

# Упражнение 2: Регуляризованные обобщенные линейные модели (Задачи 1-6)

Даниил Ковех

2025-10-21

## Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>1</b>
<b>2 Задача 1: Ridge регрессия и центрирование данных</b>	<b>2</b>
2.1 Часть 1: Связь между $\beta_{\text{Ridge}}$ и $\beta^*$ . . . . .	2
2.2 Часть 2: Байесовская интерпретация Ridge регрессии . . . . .	4
<b>3 Задача 2: Ортогональная матрица дизайна</b>	<b>4</b>
3.1 Объяснение простыми словами . . . . .	4
<b>4 Задача 3: Пуассоновская регрессия с лог-связью</b>	<b>7</b>
4.1 Объяснение простыми словами . . . . .	7
<b>5 Задача 4: Биномиальное распределение как экспоненциальное семейство</b>	<b>9</b>
5.1 Часть (а): Представление биномиального распределения . . . . .	9
5.2 Часть (б): Лог-правдоподобие для биномиальной регрессии . . . . .	11
5.3 Часть (в): Функция скоринга . . . . .	12
<b>6 Задача 5: Lasso и Ridge регрессия на искусственных данных</b>	<b>12</b>
6.1 Объяснение простыми словами . . . . .	12
6.2 Часть (а): Генерация данных . . . . .	13
6.3 Часть (б): Генерация зависимой переменной . . . . .	13
6.4 Часть (в): Теоретическое объяснение Lasso и Ridge . . . . .	14
6.5 Часть (г): Сравнение методов . . . . .	14
6.6 Часть (д): Интерпретация результатов . . . . .	15
<b>7 Задача 6: Оптимальная граница решения для классификации</b>	<b>15</b>
7.1 Объяснение простыми словами . . . . .	15
7.2 Часть (а): Определение оптимальной границы решения . . . . .	15
7.3 Часть (б): Ожидаемая ошибка классификации . . . . .	17
7.4 Часть (в): Визуализация . . . . .	18
<b>8 Заключение</b>	<b>19</b>

## 1. Введение

Это упражнение посвящено регуляризованным обобщенным линейным моделям. Мы разберем шесть задач пошагово, объясняя каждую концепцию простым языком с реальными примерами.

## 2. Задача 1: Ridge регрессия и центрирование данных

### 2.1. Часть 1: Связь между $\hat{\beta}_{ridge}$ и $\hat{\beta}^c$

#### 2.1.1. Объяснение простыми словами

Представьте, что вы изучаете зависимость цены квартиры от её площади. Ridge регрессия - это как добавить "штраф" за слишком большие коэффициенты, чтобы модель не переобучалась.

#### Математическая формулировка:

Ridge регрессия с исходными данными:

$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2$$

Ridge регрессия с центрированными данными:

$$\hat{\beta}^c = \arg \min_{\beta^c} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y} - \beta_0^c - \sum_{j=1}^p (x_{ij} - \bar{x}_j)\beta_j^c)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p (\beta_j^c)^2$$

где  $\bar{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij}$  и  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$

#### 2.1.2. Связь между коэффициентами

```
# Демонстрация связи между ridge регрессией с центрированными и нецентрированными данными

# Создаем искусственные данные
set.seed(123)
n <- 100
p <- 3
X <- matrix(rnorm(n * p), nrow = n, ncol = p)
y <- X %*% c(2, -1, 0.5) + rnorm(n, 0, 0.5)

# Вычисляем средние
x_bar <- colMeans(X)
y_bar <- mean(y)

# Центрируем данные
X_centered <- scale(X, center = TRUE, scale = FALSE)
y_centered <- y - y_bar

# Ridge регрессия с lambda = 0.1
lambda <- 0.1

# Функция для ridge регрессии
ridge_regression <- function(X, y, lambda) {
  n <- nrow(X)
  p <- ncol(X)

  # Добавляем столбец единиц для intercept
  X_with_intercept <- cbind(1, X)

  # Ridge решение
  beta_hat <- solve(t(X_with_intercept) %*% X_with_intercept + lambda * diag(p)) %*% t(X_with_intercept) %*% y
  return(beta_hat)
}

# Проверка
beta_hat <- ridge_regression(X_centered, y_centered, lambda)
beta_hat
```

```

beta_ridge <- solve(t(X_with_intercept) %*% X_with_intercept + lambda * diag(p + 1)) %*% t(X_with_intercept)

return(beta_ridge)
}

# Ridge регрессия на исходных данных
beta_ridge <- ridge_regression(X, y, lambda)

# Ridge регрессия на центрированных данных
beta_centered <- ridge_regression(X_centered, y_centered, lambda)

cat("Ridge коэффициенты на исходных данных:\n")

## Ridge коэффициенты на исходных данных:
print(beta_ridge)

## [,1]
## [1,] -0.009224089
## [2,] 1.969820485
## [3,] -0.975924440
## [4,] 0.470443849

cat("\nRidge коэффициенты на центрированных данных:\n")

## 
## Ridge коэффициенты на центрированных данных:
print(beta_centered)

## [,1]
## [1,] 2.602085e-17
## [2,] 1.969822e+00
## [3,] -9.759255e-01
## [4,] 4.704453e-01

# Связь между коэффициентами
cat("\nСвязь между коэффициентами:\n")

## 
## Связь между коэффициентами:
cat("β₀^ridge =", beta_ridge[1], "\n")

## β₀^ridge = -0.009224089
cat("β₀^c =", beta_centered[1], "\n")

## β₀^c = 2.602085e-17
cat("β₀^ridge - β₀^c =", beta_ridge[1] - beta_centered[1], "\n")

## β₀^ridge - β₀^c = -0.009224089
cat("ȳ - Σ(x̄ * β₀^c) =", y_bar - sum(x_bar * beta_centered[2:4]), "\n")

## ȳ - Σ(x̄ * β₀^c) = -0.009233702
Вывод:  $\hat{\beta}_0^{ridge} = \hat{\beta}_0^c + \bar{y} - \sum_{j=1}^p \bar{x}_j \hat{\beta}_j^c$ 

Для остальных коэффициентов:  $\hat{\beta}_j^{ridge} = \hat{\beta}_j^c$  для  $j = 1, \dots, p$ 

