

SPRAWOZDANIE

Algorytmy i Struktury Danych

Algorytmy z powracaniem

Bartłomiej Kowalewski, 145204, I5.2

Jakub Koza, 145436, I5.2

Pomiary wykonane zostały na sprzęcie:

Laptop Lenovo G710

Windows 10 Home 64-bit

Procesor: Intel Core i7-4702MQ (2.2-3.2 GHz)

Pamięć RAM: 16 GB

Dysk twardy: 1TB SSHD

Karta graficzna: Intel HD Graphics 4600

Algorytmy zaimplementowane zostały w języku Python 3.7:

W całości sprawozdania czas podawany jest w mikrosekundach.

Na wykresach pominęliśmy zaznaczanie odchylenia standardowego, zamieściliśmy natomiast tabele zawierające dokładne zestawienie pomiarów.

Pomiary czasu wykonane zostały za pomocą biblioteki datetime.

1. Zależności czasu obliczeń od liczby wierzchołków dla algorytmu wyszukującego cykl Hamiltona i Eulera dla grafu skierowanego (lista następników) oraz grafu nieskierowanego (macierz sąsiedztwa) przedstawiają następujące tabele:

LISTA NASTĘPNIKÓW (50%) HAMILTON							
	1 pomiar	2 pomiar	3 pomiar	4 pomiar	5 pomiar	średnia	odchylenie
20	0	0	0	0	998	200	399
40	3620	2024	2001	18021	972	5328	6403
50	3019	1998	4028	18983	32778	12161	12038
60	15983	4998	7995	2978	3002	6991	4855
70	7998	7972	5004	6996	14988	8592	3378
80	7997	8026	11020	10993	15966	10800	2909
90	12948	12962	13962	28983	16960	17163	6090
100	13969	17990	15020	32484	14016	18696	7048
110	19958	41943	21979	27985	22992	26971	7939
120	25963	25411	26987	25174	24521	25611	829

MACIERZ SĄSIEDZTWA (50%) HAMILTON							
	1 pomiar	2 pomiar	3 pomiar	4 pomiar	5 pomiar	średnia	odchylenie
20	993	1002	1994	60967	3059	13603	23694
40	5996	5110	11995	5030	2999	6226	3047
50	8763	6006	19988	29982	62963	25540	20562
60	27550	31065	12058	18017	8995	19537	8561
70	13992	15954	12995	13989	14001	14186	965
80	12995	52066	56967	30996	25992	35803	16444
90	94955	13987	14990	28982	31977	36978	29874
100	36007	53968	29980	25997	77723	44735	19071
110	36008	39979	44002	26018	215107	72223	71692
120	48755	40258	51078	30047	26974	39422	9659

LISTA NASTĘPNIKÓW (50%) EULER							
	1 pomiar	2 pomiar	3 pomiar	4 pomiar	5 pomiar	średnia	odchylenie
20	10963	11032	7025	6995	7028	8609	1951
40	112941	93796	89995	79986	79945	91333	12110
50	217910	223839	223090	209883	219842	218913	5002
60	530728	422735	455958	405768	401773	443392	47665
70	865478	863611	781480	739172	774563	804861	50805
80	1455154	1447590	1259283	1192660	1192293	1309396	118486
90	2218200	2078206	1897945	1795954	1771989	1952459	171152
100	3636591	2771244	2842545	2867502	2794744	2982525	328794
110	4271767	4088956	4108189	4353573	3998617	4164220	129344
120	5488751	4522145	4521119	6265120	5201398	5199707	653946

MACIERZ SĄSIEDZTWA (50%) EULER							
	1 pomiar	2 pomiar	3 pomiar	4 pomiar	5 pomiar	średnia	odchylenie
20	19990	15990	19989	21988	17960	19183	2043
40	262850	286837	293800	314818	294827	290626	16726
50	725582	704661	729617	769590	709604	727811	22896
60	1927932	1778964	1825839	1719021	1708052	1791962	80207
70	5333964	5282962	5176137	5218029	5168383	5235895	63688
80	12400943	12498677	12363703	12203978	12527099	12398880	114567
90	18225631	19873330	18022145	21055450	19832104	19401732	1133921
100	25685104	23589941	26587002	24521779	28730154	25822796	1773921
110	35412202	36874120	37512787	38954128	34020784	36554804	1703129
120	40215547	41514783	39010411	38746120	43652179	40627808	1803343

2. Zależność czasu działania algorytmu wyszukiującego cykl Hamiltona/Eulera od liczby elementów w grafie przy stałym nasyceniu wierzchołków (50%). Porównanie algorytmów

- Dla grafu skierowanego

LISTA NASTĘPNIKÓW		
	HAMILTON	EULER
20	200	8609
40	5328	91333
50	12161	218913
60	6991	443392
70	8592	804861
80	10800	1309396
90	17163	1952459
100	18696	2982525
110	26971	4164220
120	25611	5199707



OBSERWACJE: Dla struktury reprezentującej graf skierowany (listy następników) czas wykonywania algorytmu poszukiwania cyklu Hamiltona jest znacznie krótszy od poszukiwania cyklu Eulera i wraz ze wzrostem liczby wierzchołków ta różnica zwiększa się.

- Dla grafu nieskierowanego

MACIERZ SĄSIEDZTWA		
	HAMILTON	EULER
20	13603	19183
40	6226	290626
50	25540	727811
60	19537	1791962
70	14186	5235895
80	35803	12398880
90	36978	19401732
100	44735	25822796
110	72223	36554804
120	39422	40627808



