第十一届全国大学生数学竞赛决赛试题及参考解答
(数学类低年级组)

一、填空题(每小题 5 分，共 20 分)

1、$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=n}^{3n-1}k\right)^{\frac{1}{2n}}\sin\dfrac{1}{n}=$________.

【答案】：$\dfrac{3\sqrt{3}}{e}$

2、已知 f 在区间 $(-1,3)$ 内有二阶连续导数，$f(0)=12, f(2)=2f'(2)+8$，则 $\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x=$______.

【答案】：1

3、在三维空间的直角坐标系中，方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2xz=1$ 表示的二次曲面类型是________________.

【答案】：椭圆柱面

4、在矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ 的奇异值分解 $A=U\Lambda V$ 中(其中 U,V 为正交方阵，Λ 为对角阵)，$\Lambda=$____________________.

【答案】：$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

二、(本题 15 分) 考虑单叶双曲面 $S: x^2-y^2+z^2=1$.

1、证明：S 上同一族直母线中任意两条不同的直母线是异面直线；

2、设 S 上同一族直母线中的两条直母线分别经过 $M_1(1,1,1)$ 与 $M_2(2,2,1)$ 两点，求这两条直母线的公垂线方程以及这两条直母线之间的距离.

【参考解答】：1、将曲面方程改写为 $x^2-y^2=1-z^2$，从而有

$$(x+y)(x-y)=(1+z)(1-z) \tag{1}$$

现在引进不全为零的参数 λ,μ 以及不全为零的参数 u,v，得两族直母线方程为

$$\begin{cases}\lambda(x+y)=\mu(1+z)\\ \mu(x-y)=\lambda(1-z)\end{cases} \tag{2}$$

以及

$$\begin{cases}u(x+y)=v(1-z)\\ v(x-y)=u(1+z)\end{cases} \tag{3}$$

以第一族直母线（2）为例证明两条不同的直母线是异面直线，取（2）中两条直母线 L_1 与

L_2

$$L_1:\begin{cases}\lambda_1(x+y)=\mu_1(1+z)\\ \mu_1(x-y)=\lambda_1(1-z)\end{cases}\tag{4}$$

以及

$$L_2:\begin{cases}\lambda_2(x+y)=\mu_2(1+z)\\ \mu_2(x-y)=\lambda_2(1-z)\end{cases}\tag{5}$$

其中，$\lambda_1\mu_2\neq\lambda_2\mu_1$. 考虑线性方程组

$$\begin{cases}\lambda_1x+\lambda_1y-\mu_1z-\mu_1=0\\ \mu_1x-\mu_1y+\lambda_1z-\lambda_1=0\\ \lambda_2x+\lambda_2y-\mu_2z-\mu_2=0\\ \mu_2x-\mu_2y+\lambda_2z-\lambda_2=0\end{cases}\tag{6}$$

设（6）的系数矩阵为A，计算可得

$$\det(A)=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_1 & -\mu_1 & -\mu_1\\ \mu_1 & -\mu_1 & \lambda_1 & -\lambda_1\\ \lambda_2 & \lambda_2 & -\mu_2 & -\mu_2\\ \mu_2 & -\mu_2 & \lambda_2 & -\lambda_2\end{vmatrix}=4\left(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2\right)^2\neq 0,$$

所以L_1与L_2为异面直线. 对于第二族直母线（3），设两条直母线L_1', L_2'

$$L_1':\begin{cases}u_1(x+y)=v_1(1-z)\\ v_1(x-y)=u_1(1+z)\end{cases}\tag{7}$$

以及

$$L_2':\begin{cases}u_2(x+y)=v_2(1-z)\\ v_2(x-y)=u_2(1+z)\end{cases}\tag{8}$$

其中$u_1v_2\neq u_2v_1$. 考虑方程组

$$\begin{cases}u_1x+u_1y+v_1z-v_1=0\\ v_1x-v_1y-u_1z-u_1=0\\ u_2x+u_2y+v_2z-v_2=0\\ v_2x-v_2y-u_2z-u_2=0\end{cases}\tag{9}$$

设方程组（9）的系数矩阵为B，经计算得到

$$\det(B)=\begin{vmatrix}u_1 & u_1 & v_1 & -v_1\\ v_1 & -v_1 & -u_1 & -u_1\\ u_2 & u_2 & v_2 & -v_2\\ v_2 & -v_2 & -u_2 & -u_2\end{vmatrix}=-4\left(u_1v_2-u_2v_1\right)^2\neq 0,$$

所以L_1'与L_2'为异面直线.