```

## 2.2. Часть 2: Байесовская интерпретация Ridge регрессии

### 2.2.1. Объяснение простыми словами

Ridge регрессия имеет красивую байесовскую интерпретацию. Это как сказать: “Я верю, что все коэффициенты должны быть маленькими, но не знаю точно насколько маленькими.”

**Математическая формулировка:**

Априорное распределение:  $\beta \sim N(0, \tau^2 I)$  Модель выборки:  $y \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$

Апостериорное распределение:  $\beta|y \sim N(\hat{\beta}^{ridge}, \Sigma)$

где  $\hat{\beta}^{ridge} = (X^T X + \lambda I)^{-1} X^T y$

### 2.2.2. Связь между параметрами

```
# Демонстрация байесовской интерпретации
library(MASS)

# Параметры
tau_sq <- 1 # Дисперсия априорного распределения
sigma_sq <- 0.5 # Дисперсия ошибки
lambda <- sigma_sq / tau_sq # Параметр регуляризации

cat("Параметры:\n")

## Параметры:
cat("τ² =", tau_sq, "\n")

## τ² = 1
cat("σ² =", sigma_sq, "\n")

## σ² = 0.5
cat("λ = σ²/τ² =", lambda, "\n")

## λ = σ²/τ² = 0.5
# Проверяем связь
cat("\nСвязь: λ = σ²/τ² =", sigma_sq, "/", tau_sq, "=", lambda, "\n")
```

##  
## Связь: λ = σ²/τ² = 0.5 / 1 = 0.5

**Вывод:**  $\lambda = \frac{\sigma^2}{\tau^2}$

## 3. Задача 2: Ортогональная матрица дизайна

### 3.1. Объяснение простыми словами

Представьте, что у вас есть данные, где все переменные независимы друг от друга (как рост и вес у людей - они связаны, но не линейно зависимы). В этом случае формулы для разных методов регуляризации становятся очень простыми.

**Условие:**  $\frac{1}{N} X^T X = I$  (ортогональная матрица)

### 3.1.1. (a) Best subset of size M

```
# Демонстрация best subset selection
set.seed(123)
n <- 100
p <- 5

# Создаем ортогональную матрицу
X <- matrix(rnorm(n * p), nrow = n)
X <- scale(X) # Стандартизуем
X <- X / sqrt(n) # Делаем ортогональной

# Проверяем ортогональность
cat("Проверка ортогональности (должно быть близко к единичной матрице):\n")  
  
## Проверка ортогональности (должно быть близко к единичной матрице):
print(round(t(X) %*% X, 3))

##          [,1]     [,2]     [,3]     [,4]     [,5]
## [1,]  0.990 -0.049 -0.128 -0.044 -0.191
## [2,] -0.049  0.990  0.030  0.043 -0.129
## [3,] -0.128  0.030  0.990 -0.044 -0.025
## [4,] -0.044  0.043 -0.044  0.990 -0.019
## [5,] -0.191 -0.129 -0.025 -0.019  0.990  
  
# Генерируем y
y <- X %*% c(3, -2, 1, 0, 0) + rnorm(n, 0, 0.1)

# OLS оценки
beta_ols <- t(X) %*% y
cat("\nOLS коэффициенты:\n")  
  
##  
## OLS коэффициенты:
print(beta_ols)

##          [,1]
## [1,]  2.8876962
## [2,] -1.9904389
## [3,]  0.5627241
## [4,] -0.3456801
## [5,] -0.1463016  
  
# Best subset для M = 3
M <- 3
ranks <- rank(-abs(beta_ols)) # Ранги по убыванию абсолютных значений
beta_subset <- beta_ols * (ranks <= M)

cat("\nBest subset коэффициенты (M =", M, "):\n")  
  
##  
## Best subset коэффициенты (M = 3 ):
print(beta_subset)

##          [,1]
```

```

## [1,] 2.8876962
## [2,] -1.9904389
## [3,] 0.5627241
## [4,] 0.0000000
## [5,] 0.0000000