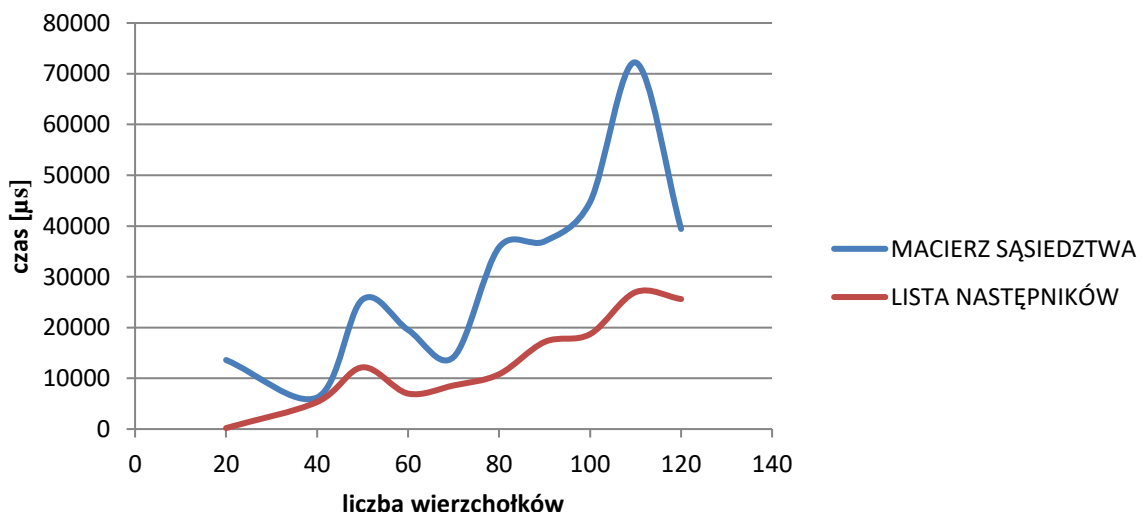
OBSERWACJE: Dla struktury reprezentującej graf nieskierowany (macierzy sąsiedztwa) czas wykonywania algorytmu poszukiwania cyklu Hamiltona jest znacznie krótszy od poszukiwania cyklu Eulera i wraz ze wzrostem liczby wierzchołków ta różnica zwiększa się.

3. Zależność czasu działania algorytmu wyszukującego cykl Hamiltona/Eulera od liczby elementów w grafie przy stałym nasyceniu wierzchołków (50%). Porównanie dla macierzy sąsiedztwa i listy następników

- Poszukiwanie cyklu Hamiltona

HAMILTON		
	MACIERZ SĄSIEDZTWA	LISTA NASTĘPNIKÓW
20	13603	200
40	6226	5328
50	25540	12161
60	19537	6991
70	14186	8592
80	35803	10800
90	36978	17163
100	44735	18696
110	72223	26971
120	39422	25611

Zależność czasu wykonywania algorytmu wyszukującego cykl HAMILTONA od liczby wierzchołków w grafie

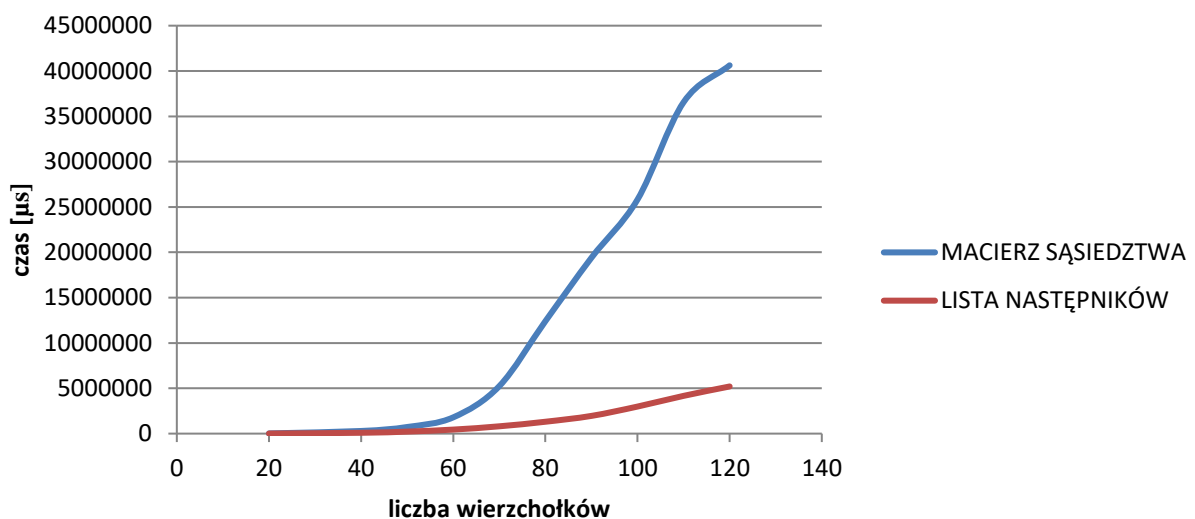


OBSERWACJE: Algorytm poszukiwania cyklu Hamiltona rośnie chaotycznie liniowo zarówno w przypadku struktury reprezentującej graf nieskierowany tj. macierzy sąsiedztwa, jak i listy następników (reprezentacja grafu skierowanego). Wraz ze wzrostem liczby wierzchołków różnica zwiększa się, jednak w bardzo wolnym tempie.

- **Poszukiwanie cyklu Eulera**

EULER		
	MACIERZ SĄSIEDZTWA	LISTA NASTĘPNIKÓW
20	19183	8609
40	290626	91333
50	727811	218913
60	1791962	443392
70	5235895	804861
80	12398880	1309396
90	19401732	1952459
100	25822796	2982525
110	36554804	4164220
120	40627808	5199707

Zależność czasu wykonywania algorytmu poszukującego cykl EULERA od liczby wierzchołków w grafie

