

# Exercise 5. Task 3: Частичные и маргинальные эффекты

Daniil Koveh

2025-11-06

## Содержание

1	Теория	1
2	Жизненный пример	1
3	Академическое решение	2
3.1	Partial dependence . . . . .	2
3.2	Marginal effect . . . . .	2
4	Числовая проверка	2
5	Итог	3
6	Что запомнить	4

## 1. Теория

Дана модель  $f(x_1, x_2) = x_1$  и предположение  $(X_1, X_2) \sim$

$N(0, \Sigma)$  с ковариационной матрицей

$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ . Нужно вычислить:

### 1. Partial dependence (PD)

$\bar{f}(x_2) = \mathbb{E}_{X_1}[f(X_1, x_2)]$  — усреднение по маргинальному распределению  $X_1$ .

### 2. Marginal effect (ME)

$\tilde{f}(x_2) = \mathbb{E}[f(X_1, X_2) | X_2 = x_2]$  — условное ожидание, показывающее зависимость от  $x_2$  в присутствии коррелированного  $X_1$ .

## 2. Жизненный пример

Пусть  $X_1$  — «количество рекламы», а  $X_2$  — «количество промокодов». Модель говорит: прогноз  $f$  зависит только от рекламы. Если усреднять по всей базе (PD), влияние промокодов обнуляется. Но если мы держим промокоды фиксированными и смотрим на реальные данные, где реклама и промокоды коррелированы, то изменение  $x_2$  изменит и ожидаемый уровень рекламы — это улавливает условное ожидание (ME).

## 3. Академическое решение

### 3.1. Partial dependence

Подставляем определение:  $\mathbb{E}[f(X_1, x_2) | X_1] = \mathbb{E}[f(X_1, x_2)]$  потому что  $X_1$  имеет нулевое среднее. Значит, PD фиксированно равен нулю для любого  $x_2$ .

### 3.2. Marginal effect

Маржинальный эффект учитывает условное распределение  $X_1$   $\text{mid } X_2 = x_2$ . Для совместного нормального распределения:  $\mathbb{E}[X_1 | X_2 = x_2] = \rho x_2$ . Следовательно,  $\tilde{f}(x_2) = \mathbb{E}[f(X_1 | X_2 = x_2)] = \rho x_2$ . Когда признаки коррелированы ( $\rho \neq 0$ ), маржинальный эффект линейно растёт с  $x_2$ . Если признаки независимы ( $\rho = 0$ ), то ME совпадает с PD и равно нулю.