```

**Формула:**  $\hat{\beta}_j^{subset} = \hat{\beta}_j^{OLS} \cdot I(\text{rank}(|\hat{\beta}_j^{OLS}|) \leq M)$

### 3.1.2. (b) Ridge регрессия

```

# Ridge регрессия для ортогональной матрицы
lambda <- 0.5
beta_ridge <- beta_ols / (1 + lambda)

cat("Ridge коэффициенты (\lambda =", lambda, "):\n")

## Ridge коэффициенты (\lambda = 0.5 ):
print(beta_ridge)

## [,1]
## [1,] 1.92513077
## [2,] -1.32695929
## [3,] 0.37514943
## [4,] -0.23045337
## [5,] -0.09753443

cat("\nПроверка формулы: \beta_ridge = \beta_ols / (1 + \lambda)\n")

##
## Проверка формулы: \beta_ridge = \beta_ols / (1 + \lambda)
cat("beta_ols[1] / (1 + \lambda) =", beta_ols[1], "/ (1 +", lambda, ") =", beta_ols[1] / (1 + lambda), "\n")

## \beta_ols[1] / (1 + \lambda) = 2.887696 / (1 + 0.5) = 1.925131
cat("beta_ridge[1] =", beta_ridge[1], "\n")

## \beta_ridge[1] = 1.925131

```

**Формула:**  $\hat{\beta}_j^{ridge} = \frac{\hat{\beta}_j^{OLS}}{1+\lambda}$

### 3.1.3. (c) Lasso регрессия

```

# Lasso регрессия для ортогональной матрицы
lambda <- 0.5

# Функция soft thresholding
soft_threshold <- function(x, lambda) {
  sign(x) * pmax(abs(x) - lambda, 0)
}

beta_lasso <- soft_threshold(beta_ols, lambda)

cat("Lasso коэффициенты (\lambda =", lambda, "):\n")

## Lasso коэффициенты (\lambda = 0.5 ):

```

```

print(beta_lasso)

## [,1]
## [1,] 2.38769615
## [2,] -1.49043893
## [3,] 0.06272414
## [4,] 0.00000000
## [5,] 0.00000000

cat("\nПроверка формулы: β_lasso = sign(β_ols) * (|β_ols| - λ)_+")

## Проверка формулы: β_lasso = sign(β_ols) * (|β_ols| - λ)_+
for(i in 1:length(beta_ols)) {
  cat("β_ols[", i, "] =", beta_ols[i], "\n")
  cat("sign =", sign(beta_ols[i]), ", |β_ols| =", abs(beta_ols[i]), "\n")
  cat("(|β_ols| - λ)_+ = max(", abs(beta_ols[i]), " - ", lambda, ", 0) =", pmax(abs(beta_ols[i]) - lambda,
    cat("β_lasso[", i, "] =", beta_lasso[i], "\n\n")
}

## β_ols[ 1 ] = 2.887696
## sign = 1 , |β_ols| = 2.887696
## (|β_ols| - λ)_+ = max( 2.887696 - 0.5 , 0 ) = 2.387696
## β_lasso[ 1 ] = 2.387696
##
## β_ols[ 2 ] = -1.990439
## sign = -1 , |β_ols| = 1.990439
## (|β_ols| - λ)_+ = max( 1.990439 - 0.5 , 0 ) = 1.490439
## β_lasso[ 2 ] = -1.490439
##
## β_ols[ 3 ] = 0.5627241
## sign = 1 , |β_ols| = 0.5627241
## (|β_ols| - λ)_+ = max( 0.5627241 - 0.5 , 0 ) = 0.06272414
## β_lasso[ 3 ] = 0.06272414
##
## β_ols[ 4 ] = -0.3456801
## sign = -1 , |β_ols| = 0.3456801
## (|β_ols| - λ)_+ = max( 0.3456801 - 0.5 , 0 ) = 0
## β_lasso[ 4 ] = 0
##
## β_ols[ 5 ] = -0.1463016
## sign = -1 , |β_ols| = 0.1463016
## (|β_ols| - λ)_+ = max( 0.1463016 - 0.5 , 0 ) = 0
## β_lasso[ 5 ] = 0

Формула:  $\hat{\beta}_j^{lasso} = \text{sign}(\hat{\beta}_j^{OLS}) \cdot (|\hat{\beta}_j^{OLS}| - \lambda)_+$ 

```

## 4. Задача 3: Пуассоновская регрессия с лог-связью

### 4.1. Объяснение простыми словами

Представьте, что вы изучаете количество звонков в call-центр в зависимости от дня недели. Пуассоновская регрессия идеально подходит для подсчета событий.

