第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《非数学类》试题及参考解答

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(x-\sin x\right)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$________.

【答案】：$-\dfrac{1}{3}$

【参考解答】：由等价无穷小和洛必达法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=-2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=-2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

2、设函数 $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}\left(-1\right)=$________.

【答案】：$\dfrac{n!}{e}$

【参考解答】：【思路一】由莱布尼兹公式，得

$$f^{(n)}(-1)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[(x+1)^n\right]^{(k)}\left(e^{-x^2}\right)^{(n-k)}\Bigg|_{x=-1}$$
$$=C_n^n\left[(x+1)^n\right]^{(n)}\left(e^{-x^2}\right)^{(n-n)}\Bigg|_{x=-1}=n!e^{-1}$$

【思路二】因为 $\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-1}+\alpha$，其中 $\alpha\to0(x\to-1)$，故

$$f(x)=(x+1)^n\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-1}(x+1)^n+o\left((x+1)^n\right)$$

于是由 $f\left(x\right)$ 泰勒公式中泰勒系数的计算公式，得

$$\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}=\mathrm{e}^{-1}\text{，即 }f^{(n)}(-1)=n!\mathrm{e}^{-1}.$$

3、设 $y=f\left(x\right)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f\left(1\right)=1$，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程为________.

【答案】：$y=1$

【参考解答】：等式两端关于 x 求导，得 $\dfrac{\dfrac{y-xy'}{y^2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}$ 即 $(x+y)y'=y-x$，所以 $f'\left(1\right)=0$. 故曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程为 $y=1$.

4、已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

【答案】: $\frac{\pi^2}{8}$

【参考解答】: 令 $u=x+y$，则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+y)}{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)$$
$$=\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

令 $F(x)=\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$，则 $F'(x)=\frac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}$ 代入可得

$$I=\frac{\pi^2}{4}-\int_0^{+\infty}F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}[F(x)]^2\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}$$

5、设 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U,f(x)\neq g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$________.

【答案】: a^a

【参考解答】: 由极限的保号性，存在一个去心邻域 $U_1(0)$，当 $x\in U_1$ 时，$f(x)>0,g(x)>0$. 当 $x\to0$ 时，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，故

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}[g(x)]^{g(x)}\frac{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{e^{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}-1}{f(x)-g(x)}$$
$$=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\left[1+\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)\right]}{f(x)-g(x)}$$
$$=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)}-1\right]}{f(x)-g(x)}=a^a$$

二、(10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)},n\geq1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$.

【参考解答】: 由题设可知 $a_n>0(n\geq1)$. 由于

$$\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=(n+1)+(n+1)\frac{1}{a_n}$$
$$=(n+1)+(n+1)\left(n+n\frac{1}{a_{n-1}}\right)$$
$$=(n+1)+(n+1)n+(n+1)n\frac{1}{a_{n-1}}$$

如此递推可得$\dfrac{1}{a_{n+1}}=(n+1)!\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{a_1}\right)=(n+1)!\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$. 于是可得

$$\lim_{n\to\infty}n!a_n=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}}=\frac{1}{e}$$

三、(12 分) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(x)$在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

(1) 存在$x_0\in(0,1)$使得$f(x_0)=2-3x_0$；

(2) 存在$\xi,\eta\in(0,1)$，且$\xi\neq\eta$，使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

【参考解答】: (1) 令$F(x)=f(x)-2+3x$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且$F(0)=-2$，$F(1)=2$. 于是由介值定理，存在$x_0\in(0,1)$，使得$F(x_0)=0$，即

$$f(x_0)=2-3x_0.$$

(2) 在区间$[0,x_0],[x_0,1]$上利用拉格朗日中值定理，存在$\xi,\eta\in(0,1)$且$\xi\neq\eta$使得

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi),\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=f'(\eta)$$

整理即得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

四、(12 分) 已知$z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中$f,\varphi$均为二阶可微函数.

(1) 求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；　　(2) 当$f=\varphi$，且$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$时，求$f(y)$.

【参考解答】: (1) 由复合函数求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+2y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}+2\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$
$$=-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2x}{y^2}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)$$

(2) 由(1)得 $\frac{y}{a^2}f''\left(\frac{y}{a}\right)+\frac{2a}{y^2}f''\left(\frac{a}{y}\right)=by^2$. 令 $\frac{y}{a}=u$，得

$$\frac{u}{a}f''(u)+\frac{2}{au^2}f''\left(\frac{1}{u}\right)=a^2bu^2$$

即 $u^3f''(u)+2f''\left(\frac{1}{u}\right)=a^3bu^4$. 令 $u=\frac{1}{u}$，得 $2f''\left(\frac{1}{u}\right)+4u^3f''(u)=2a^3b\frac{1}{u}$. 两式求解得 $f''(u)=\frac{a^3b}{3}\left(\frac{2}{u^4}-u\right)$. 两次积分得

$$f(u)=\frac{a^3b}{3}\left(\frac{1}{3u^2}-\frac{u^3}{6}\right)+C_1u+C_2$$

由变量符号描述的无关性，即 $f(y)=\frac{a^3b}{3}\left(\frac{1}{3y^2}-\frac{y^3}{6}\right)+C_1y+C_2$