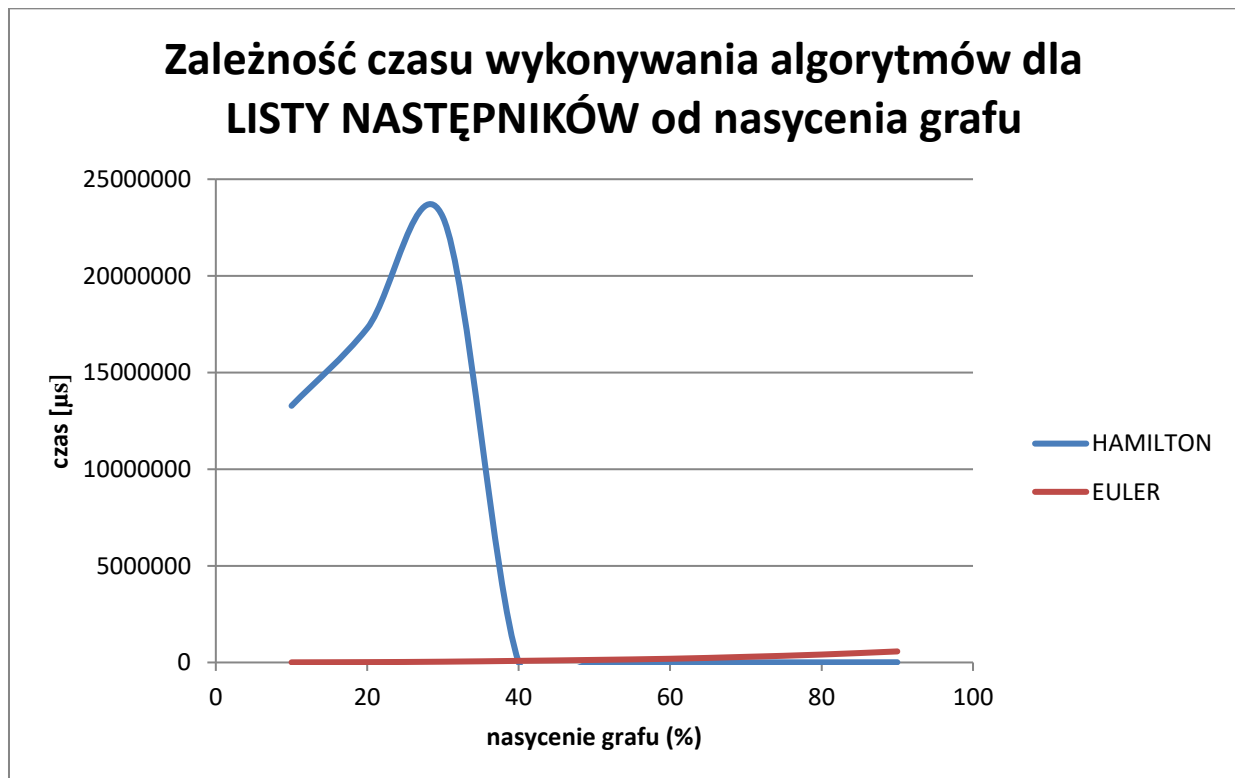


OBSERWACJE: Algorytm poszukiwania cyklu Eulera dla macierzy sąsiedztwa (grafu nieskierowanego) jest znacznie krótszy od poszukiwania tego cyklu w przypadku listy następników (graf skierowany). Różnica zwiększa się wraz ze wzrostem liczby wierzchołków.

4. Zależność czasu działania algorytmu wyszukującego cykl Hamiltona/Eulera od nasycenia grafu przy stałej liczbie wierzchołków (50). Porównanie algorytmów

- Dla grafu skierowanego

LISTA NASTĘPNIKÓW		
%	HAMILTON	EULER
10	13277311	6803
20	17293061	16789
30	23025176	39595
40	4785	81752
50	6782	132342
60	6595	190897
70	7797	290266
80	6584	409364
90	10207	571075

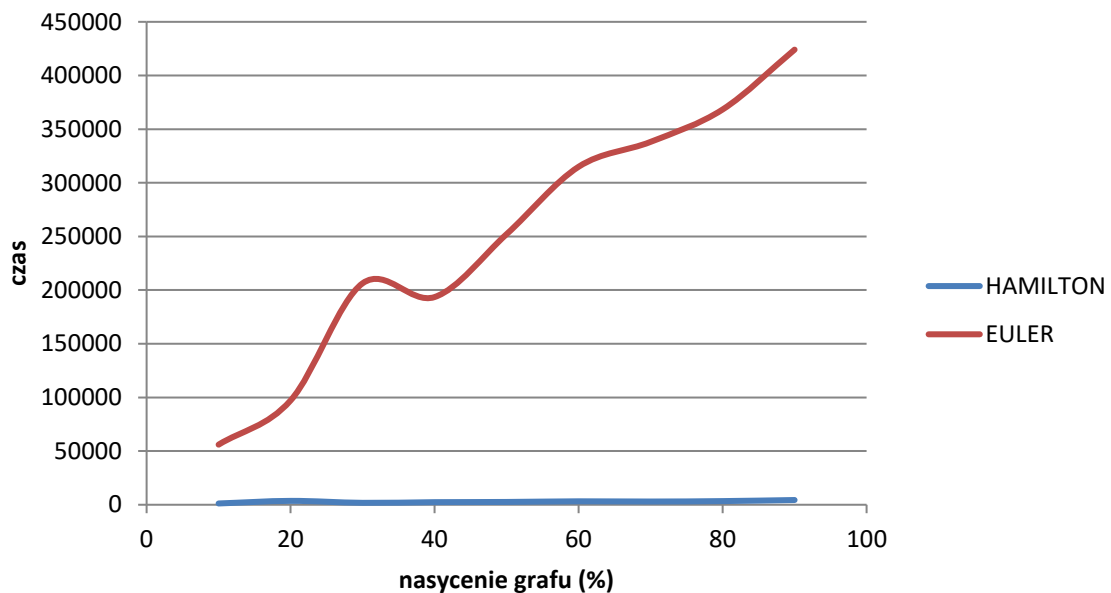


OBSERWACJE: Dla listy następników algorytm poszukiwania cyklu Hamiltona jest znacznie wolniejszy od poszukiwania cyklu Eulera pomiędzy 10% nasycenia a 50% nasycenia grafu. Biorąc pod uwagę nasycenie grafu pomiędzy 50% a 90% różnica pomiędzy czasem wykonywania obu algorytmów staje się niezauważalna.