2、 将$M_1(1,1,1)$点代入（2）中可得$\mu:\lambda=1:1$，得直母线L_3的方程为

$$L_3:\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+z=1\end{cases}\tag{10}$$

将 $M_2(2,2,1)$ 点代入（2）中可得 $\mu:\lambda=2:1$，得到直母线 L_4 的方程为

$$L_4:\begin{cases}x+y-2z=2\\2x-2y+z=1\end{cases}\tag{11}$$

因为 $(1,1,-1)\times(1,-1,1)=(0,-2,-2)$，取 L_3 的方向 $\overrightarrow{n_3}=(0,1,1)$，因为

$$(1,1,-2)\times(2,-2,1)=(-3,-5,-4),$$

取 L_4 的方向 $\overrightarrow{n_4}=(3,5,4)$，$L_3,L_4$ 的公垂线 L 的方向为

$$\vec{n}=\overrightarrow{n_3}\times\overrightarrow{n_4}=(-1,3,-3)$$

设 $M(x,y,z)$ 为 L 上的任意一点，则 L 的方程满足

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{n_3},\vec{n}\right)=0\\\left(\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{n_4},\vec{n}\right)=0\end{cases}\tag{12}$$

其中

$$\left(\overrightarrow{M_1M},\vec{n}_3,\vec{n}\right)=\begin{vmatrix}x-1&y-1&z-1\\0&1&1\\-1&3&-3\end{vmatrix}=0,$$

$$\left(\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{n_4},\vec{n}\right)=\begin{vmatrix}x-2&y-2&z-1\\3&5&4\\-1&3&-3\end{vmatrix}=0,$$

经化简得到公垂线 L 的方程

$$\begin{cases}6x+y-z=6\\27x-5y-14z=30\end{cases}$$

L_3,L_4 之间的距离满足

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{19}}=\frac{2}{19}\sqrt{19},$$

【注】经计算可得公垂线与两条直母线 L_3,L_4 的交点分别为

$$\frac{1}{19}(19,-3,-3)\text{ 和 }\frac{1}{19}(17,3,-9)$$

这两点间的距离为 $\frac{2}{19}\sqrt{19}$. 因此，也可以通过计算两点间的距离得到异面直线之间的距离.

将 $M_1(1,1,1),M_2(2,2,1)$ 分别代入第二族直母线族（3）中可得到同一条直母线 $\begin{cases}1-z=0\\x-y=0\end{cases}$，即 M_1,M_2 位于同一条直母线上. 因此，只需考虑 L_3,L_4 的情形.

三、(本题 15 分) 设V是有限维欧氏空间，V_1,V_2是V的非平凡子空间且$V=V_1\oplus V_2$. 设p_1,p_2分别是V到V_1,V_2的正交投影，$\varphi=p_1+p_2$，用$\det\varphi$表示线性变换φ的行列式. 证明：$0<\det\varphi\le 1$且$\det\varphi=1$的充要条件是V_1与V_2正交.

【参考证明】：设$\dim V_1=m,\dim V_2=n,m,n>0$. 分别取$V_1$和$V_2$的各一组标准正交基，它们合起来是$V$的一组基. φ在这组基下的矩阵形如

$$A=\begin{pmatrix} I_m & B\\ C & I_n\end{pmatrix}$$

其中B和C分别是$p_1\big|_{V_2}:V_2\to V_1$和$p_2\big|_{V_1}:V_1\to V_2$的矩阵，对于

$$v_1\in V_1\text{和}v_2\in V_2, v_1-p_2v_1\in V_2^{\perp}$$

故$\langle p_2v_1,v_2\rangle=\langle v_1,v_2\rangle$. 同理$\langle v_1,p_1v_2\rangle=\langle v_1,v_2\rangle$.

由$\langle p_2v_1,v_2\rangle=\langle v_1,p_1v_2\rangle$，得$C=B^T$. 从而$CB=B^TB$为半正定矩阵，它就是$p_2p_1\big|_{V_2}:V_2\to V_2$的矩阵.

设λ为$p_2p_1|_{V_2}$的一个特征值，$v_2\in V_2$是相应的特征向量，则$\lambda\ge 0$. 由于$v_2\notin V_1$，则有$\|p_1v_2\|<\|v_2\|$，所以

$$0\le\lambda\|v_2\|^2=\langle p_2p_1v_2,v_2\rangle=\langle p_1v_2,p_1v_2\rangle=\|p_1v_2\|^2<\|v_2\|^2,$$

故$0\le\lambda<1$.

