

第十二届全国大学生数学竞赛初赛 《数学类 B 卷》试题及参考解答

空间解析几何

一、(15 分) 已知椭球面 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > b$ 的外切柱面 $\Sigma_\varepsilon (\varepsilon = 1 \text{ 或 } -1)$

平行于已知直线 $l_\varepsilon: \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-3}{c}$. 试求与 Σ_ε 交于一个圆周的平面的法方向.

注: 本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

【参考解答】: 设 l 是柱面的任意一条直母线, 则由假设, l 与已知椭球面 Σ_0 相切于一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$. 因为 l 平行于已知直线 l_ε , 所以, l 的标准方程和参数方程分别是

设出相切的母线和交点
通过平行找到母线的参数方程

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-z_1}{c}$$

$$x = x_1, y = y_1 + \varepsilon t\sqrt{a^2-b^2}, z = z_1 + ct.$$

把 l 的参数方程代入曲面 Σ_0 的方程整理得

$$t^2 \left(\frac{a^2-b^2}{b^2} + 1 \right) + 2t \left(\varepsilon \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} y_1 + \frac{1}{c} z_1 \right) + \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (1)$$

其中首项系数 $\frac{a^2-b^2}{a^2} + 1 > 0$.

母线方程与椭圆曲面方程联立求解得到切点

因为 M_1 在 Σ_0 上, 所以 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0$. 又因为 l 与 Σ_0 在 M_1 点相切, 所以 $t=0$ 是二次方程(1)的重根. 因此,

$$\varepsilon \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} y_1 + \frac{1}{c} z_1 = 0, \text{ 即 } \varepsilon c \sqrt{a^2-b^2} y_1 + b^2 z_1 = 0.$$

此式与 $\frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-z_1}{c}$, 即 $\varepsilon c y_1 - \sqrt{a^2-b^2} z_1 = \varepsilon c y - \sqrt{a^2-b^2} z$ 联立解得

得到交点坐标

$$y_1 = \frac{b^2}{ca^2} (cy - \varepsilon \sqrt{a^2-b^2} z), z_1 = -\varepsilon \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2} (cy - \varepsilon \sqrt{a^2-b^2} z)$$

再把 $x_1 = x$ 和上面的两式代入 Σ_0 的方程, 得到外切柱面 Σ_ε 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 (cy - \varepsilon \sqrt{a^2-b^2} z)^2}{a^4 c^2} + \frac{(a^2-b^2) (cy - \varepsilon \sqrt{a^2-b^2} z)^2}{a^4 c^2} = 1.$$

切面方程

如果令 $z=0$, 上式化为,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 y^2}{a^4} + \frac{(a^2-b^2) y^2}{a^4} = 1, \text{ 即 } x^2 + y^2 = a^2.$$

将切面方程与 $z=0$
联立得圆的方程

所以柱面 Σ_ε 与 xOy 坐标面相交于圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$. 由于与二次柱面 Σ_ε 的交线为

圆周的所有平面都是平行的，故所求的法向量唯一为 xOy 平面的法向量，即方向数为 $0, 0, 1$.

二、(15分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $1 \leq f(x) \leq 3$. 证明：

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{4}{3}.$$

【参考证明】：由 Schwarz 不等式，有

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$$

又由于 $(f(x) - 1)(f(x) - 3) \leq 0$ ，故 $\frac{(f(x) - 1)(f(x) - 3)}{f(x)} \leq 0$ ，即

$$\int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{f(x)} \right) dx \leq 4 \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

由 $4ab \leq (a + b)^2$ 得

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \leq \frac{\left(\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \right)^2}{4} \leq 4$$

综上所述得 $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{4}{3}$.

三、(15分) 设 A 为 n 阶复方阵， $p(x)$ 为 A 的特征多项式，又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式， $m \geq 1$. 证明： $g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

【参考证明】：取 A 的 Jordan 分解为

$$A = P \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix} P^{-1}$$

其中 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ 为 Jordan 块.

$$g(A) = P \begin{pmatrix} g(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(J_s) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & * & * \\ & \ddots & * \\ & & g(\lambda_s) \end{pmatrix} P^{-1} \quad (*)$$

\Leftrightarrow ： $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素，于是 $p(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根. 注意到 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为 A 的所有互不相同的特征根，故 $g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_s)$ 均不为零，故

$$|g(A)| = g(\lambda_1) \cdots g(\lambda_s) \neq 0$$

所以 $g(A)$ 可逆.

\Rightarrow): $g(A)$ 可逆, 从而 $|g(A)| \neq 0$. 由 $|g(A)| = g(\lambda_1) \cdots g(\lambda_s)$ 知 $g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_s)$ 均不为零, 故 $p(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根. 当然 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 否则导致 $p(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根, 矛盾.

四、(20 分) 设 σ 为 n 维复向量空间 \mathbb{C}^n 的一个线性变换. $\mathbf{1}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价:

(1) $\sigma = k\mathbf{1}, k \in \mathbb{C}$;

(2) 存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: v_1, \dots, v_{n+1} , 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

【参考证明】: (1) \Rightarrow (2): 取

$$v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v_n = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, v_{n+1} = e_1 + \cdots + e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

则可知 v_1, \dots, v_{n+1} 均是 σ 的特征向量. 进一步, 该组向量中任何 n 个向量必线性无关. 事实上, 不妨设这 n 个向量为: $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}$. 于是

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_{n+1} v_{n+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_1 + a_{n+1}) e_1 + \cdots + (a_{i-1} + a_{n+1}) e_{i-1} \\ &\quad + a_{n+1} e_i + (a_{i+1} + a_{n+1}) e_{i+1} + \cdots \\ &\quad + (a_n + a_{n+1}) e_n = 0 \end{aligned}$$

结果得 $a_{n+1} = 0$, 进而 $a_1 = \cdots = a_{n+1} = 0$.

