(x_c)\right) &= \prod_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{2\pi i n}{\beta} + \omega\right) = \omega\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \omega^2\right) \\ &= \omega\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi k}{\beta}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \left(\frac{\beta\omega}{2\pi n}\right)^2\right) = 2sinh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \end{aligned} \tag{128}$$

Μετά από όλη αυτή τη διαδικασία λοιπόν επιτέλους υπολογίσαμε τον δείκτη Witten:

$$Tr(-1)^F e^{-\beta H} = \sum_{x_c}\frac{det\left(\partial_t + h''(x_c)\right)}{\sqrt{det\left(-\partial_t^2 + (h'(x_c))^2\right)}} = \sum_{x_c}\frac{sinh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)}{sinh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right)} = \sum_{x_c}\frac{h''(x_c)}{|h''(x_c)|} \tag{129}$$

Εδώ μπορούμε να διακρίνουμε κάποιες περιπτώσεις για το αποτέλεσμα μας:

- Αν η συνάρτηση h είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού τότε ο δείκτης Witten είναι μηδέν, και λέμε ότι η υπερσυμμετρία σπάει αυθόρμητα.
- Αν η συνάρτηση h είναι πολυώνυμο άρτιου βαθμού με θετικό παράγοντα στον μεγιστοβάθμιο όρο τότε ο δείκτης Witten είναι 1 και έχουμε 1 μποζονική θεμελιώδη υπερσυμμετρική κατάσταση.
- Αν η συνάρτηση h είναι πολυώνυμο άρτιου βαθμού με αρνητικό όπαράγοντα στον μεγιστοβάθμιο όρο τότε ο δείκτης Witten είναι -1 και έχουμε 1 φερμιονική θεμελιώδη υπερσυμμετρική κατάσταση.

Οφείλουμε να αναφέρουμε ότι σύμφωνα με την άλγεβρα της υπερσυμμετρικής Κβαντομηχανικής, η θεμελιώδης αυτή κατάσταση μπορεί να βρεθεί χωρίς να λύσουμε το πρόβλημα $H|\Psi\rangle = 0$ αλλά λύνοντας τα ευκολότερα προβλήματα $Q|\Psi\rangle = 0$ και $Q^\dagger|\Psi\rangle = 0$.

3 Συμπεράσματα

Στη παρούσα εργασία μελετήθηκαν διάφορα κομμάτια της Κβαντομηχανικής τα οποία είναι χρήσιμα στο πλάισιο της θεωρητικής φυσικής και πρόκεται για εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην σύγχρονη έρευνα. Είναι εύκολο κανείς να χάσει το νόημα μιας και μεγάλο κομμάτι της ανάλυσης μας εμπεριέχει διεξοδικούς υπολογισμούς με έμφαση στο μαθηματικό κομμάτι και τις λεπτομέρειες. Στην εισαγωγή αναφέραμε ότι εργαλεία όπως το ολοκλήρωμα διαδρομών χρησιμοποιούνται λόγω της διευκόλυνσης που προσφέρουν λ.χ. στην κβαντική θεωρία πεδίου. Αυτό ίσως φαίνεται ειρωνικό, αφού η ανάλυση μας κάθε άλλο παρά απλή ήταν, γεγονός που μπορεί να επιβεβαιωθεί αν κανείς προσπαθήσει να υπολογίσει τον διαδότη ξεχωριστά με την σχέση Van Vleck και με την εξίσωση Schrödinger (λ.χ. αρμονικός ταλαντωτής). Στη πραγματικότητα όμως το 99% της κβαντικής θεωρίας πεδίου που γνωρίζουμε βασίζεται εξ'ολοκλήρου στα ολοκληρώματα διαδρομών μιας και σε αυτό το πλαίσιο δεν έχουμε εξίσωση Schrödinger. Αναφέρουμε ακόμη, ότι ο φορμαλισμός των ολοκληρωμάτων διαδρομών είναι συμβατός με την ειδική σχετικότητα και είναι ο μάλλον κατάλληλος, για θεωρίες βαθμίδας, θεωρία διαταραχών και μελέτη περίπλοκων αλληλεπιδράσεων ανάμεσα σε πεδία. Πέραν αυτού, είναι καταπληκτικά ενδιαφέρον ότι στο δεύτερο κομμάτι της εργασίας δεν εφαρμόσαμε ακριβώς τις σχέσεις που αναπτύξαμε στο πρώτο κομμάτι, αλλά το σκεπτικό, με αποτέλεσμα να δημιουργήσουμε εργαλεία πρακτικά από το πουθενά, τα οποία είναι εξαιρετικά χρήσιμα σε υπολογισμούς κρίσιμων ποσοτήτων όπως ο δείκτης Witten. Ιδιαίτερα αξιοπερίεργο είναι το ότι αυτό μας επιτράπηκε αφού εισάγαμε τους περίεργους αριθμούς Grassmann την άλγεβρα των οποίων ορίσαμε από το μηδέν! Τελικά λοιπόν, η ομορφιά δεν κρύβεται στις αναλυτικές μαθηματικές λεπτομέρειες (οι οποίες φυσικά παραμένουν απαραίτητες), αλλά στο πως μπορούμε να ενώσουμε κατάλληλα διαφορετικές ιδέες ώστε να φτιάξουμε χρηστικά εργαλεία τα οποία μας προσφέρουν φυσική πληροφορία για τα συστήματα που μελετάμε.

Βιβλιογραφία

[1] Philippe Durand. Localization, path integral and supersymmetry. 2019.

[2] Richard P Feynman, Albert R Hibbs, and Daniel F Styer. *Quantum mechanics and path integrals.* Courier Corporation, 2010.

[3] Robert G. Littlejohn. The Propagator and the Path Integral. https://bohr.physics.berkeley.edu/classes/221/notes/pathint.pdf, 2020.

[4] Jun John Sakurai and Jim Napolitano. *Modern quantum mechanics.* Cambridge University Press, 2020.

[5] Emilio Santos. Interpretation of feynman formalism of quantum mechanics in terms of probabilities of paths, 2021.

[6] Ramamurti Shankar. *Principles of quantum mechanics.* Springer Science & Business Media, 2012.

[7] Spencer Tamagni. Lecture Notes: Supersymmetry and Morse Theory. https://sciences.ucf.edu/physics/sps/wp-content/uploads/sites/2/sites/18/2019/11/FunQM.pdf, 2019.

[8] David Tong. Lecture Notes:Supersymmetric Quantum Mechanics. http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/susyqm.html, 2022.

[9] Π. Ιωάννου Θ. Αποστολάτος. *Θεωρητική Μηχανική.* Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2009.