Exercise 3 IML

Eyal Perets 209541903

חלק תיאורטי

1. Hard SVM:

$$\underset{(w,b)}{\arg\min} \|w\|^2 \quad s.t \quad \forall i \; y_i(\langle w, x_i\rangle + b) \geq 1$$

דרך: למצוא מטריצות ← Q, A ווקטורים a, d כך ש

ניתן לנסח ← את הבעיה בהגדרה הזו:

$$\arg\min \frac{1}{2} v^T Q v + a^T v \quad s.t \quad Av \leq d$$

תחילה: נכתיב ← את האילוצים במונחי $Av \leq d$

$$y_i(\langle w, x_i\rangle + b) \geq 1 \iff -y_i(\langle w, x_i\rangle + b) \leq -1 \iff$$

$$\iff -y_i(x_i^T w + b) \leq -1 \iff -y_i x_i^T w - y_i b \leq -1$$

נגדיר $A = \begin{bmatrix} y_1 x_1^T & \cdots & y_1 x_1^T & \cdots & y_1 \\ & & & & \vdots \\ y_n x_n^T & \cdots & y_n x_n^T & \cdots & y_n \end{bmatrix}$. ו $v = \begin{bmatrix} w \\ b \end{bmatrix}$

ונקבל

$$-y_i x_i^T w - y_i b = A_i v \leq -1$$

עכשיו $\underset{(w,b)}{\arg\min} \|w\|^2$ נשים לב ש

$$\|w\|^2 = w^T I w$$

נגדיר את המטריצה Q כך:

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כאשר $I_{d \times d}$

ו $a = 0^T$ ונקבל

$$\arg\min w^T I w = \arg\min \begin{bmatrix} w \\ b \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} w \\ b \end{bmatrix} + 0^T \begin{bmatrix} w \\ b \end{bmatrix} = \arg\min v^T Q v + a^T v$$

$$= \arg\min \frac{1}{2} v^T Q v + a^T v$$

ולכן הבעיה היא ניתנת לתיאור כבעיית תכנון ריבועי.

2. Soft SVM:

$$\arg\min \frac{\lambda}{2}\|w\|^2+\frac{1}{m}\sum_i \xi_i \quad s.t\ \forall_i\ y_i\langle w,x_i\rangle\ge 1-\xi_i \wedge \xi_i\ge 0$$

צריך להראות שבעיית Soft SVM זהה לבעיה הבאה:

$$\arg\min \frac{\lambda}{2}\|w\|^2+\frac{1}{m}\sum_i \ell^{hinge}(y_i\langle w,x_i\rangle)$$

שים לב ש ℓ^{hinge} מקיים לנו את התנאים

$y_i\langle w,x_i\rangle\ge 1-\xi_i \wedge \xi_i\ge 0$:

ואכן עבור $w\in\mathbb{R}^d$, $\forall_i$ אם $y_i\langle w,x_i\rangle\ge 1$,

אזי נשאר בבעיה עם הערך y_i ו ξ_i, שהיא ממילא אותו ערך לשניהם

0.

אם $y_i\langle w,x_i\rangle<1$ אזי הערך המינימלי

בשניהם יהיה $1-y_i\langle w,x_i\rangle$, ו 2 המקרים הללו

מתארים בדיוק את $\ell^{hinge}(y_i\langle w,x_i\rangle)$.

ולכן $\forall_i\ \xi_i=\ell^{hinge}(y_i\langle w,x_i\rangle)$ המשוואות מתקיימות

3. א. אנו רוצים למצוא את מקסימום ה-likelihood של ה-estimators.

נשים לב כי ה-likelihood הינו:

$$L(\Theta|X,y) = f_{X,y|\Theta}\left(\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{m}\right) = \prod_{i=1}^{m} f_{X,y|\Theta}(x_i,y_i)$$

לקחנו מהספר

$$= \prod_{i=1}^{m} \mathcal{N}(x_i|\mu_{y_i},\sigma^2_{y_i}) \cdot Mult(y_i,\pi)$$

