第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《非数学类》试题

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x-\sin x\right)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$________.

2、设函数 $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^n e^{-x^2}$，则 $f^{\left(n\right)}\left(-1\right)=$________.

3、设 $y=f\left(x\right)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f\left(1\right)=1$，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程为________.

4、已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin\left(x+y\right)}{x\left(x+y\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

5、设 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U, f\left(x\right)\ne g\left(x\right)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}g\left(x\right)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[f\left(x\right)\right]^{g\left(x\right)}-\left[g\left(x\right)\right]^{g\left(x\right)}}{f\left(x\right)-g\left(x\right)}=$________.

二、(10 分) 设数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\left(n+1\right)\left(a_n+1\right)}, n\ge 1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$.

三、(12 分) 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 内可导，且 $f\left(0\right)=0$，$f\left(1\right)=1$. 证明：

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f\left(x_0\right)=2-3x_0$；

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\ne\eta$，使得 $\left[1+f'(\xi)\right]\left[1+f'(\eta)\right]=4$.

四、(12 分) 已知 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f,φ 均为二阶可微函数.

(1) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(2) 当 $f=\varphi$，且 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$ 时，求 $f\left(y\right)$.

五、(12 分) 计算 $I=\displaystyle\oint_{\Gamma}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z\end{cases}$ 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

六、(12 分) 证明 $f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$ 等于 n 的所有因子（包 1 和 n 本身）之和，其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数，并计算 $f(2021)$.

七、(14 分) 设 $u_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n}\quad(n\ge 1)$.

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$；

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p\ge 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.