- Dla grafu nieskierowanego

MACIERZ SĄSIEDZTWA		
%	HAMILTON	EULER
10	1199	56012
20	3598	97188
30	1798	206362
40	2399	193554
50	2598	252166
60	3200	314936
70	2998	338168
80	3399	368320
90	4395	424099

Zależność czasu wykonywania algorytmów dla MACIERZY SĄSIEDZTWA od nasycenia grafu

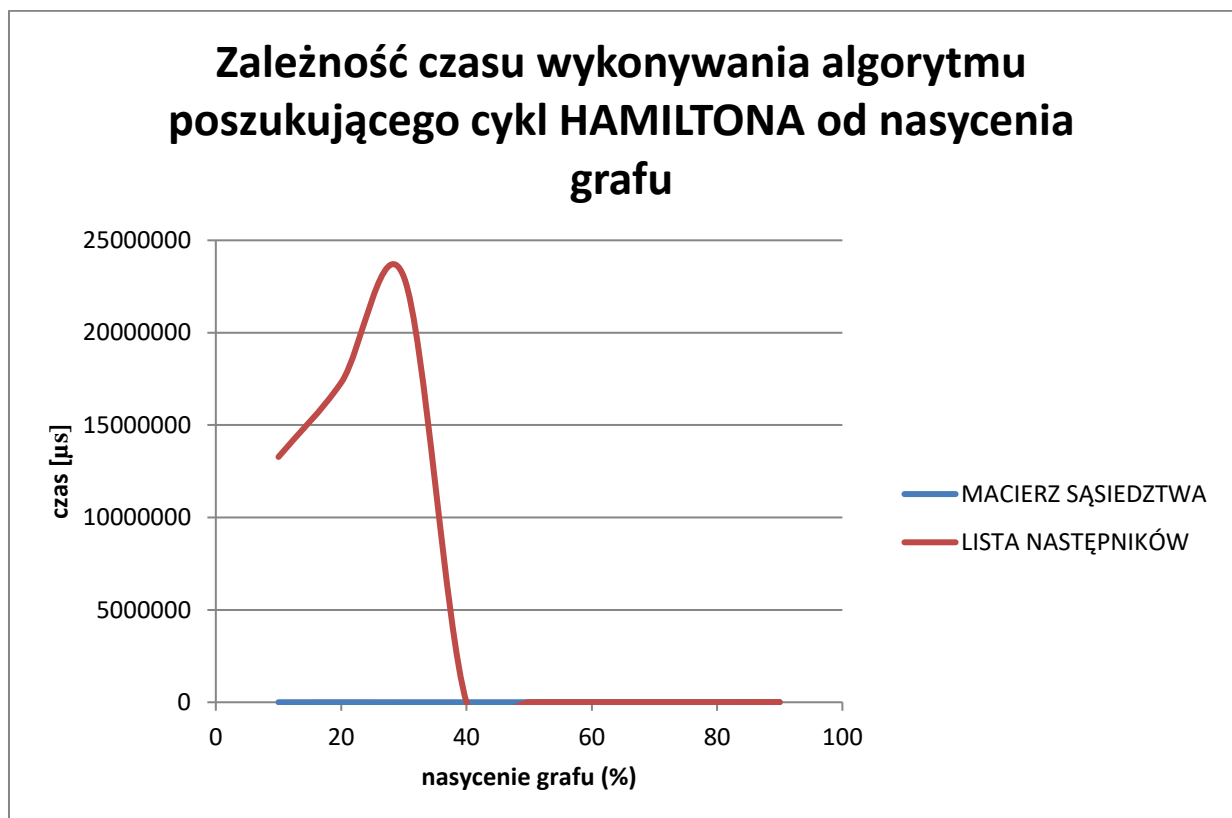


OBSERWACJE: Dla macierzy sąsiedztwa algorytm poszukiwania cyklu Hamiltona jest znacznie szybszy od poszukiwania cyklu Eulera.

5. Zależność czasu działania algorytmu wyszukiującego cykl Hamiltona/Eulera od nasycenia grafu przy stałej liczbie wierzchołków (50). Porównanie struktur

- Poszukiwanie cyklu Hamiltona

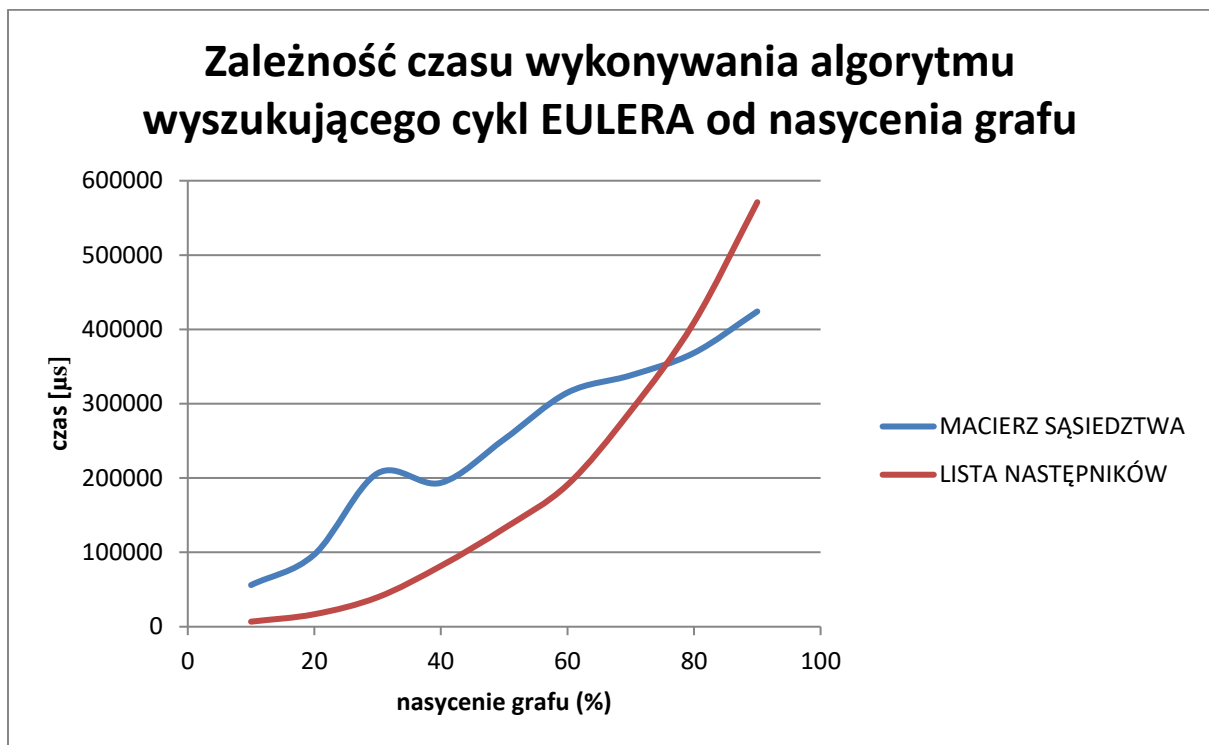
HAMILTON		
%	MACIERZ SĄSIEDZTWA	LISTA NASTĘPNIKÓW
10	1199	13277311
20	3598	17293061
30	1798	23025176
40	2399	4785
50	2598	6782
60	3200	6595
70	2998	7797
80	3399	6584
90	4395	10207



OBSERWACJE: Poszukiwanie cyklu Hamiltona w przypadku struktury reprezentującej graf nieskierowany (macierz sąsiedztwa) trwa zdecydowanie krócej w przypadku nasycenia grafu pomiędzy 10% a 50%. Pomędzy 50% a 90% różnica ta staje się niezauważalna.

