

0.1 Постановка задачи

Решается двумерная задача Дирихле для двумерного стационарного оператора диффузии

$$\begin{cases} \nabla(-\mathbb{D}\nabla u) = f, x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

$\Omega = [0, 1]^2$, $D = \text{diag}(d_x, d_y)$.

Задача решается методом конечных разностей на регулярной квадратной сетке

$$w_h = ih, jh, h = \frac{1}{N}$$

с помощью пятиточечного шаблона

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\equiv \frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &\equiv \frac{u_{i,j+1}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i,j-1}^h}{h^2}, \end{aligned}$$

.

0.2 Численный эксперимент

Рассмотрим задачи, для которых известно точное решение

- $f = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, $g = 0$, $d_x = d_y = 1$. $u = \frac{\sin(\pi x) \sin(\pi y)}{2\pi^2}$.
- $f = \sin(10x) \sin(10y)$, $g = \frac{\sin(10x) \sin(10y)}{200}$, $d_x = d_y = 1$. $u = \frac{\sin(10x) \sin(10y)}{200}$.

0.3 Графические результаты

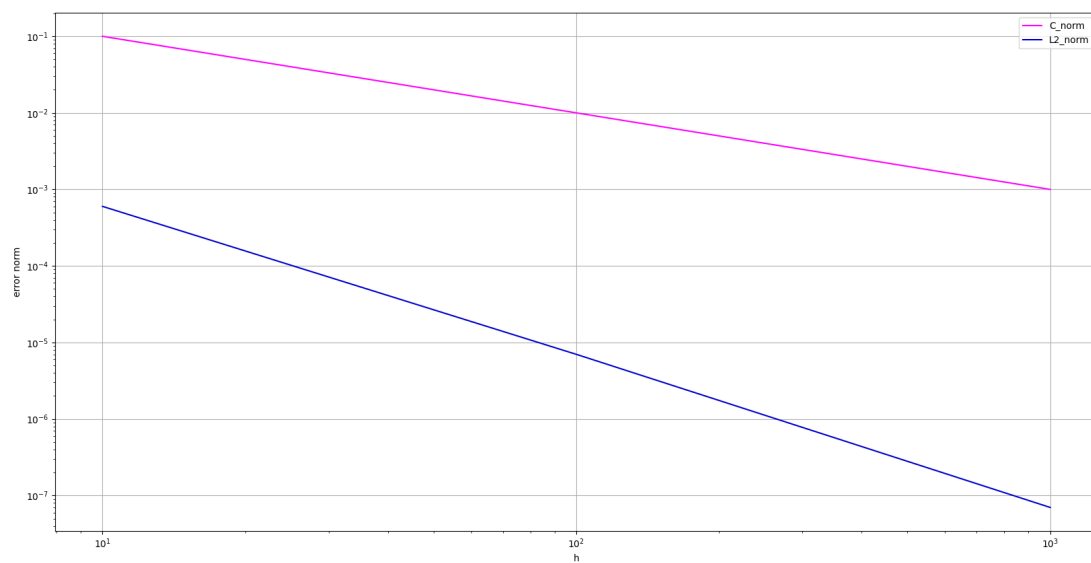


Рис. 1: $f = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, $g = 0$, $d_x = d_y = 1$

Как можно увидеть по этому графику, С-норма совпала с первым порядком.

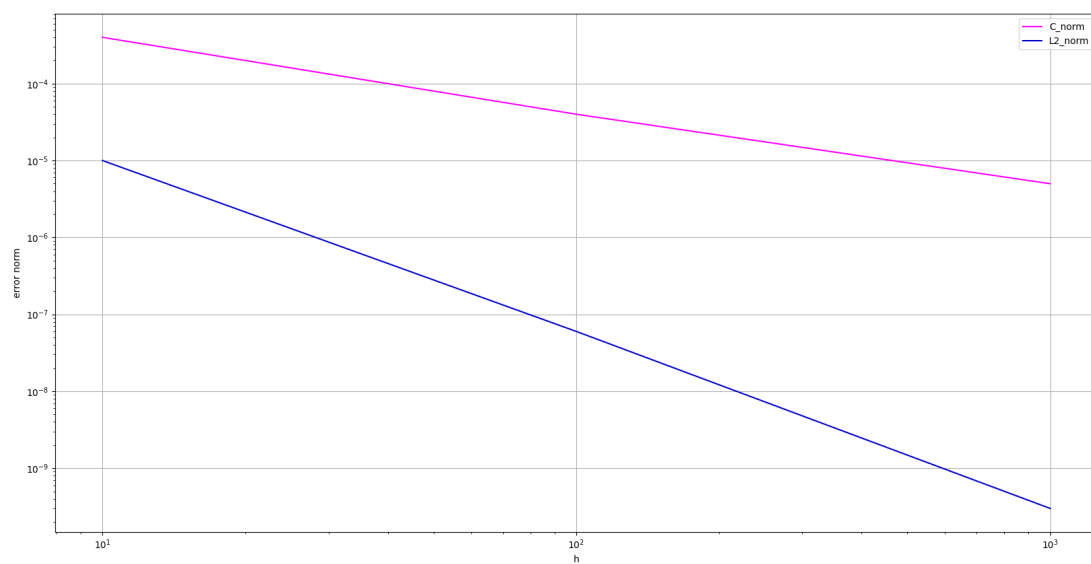


Рис. 2: $f = \sin(10x) \sin(10y)$, $g = \frac{\sin(10x) \sin(10y)}{200}$, $d_x = d_y = 1$