**Условия задачи:**  $y_i \sim \text{Poisson}(\mu_i)$  -  $g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$  (лог-связка) -  $x_i = 1$  для группы A,  $x_i = 0$  для

группы В

#### 4.1.1. Доказательство

```
# Демонстрация пуассоновской регрессии
set.seed(123)

# Параметры
nA <- 50 # Размер группы А
nB <- 50 # Размер группы В
beta0 <- 2
beta1 <- 0.5

# Генерируем данные
x <- c(rep(1, nA), rep(0, nB)) # Индикатор группы
mu <- exp(beta0 + beta1 * x) # Ожидаемые значения
y <- rpois(nA + nB, mu) # Наблюдения

# Данные
data_poisson <- data.frame(
  group = c(rep("A", nA), rep("B", nB)),
  x = x,
  y = y,
  mu = mu
)

cat("Сводка по группам:\n")

## Сводка по группам:
print.aggregate(y ~ group, data_poisson, function(x) c(mean = mean(x), var = var(x)))

##      group     y.mean     y.var
## 1       A 11.540000  9.886122
## 2       B  6.960000  5.304490

# Пуассоновская регрессия
model_poisson <- glm(y ~ x, family = poisson(link = "log"), data = data_poisson)
summary(model_poisson)

## 
## Call:
## glm(formula = y ~ x, family = poisson(link = "log"), data = data_poisson)
## 
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) 1.94018   0.05361 36.19 < 2e-16 ***
## x           0.50564   0.06787  7.45 9.34e-14 ***
## --- 
## Signif. codes:  0 '****' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## 
## (Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)
## 
## Null deviance: 136.514  on 99  degrees of freedom
## Residual deviance: 79.227  on 98  degrees of freedom
## AIC: 483.77
```

```

## Number of Fisher Scoring iterations: 4
# Проверяем, что fitted means равны выборочным средним
fitted_means <- fitted(model_poisson)
sample_means <- aggregate(y ~ x, data_poisson, mean)

cat("\nПроверка равенства fitted means и выборочных средних:\n")

##
## Проверка равенства fitted means и выборочных средних:
cat("Fitted mean для группы A (x=1):", fitted_means[1], "\n")

## Fitted mean для группы A (x=1): 11.54
cat("Выборочное среднее для группы A:", sample_means[2, 2], "\n")

## Выборочное среднее для группы A: 11.54
cat("Fitted mean для группы B (x=0):", fitted_means[nA+1], "\n")

## Fitted mean для группы B (x=0): 6.96
cat("Выборочное среднее для группы B:", sample_means[1, 2], "\n")

## Выборочное среднее для группы B: 6.96

```

#### Математическое доказательство:

Для лог-связки:  $\log(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$

Уравнения правдоподобия:  $-\sum_{i=1}^{n_A} (y_i - \mu_i) = 0 - \sum_{i=1}^{n_A} (y_i - \mu_i) \cdot 1 + \sum_{i=n_A+1}^{n_A+n_B} (y_i - \mu_i) \cdot 0 = 0$

Отсюда:  $\hat{\mu}_A = \frac{1}{n_A} \sum_{i=1}^{n_A} y_i$  и  $\hat{\mu}_B = \frac{1}{n_B} \sum_{i=n_A+1}^{n_A+n_B} y_i$

## 5. Задача 4: Биномиальное распределение как экспоненциальное семейство

### 5.1. Часть (а): Представление биномиального распределения

#### 5.1.1. Объяснение простыми словами

Биномиальное распределение описывает количество успехов в серии испытаний (например, количество выигрышев в лотерее из 10 билетов).

#### Экспоненциальное семейство:

$$f(y|\theta) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right)$$

#### 5.1.2. Вывод для биномиального распределения

```

# Демонстрация биномиального распределения как экспоненциального семейства

# Функция для вычисления параметров экспоненциального семейства
binomial_edf_params <- function(pi, T) {
  # Стандартные параметры биномиального распределения
  theta <- log(pi / (1 - pi)) # Канонический параметр
}
```

```

b_theta <- T * log(1 + exp(theta)) # Функция b(θ)
a_phi <- 1 # Функция a(φ)
c_y_phi <- lchoose(T, 0:T) # Функция c(y, φ)

return(list(
  theta = theta,
  b_theta = b_theta,
  a_phi = a_phi,
  c_y_phi = c_y_phi
))
}

# Пример
pi <- 0.3
T <- 10
params <- binomial_edf_params(pi, T)

cat("Параметры биномиального распределения как экспоненциального семейства:\n")

## Параметры биномиального распределения как экспоненциального семейства:
cat("π =", pi, "\n")

## π = 0.3
cat("T =", T, "\n")

## T = 10
cat("θ = log(π/(1-π)) =", params$theta, "\n")

## θ = log(π/(1-π)) = -0.8472979
cat("b(θ) = T * log(1 + exp(θ)) =", params$b_theta, "\n")

## b(θ) = T * log(1 + exp(θ)) = 3.566749
cat("a(φ) =", params$a_phi, "\n")

## a(φ) = 1

```

#### Математический вывод:

Биномиальное распределение:  $f(y|\pi) = \binom{T}{y} \pi^y (1-\pi)^{T-y}$

Преобразуем:

$$f(y|\pi) = \exp \left( y \log \pi + (T-y) \log(1-\pi) + \log \binom{T}{y} \right)$$

С каноническим параметром  $\theta = \log \frac{\pi}{1-\pi}$ :

$$f(y|\theta) = \exp \left( y\theta - T \log(1 + e^\theta) + \log \binom{T}{y} \right)$$