- **Poszukiwanie cyklu Eulera**

EULER		
%	MACIERZ SĄSIEDZTWA	LISTA NASTĘPNIKÓW
10	56012	6803
20	97188	16789
30	206362	39595
40	193554	81752
50	252166	132342
60	314936	190897
70	338168	290266
80	368320	409364
90	424099	571075

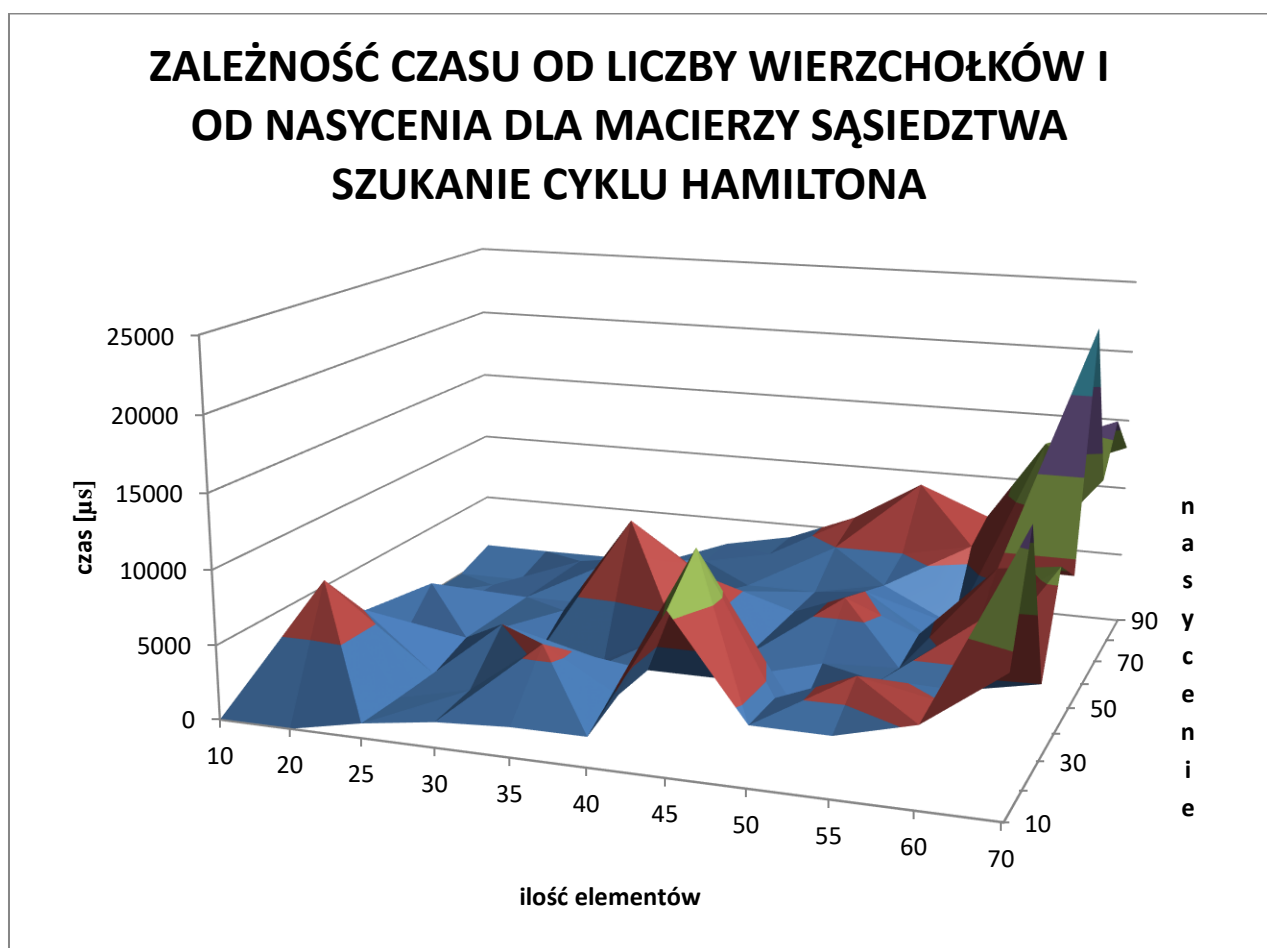


OBSERWACJE: Czas poszukiwania cyklu Eulera jest zbliżony na macierzy sąsiedztwa (graf nieskierowany) i liście następników (graf skierowany).

6. Zależność czasu działania algorytmu od liczby wierzchołków w grafie i od nasycenia dla poszukiwania cyklu w grafie nieskierowanym