ידוע ש-log היא פונקציה מונוטונית עולה, נקבל כי המקסימום של ה-likelihood, הוא גם המקסימום של ה-log likelihood ולכן נעבור ל-log-likelihood:

$$\ell(\Theta|X,y) = \log\left(\prod_{i=1}^{m} \mathcal{N}(x_i|\mu_{y_i},\sigma^2_{y_i}) \cdot Mult(y_i,\pi)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \log\left(\mathcal{N}(x_i|\mu_{y_i},\sigma^2_{y_i})\right) + \log\left(Mult(y_i,\pi)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \log\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)|\sigma^2|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i-\mu_i)^T(\sigma^2)^{-1}(x_i-\mu_i)\right)\right) + \log(\pi_{y_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \log(\pi_{y_i}) - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\sigma^2| - \frac{1}{2}(x_i-\mu_i)^T(\sigma^2)^{-1}(x_i-\mu_i)$$

$$= \sum_{k}\left[n_k \log(\pi_k) - \frac{1}{2}\sum_{i|y_i=k}(x_i-\mu_i)^T(\sigma^2)^{-1}(x_i-\mu_i)\right] - \frac{m}{2}\log(2\pi) - \frac{m}{2}\log|\sigma^2|$$

כאשר $n_k = \sum_i \mathbb{1}_{y_i=k}$, כעת כדי למצוא את המקסימום, נגזור לפי כל הפרמטרים: $\{\pi_k\},\{\mu_k\},\{\sigma^2\}$ ונשווה ל-0.

נשים לב ש $\pi \in [0,1]^k$ ו $\sum_k \pi_k = 1$

נשתמש בשיטת כופלי לגראנז', כלומר למצוא את המקסימום תחת ההנחה: $\sum_k \pi_k = 1$.

$$L = l(\theta | X, y) - \lambda g(\pi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_k} = \frac{\partial}{\partial \pi_k} l(\theta|X,y) - \lambda \frac{\partial}{\partial \pi_k} g(\pi) = \frac{n_k}{\pi_k} - \lambda = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\pi_k = \frac{n_k}{\lambda}}$$

כעת נמצא את λ, ונציב את π_k במשוואת האילוץ:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_k}{\lambda} = 1 \iff m = \lambda$$

ולכן ה MLE הינו $\pi_k^{MLE} = \frac{n_k}{m}$

$$\mu_k^{MLE} = \frac{1}{n_k} \sum_i 1_{y_i = k} X_i \qquad \sigma^{2\,MLE} = \frac{1}{m} \sum_i (X_i - \mu_{y_i}^{MLE})(X_i - \mu_{y_i}^{MLE})^T$$

ג. נשים לב כי הביטוי כעת הינו רק בפונקציה של התפלגות נורמלית, כאשר כעת ה likelihood יהיה כלקמן:

$$\prod_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{m} N(X_i | \mu_{y_i}, \sigma^2_{y_i}) \cdot Mult(y_i, \pi)$$

ולכן ה log likelihood יהיה:

$$= \sum_k \left[n_k \log(\pi_k) - \frac{1}{2}\sum_{i|y_i=k} (x_i-\mu_i)^T (\sigma^2)^{-1} (x_i-\mu_i) \right] - \frac{md}{2}\log(2\pi) - \frac{m}{2}\log|\sigma^2|$$

(הפיתוח היה מאוד ארוך — Matlab)

בעצם נשים לב כי לכל $j \in [d]$ הנגזרת

ונקבל בסוף: המקסימום עבור ה-j, ולכן הפרמטרים

$$\pi_k^{MLE} = \frac{n_k}{m} \qquad \mu_{kj}^{MLE} = \frac{1}{n_k}\sum_{i|y_i=k} x_{ij} \qquad (\sigma^2)_{kj}^{MLE} = \frac{1}{n_k}\sum_{i|y_i=k} (x_{ij}-\mu_{kj}^{MLE})^2$$

4. א.