五、(12 分) 计算 $I=\oint\limits_{\Gamma}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\x^2+y^2=2z\end{cases}$ 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

【参考解答】: **【思路一】** 改写曲线方程可得参数方程为

$$\begin{cases}z=2\\x^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\\z=2\end{cases}$$

其中 $\theta:0\to2\pi$. 由于曲线上 $z=2$，积分定义在积分曲线上，故 $\mathrm{d}z=0$. 于是由曲线积分的直接参数方程计算方法，得

$$\begin{aligned}I&=\oint\limits_{\Gamma}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}|2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta|\,2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=-8\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right|\sin\theta\mathrm{d}\theta-8\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right|\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

令 $\theta+\frac{\pi}{3}=t$，根据周期函数的积分性质，得

$$\begin{aligned}I&=-8\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t=-8\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t\\&=-4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|(\sin t-\sqrt{3}\cos t)\mathrm{d}t=8\sqrt{3}\int_0^{\pi}|\cos t|\cos t\mathrm{d}t\left(u=t-\frac{\pi}{2}\right)\\&=-8\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|\sin u\mathrm{d}u=0\end{aligned}$$

【思路二】 积分曲线方程可表示为$\begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$. 由于曲线上$z=2$，积分定义在积分曲线上，故$\mathrm{d}z=0$. 于是

$$I=\oint_{\Gamma}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x=\oint_{C}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x$$

其中C为xOy面上的圆$x^2+y^2=4$，方向取逆时针方向. C上(x,y)处的法向量为$\vec{n}=\{x,y\},\vec{t}=\{-y,x\}$，且$\vec{t}^0=\left\{-\frac{y}{2},\frac{x}{2}\right\}$. 于是由两类曲线积分之间的关系，得

$$I=\oint_{C}|\sqrt{3}y-x|\left(-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}s$$

由于积分曲线关于原点对称，且被积函数

$$f(x,y)=|\sqrt{3}y-x|\left(-\frac{y}{2}\right)$$

关于x,y变量为奇函数，即$f(-x,-y)=-f(x,y)$，故由对弧长的曲线积分偶倍奇零的计算性质，得$I=0$.

六、(12 分) 证明$f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$等于$n$的所有因子（包 1 和$n$本身）之和，其中$[x+1]$表示不超过$x+1$的最大整数，并计算$f(2021)$.

【参考解答】：由积分对区间的可加性，有

$$\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi nk}{m}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\cos k\frac{2\pi n}{m}$$

如果m是n的因子，则$\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=m$；否则，由三角恒等式，有

$$\sum_{k=1}^{m}\cos kt=\cos\frac{m+1}{2}t\cdot\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

于是得

$$\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\cos\left(\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{m}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}\right)}{\sin\frac{2\pi n}{2m}}=0$$

由此得$f(2021)=1+43+47+2021=2112$.

七、(14 分) 设 $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} \quad (n \geq 1)$.

(1) 证明数列 $\left\{u_n\right\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$；

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛；

(3) 证明当 $p \geq 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

【参考解答】：**(1)** 对任意 $\varepsilon > 0$，取 $0 < a < \frac{\varepsilon}{2}$，将积分区间分成两段，得

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} + \int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n}$$

由于

$$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} \leq \frac{1-a}{\left(1+a^4\right)^n} < \frac{1}{\left(1+a^4\right)^n} \to 0(n \to \infty)$$

所以存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} < \frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$0 \leq u_n < a + \int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(2) 显然 $0 < u_{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^{n+1}} \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} = u_n$，即 u_n 单调递减，又 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，故由莱布尼兹判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛. 又当 $n \geq 2$ 时，有

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} \geq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \frac{1}{n-1}\left(1-2^{1-n}\right)$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛.

(3) 先求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和. 因为

$$
\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} = \left.\frac{t}{\left(1+t^4\right)^n}\right|_0^1 + n\int_0^1 \frac{4t^4}{\left(1+t^4\right)^{n+1}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^n} + 4n\int_0^1 \frac{t^4}{\left(1+t^4\right)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n} + 4n\int_0^1 \frac{1+t^4-1}{\left(1+t^4\right)^{n+1}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^n} + 4n\left(u_n - u_{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n - u_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} + 4u_1
$$

由$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，取$x=-\frac{1}{2}$，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} = \ln 2$，又

$$
u_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}[\pi + 2\ln(1+\sqrt{2})]
$$

故得

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n} = \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}[\pi + 2\ln(1+\sqrt{2})].
$$

由于当$p \geq 1$时，有$\frac{u_n}{n^p} \leq \frac{u_n}{n}$，又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛.