第十一届全国大学生数学竞赛决赛试题

(数学类低年级组)

一、填空题(每小题 5 分，共 20 分)

1、$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=n}^{3n-1}k\right)^{\frac{1}{2n}}\sin\dfrac{1}{n}=$________.

2、已知 f 在区间 $(-1,3)$ 内有二阶连续导数，$f(0)=12, f(2)=2f'(2)+8$，则 $\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x=$________.

3、在三维空间的直角坐标系中，方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2xz=1$ 表示的二次曲面类型是____________.

4、在矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ 的奇异值分解 $A=U\Lambda V$ 中(其中 U,V 为正交方阵，Λ 为对角阵)，$\Lambda=$________________.

二、(本题 15 分) 考虑单叶双曲面 $S: x^2-y^2+z^2=1$.

1、证明：S 上同一族直母线中任意两条不同的直母线是异面直线；

2、设 S 上同一族直母线中的两条直母线分别经过 $M_1(1,1,1)$ 与 $M_2(2,2,1)$ 两点，求这两条直母线的公垂线方程以及这两条直母线之间的距离.

三、(本题 15 分) 设 V 是有限维欧氏空间，V_1,V_2 是 V 的非平凡子空间且 $V=V_1\oplus V_2$. 设 p_1,p_2 分别是 V 到 V_1,V_2 的正交投影，$\varphi=p_1+p_2$，用 $\det\varphi$ 表示线性变换 φ 的行列式. 证明：$0<\det\varphi\le 1$ 且 $\det\varphi=1$ 的充要条件是 V_1 与 V_2 正交.

四、(本题 20 分) 1、证明：函数方程 $x^3-3x=t$ 存在三个在闭区间 $[-2,2]$ 上连续，在开区间 $(-2,2)$ 内连续可微的解 $x=\varphi_1(t), x=\varphi_2(t), x=\varphi_3(t)$ 满足：

$$\varphi_1(-t)=-\varphi_3(t),\varphi_2(-t)=-\varphi_2(t),\quad |t|\le 2.$$

2、若 f 是 $[-2,2]$ 上的连续偶函数，证明：

$$\int_1^2 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}\,x=\int_0^1 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}\,x$$

五、(本题 15 分) 设$n\geq 2$，对于$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，规定$A^0$为$n$阶单位阵$I$，形式定义

$$\sin A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}，\quad \cos A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}$$

以及$\arctan A=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}A^{2k+1}$. 记$||A||\equiv\max\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ ||x||=1}}||Ax||$，其中$||x||\equiv\sqrt{x^Tx}$，证明：

1、 $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n},\sin A,\cos A$均有意义，且$(\sin A)^2+(\cos A)^2=I$.

2、当$||A||<1$时，$\arctan A$有意义，且$\sin\arctan A=A\cos\arctan A$.

六、(本题 15 分) 设m,n为正整数. 证明：当参数$k\neq 0$时，微分方程

$$y'(x)=ky^{2n}(x)+x^{2m-1}$$

的所有解都不是全局解(全局解即指定义在$(-\infty,+\infty)$上的解).