由于φ在V的一组基下的矩阵为A，所以

$$\det\varphi=\det A=\det\begin{pmatrix} I_m & B\\ C & I_n\end{pmatrix}=\det(I_n-CB)=\prod_{\lambda}(1-\lambda),$$

这里λ取遍矩阵CB的所有特征值(记重数). 由于CB的特征值即$p_2p_1|_{V_2}$的特征值，故对CB的每个特征值λ，有$0\le\lambda<1$，从而$0<\det\varphi\le 1$.

特别地，$\det\varphi=1$当且仅当对CB的每个特征值λ，均有$\lambda=0$，这也等价于

$$CB=B^TB=0\text{，即}B=C=0$$

所以$\det\varphi=1$的充要条件是V_1与V_2正交.

四、(本题 20 分) 1、证明：函数方程$x^3-3x=t$存在三个在闭区间$[-2,2]$上连续，在开区间$(-2,2)$内连续可微的解$x=\varphi_1(t),x=\varphi_2(t),x=\varphi_3(t)$满足：

$$\varphi_1(-t)=-\varphi_3(t),\varphi_2(-t)=-\varphi_2(t),\quad |t|\le 2.$$

2、若f是$[-2,2]$上的连续偶函数，证明：

$$\int_1^2 f(x^3-3x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x^3-3x)\,\mathrm{d}x$$

【参考证明】：1、记$g(x)=x^3-3x$，那么g是奇函数，且$g'(x)=3(x^2-1)$，于是g具有如下性质：

（1）在$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$上严格单调上升，在$[-1,1]$上严格单调下降.

（2）$x=-1$是极大值点，极大值为2；$x=1$是极小值点，极小值为-2.

（3）记$g_1=g\big|_{[-2,-1]}$，$g_2=g\big|_{[-1,1]}$，$g_1=g\big|_{[1,2]}$. 根据以上性质，g_1,g_2,g_3分别在其定义的闭区间上严格单调，且值域均为$[-2,2]$. 因此，依次有反函数$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$，以$[-2,2]$为定义域，依次以$[-2,-1],[-1,1],[1,2]$为值域.

由反函数的连续性得$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$均为$[-2,2]$上的连续函数，而$g_1,g_2,g_3$依次在$(-2,-1),(-1,1),(1,2)$内连续可导，且导数不等于零. 因此，它们的反函数$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$在$(-2,2)$内连续可微. 另一方面，注意到$g$为奇函数以及$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$的值域，$g_1,g_2,g_3$的定义域，有

$$-t=-g_3\left(\varphi_3(t)\right)=-g\left(\varphi_3(t)\right)=g\left(-\varphi_3(t)\right)=g_1\left(-\varphi_3(t)\right),\quad t\in[-2,2],$$

因此$\varphi_1(-t)=-\varphi_3(t),\quad t\in[-2,2]$. 同理

$$-t=-g_2\left(\varphi_2(t)\right)=-g\left(\varphi_2(t)\right)=g\left(-\varphi_2(t)\right)=g_2\left(-\varphi_2(t)\right),\quad t\in[-2,2],$$

从而$\varphi_2(-t)=-\varphi_2(t),\quad t\in[-2,2]$.

2、根据韦达定理，有$\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\varphi_3(t)=0,\quad \forall t\in[-2,2]$，从而

$$\varphi_1'(t)+\varphi_2'(t)+\varphi_3'(t)=0,\quad \forall t\in(-2,2),$$

结合f为连续偶函数，得

$$\begin{aligned}&2\int_1^2 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x-2\int_0^1 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-2}^{-1} f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1} f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x+\int_1^2 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_1'(t)\mathrm{d}t+\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_2'(t)\mathrm{d}t+\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_3'(t)\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

从而结论成立.

五、(本题 15 分) 设$n\geq 2$，对于$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，规定$A^0$为$n$阶单位阵$I$，形式定义

$$\sin A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1},\quad \cos A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}$$

以及$\arctan A=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}A^{2k+1}$. 记$||A||\equiv\max\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ ||x||=1}}||Ax||$，其中$||x||\equiv\sqrt{x^Tx}$，证明:

1、 $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\sin A,\cos A$均有意义，且$(\sin A)^2+(\cos A)^2=I$.

2、当$||A||<1$时，$\arctan A$有意义，且$\sin\arctan A=A\cos\arctan A$.