באותה הדרך בדיוק, כמו בסעיף הקודם, ה-likelihood היא:

$$\prod_{i=1}^{m} Pois(x_i | \mu_{y_i}, \lambda_{y_i}) \cdot Mult(y_i, \pi)$$

לכן ה-log-likelihood היא: (הסימון לשימוש זה מופיע בג.ג.)

$$\ell(\Theta|X,y) = \log\left(\prod_{i=1}^{m} Pois(x_i | \mu_{y_i}, \lambda_{y_i}) \cdot Mult(y_i, \pi)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \log(\pi_{y_i}) + \log\left(\frac{\lambda_{y_i}^{x_i} \cdot e^{-\lambda_{y_i}}}{x_i!}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \log(\pi_{y_i}) + x_i \log(\lambda_{y_i}) - \lambda_{y_i} - \log(x_i!)$$

כעת נגזור לפי λ ונשווה ל-0:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda_k} \cdot \sum_{i|y_i=k} x_i - n_k = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_k^{MLE} = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{m} 1_{y_i=k} x_i$$

π_k יהיה Γ π_k בשאלה 3.ג.1 (הגזירה זהה)

ולכן $\pi_k^{MLE} = \frac{n_k}{m}$

ט.

כמו בשאלה 3.ג עם פעם הן בפקד יותר

בפונקציית המתבקשת, ולכן likelihood יהיה:

$$\prod_{j=1}^{d} \prod_{i=1}^{m} Pois(X_i | \mu_{y_i}, \lambda_{y_i}) \cdot Mult(y_i; \pi)$$

ובאותו עבור C הבין, - log-likelihood יהיה:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{d} \log(\pi_k) + X_{ij}\log(\lambda_{kj}) - \lambda_{kj} - \log(X_{ij}!)$$

(הפיתוח היה במטלב Matlab)

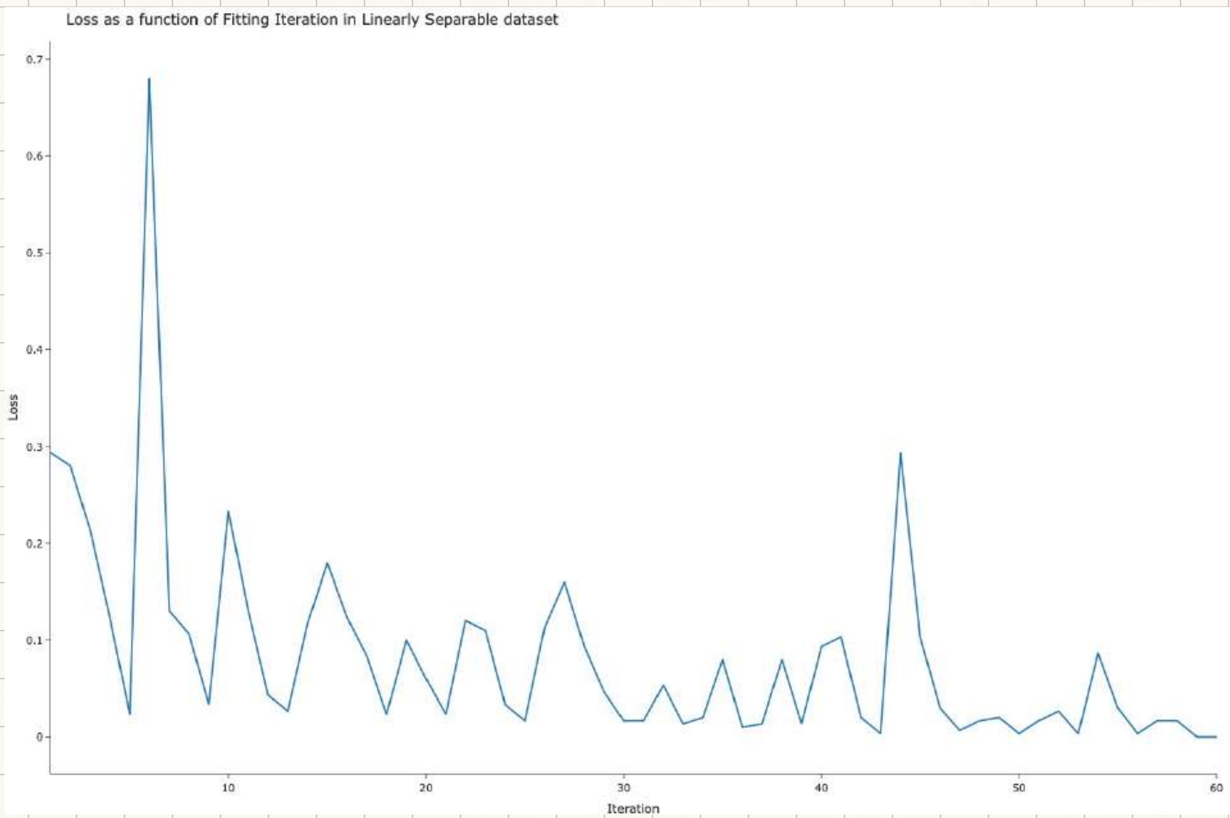
וזו מקסימום נקבל עבור

יש השלמה ב j. כעת מקבל $\leftarrow$ $\lambda_{kj}^{MLE} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{m} 1_{y_i=k} X_{ij}$

