Практичне заняття № 7
(за темою лабораторної роботи №4)

Побудова алгоритмів ефективних за часовою складністю.
Задача квадратичного призначення.

В алгоритмах з експоненціальною складністю кількість операцій, необхідних для розв'язання задачі, зростає швидше, ніж поліном к-ї степені при зростанні розміру входу.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{O(n)}{P_k(n)} > Const$$

Розв'язання задач на сучасному компютері вже для n > 20, (наприклад при O(n!)) є проблематичним. Одним із способів зменшення часової складності є використання евристичних алгоритмів. Евристичні алгоритми дозволяють вирішувати складні задачі за прийнятний час за рахунок зведення задачі з експоненціальною складністю до задачі з поліноміальною складністю, хоча такі евристичні алгоритми не завжди можуть бути застосовані.

Задача квадратичного призначення (ЗКП) розглядається як приклад побудови алгоритму ефективного за часовою складністю.

Формулювання задачі

Задані ***m*** елементів x1, x1, … , xm. Для кожної пари елементів задані вагові коефіцієнти. Вагові коефіцієнти задані матрицею R = || rij ||m x m, rij – кількість зв'язків між елементами xi і xj

Дискретне робоче поле (ДРП) – це набір фіксованих позицій, в яких розміщуються елементи xi. Відстані між позиціями ДРП задаються в ортогональній метриці, причому відстань між сусідніми позиціями по горизонталі та вертикалі дорівнює 1. Задана матриця відстаней ДРП: D = || dij ||n x n. Кількість елементів дорівнює кількості позицій($n = m$).

Необхідно розташувати елементи на дискретному робочому полі за критерієм мінімальної сумарної довжини з'єднань, тобто потрібно мінімізувати функцію:

$$F(p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} d_{p(i)p(j)}$$

rij (i,j =1,2,…,m) – визначають степінь зв'язності елементів.

Розв'язання ЗКП методом "гілок та границь".

Основна ідея методу "гілок та границь" полягає в тому, що вся множина допустимих рішень задачі розбивається на деякі підмножини, всередені яких здійснюється впорядкований перегляд рішень з метою вибору оптимального.

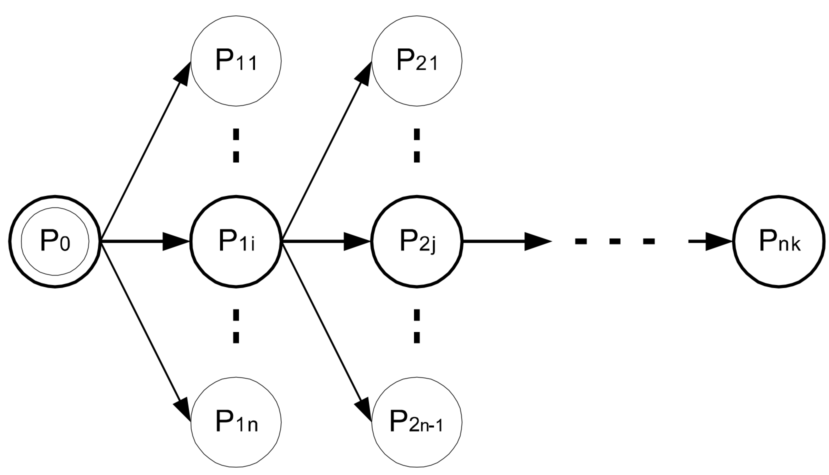


Рис. 1

Стосовно ЗКП метод "гілок та границь" полягає в наступному:

1. Кількість можливих розміщень елементів P0 розбивається на рівні за потужністю підмножини(P11…P1n);
2. Для кожної підмножини підраховується "нижня границя" Fij;

3. Обирається та підмножина, яка має мінімальне значення "нижньої границі", решта підмножин відкидається з розгляду. Обраний елемент фіксується в позиції, яка відповідає мінімальній "нижній границі";
4. Перехід до п1. для обраної підмножини;
5. п1 –п4 повторюються, доки не будуть відкинуті всі рішення крім оптимального.

<u>Утворення підмножин:</u>

1. З множини нерозташованих елементів обирається будь-який елемент, наприклад перший за нумерацією (Х1) і закріплюється в будь-якій вільній позиції ДРП, наприклад першій за нумерацією *(рис.1)*

2 Обраний елемент переміщується в іншу вільну позицію.