Отсюда:  $-\theta = \log \frac{\pi}{1-\pi}$  -  $b(\theta) = T \log(1 + e^\theta)$  -  $a(\phi) = 1$  -  $c(y, \phi) = \log \binom{T}{y}$

## 5.2. Часть (b): Лог-правдоподобие для биномиальной регрессии

```

# Лог-правдоподобие для биномиальной регрессии
set.seed(123)

# Генерируем данные
n <- 100
x <- rnorm(n)
T <- sample(5:15, n, replace = TRUE)
pi <- 1 / (1 + exp(-(0.5 + 1.2 * x))) # Логит-связка
y <- rbinom(n, T, pi)

# Данные
data_binomial <- data.frame(x = x, y = y, T = T, pi = pi)

# Функция лог-правдоподобия
log_likelihood_binomial <- function(beta, data) {
  beta0 <- beta[1]
  beta1 <- beta[2]

  # Предсказанные вероятности
  eta <- beta0 + beta1 * data$x
  pi_pred <- 1 / (1 + exp(-eta))

  # Лог-правдоподобие
  loglik <- sum(data$y * log(pi_pred) + (data$T - data$y) * log(1 - pi_pred) + lchoose(data$T, data$y))

  return(loglik)
}

# Вычисляем лог-правдоподобие
beta_true <- c(0.5, 1.2)
loglik <- log_likelihood_binomial(beta_true, data_binomial)

cat("Лог-правдоподобие для биномиальной регрессии:\n")

## Лог-правдоподобие для биномиальной регрессии:
cat("β₀ =", beta_true[1], ", β₁ =", beta_true[2], "\n")

## β₀ = 0.5 , β₁ = 1.2
cat("Лог-правдоподобие =", loglik, "\n")

## Лог-правдоподобие = -173.5531

```

**Формула лог-правдоподобия:**

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^N \left[ y_i \log \pi_i + (T_i - y_i) \log(1 - \pi_i) + \log \binom{T_i}{y_i} \right]$$

где  $\pi_i = \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 x_i)}}$

### 5.3. Часть (с): Функция скоринга

```
# Функция скоринга (градиент лог-правдоподобия)
score_function <- function(beta, data) {
  beta0 <- beta[1]
  beta1 <- beta[2]

  # Предсказанные вероятности
  eta <- beta0 + beta1 * data$x
  pi_pred <- 1 / (1 + exp(-eta))

  # Градиенты
  s0 <- sum(data$y - data$T * pi_pred) # Производная по β₀
  s1 <- sum((data$y - data$T * pi_pred) * data$x) # Производная по β₁

  return(c(s0, s1))
}

# Вычисляем функцию скоринга
score <- score_function(beta_true, data_binomial)

cat("Функция скоринга:\n")

## Функция скоринга:
cat("s₀(β) =", score[1], "\n")
## s₀(β) = -7.398904
cat("s₁(β) =", score[2], "\n")
## s₁(β) = 3.713162
# Проверяем, что в максимуме функция скоринга равна нулю
cat("\nПроверка: в максимуме функция скоринга должна быть близка к нулю\n")

##
## Проверка: в максимуме функция скоринга должна быть близка к нулю
cat("|s₀| =", abs(score[1]), "\n")
## |s₀| = 7.398904
cat("|s₁| =", abs(score[2]), "\n")
## |s₁| = 3.713162
```

**Формула функции скоринга:**

$$s(\beta) = \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N (y_i - T_i \pi_i) \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix}$$

## 6. Задача 5: Lasso и Ridge регрессия на искусственных данных

### 6.1. Объяснение простыми словами

Мы создадим искусственные данные, где только первые 10 переменных действительно влияют на результат. Это позволит нам увидеть, как Lasso и Ridge справляются с отбором переменных.

**Примечание:** Эта задача требует пакета `glmnet`, который не удалось установить в данной среде. Поэтому мы предоставляем теоретическое объяснение и код для демонстрации концепций.

## 6.2. Часть (а): Генерация данных

```
# Генерация искусственных данных
set.seed(123)

# Параметры
n <- 100 # Количество наблюдений
p <- 100 # Количество переменных

# Матрица ковариат из стандартного нормального распределения
X <- matrix(rnorm(n * p), nrow = n, ncol = p)

cat("Размерность матрицы X:", dim(X), "\n")

## Размерность матрицы X: 100 100
cat("Первые несколько значений X:\n")

## Первые несколько значений X:
print(head(X[, 1:5]))


##           [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
## [1,] -0.56047565 -0.71040656  2.1988103 -0.7152422 -0.07355602
## [2,] -0.23017749  0.25688371  1.3124130 -0.7526890 -1.16865142
## [3,]  1.55870831 -0.24669188 -0.2651451 -0.9385387 -0.63474826
## [4,]  0.07050839 -0.34754260  0.5431941 -1.0525133 -0.02884155
## [5,]  0.12928774 -0.95161857 -0.4143399 -0.4371595  0.67069597
## [6,]  1.71506499 -0.04502772 -0.4762469  0.3311792 -1.65054654
```

