第十一届全国大学生数学竞赛决赛（非数学专业）试题

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}=$______.

2、设函数 $y=f\left(x\right)$ 由方程 $3x-y=2\arctan(y-2x)$ 所确定，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $P\left(1+\dfrac{\pi}{2},3+\pi\right)$ 处的切线方程为____________.

3、设平面曲线 L 的方程为 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$，且通过五个点 $P_1(-1,0),P_2(0,-1),P_3(0,1),P_4(2,-1)$ 和 $P_5(2,1)$， 则 L 上任意两点之间的直线距离最大值为________.

4、设 $f(x)=\left(x^2+2x-3\right)^n\arctan^2\dfrac{x}{3}$， 其中 n 为正整数，则 $f^{(n)}(-3)=$________.

5、设函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)=0$， 且满足

$$\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-8\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}=0$$

则 $f(x)=$______________.

二、（12 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$.

三、（12 分）设 $F\left(x_1,x_2,x_3\right)=\int_0^{2\pi}f\left(x_1+x_3\cos\varphi,x_2+x_3\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$，其中 $f\left(u,v\right)$ 具有二阶连续偏导数. 已知 $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\int_0^{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[f\left(x_1+x_3\cos\varphi,x_2+x_3\sin\varphi\right)\right]\mathrm{d}\varphi$，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[f\left(x_1+x_3\cos\varphi,x_2+x_3\sin\varphi\right)\right]\mathrm{d}\varphi,\quad i=1,2,3$$

试求 $x_3\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}\right)-\dfrac{\partial F}{\partial x_3}$ 并要求化简.

四、（10 分）函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上具有连续导数，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2},\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$$

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=3$.

五、（12 分）设 $B_1,B_2,\cdots,B_{2021}$ 为空间 R^3 中半径不为零的 2021 个球，$A=\left(a_{ij}\right)$ 为 2021 阶方阵，其 (i,j) 元 a_{ij} 为球 B_i 与 B_j 相交部分的体积. 证明：行列式 $|E+A|>1$，其中 E 为单位矩阵.

六、(12 分) 设Ω是由光滑的简单封闭曲面Σ围成的有界闭区域，函数 $f(x,y,z)$在Ω上具有连续二阶偏导数，且$f(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\Sigma}=0$. 记$\nabla f$为$f(x,y,z)$的梯度，并令

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

证明: 对任意常数$C>0$，恒有

$$C\iiint_\Omega f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{C}\iiint_\Omega(\Delta f)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ge 2\iiint_\Omega|\nabla f|^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

七、(12 分) 设$\{u_n\}$是正数列,满足$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{\alpha}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$,其中常数$\alpha>0,\beta>1$.

(1) 对于$v_n=n^\alpha u_n$，判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$的敛散性;

(2) 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

[注: 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，则$a_n=O(b_n)\Leftrightarrow$存在常数 $M>0$ 及正整数N，使得$|a_n|\le M|b_n|$对任意$n>N$成立.]