【参考解答】：1、由于

$$\left\|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}\right\|+\left\|\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}\right\|\leq\frac{||A||^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{||A||^{2k}}{(2k)!}$$

而 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!}$ 收敛，因此，$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}$ 均绝对收敛，从而 $\sin A,\cos A$ 有定义. 进一步，由绝对收敛级数的性质，

$$(\sin A)^2=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^k}{(2j+1)!(2k-2j+1)!}A^{2k+2}=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}C_{2k}^{2j+1}A^{2k}$$

$$(\cos A)^2=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^k}{(2j)!(2k-2j)!}A^{2k}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^k}{(2k)!}C_{2k}^{2j}A^{2k}$$

由于 $\sum_{j=0}^{k}C_{2k}^{2j}-\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k}^{2j+1}=(1-1)^{2k}=0$. 因此 $(\sin A)^2+(\cos A)^2=I$.

2、由 $\left\|\frac{(-1)^k}{2k+1}A^{2k+1}\right\|\le\frac{\|A\|^{2k+1}}{2k+1}$ 得，当 $\|A\|<1$ 时，$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}A^{2k+1}$ 绝对收敛，从而 $\arctan A$ 有定义. 易见 $\sin A,\cos A,\arctan A,A$ 均两两可交换. 进一步，若在某区间 $[a,b]$ 上的矩阵值函数 $A(t)$ 连续可微，且对任何 $t,s\in[a,b]$, $A(t)$ 和 $A(s)$ 可交换，则 $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}(t)\right)'$ 一致收敛. 于是

$$(\sin A(t))'=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}(t)A'(t)=(\cos A(t))A'(t)\,,$$

同理 $(\cos A(t))'=-(\sin A(t))A'(t)$ 以及当 $\|A(t)\|<1$ 时成立

$$(\arctan A(t))'=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kA^{2k}(t)A'(t)=\left(I+A^2(t)\right)^{-1}A'(t)$$

现考虑 $t\in[0,1]$ 以及矩阵值函数

$$f(t)=\sin\arctan(tA)-tA\cos\arctan(tA)$$

根据上述讨论，有

$$\begin{aligned}f'(t)&=(\cos\arctan(tA))\left(I+t^2A^2\right)^{-1}A-A\cos\arctan(tA)\\&\quad+tA(\sin\arctan(tA))\left(I+t^2A^2\right)^{-1}A\\&=tA^2\left(I+t^2A^2\right)^{-1}f(t),\quad t\in[0,1].\end{aligned}$$

结合 $f(0)=0$ 得到

$$\begin{aligned}\|f(t)\|&=\left\|\int_0^t sA^2\left(I+s^2A^2\right)^{-1}f(s)\,\mathrm{d}s\right\|\\&\le\int_0^t\|A\|^2\left\|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^ks^{2k}A^{2k}\right\|\|f(s)\|\mathrm{d}s\\&\le\int_0^t\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^{2k+2}\|f(s)\|\mathrm{d}s=\frac{\|A\|^2}{1-\|A\|^2}\int_0^t\|f(s)\|\mathrm{d}s,\ \forall t\in[0,1]\end{aligned}$$

由此可证 $f(t)=0(\forall t\in[0,1])$. 即结论成立.

六、(本题 15 分) 设m,n为正整数. 证明：当参数$k\neq 0$时，微分方程

$$y'(x)=ky^{2n}(x)+x^{2m-1}$$

的所有解都不是全局解(全局解即指定义在$(-\infty,+\infty)$上的解).

【参考解答】:【思路一】分两种情况证明，即$k>0$与$k<0$.

情形一：$k>0$. 假设$y(x)$为所给方程的一个全局解，则

$$\lim_{x\to+\infty}y'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(ky^{2n}(x)+x^{2m-1}\right)=+\infty$$

于是$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=+\infty$. 取$a>k$使得$y(\sqrt[2m-1]{a})\geq 1$，对任意$x\in[\sqrt[2m-1]{a},+\infty)$，有$y'(x)=ky^{2n}(x)+x^{2m-1}>ky^2(x)+k>0$. 因为

$$y'(x)=ky^{2n}(x)+x^{2m-1}>0,x\in[\sqrt[2m-1]{a},+\infty)$$

所以$y(x)$在$[\sqrt[2m-1]{a},+\infty)$上严格单调增加. 做辅助函数

$$z(x)=\arctan y(x),\quad x\in[\sqrt[2m-1]{a},+\infty),$$

注意到，对$x\in[\sqrt[2m-1]{a},+\infty)$，有

$$z'(x)=\frac{y'(x)}{1+y^2(x)}=\frac{ky^{2n}(x)+x^{2m-1}}{1+y^2(x)}>\frac{ky^2(x)+k}{1+y^2(x)}=k$$

于是可得

$$z(x)\geq kx-k\sqrt[2m-1]{a}+z(\sqrt[2m-1]{a}),\quad x\in[\sqrt[2m-1]{a},+\infty)$$

另一方面，有$z(x)\in(-\pi/2,\pi/2)$，与上面的不等式矛盾.

情形二：$k<0$. 假设$y(x)$为所给方程的一个全局解，则

$$\lim_{x\to-\infty}y'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(ky^{2n}(x)+x^{2m-1}\right)=-\infty$$

于是$\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)=+\infty$. 取$a<k$使得$y(\sqrt[2m-1]{a})\geq 1$. 对任意$x\in\left(-\infty,\sqrt[2m-1]{a}\right]$，有$y'(x)=ky^{2n}(x)+x^{2m-1}<ky^2(x)+k<0$. 因为

$$y'(x)=ky^{2n}(x)+x^{2m-1}<0,x\in\left(-\infty,\sqrt[2m-1]{a}\right]$$

所以$y(x)$在$\left(-\infty,\sqrt[2m-1]{a}\right]$上严格单调减少. 做辅助函数

$$z(x)=\arctan y(x),\quad x\in(-\infty,\sqrt[2m-1]{a}],$$

注意到，对$x\in(-\infty,\sqrt[2m-1]{a}]$

$$z'(x)=\frac{y'(x)}{1+y^2(x)}=\frac{ky^{2n}(x)+x^{2m-1}}{1+y^2(x)}<\frac{ky^2(x)+k}{1+y^2(x)}=k,$$

于是可得

$$z(x)\geq kx-k\sqrt[2m-1]{a}+z(\sqrt[2m-1]{a}),x\in(-\infty,\sqrt[2m-1]{a}],$$

另一方面，$z(x)\in(-\pi/2,\pi/2)$，与上面的不等式矛盾.

(或者) **情形二**：$k<0$. 令$h(x)=y(-x)$，则

$$h'(x) = -y'(-x) = -\left(ky^{2n}(-x) + (-x)^{2m-1}\right) = -kh^{2n}(x) + x^{2m-1}$$

由情形一可知函数$h(x)$的定义域不能延拓到正无穷，于是函数$h(x) = y(-x)$的定义域不能延拓到负无穷.

【思路二】分两种情况证明，即$k > 0$与$k < 0$.

情形一：$k > 0$. 假设$y(x)$为所给方程的一个全局解，则

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(ky^{2n}(x) + x^{2m-1}\right) = +\infty$$

于是，$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

取$a > k$使得$y(\sqrt[2m-1]{a}) \geq 1$，对任意$x \in [\sqrt[2m-1]{a}, +\infty)$，有

$$y'(x) = ky^{2n}(x) + x^{2m-1} > ky^2(x) + k > 0$$

即$\dfrac{y'(x)}{ky^2(x)+k} > 1$. 从而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\left(\arctan y(x) - \arctan y(\sqrt[2m-1]{a})\right)\\ &= \int_{\sqrt[2m-1]{a}}^{x} \frac{y'(t)}{ky^2(t)+k}\,\mathrm{d}t \geq x - \sqrt[2m-1]{a}, \quad \forall x > \sqrt[2m-1]{a}\end{aligned}$$

另一方面，上面不等式左边的值落在$(-\pi/k, \pi/k)$内，与上面的不等式矛盾.

情形二：$k < 0$. 假设$y(x)$为所给方程的一个全局解，则

$$\lim_{x\to-\infty} y'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(ky^{2n}(x) + x^{2m-1}\right) = -\infty$$

于是$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$.

取$a < k$使得$y(\sqrt[2m-1]{a}) \geq 1$，对任意$x \in (-\infty, \sqrt[2m-1]{a}]$，有

$$y'(x) = ky^{2n}(x) + x^{2m-1} < ky^2(x) + k < 0$$

即$\dfrac{y'(x)}{ky^2(x)+k} > 1$，从而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\left(\arctan y(\sqrt[2m-1]{a}) - \arctan y(x)\right)\\ &= \int_{x}^{\sqrt[2m-1]{a}} \frac{y'(t)}{ky^2(t)+k}\,\mathrm{d}t \geq \sqrt[2m-1]{a} - x, \quad \forall x < \sqrt[2m-1]{a}\end{aligned}$$

另一方面，上面不等式左边的值落在$(\pi/k, -\pi/k)$内，与上面的不等式矛盾.

(或者) **情形二**：$k < 0$. 令$h(x) = y(-x)$，则

$$h'(x) = -y'(-x) = -k\left(y^{2n}(-x) + (-x)^{2m-1}\right) = -kh^{2n}(x) + x^{2m-1},$$

由情形一可知函数$h(x)$的定义域不能延拓到正无穷，于是函数$y(x) = h(-x)$定义域不能延拓到负无穷.