3. п.1 – п.2 повторюється, доки почерговим закріпленням не будуть охоплені всі вільні позиції ДРП.

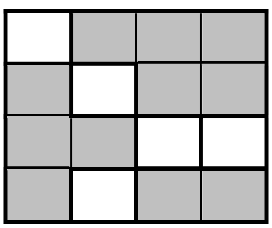
<u>Підрахунок “нижніх границь”.</u>

Підрахунок “нижніх границь” грунтується на тому, що якщо r = (r1, r2, . . . , rn) і d = (d1, d2, . . . , dn) – два вектора, то мінімуму скалярного добутку r*d відповідає розташуванню складових вектора r у зростаючому, а складових вектора d у спадаючому порядку. Таким чином, “нижня границя” може бути отримана із верхніх половин матриць R і D, елементи яких утворюють вектори r і d , причому, складові вектора r розташовані у зростаючому порядку, а складові вектора d у спадаючому порядку.

Приклад.

Задане дискретне робоче поле (ДРП) і матриця зв'язності R. Розташувати елементи Х1, Х2, Х3, Х4, Х5 на ДРП за критерієм мінімальної сумарної довжини з'єднань.

ДРП

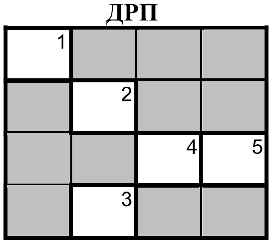


R

x	1	2	3	4	5
1	0	1	2	0	3
2	1	0	3	0	2
3	2	3	0	1	2
4	0	0	1	0	1
5	3	2	2	1	0

Позначимо на ДРП номера позицій в правому верхньому куті вільних позицій та визначемо матрицю відстаней D.

ДРП



D

p	1	2	3	4	5
1	0	2	4	4	5
2	2	0	2	2	3
3	4	2	0	2	3
4	4	2	2	0	1
5	5	3	3	1	0

Підрахуємо <u>мінімальну</u> нижню границю $F_{min} = r*d$:

r = 0 0 1 1 1 2 2 2 3 3

d = 5 4 4 3 3 2 2 2 2 1

0+0+4+3+3+4+4+4+6+3 = 31

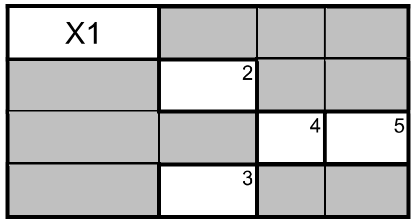
r – вектор зв'язків між елементами

d – вектор відстаней між позиціями елементів

Будемо розрізняти три типи елементів : "незакріплені", "закріплегні" в певній позиції та "зафіксовані".

X1 <u>Вибираємо елемент Х1</u>

1.1 Закріплюємо елемент Х1 в позиції Р1



Підраховуємо нижню границю

$F_{1(1)} = f_{н,н} + f_{1(1),н} = r_{н,н} * d_{н,н} + r_{1(1),н} * d_{1(1),н}$

$r_{1(1),н}$ = 0 1 2 3 $r_{н,н}$ = 0 1 1 2 2 3

$d_{1(1),н}$ = 5 4 4 2 $d_{н,н}$ = 3 3 2 2 2 1

$f_{1(1),н}$ = 0+4+8+6 = 18 $f_{н,н}$ = 0+3+2+4+4+3 = 16

$F_{1(1)}$ = 18 +16 = 34

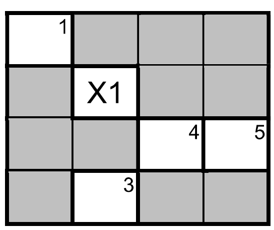
$F_{1(1)}$ – нижня границя для розташування, в якому елемент X1 закріплений в позиції (1)

$f_{н,н}$ – скалярний добуток для незакріплених елементів

$f_{1(1),н}$ - скалярний добуток для закріпленого елемента X1 в позиції P1 та незакріплених елементів .

($F_{1(1)} > F_{min}$), тому переміщуємо елемент X1 в наступну вільну позицію.
Наприклад, в позицію P2.