- Poszukiwanie cyklu Hamiltona

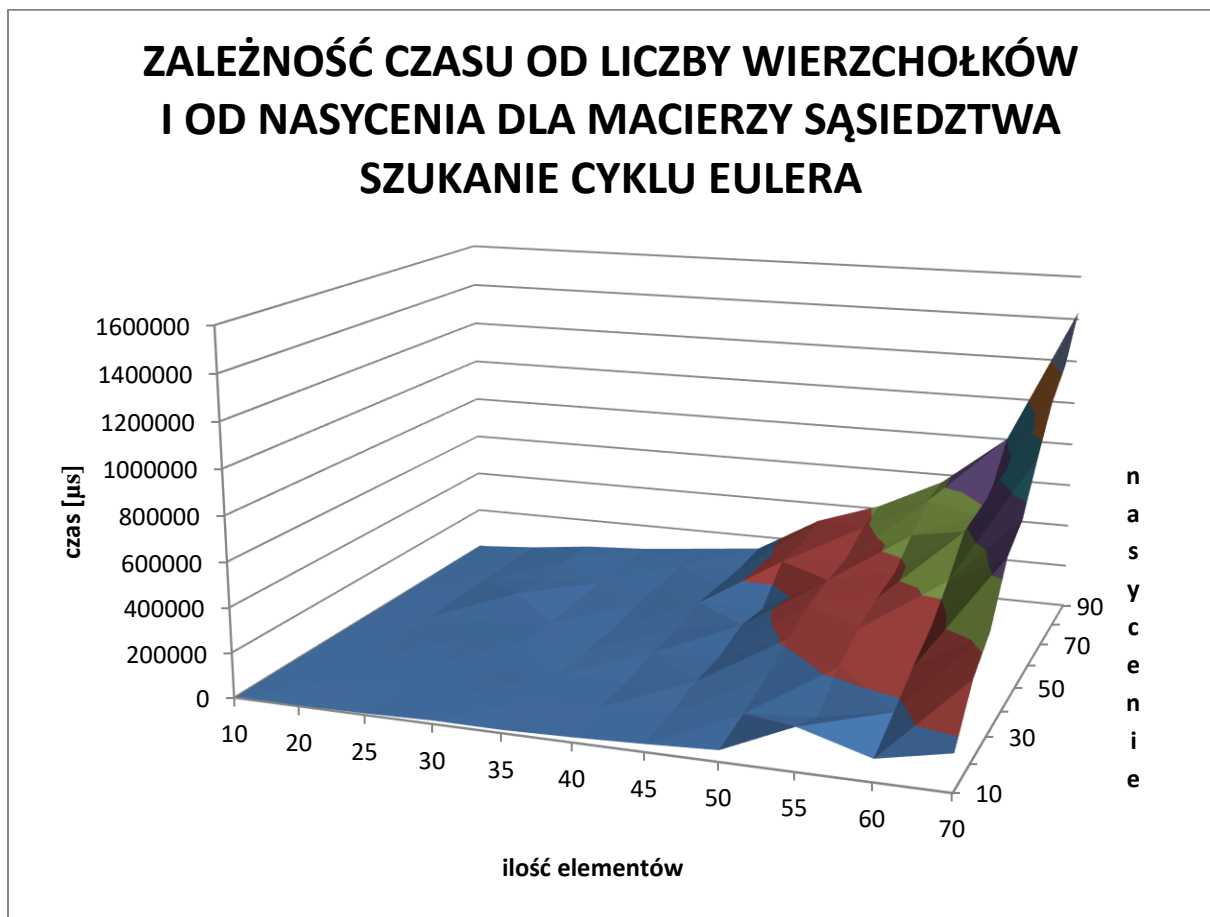
ZALEŻNOŚĆ CZASU OD LICZBY WIERZCHOŁKÓW I OD NASYCENIA DLA MACIERZY SĄSIEDZTWA SZUKANIE CYKLU HAMILTONA											
%	10	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70
10	0	0	989	1696	1996	2000	10503	3996	3966	5270	8992
20	1000	8429	998	2122	5771	2998	12994	3992	5997	5008	16290
30	997	4967	1008	5022	2004	2997	2999	1133	3999	3998	4996
40	1999	1021	1999	1000	1498	3998	3027	2997	3238	6958	10994
50	994	3963	1999	2997	9952	6596	2998	5994	3977	8999	8993
60	1000	998	2004	1996	2000	3998	2999	4997	1895	5997	24207
70	0	995	2001	3992	999	2998	2998	3998	1599	6998	12968
80	0	0	2001	2001	2995	4005	4996	4995	6029	13990	15990
90	1000	969	999	968	3000	4000	5999	9000	6989	10991	12999



OBSERWACJE: Czas poszukiwania cyklu Hamiltona na macierzy jest uzależniony od liczby wierzchołków. Wraz ze wzrostem wierzchołków rośnie czas wykonywania algorytmu.

- Poszukiwanie cyklu Eulera

ZALEŻNOŚĆ CZASU OD LICZBY WIERZCHOŁKÓW I OD NASYCENIA DLA MACIERZY SĄSIEDZTWA SZUKANIE CYKLU EULERA											
%	10	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70
10	0	3998	6999	14990	14020	21984	33979	48972	185231	95975	158877
20	999	9994	14994	24985	34061	41977	52971	90973	113904	174900	348793
30	1000	7993	16989	26984	42401	48979	87924	141928	222872	259852	444716
40	994	11987	31984	52968	56405	78401	94943	213872	293920	330817	669594
50	1000	14991	31985	53968	55419	90525	144927	272846	337926	445745	747602
60	995	14993	73957	60964	81949	125005	126950	297977	364811	585756	947463
70	1991	17985	49970	71959	86910	122936	270822	312805	457740	577856	1128387
80	2998	22987	69960	76958	100948	118928	271841	384787	544689	647631	1236322
90	1999	23986	57969	75524	105933	136945	310820	414301	562712	802570	1434179

