

Zdarzenie elementarne

Każdy możliwy wynik eksperymentu losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym** ω , a zbiór wszystkich możliwych wyników eksperymentu (wszystkich zdarzeń elementarnych) nazywamy **zbiorem zdarzeń elementarnych** i oznaczamy Ω , ($\omega \in \Omega$).

Aksjomaty prawdopodobieństwa

Dla danego zbioru zdarzeń elementarnych Ω oraz σ -ciała zdarzeń losowych \mathcal{F} , **prawdopodobieństwem** nazywamy funkcję $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$ spełniającą:

1. Dla dowolnego zdarzenia losowego $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Dla dowolnego nieskończonego ciągu zdarzeń losowych $A_1, A_2, \dots, \forall_{n \in \mathcal{N}} A_n \in \mathcal{F}$, parami rozłącznych, mamy $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Dla dowolnych zdarzeń A, B mamy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo A pod warunkiem że zaszło zdarzenie B : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Jeżeli $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, to $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \prod_{i=2}^n P(A_i | A_1 \cap \dots \cap A_{i-1})$.

Prawdopodobieństwo zupełne

Ciąg zdarzeń nazywamy zupełnym, jeśli:

1. $\bigcup_i A_i = \Omega$,
2. $\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset$,
3. $\forall_i P(A_i) > 0$.

Twierdzenie

Jeśli zdarzenia tworzą układ zupełny, to dla dowolnego zdarzenia B mamy $P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$

Reguła Bayesa

Twierdzenie Niech A_i tworzą układ zupełny. Wtedy dla dowolnego zdarzenia losowego B , $P(B) > 0$ i dowolnego j zachodzi $P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$

Niezależność zdarzeń

Definicja Zdarzenia są wzajemnie niezależne gdy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to nieza-

leżne są również zdarzenia A i \overline{B} , \overline{A} i B , \overline{A} i \overline{B} .

Zdarzenia są wzajemnie niezależne jeśli $P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$.

Jeśli $A_1 \dots$ są zdarzeniami wzajemnie niezależnymi, to $(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$

Łączenie prawdopodobieństw

szeregowe: $P(A_s) = \prod_{i=1}^n p_i$

równoległe: $P(A_r) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$

Dystrybuenta

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Własności:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

niemalejąca, prawostronnie ciągła

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Zmienne losowe dyskretne

$p(a) = P(X = a)$ - funkcja prawdopodobieństwa, własności:

$$p(x) \geq 0, \sum_{x \in X} p(x) = 1$$

Dystrybuenta dyskretna zmiennej X o nośniku χ : $F(x) = \sum_{\{x_i \in \chi : x_i \leq x\}} p(x_i)$.

Przykład:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.4, & 1 \leq x < 2 \\ 0.9, & 2 \leq x \end{cases}$$

Zmienne losowe ciągłe

$$P(X \in B) = \int_B f(x) dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$f(x) = F'(x)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(X = a) = 0 \text{ dla dowolnego } a \in R$$

Własności funkcji gęstości:

$$\forall_{x \in R} f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Doświadczenie Bernoulliego

Doświadczenie kończące się sukcesem z prawdopodobieństwem p lub porażką z prawdopodobieństwem $1-p$.

Ciąg n doświadczeń z prawd. sukcesu p oznaczamy $b(n, p)$.

Prawdopodobieństwo uzyskania ciągu składającego się z k sukcesów, przy założeniu niezależności: $p^k(1-p)^{n-k}$.

Prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w

n niezależnych doświadczeniach z $p \in [0, 1]$:

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Poisson (fr. Ryba)

Dla $n \geq 25$ i $\lambda = n \cdot p \leq 10$ możemy przybliżyć

rozkładem Poissona: $b(k; n, p) \approx e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$, na przykład:

$\sum_{k=0}^{14} b(k; 500, 0.02) \approx F(14; 500 \cdot 0.02)$, gdzie F jest dystrybuantą rozkładu Ryby, dostępna w tablicach.