1.2 Закріплюємо елемент X1 в позиції P2



Підраховуємо нижню границю:

$F_{1(2)} = f_{нн} + f_{1(2),н} = r_{н,н} * d_{н,н} + r_{1(2),н} * d_{1(2),н}$

$r_{1(2),н}$ = 0 1 2 3 $r_{н,н}$ = 0 1 1 2 2 3

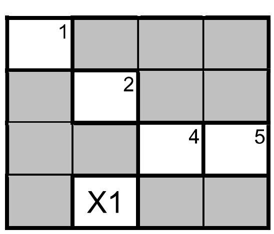
$d_{1(2),н}$ = 3 2 2 2 $d_{н,н}$ = 5 4 4 3 2 1

$f_{1(2),н}$ = 0+2+4+6 = 12 $f_{н,н}$ = 0+4+4+6+4+3 = 21

$F_{1(1)}$ = 12 +21 = 33

($F_{1(2)} > F_{min}$), тому переміщуємо елемент X1 в наступну вільну позицію.
Наприклад, в позицію P3.

1.3 Закріплюємо елемент X1 в позиції P3



Підраховуємо нижню границю

$F_{1(3)} = f_{н,н} + f_{1(3),н} = r_{н,н} * d_{н,н} + r_{1(3),н} * d_{1(3),н}$

$r_{1(3),н} = 0\ 1\ 2\ 3$ $\qquad r_{н,н} = 0\ 1\ 1\ 2\ 2\ 3$

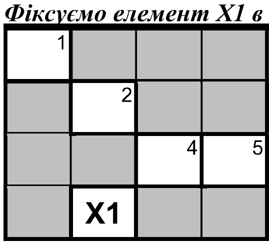
$d_{1(3),н} = 4\ 3\ 2\ 2$ $\qquad d_{н,н} = 5\ 4\ 3\ 2\ 2\ 1$

$f_{1(3),н} = \overline{0+3+4+6} = 13$ $\qquad f_{н,н} = \overline{0+4+3+4+4+3} = 18$

$F_{1(3)} = 13 + 18 = 31$

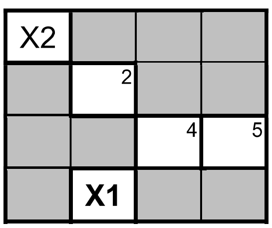
$F_{13} = F_{min}$ => Подальше переміщення елемента X1 припиняємо.

<u>Фіксуємо елемент X1 в позиції Р3</u>



X2 2. <u>Вибираємо елемент X2.</u>

2.1 Закріплюємо елемент X2 в позиції Р1



Підраховуємо нижню границю

$F_{2(1)} = f_{н,н} + f_{1(3),н} + f_{2(1),н} + f_{1(3),2(1)}$

$F_{2(1)} = r_{н,н} * d_{н,н} + r_{1(3),н} * d_{1(3),н} + r_{2(1),н} * d_{2(1),н} + r_{1(3),2(1)} * d_{1(3),2(1)}$

$r_{2(1),н} = 0\ 2\ 3$ $\qquad r_{н,н} = 1\ 1\ 2$

$d_{2(1),н} = 5\ 4\ 2$ $\qquad d_{н,н} = 3\ 2\ 1$

$f_{2(1),н} = \overline{0+8+6} = 14$ $\qquad f_{н,н} = \overline{3+2+2} = 7$

$r_{1(3),н} = 0\ 2\ 3$ $\qquad r_{1(3),2(1)} = 1$

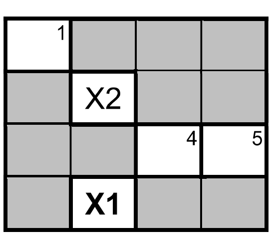
$d_{1(3),н} = 3\ 2\ 2$ $\qquad d_{1(3),2(1)} = 4$

$F_{1(3),н} = \overline{0+4+6} = 10$ $\qquad f_{1(3),2(1)} = \overline{4} = 4$

$F_{2(1)} = 14+7+10+4 = 35$

($F_{2(1)} > F_{min}$), тому переміщуємо елемент X2 в наступну вільну позицію.
Наприклад, в позицію Р2.