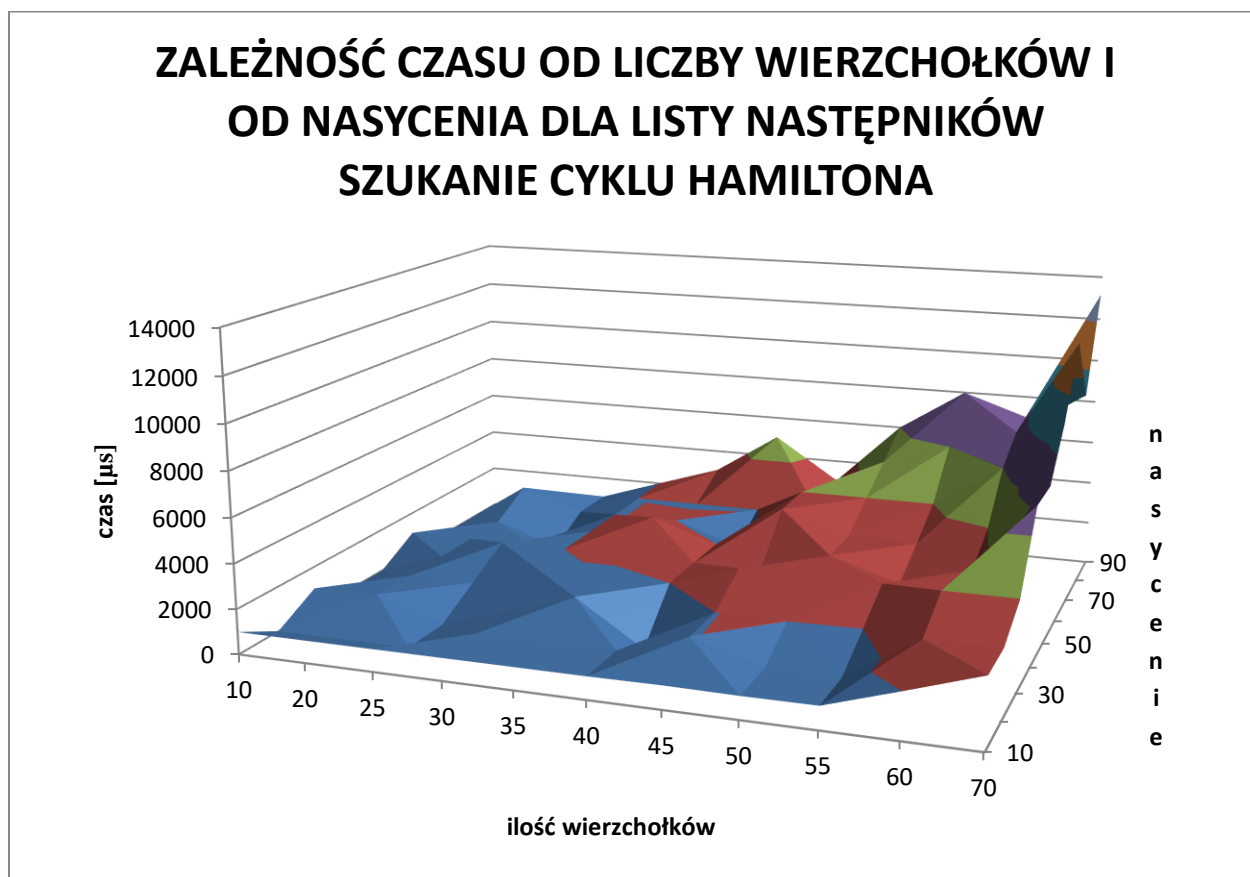


OBSERWACJE: Czas poszukiwania cyklu Eulera na macierzy sąsiedztwa rośnie ze wzrostem liczby wierzchołków i nasycenia grafu osiągając największą wartość przy największej zbadanej liczbie wierzchołków i największym nasyceniu grafu.

7. Zależność czasu działania algorytmu od liczby wierzchołków w grafie i od nasycenia dla poszukiwania cyklu w grafie skierowanym

- Poszukiwanie cyklu Hamiltona

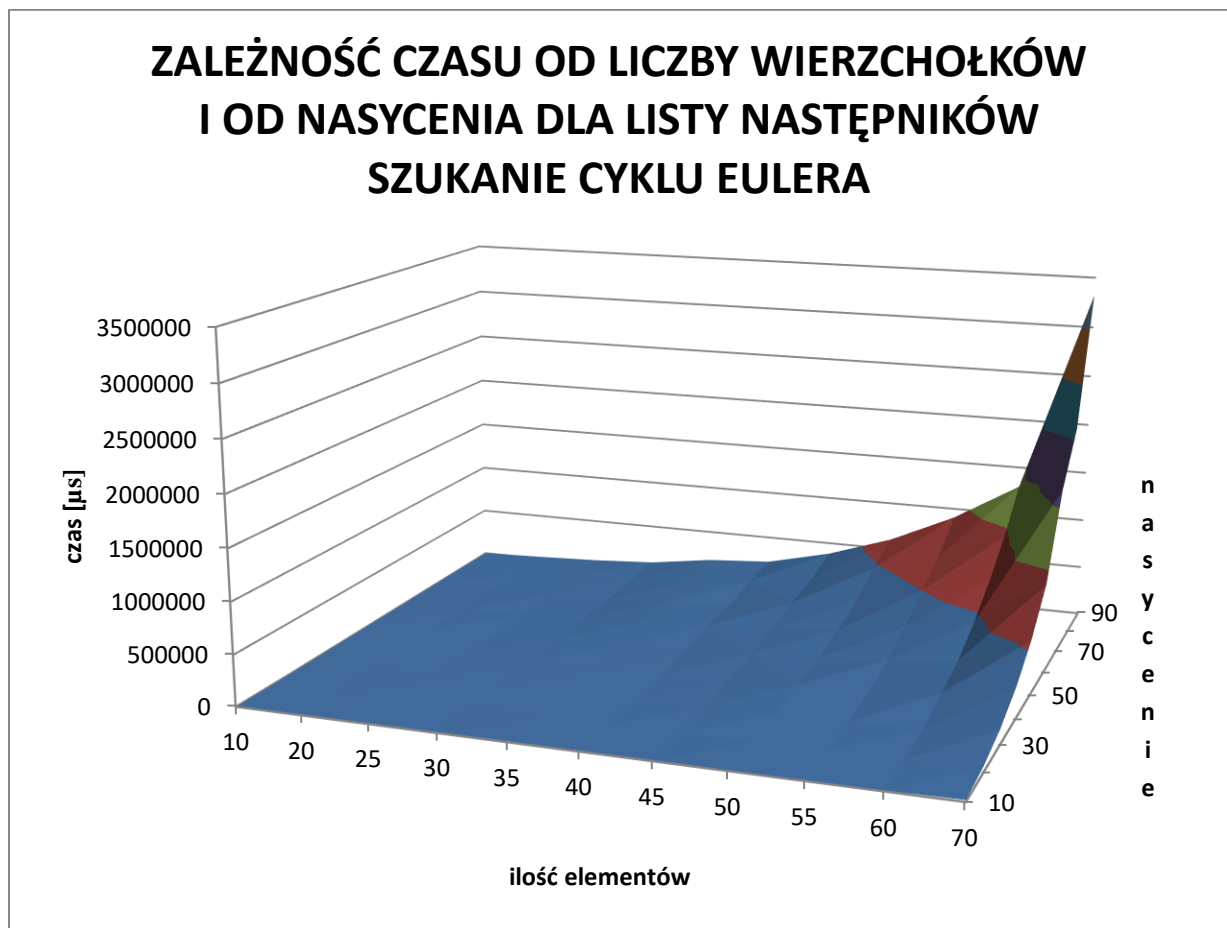
ZALEŻNOŚĆ CZASU OD LICZBY WIERZCHOŁKÓW I OD NASYCENIA DLA LISTY NASTĘPNIKÓW SZUKANIE CYKLU HAMILTONA											
%	10	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70
10	1000	998	998	1000	1000	999	1024	995	1006	2001	3026
20	0	0	0	1000	995	998	1996	999	1000	3002	3033
30	1000	1063	0	998	1994	0	1998	2027	1981	3996	3990
40	0	1002	999	1999	1999	2000	2998	2997	3000	2972	6999
50	0	1000	1994	2000	2001	2001	1998	2998	2027	3000	6997
60	995	1000	1028	1997	2996	2000	3999	2999	2976	3973	8991
70	0	1029	0	1999	2004	999	3993	3999	4001	6016	11970
80	0	2001	997	1999	1998	1999	1999	4990	5996	6967	8963
90	0	995	1000	2012	3004	4994	3000	5994	7988	6966	13159



