

## Zdarzenie elementarne

Każdy możliwy wynik eksperymentu losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym**  $\omega$ , a zbiór wszystkich możliwych wyników eksperymentu (wszystkich zdarzeń elementarnych) nazywamy **zbiorem zdarzeń elementarnych** i oznaczamy  $\Omega, (\omega \in \Omega)$ .

## Aksjomaty prawdopodobieństwa

Dla danego zbioru zdarzeń elementarnych  $\Omega$  oraz  $\sigma$ -ciała zdarzeń losowych  $\mathcal{F}$ , **prawdopodobieństwem** nazywamy funkcję  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$  spełniającą:

1. Dla dowolnego zdarzenia losowego  $A \in \mathcal{F}$ ,  $P(A) \geq 0$ .
2.  $P(\Omega) = 1$ .
3. Dla dowolnego nieskończonego ciągu zdarzeń losowych  $A_1, A_2, \dots, \forall n \in \mathcal{N} A_n \in \mathcal{F}$ , parami rozłącznych, mamy  $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ .

**Dla dowolnych zdarzeń**  $A, B$  mamy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

## Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo  $A$  pod warunkiem że zaszło zdarzenie  $B$ :  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

Jeżeli  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ , to  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \prod_{i=2}^n P(A_i | A_1 \cap \dots \cap A_{i-1})$ .

## Prawdopodobieństwo zupełne

Ciąg zdarzeń nazywamy zupełnym, jeśli:

1.  $\bigcup_i A_i = \Omega$ ,
2.  $\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset$ ,
3.  $\forall_i P(A_i) > 0$ .

## Twierdzenie

Jeśli zdarzenia tworzą układ zupełny, to dla dowolnego zdarzenia losowego  $B, P(B) > 0$  i dowolnego  $j$  zachodzi  $\sum_i P(B|A_i)P(A_i)$

## Reguła Bayesa

**Twierdzenie** Niech  $A_i$  tworzą układ zupełny. Wtedy dla dowolnego zdarzenia losowego  $B, P(B) > 0$  i dowolnego  $j$  zachodzi  $P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$

## Niezależność zdarzeń

**Definicja** Zdarzenia są wzajemnie niezależne gdy  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Jeżeli zdarzenia  $A$  i  $B$  są niezależne, to nieza-

leżne są również zdarzenia  $A$  i  $\overline{B}$ ,  $\overline{A}$  i  $B$ ,  $\overline{A}$  i  $\overline{B}$ .

Zdarzenia są wzajemnie niezależne jeśli  $P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$ .

Jeśli  $A_1 \dots$  są zdarzeniami wzajemnie niezależnymi, to  $(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$

## Doświadczenie Bernoulliego

Doświadczenie kończące się sukcesem z prawdopodobieństwem  $p$  lub porażką z prawdopodobieństwem  $1-p$ .

Ciąg  $n$  doświadczeń z prawd. sukcesu  $p$  oznaczamy  $b(n, p)$ .

Prawdopodobieństwo uzyskania ciągu składającego się z  $k$  sukcesów, przy założeniu niezależności:  $p^k(1-p)^{n-k}$ .

Prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  sukcesów w  $n$  niezależnych doświadczeniach z  $p \in [0, 1]$ :  $b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

Dla  $n \geq 25$  i  $\lambda = n \cdot p \leq 10$  możemy przybliżyć rozkładem Poissona (fr. ryba):  $b(k; n, p) \approx e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$ , na przykład:

$\sum_{k=0}^{14} b(k; 500, 0.02) \approx F(14; 500 \cdot 0.02)$ , gdzie  $F$  jest dystrybuantą rozkładu Ryby, dostępna w tablicach.