2.2 Закріплюємо елемент X2 в позиції Р2



Підраховуємо нижню границю

$F_{2(2)} = f_{н,н} + f_{1(3),н} + f_{2(2),н} + f_{1(3),2(2)}$

$F_{2(2)} = r_{н,н} * d_{н,н} + r_{1(3),н} * d_{1(3),н} + r_{2(2),н} * d_{2(2),н} + r_{1(3),2(2)} * d_{1(3),2(2)}$

$r_{2(2),н}$ = 0 2 3 $r_{н,н}$ = 1 1 2

$d_{2(2),н}$ = 3 2 2 $d_{н,н}$ = 5 4 1

$f_{2(2),н}$ = 0+4+6 = 10 $f_{н,н}$ = 5+4+2 = 11

$r_{1(3),н}$ = 0 2 3 $r_{1(3),2(2)}$ = 1

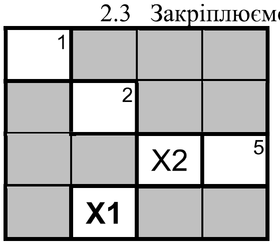
$d_{1(3),н}$ = 4 3 2 $d_{1(3),2(2)}$ = 2

$f_{1(3),н}$ = 0+6+6 = 12 $f_{1(3),2(2)}$ = 2 = 2

$F_{2(2)}$ = 10+11+12+2 = 35

($F_{2(2)} > F_{min}$), тому переміщуємо елемент X2 в наступну вільну позицію. Наприклад, в позицію P4.

2.3 Закріплюємо елемент X2 в позиції P4



Підраховуємо нижню границю

$F_{2(4)} = f_{н,н} + f_{1(3),н} + f_{2(4),н} + f_{1(3),2(4)}$

$F_{2(4)} = r_{н,н} * d_{н,н} + r_{1(3),н} * d_{1(3),н} + r_{2(4),н} * d_{2(4),н} + r_{1(3),2(4)} * d_{1(3),2(4)}$

$r_{2(4),н}$ = 0 2 3 $r_{н,н}$ = 1 1 2

$d_{2(4),н}$ = 4 2 1 $d_{н,н}$ = 5 3 2

$f_{2(4),н}$ = 0+4+3 = 7 $f_{н,н}$ = 5+3+4 = 12

$r_{1(3),н}$ = 0 2 3 $r_{1(3),2(4)}$ = 1

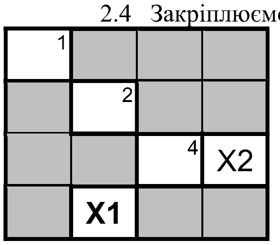
$d_{1(3),н}$ = 4 3 2 $d_{1(3),2(4)}$ = 2

$f_{1(3),н}$ = 0+6+6 = 12 $f_{1(3),2(4)}$ = 2 = 2

$F_{2(4)}$ = 7+12+12+2 = 33

($F_{2(4)} > F_{min}$), тому переміщуємо елемент X2 в наступну вільну позицію - P5.

2.4 Закріплюємо елемент X2 в позиції P5



Підраховуємо нижню границю

$F_{2(5)} = f_{н,н} + f_{1(3),н} + f_{2(5),н} + f_{1(3),2(5)}$

$F_{2(5)} = r_{н,н} * d_{н,н} + r_{1(3),н} * d_{1(3),н} + r_{2(5),н} * d_{2(5),н} + r_{1(3),2(5)} * d_{1(3),2(5)}$

$r_{2(5),н}$ = 0 2 3 $r_{н,н}$ = 1 1 2

$d_{2(5),н}$ = 5 3 1 $d_{н,н}$ = 4 2 2

$f_{2(5),\text{н}} = 0+6+3 = 9$ $\qquad$ $f_{\text{н,н}} = 4+2+4 = 10$

$r_{1(3),\text{н}} = 0\ 2\ 3$ $\qquad$ $r_{1(3),2(5)} = 1$

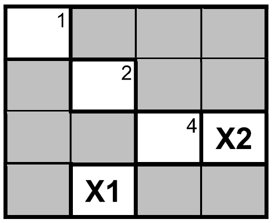
$d_{1(3),\text{н}} = 4\ 2\ 2$ $\qquad$ $d_{1(3),2(5)} = 3$

$f_{1(3),\text{н}} = \overline{0+4+6} = 10$ $\qquad$ $f_{1(3),2(5)} = \overline{3} = 3$

$F_{2(5)} = 9+10+10+3 = 32$

$(F_{2(1)} > F_{2(2)} > F_{2(4)} > F_{2(5)} > F_{min})$

Обираємо меншу нижню границю - $F_{2(5)}$

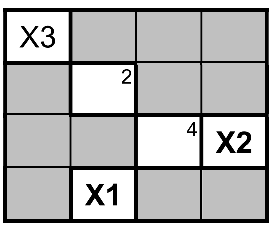


<u>Фіксуємо елемент X2 в позиції P5</u>

X3

3. <u>Вибираємо елемент X3.</u>

3.1 Закріплюємо елемент X3 в позиції P1



Підраховуємо нижню границю

$F_{3(1)} = f_{\text{н,н}} + f_{3(1),\text{н}} + \underline{f_{3(1),1(3)} + f_{3(1),2(5)}} + \underline{f_{1(3),\text{н}} + f_{2(5),\text{н}}} + f_{1(3),2(5)}$