$\pi_k = \frac{n_k}{m}$ - כמו

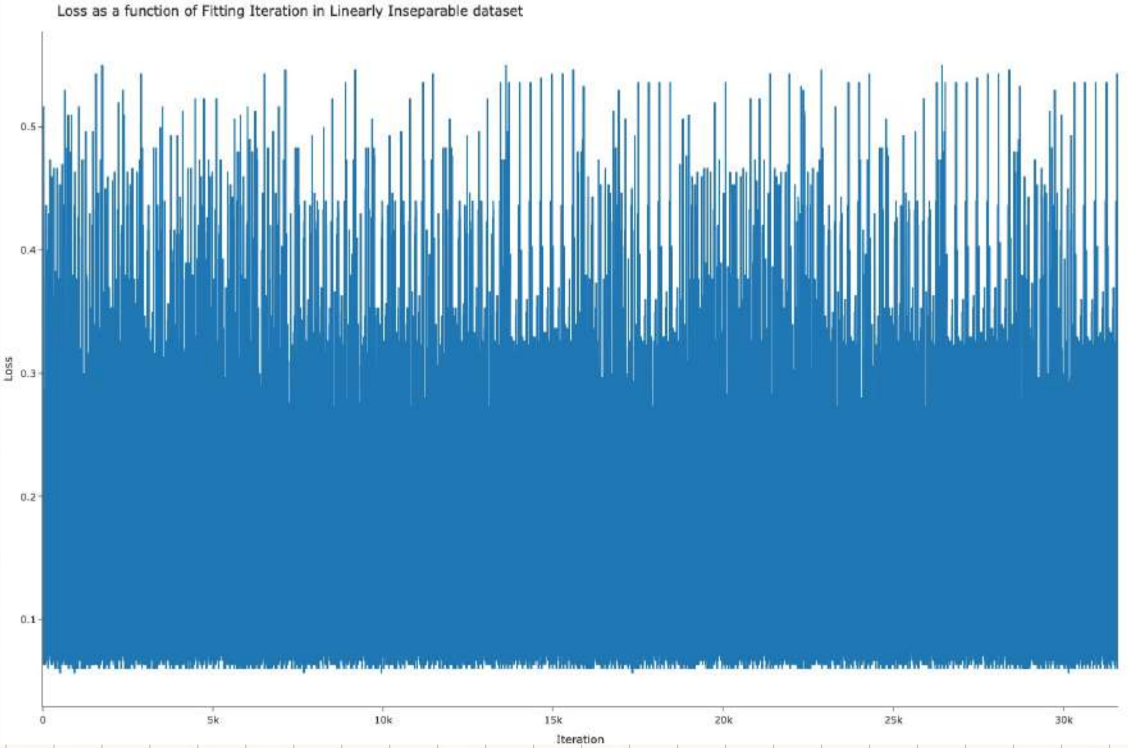
דיון ומסקנ'