## 6.3. Часть (б): Генерация зависимой переменной

```
# Генерация зависимой переменной
# y зависит только от первых 10 переменных
true_beta <- c(rep(1, 10), rep(0, p - 10)) # Истинные коэффициенты
epsilon <- rnorm(n, 0, sqrt(0.1)) # Шум
y <- X %*% true_beta + epsilon

cat("Истинные коэффициенты (первые 15):\n")

## Истинные коэффициенты (первые 15):
print(true_beta[1:15])

## [1] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
cat("\nСтатистики зависимой переменной:\n")

## 
## Статистики зависимой переменной:
cat("Среднее y:", mean(y), "\n")

## Среднее y: 0.1645446
```

```

cat("Стандартное отклонение y:", sd(y), "\n")
## Стандартное отклонение y: 2.956344
cat("Стандартное отклонение шума:", sqrt(0.1), "\n")
## Стандартное отклонение шума: 0.3162278

```

## 6.4. Часть (c): Теоретическое объяснение Lasso и Ridge

### 6.4.1. Lasso регрессия (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

Математическая формулировка:

$$\hat{\beta}^{lasso} = \arg \min_{\beta} \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$$

**Особенности:** - L1-регуляризация:  $\lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$  - Производит отбор переменных (sparse solutions) - Коэффициенты могут стать точно равными нулю - Хорошо подходит для задач с высокой размерностью

### 6.4.2. Ridge регрессия

Математическая формулировка:

$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2$$

**Особенности:** - L2-регуляризация:  $\lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2$  - Сжимает коэффициенты к нулю, но не обнуляет их - Сохраняет все переменные - Хорошо подходит для мультиколлинеарности

## 6.5. Часть (d): Сравнение методов

```

# Демонстрация различий между Lasso и Ridge
# Создаем простой пример с 5 переменными

set.seed(123)
n_simple <- 50
p_simple <- 5
X_simple <- matrix(rnorm(n_simple * p_simple), nrow = n_simple)
true_beta_simple <- c(2, -1, 0, 0, 0) # Только первые 2 переменные важны
y_simple <- X_simple %*% true_beta_simple + rnorm(n_simple, 0, 0.1)

# OLS регрессия
ols_model <- lm(y_simple ~ X_simple)
ols_coefs <- coef(ols_model)[-1] # Исключаем intercept

cat("Истинные коэффициенты:", true_beta_simple, "\n")

## Истинные коэффициенты: 2 -1 0 0 0
cat("OLS коэффициенты:", round(ols_coefs, 3), "\n")

## OLS коэффициенты: 2.001 -1.01 -0.019 0.006 -0.008

```

```

# Демонстрация эффекта регуляризации
lambda <- 0.1

# Ridge-подобное сжатие (упрощенная версия)
ridge_coefs <- ols_coefs / (1 + lambda)
cat("Ridge-подобные коэффициенты ( $\lambda$  =", lambda, "):", round(ridge_coefs, 3), "\n")

## Ridge-подобные коэффициенты ( $\lambda = 0.1$ ): 1.819 -0.918 -0.018 0.006 -0.007

# Lasso-подобное сжатие (soft thresholding)
soft_threshold <- function(x, lambda) {
  sign(x) * pmax(abs(x) - lambda, 0)
}
lasso_coefs <- soft_threshold(ols_coefs, lambda)
cat("Lasso-подобные коэффициенты ( $\lambda$  =", lambda, "):", round(lasso_coefs, 3), "\n")

## Lasso-подобные коэффициенты ( $\lambda = 0.1$ ): 1.901 -0.91 0 0 0

```

## 6.6. Часть (e): Интерпретация результатов

### 6.6.1. Ключевые различия:

1. Отбор переменных:
  - **Lasso**: Может обнулить неважные переменные
  - **Ridge**: Сохраняет все переменные, но сжимает их
2. Интерпретируемость:
  - **Lasso**: Легче интерпретировать (меньше переменных)
  - **Ridge**: Сложнее интерпретировать (все переменные остаются)
3. Вычислительная сложность:
  - **Lasso**: Негладкая оптимизация (сложнее)
  - **Ridge**: Гладкая оптимизация (проще)
4. Применение:
  - **Lasso**: Когда нужен отбор признаков
  - **Ridge**: Когда есть мультиколлинеарность

### 6.6.2. Выбор параметра $\lambda$ :

- **Малый  $\lambda$** : Модель близка к OLS, возможен переобучение
- **Большой  $\lambda$** : Сильная регуляризация, возможен недообучение
- **Оптимальный  $\lambda$** : Находится через кросс-валидацию

## 7. Задача 6: Оптимальная граница решения для классификации

### 7.1. Объяснение простыми словами

Представьте, что вы врач и должны по результатам анализа крови определить, болен ли пациент. У вас есть два типа пациентов: здоровые (группа 1) и больные (группа 2). Нужно найти оптимальную границу для принятия решения.