(2) \Rightarrow (1): 记 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ 分别是相应于 v_1, \dots, v_{n+1} 的 σ 的特征值, 其和为 s , 即

$s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1}$. 由条件知, $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}$ 线性无关, 因此它可充当 \mathbb{C}^n 的基. σ 在此基下的表示矩阵为 A :

$$\sigma(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}) = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}) A$$

从而有 $\text{tr } A = s - \lambda_i$.

又取 $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}, \sigma$ 在此基下的表示阵为 B :

$$\sigma(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}) = (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}) B$$

从而 $\text{tr } B = s - \lambda_j$. 注意到 A, B 相似, 因为它们是一线性变换在不同基下的表示阵.

故 $s - \lambda_i = s - \lambda_j, \lambda_i = \lambda_j$, 即 $\sigma = k\mathbf{1}, k \in \mathbb{C}$.

五、(15 分) 计算广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx$, 这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且 $x \in [n, n+1)$ 时, 则 $(x) = x - n$).

【参考解答】: 对于任意正整数 $\ell > 2$, 有

$$\begin{aligned}
 \int_1^\ell \frac{(x)}{x^3} dx &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^3} \\
 &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \left(\int_n^{n+1} x^{-2} dx - n \int_n^{n+1} x^{-3} dx \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \left(\frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{1}{n(n+1)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\ell} \frac{1}{n^2}
 \end{aligned}$$

对于 $y \in [\ell, \ell+1]$, 则有

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\ell} \frac{1}{n^2} = \int_1^\ell \frac{(x)}{x^3} dx \\
 &\leq \int_1^y \frac{(x)}{x^3} dx \leq \int_1^{\ell+1} \frac{(x)}{x^3} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\ell+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\ell+1} \frac{1}{n^2}
 \end{aligned}$$

于是得

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}$$

六、(20 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 满足对任意 $x \in [0, 1]$, $\int_{x^2}^x f(t) dt \geq \frac{x^2 - x^4}{2}$.

证明: $\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{10}$.

【参考证明】: 【思路一】: 注意到

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t) dt &= \int_0^1 dt \int_t^{\sqrt{t}} f(t) dx \\
 &= \int_0^1 (\sqrt{t} - t) f(t) dt
 \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (\sqrt{t} - t) f(t) dt &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t) dt \\
 &\geq \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{2} dx = \frac{1}{15}
 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 (f(t) - (\sqrt{t} - t))^2 dt \\ &= \int_0^1 f^2(t) dt - 2 \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t) dt + \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt \end{aligned}$$

所以得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(t) dt &\geq 2 \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t) dt - \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt \\ &\geq \frac{2}{15} - \frac{1}{30} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

【思路二】：注意到

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t) dt &= \int_0^1 dt \int_t^{\sqrt{t}} f(t) dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t) dt \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t) dt &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t) dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{2} dx = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

因为对于任意 $\beta \in (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 (\beta f(t) - (\sqrt{t} - t))^2 dt \\ &= \int_0^1 \beta^2 f^2(t) dt - 2\beta \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t) dt + \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt \end{aligned}$$

所以得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(t) dt &\geq \frac{2}{\beta} \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t) dt - \frac{1}{\beta^2} \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt \\ &\geq \frac{2}{15\beta} - \frac{1}{30\beta^2} = \frac{1}{30} \left(4 \cdot \frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

容易得当 $\beta \in [1/3, 1]$ 时, 有

$$\int_0^1 f^2(t) dt \geq \frac{1}{30} \left(4 \cdot \frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \right) \geq \frac{1}{10}$$

特别地, 当 $\beta = \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\int_0^1 f^2(t) dt \geq \frac{1}{30} (4 \cdot 2 - 2^2) = \frac{2}{15} > \frac{1}{10}$$

【思路三】：因为对于任意 $0 < \beta < 1$, 任意正整数 n , 有

$$\begin{aligned} \int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t) dt &= \sum_{k=1}^n \int_{\beta^{2^k}}^{\beta^{2^{k-1}}} f(t) dt \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{\beta^{2^k} - \beta^{2^{k+1}}}{2} = \frac{1}{2} (\beta^2 - \beta^{2^{n+1}}) \end{aligned}$$

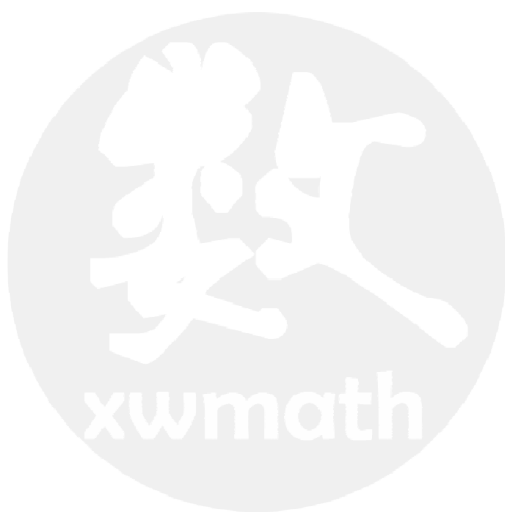
于是 $\int_0^\beta f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\beta^{2^n}}^\beta f(t) dt \geq \frac{\beta^2}{2}$ ，从而

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{\beta \rightarrow 1-} \int_0^\beta f(t) dt \geq \lim_{\beta \rightarrow 1-} \frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{2}$$

最后，由柯西-施瓦兹不等式得

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \left(\int_0^1 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 f^2(t) dt \right)^{1/2}$$

于是 $\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{10}$.



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)