$r_{3(1),\text{н}} = 1\ 2$ $\qquad$ $r_{\text{н,н}} = 1$ $\qquad$ $r_{1(3),2(5)} = 1$

$d_{3(1),\text{н}} = 4\ 2$ $\qquad$ $d_{\text{н,н}} = 2$ $\qquad$ $d_{1(3),2(5)} = 3$

$f_{3(1),\text{н}} = \overline{4+4} = 8$ $\qquad$ $f_{\text{н,н}} = \overline{2} = 2$ $\qquad$ $f_{1(3),2(5)} = \overline{3} = 3$

$r_{1(3),\text{н}} = 0\ 3$ $\qquad$ $r_{3(1),1(3)} = 2$

$d_{1(3),\text{н}} = 2\ 2$ $\qquad$ $d_{3(1),1(3)} = 4$

$f_{1(3),\text{н}} = \overline{0+6} = 6$ $\qquad$ $f_{3(1),1(3)} = \overline{8} = 8$

$r_{2(5),\text{н}} = 0\ 2$ $\qquad$ $r_{3(1),2(5)} = 3$

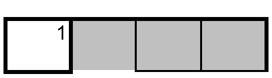
$d_{2(5),\text{н}} = 3\ 1$ $\qquad$ $d_{3(1),2(5)} = 5$

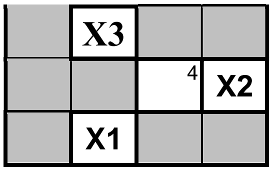
$f_{2(5),\text{н}} = \overline{0+2} = 2$ $\qquad$ $f_{3(1),2(5)} = \overline{15} = 15$

$F_{3(1)} = 8+2+3+6+8+2+15 = 44$

$(F_{3(1)} > F_{min})$, тому переміщуємо елемент X3 в наступну вільну позицію.
Наприклад, в позицію P2.

3.2 Закріплюємо елемент X3 в позиції P2





Підраховуємо нижню границю

$F_{3(2)} = f_{н,н} + f_{3(2),н} + \underline{f_{3(2),1(3)} + f_{3(2),2(5)}} + \underline{f_{1(3),н} + f_{2(5),н}} + f_{1(3),2(5)}$

$r_{3(2),н}$ = 1 2 | $r_{н,н}$ = 1 | $r_{1(3),2(5)}$ = 1

$d_{3(2),н}$ = 2 2 | $d_{н,н}$ = 4 | $d_{1(3),2(5)}$ = 3

$f_{3(2),н} = \overline{2+4} = 6$ | $f_{н,н} = \overline{4} = 4$ | $f_{1(3),2(5)} = \overline{3} = 3$

$r_{1(3),н}$ = 0 3 | $r_{3(2),1(3)}$ = 2

$d_{1(3),н}$ = 4 2 | $d_{3(2),1(3)}$ = 2

$f_{1(3),н} = \overline{0+6} = 6$ | $f_{3(2),1(3)} = \overline{4} = 4$

$r_{2(5),н}$ = 0 2 | $r_{3(2),2(5)}$ = 3

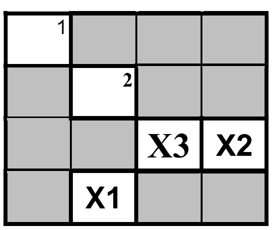
$d_{2(5),н}$ = 5 1 | $d_{3(2),2(5)}$ = 3

$f_{2(5),н} = \overline{0+2} = 2$ | $f_{3(2),2(5)} = \overline{9} = 9$

$F_{3(2)} = 6+4+3+6+4+2+9 = 34$

($F_{3(2)} > F_{min}$), тому переміщуємо елемент X3 в наступну вільну позицію - P4.