ס1



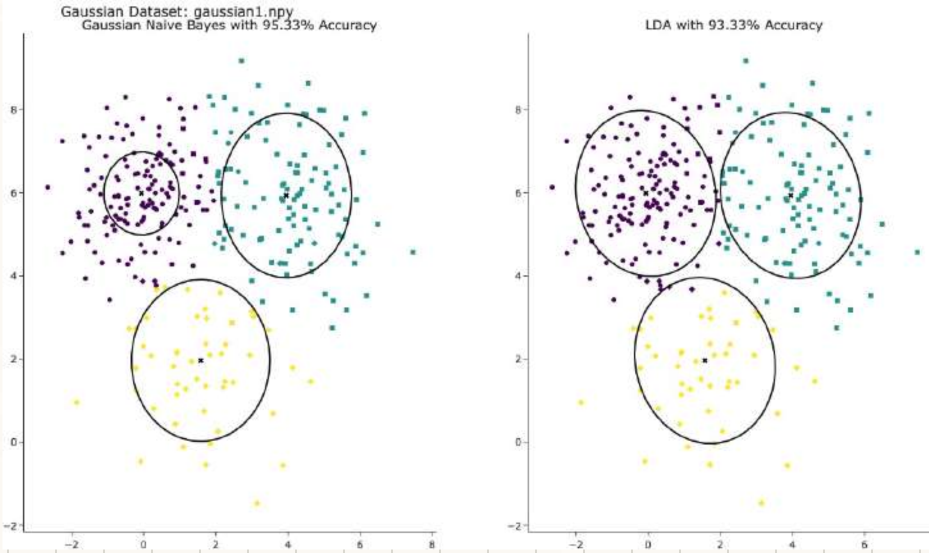
ניתן ללמוד מגרף זה שככל שמספר האיטרציות של הPerceptron מתבצע, ה MSE יורד, כלומר האלגוריתם מצליח לבצע קלסיפיקציה טובה עד כדי שגיאה אפסית. ניתן לראות שבחלק מהאיטרציות ישנה "קפיצה" ב MSE, שככל הנראה נובעת מהוספה בגלל מידע, שמשתנה שבו תיוגן לצד השני.

2.



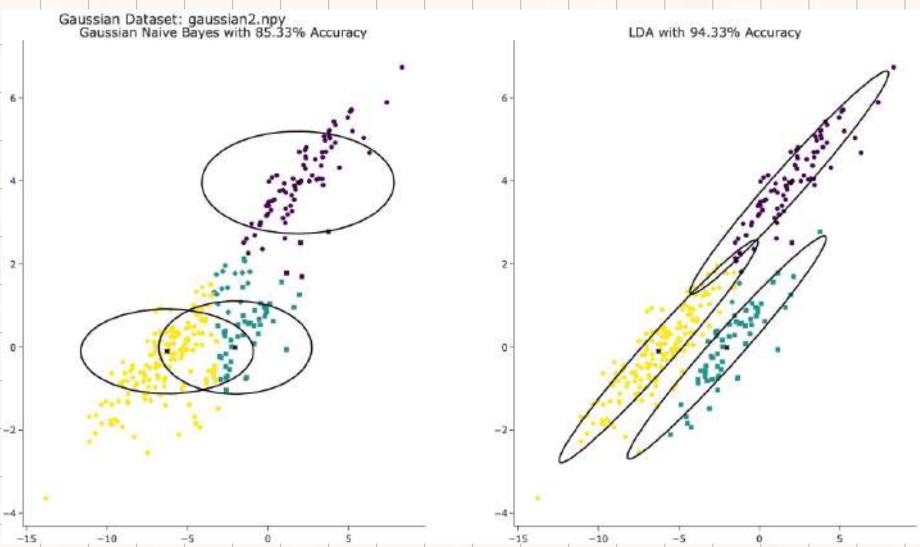
בגרף הזה לעומת הגרף הקודם ה-perceptron לא מצליח להגיע לשגיאה אפסית, ללא קשר במספר האיטרציות.
זה נובע מכך שאין פתרון ריאליזבילי עבור דגימות שאינן מופרדות לינארית, ולכן ללא קשר בכמות האיטרציות, ה-perceptron לעולם לא ימצא את הנקודה הנכונה, ולכן ה-MSE גדולה מאפס. בהינתן y, X, b, w – לא קיים (w,b), כך ש

$$\forall i: \; y_i \langle x_i, w \rangle \ge 0.$$



.3

ניתן ללמוד מהגרפים הנ"ל כי השונות המשותפת של הדגימות היא אפסית, ועל כן אין הבדל בין ה LDA וה Gaussian Naive Bayes המוצגים.



.4

ההבדל בין 2 המקרים הנ"ל שכאן מדובר על שונות משותפת שאינה אפסית ולכן ההנחה של במשתנים הגאוסיאנים שהשונות המשותפת אפסית היא אינה נכונה, ועל כן ה LDA משיג תוצאות טובות יותר.