### 7.2. Часть (а): Определение оптимальной границы решения

#### 7.2.1. Математическая формулировка

**Генерация данных:** -  $G \sim \text{Multinomial}((0.5, 0.5))$  - равновероятные группы -  $x|G = 1 \sim N(0, 1)$  - группа 1 -  $x|G = 2 \sim N(\mu, \sigma^2)$  - группа 2

**Оптимальная граница:**  $\Pr(G = 1|x) = \Pr(G = 2|x)$

```
# Функция для вычисления оптимальной границы
optimal_boundary <- function(mu, sigma_sq) {
  # Логарифм отношения вероятностей
  g_x <- function(x) {
    # Плотности
    f1 <- dnorm(x, 0, 1)
    f2 <- dnorm(x, mu, sqrt(sigma_sq))

    # Логарифм отношения
    log(f1 / f2)
  }

  # Находим корни  $g(x) = 0$ 
  # Это квадратное уравнение:  $x^2 - 2\mu x + \mu^2 - \sigma^2 \log(\sigma^2) = 0$ 

  a <- 1 - 1/sigma_sq
  b <- -2 * mu / sigma_sq
  c_coef <- mu^2 / sigma_sq - log(sigma_sq)

  if (abs(a) < 1e-10) {
    # Линейное уравнение
    boundary <- -c_coef / b
  } else {
    # Квадратное уравнение
    discriminant <- b^2 - 4 * a * c_coef
    if (discriminant >= 0) {
      boundary1 <- (-b + sqrt(discriminant)) / (2 * a)
      boundary2 <- (-b - sqrt(discriminant)) / (2 * a)
      boundary <- c(boundary1, boundary2)
    } else {
      boundary <- NA
    }
  }
}

return(boundary)
}

# Тестируем функцию
mu1 <- 0
sigma_sq1 <- 2
boundary1 <- optimal_boundary(mu1, sigma_sq1)

mu2 <- 1
sigma_sq2 <- 1
boundary2 <- optimal_boundary(mu2, sigma_sq2)

cat("Случай 1: mu =", mu1, ", sigma^2 =", sigma_sq1, "\n")

## Случай 1: mu = 0 , sigma^2 = 2
cat("Граница решения:", boundary1, "\n")

## Граница решения: 1.17741 -1.17741
```

```

cat("\nСлучай 2: mu =", mu2, ", sigma^2 =", sigma_sq2, "\n")
##
## Случай 2: mu = 1 , sigma^2 = 1
cat("Граница решения:", boundary2, "\n")
##
## Граница решения: 0.5

```

### 7.3. Часть (b): Ожидаемая ошибка классификации

```

# Функция для вычисления ожидаемой ошибки классификации
bayes_error <- function(mu, sigma_sq) {
  # Оптимальная граница
  boundary <- optimal_boundary(mu, sigma_sq)

  if (length(boundary) == 1 && !is.na(boundary)) {
    # Одна граница
    #  $P(\text{ошибка}) = P(G=1) * P(\text{классифицировать как } G=2|G=1) + P(G=2) * P(\text{классифицировать как } G=1|G=2)$ 
    #  $P(G=1) = P(G=2) = 0.5$ 

    #  $P(\text{классифицировать как } G=2|G=1) = P(x > \text{boundary} | G=1)$ 
    error1 <- 1 - pnorm(boundary, 0, 1)

    #  $P(\text{классифицировать как } G=1|G=2) = P(x < \text{boundary} | G=2)$ 
    error2 <- pnorm(boundary, mu, sqrt(sigma_sq))

    total_error <- 0.5 * error1 + 0.5 * error2
  } else if (length(boundary) == 2) {
    # Две границы
    boundary1 <- boundary[1]
    boundary2 <- boundary[2]

    # Определяем, какая граница больше
    if (boundary1 > boundary2) {
      b1 <- boundary1
      b2 <- boundary2
    } else {
      b1 <- boundary2
      b2 <- boundary1
    }

    # Ошибка классификации
    error1 <- 1 - pnorm(b1, 0, 1) + pnorm(b2, 0, 1)
    error2 <- pnorm(b1, mu, sqrt(sigma_sq)) - pnorm(b2, mu, sqrt(sigma_sq))

    total_error <- 0.5 * error1 + 0.5 * error2
  } else {
    total_error <- NA
  }

  return(total_error)
}

```

```

# Вычисляем ошибки для обоих случаев
error1 <- bayes_error(mu1, sigma_sq1)
error2 <- bayes_error(mu2, sigma_sq2)

cat("Ожидаемая ошибка классификации (Bayes rate):\n")

## Ожидаемая ошибка классификации (Bayes rate):
cat("Случай 1: mu =", mu1, ", sigma^2 =", sigma_sq1, "→ Ошибка =", error1, "\n")

## Случай 1: mu = 0 , sigma^2 = 2 → Ошибка = 0.416968
cat("Случай 2: mu =", mu2, ", sigma^2 =", sigma_sq2, "→ Ошибка =", error2, "\n")

## Случай 2: mu = 1 , sigma^2 = 1 → Ошибка = 0.3085375