3.3 Закріплюємо елемент X3 в позиції P4



Підраховуємо нижню границю

$F_{3(4)} = f_{н,н} + f_{3(4),н} + \underline{f_{3(4),1(3)} + f_{3(4),2(5)}} + \underline{f_{1(3),н} + f_{2(5),н}} + f_{1(3),2(5)}$

$r_{3(4),н}$ = 1 2 | $r_{н,н}$ = 1 | $r_{1(3),2(5)}$ = 1

$d_{3(4),н}$ = 4 2 | $d_{н,н}$ = 2 | $d_{1(3),2(5)}$ = 3

$f_{3(4),н} = \overline{4+4} = 8$ | $f_{н,н} = \overline{2} = 2$ | $f_{1(3),2(5)} = \overline{3} = 3$

$r_{1(3),н}$ = 0 3 | $r_{3(4),1(3)}$ = 2

$d_{1(3),н}$ = 4 2 | $d_{3(4),1(3)}$ = 2

$f_{1(3),н} = \overline{0+6} = 6$ | $f_{3(4),1(3)} = \overline{4} = 4$

$r_{2(5),н}$ = 0 2 | $r_{3(4),2(5)}$ = 3

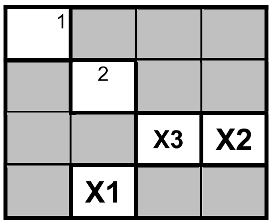
$d_{2(5),н}$ = 5 3 | $d_{3(4),2(5)}$ = 1

$f_{2(5),н} = \overline{0+6} = 6$ | $f_{3(4),2(5)} = \overline{3} = 3$

$F_{3(4)} = 8+2+3+6+4+6+3 = 32$

$(F_{3(1)} > F_{3(2)} > F_{3(4)} > F_{min})$

Обираємо меншу нижню границю - F3(4)

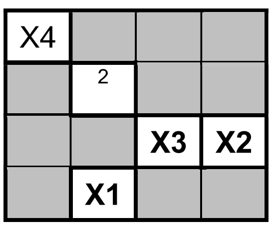


Фіксуємо елемент X3 в позиції P4

X4

4. Вибираємо елемент X4.

4.1 Закріплюємо елемент X4 в позиції P1



Підраховуємо нижню границю

$F_{4(1)} = f_{4(1),н} + f_{4(1),\,1(3)} + f_{4(1),\,1(5)} + f_{4(1),\,3(4)} +$

$f_{1(3),\,н} + f_{2(5),\,н} + f_{3(4),\,н} + f_{1(3),\,2(5)} + f_{1(3),\,3(4)} + f_{2(5),3(4)}$

$r_{4(1),н} = 1$ $\quad d_{4(1),н} = 2$ $\quad f_{4(1),н} = 2$

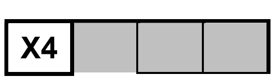
$r_{4(1),\,1(3)} = 0$	$d_{4(1),\,1(3)} = 4$	$f_{4(1),\,1(3)} = 0$
$r_{4(1),\,2(5)} = 0$	$d_{4(1),\,2(5)} = 5$	$f_{4(1),\,2(5)} = 0$
$r_{4(1),\,3(4)} = 1$	$d_{4(1),\,3(4)} = 4$	$f_{4(1),\,2(5)} = 4$

$r_{1(3),\,н} = 3$	$d_{1(3),\,н} = 2$	$f_{1(3),\,н} = 6$
$r_{2(5),\,н} = 2$	$d_{2(5),\,н} = 2$	$f_{2(5),\,н} = 4$
$r_{3(4),\,н} = 2$	$d_{3(4),\,н} = 3$	$f_{3(4),\,н} = 6$
$r_{1(3),\,2(5)} = 1$	$d_{1(3),\,2(5)} = 3$	$f_{1(3),\,2(5)} = 3$
$r_{2(5),\,3(4)} = 3$	$d_{2(5),\,3(4)} = 1$	$f_{2(5),\,3(4)} = 3$
$r_{1(3),\,3(4)} = 2$	$d_{1(3),\,3(4)} = 2$	$f_{1(3),\,3(4)} = 4$

$F_{4(1)} = 2 +0+0+4+6+4+6+3+3+4 = 32$

Аналогічно можна підрахувати що $F_{4(2)} = 44$, тобто $F_{4(1)} > F_{4(1)}$

Фіксуємо елемент X4 в позиції P1. Для елемента X5 залишається позиція P2



	X5		
		X3	X2
	X1		

<u>Підраховуємо сумарну довжину з'єднань</u>

$F_{\text{сум}}$ = 1*3+2*2+0*4+3*2 + 3*1+0*5+2*3 + 1*4+2*2 + 1*2 =
3+4+0+6+3+0+6+4+4+2 = 32