OBSERWACJE: Czas poszukiwania cyklu Hamiltona na liście następników rośnie ze wzrostem liczby wierzchołków i nasycenia grafu osiągając największą wartość przy największej zbadanej liczbie wierzchołków i największym nasyceniu grafu.

- **Poszukiwanie cyklu Eulera**

ZALEŻNOŚĆ CZASU OD LICZBY WIERZCHOŁKÓW I OD NASYCENIA DLA LISTY NASTĘPNIKÓW SZUKANIE CYKLU EULERA											
%	10	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70
10	0	1000	1003	998	2998	3015	4006	8995	6995	8998	17022
20	0	935	2027	3006	8993	7995	12986	25014	22986	31949	55969
30	992	1997	7997	12993	13013	14992	27003	52070	57965	75989	150945
40	998	4884	9993	18518	26005	32952	51969	104184	113930	183995	311821
50	1000	5002	9995	25986	49997	61934	106985	144439	209462	281872	546689
60	964	6974	16992	39980	90940	117049	158090	222877	331560	453750	888527
70	2033	7997	36981	48972	101944	120963	229904	317814	504017	676615	1641066
80	1999	14023	41977	65969	141180	196891	279343	478735	661766	947483	2096811
90	997	20956	46996	86988	181091	227023	382959	603659	906620	1296878	3320077



OBSERWACJE: Czas poszukiwania cyklu Eulera na liście następników rośnie ze wzrostem liczby wierzchołków i nasycenia grafu osiągając największą wartość przy największej zbadanej liczbie wierzchołków i największym nasyceniu grafu.

8. Wnioski

Problemy te posiadają różną klasę złożoności obliczeniowej. Problem poszukiwania cyklu Hamiltona należy do klasy złożoności problemów silnie NP-trudnych. Algorytm znajdujący rozwiązanie powyższego problemu charakteryzuje się wykładniczą złożonością obliczeniową. W przypadku problemu poszukiwania cyklu Eulera mówimy o klasie złożoności obliczeniowej P. Algorytm rozwiązujący ten problem charakteryzuje się wielomianową złożonością obliczeniową.

Z przeprowadzonych przez nas testów wynika, że zarówno dla struktury reprezentującej graf nieskierowany jaką jest macierz sąsiedztwa, jak i dla struktury przechowującej graf skierowany jaką jest w tym przypadku lista następników, przeszukiwanie grafu w poszukiwaniu cyklu Eulera, jak i cyklu Hamiltona wykonuje się znacznie szybciej w przypadku drugiego z wyżej wymienionych algorytmów. Różnice te w naszej ocenie są spowodowane odmienną charakterystyką problemu, który próbujemy rozwiązać zaimplementowanym algorytmem. W przypadku poszukiwania cyklu Hamiltona potrzebujemy jedynie przejść przez każdy wierzchołek raz i nie koniecznie przez każdą krawędź. Natomiast poszukiwanie cyklu Eulera wymaga znalezienia odpowiedzi, w której każda krawędź została użyta dokładnie raz. Dlatego różnice pomiędzy jednym i drugim algorytmem wraz ze wzrostem wierzchołków stają się coraz większe.

W przypadku poszukiwania cyklu Hamiltona, na wykresie można zauważyć mniejsze różnice pomiędzy macierzą sąsiedztwa a listą następników w porównaniu do poszukiwania cyklu Eulera.

Dla grafu skierowanego czas wykonywania algorytmu poszukiwania cyklu Hamiltona jest znacznie dłuższy od czasu poszukiwania cyklu Eulera pomiędzy 10% a 50% nasycenia grafu. Następnie tendencja ta zmienia się i czas potrzebny na wykonanie obu algorytmów wyrównuje się. Dzięki większemu nasyceniu grafu znalezienie odpowiedzi okazuje się łatwiejsze. W przypadku grafu nieskierowanego wygląda to nieco inaczej. Poszukiwanie cyklu Eulera rośnie liniowo wraz z nasyceniem grafu w przeciwieństwie do poszukiwania cyklu Hamiltona. Im w grafie znajduje się więcej krawędzi tym trudniej odnaleźć cykl przechodzącą przez każdą z nich.

Poszukiwanie cyklu Eulera na macierzy sąsiedztwa i na liście następników okazuje się problemem czasowo tak samo wymagającym w obu przypadkach przy różnym nasyceniu krawędziami.

Na przedstawionych powyżej wykresach 3D w trzech przypadkach tj. dla poszukiwania cyklu Eulera na macierzy sąsiedztwa, poszukiwania cyklu Hamiltona dla listy następników i dla poszukiwania cyklu Eulera dla listy następników czas potrzebny na znalezienie odpowiedzi osiąga największą wartość w przypadku największego zmierzonego nasycenia grafu krawędziami i największej liczby wierzchołków. Algorytm poszukiwania cyklu Hamiltona dla macierzy sąsiedztwa potrzebuje więcej czasu na znalezienie odpowiedzi przy zwiększającej się liczbie wierzchołków, nasycenie grafu według wykresu nie ma żadnego wpływu na czas wykonywania algorytmu.

Na podstawie obserwacji uzyskanych przez nas wyników dochodzimy do wniosku, że zarówno dla algorytmu wyszukującego cykl Hamiltona, jak i algorytmu poszukującego cykl Eulera bardziej optymalną reprezentacją maszynową jest lista następników.