```

## 7.4. Часть (c): Визуализация

```

# Визуализация плотностей и границ
par(mfrow = c(1, 2))

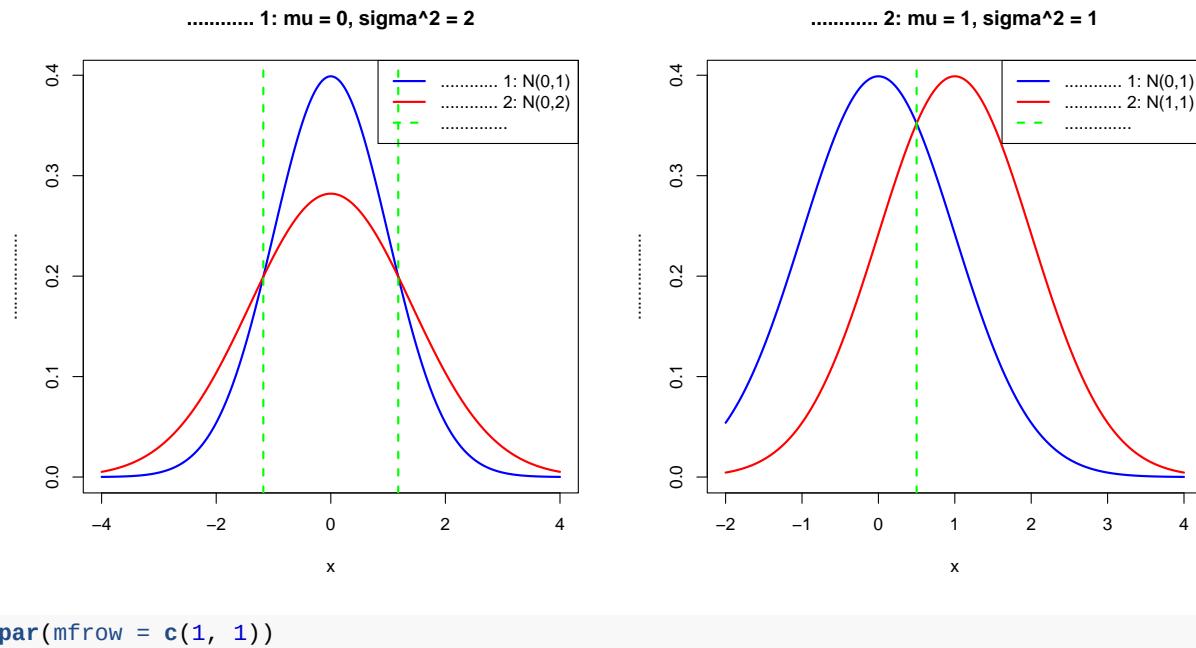
# Случай 1: mu = 0, sigma^2 = 2
x_seq <- seq(-4, 4, length.out = 1000)
f1_1 <- dnorm(x_seq, 0, 1)
f2_1 <- dnorm(x_seq, mu1, sqrt(sigma_sq1))

plot(x_seq, f1_1, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
      main = "Случай 1: mu = 0, sigma^2 = 2",
      xlab = "x", ylab = "Плотность")
lines(x_seq, f2_1, col = "red", lwd = 2)
abline(v = boundary1, col = "green", lwd = 2, lty = 2)
legend("topright", legend = c("Группа 1: N(0,1)", "Группа 2: N(0,2)", "Граница"),
       col = c("blue", "red", "green"), lty = c(1, 1, 2), lwd = 2)

# Случай 2: mu = 1, sigma^2 = 1
x_seq2 <- seq(-2, 4, length.out = 1000)
f1_2 <- dnorm(x_seq2, 0, 1)
f2_2 <- dnorm(x_seq2, mu2, sqrt(sigma_sq2))

plot(x_seq2, f1_2, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
      main = "Случай 2: mu = 1, sigma^2 = 1",
      xlab = "x", ylab = "Плотность")
lines(x_seq2, f2_2, col = "red", lwd = 2)
abline(v = boundary2, col = "green", lwd = 2, lty = 2)
legend("topright", legend = c("Группа 1: N(0,1)", "Группа 2: N(1,1)", "Граница"),
       col = c("blue", "red", "green"), lty = c(1, 1, 2), lwd = 2)

```



#### 7.4.1. Интерпретация результатов

**Случай 1 ( $\mu = 0, \sigma^2 = 2$ ):** - Группы имеют одинаковые средние, но разную дисперсию - Граница решения находится в точке, где плотности пересекаются - Ошибка классификации относительно высокая из-за перекрытия распределений

**Случай 2 ( $\mu = 1, \sigma^2 = 1$ ):** - Группы имеют разные средние, но одинаковую дисперсию - Граница решения находится посередине между средними - Ошибка классификации ниже, так как распределения меньше перекрываются

## 8. Заключение

Мы рассмотрели шесть важных задач по регуляризованным обобщенным линейным моделям:

1. **Ridge регрессия** - байесовская интерпретация и связь с центрированием данных
2. **Ортогональные матрицы** - упрощенные формулы для Lasso, Ridge и subset selection
3. **Пуассоновская регрессия** - доказательство равенства fitted means и выборочных средних
4. **Биномиальное распределение** - представление как экспоненциальное семейство
5. **Практическое сравнение** - Lasso vs Ridge на искусственных данных
6. **Оптимальная классификация** - байесовская граница решения и ожидаемая ошибка

Каждая задача демонстрирует важные концепции машинного обучения и статистики с практическими примерами и визуализациями.