## 4. Числовая проверка

```
set.seed(20250410) # фиксируем генератор
rho_values <- c(-0.75, -0.25, 0, 0.5, 0.9) # разные уровни корреляции
n_sim <- 100000 # количество симуляций

library(dplyr) # для манипуляций
library(MASS) # симуляция многомерного нормального
library(ggplot2) # визуализация

simulate_me <- function(rho) { # функция, оценивающая PD и ME
  sigma <- matrix(c(1, rho, rho, 1), nrow = 2) # ковариационная матрица
  sim <- mvrnorm(n = n_sim, mu = c(0, 0), Sigma = sigma) # симулируем X1, X2
  x1 <- sim[, 1] # берём X1
  x2 <- sim[, 2] # берём X2

  pd_estimate <- mean(x1) # оценка PD (ожидание X1)

  breaks <- seq(-3, 3, by = 0.5) # границы бинов
  bins <- cut(x2, breaks = breaks, include.lowest = TRUE) # бинируем X2
  bin_midpoints <- head(breaks, -1) + diff(breaks) / 2 # середины интервалов
  me_means <- tapply(x1, bins, mean, simplify = TRUE) # условное ожидание X1|X2
  me_estimate <- data.frame(
    bin = names(me_means),
    mean_x1 = as.numeric(me_means),
    bin_center = bin_midpoints[match(names(me_means), levels(bins))]
  )

  list(rho = rho, pd = pd_estimate, me = me_estimate) # результат
}

results <- lapply(rho_values, simulate_me) # запускаем для всех rho

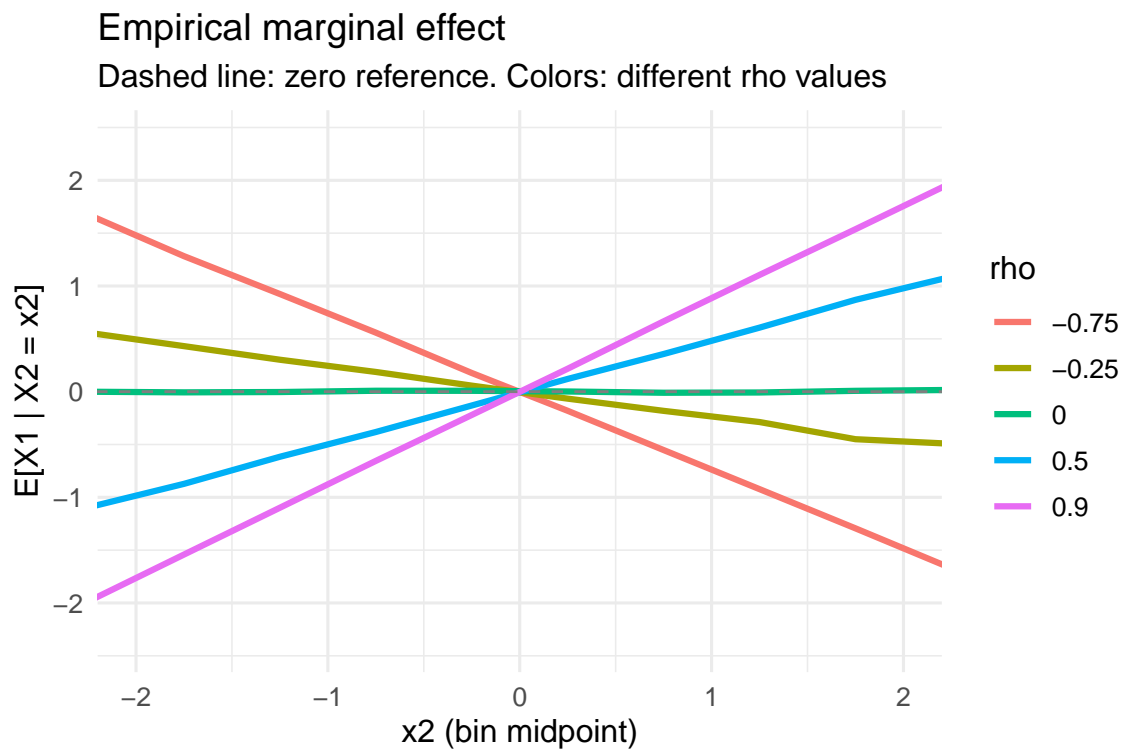
pd_df <- data.frame(
  rho = sapply(results, `[[`, "rho"),
  pd = sapply(results, `[[`, "pd")
) # таблица PD
```

```
me_df <- bind_rows(lapply(results, function(res) { # собираем ME
  mutate(res$me, rho = res$rho)
})))
```

```
head(pd_df) # показываем PD
```

```
##      rho      pd
## 1 -0.75  0.0034312951
## 2 -0.25 -0.0003495326
## 3  0.00  0.0013144773
## 4  0.50 -0.0069987893
## 5  0.90 -0.0001504233
```

```
ggplot(me_df, aes(x = bin_center, y = mean_x1, colour = factor(rho))) +
  geom_line(size = 1.1) +
  geom_abline(intercept = 0, slope = 0, linetype = "dashed", colour = "grey50") +
  labs(title = "Empirical marginal effect",
       subtitle = "Dashed line: zero reference. Colors: different rho values",
       x = "x2 (bin midpoint)", y = "E[X1 | X2 = x2]",
       colour = "rho") +
  theme_minimal(base_size = 12) +
  coord_cartesian(xlim = c(-2, 2))
```



## 5. Итог

- Partial dependence  
 $\text{bar}f(x_2)$  равен нулю для всех  $x_2$ , потому что модель не использует  $x_2$ .
- Marginal effect

$\tilde{f}(x_2) =$

$\rho x_2$  показывает косвенное влияние  $x_2$  через корреляцию.

- В симуляции МЕ ведёт себя как линейная функция с наклоном  $\rho$ , что подтверждает теорию.

## 6. Что запомнить

- Partial dependence усредняет по маргинальному распределению и обнуляет влияние признаков, от которых модель не зависит напрямую.
- Marginal effect улавливает зависимость через условное распределение: если признаки коррелированы, влияние «чужого» признака проявится.
- В интерпретации ансамблей нужно различать эти два графика: PD отвечает «что если менять один признак, остальные перемешивать», а МЕ — «что происходит в наблюдаемых данных».