

第十二届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类高年级组) 试题与参考答案

一、填空题 (本题 20 分, 每小题 5 分)

1、设 $\Omega : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \leq 1$, 则积分

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【参考答案】: $\frac{1424\pi}{15}$

2、设 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{k^2}}{k}, y_n = \int_0^n e^{x^2} dx$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【参考答案】: 2

3、矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【参考答案】: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

4、设 A 为 2021 阶对称矩阵, A 的每一行均为 $1, 2, \dots, 2021$ 的一个排列, 则 A 的迹 $\text{tr } A = \underline{\hspace{2cm}}.$

【参考答案】: 1011×2021

二、(15 分) 给定 yOz 平面上的圆 $C : y = \sqrt{3} + \cos \theta, z = 1 + \sin \theta (\theta \in [0, 2\pi])$.

1、求 C 绕 z 轴旋转所得到的环面 S 的隐式方程.

2、设 $z_0 \geq 0$, 以 $M(0, 0, z_0)$ 为顶点的两个锥面 S_1 和 S_2 的半顶角之差为 $\pi/3$, 且均与环面 S 相切(每条母线都与环面相切), 求 z_0 和 S_1, S_2 的隐式方程.

【参考解答】: 1、由 yOz 平面的圆 C 的参数方程消去参数 θ 可得

$$C : \begin{cases} (y - \sqrt{3})^2 + (z - 1)^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

由此可得绕 z 轴旋转获得的环面 S 的方程

$$(\pm\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{3})^2 + (z - 1)^2 = 1$$

化简得到

$$S: (x^2 + y^2 + (z-1)^2 + 2)^2 = 12(x^2 + y^2).$$

2、记圆 C 的圆心坐标为 $O'(0, \sqrt{3}, 1)$, M 的坐标为 $(0, 0, t)$, M 与圆 C 的两个切点坐标分别为 A, B , 则由两个圆锥半顶角之差为 $\frac{\pi}{3}$ 可得 $\angle O'MA = \angle O'MB = \frac{\pi}{6}$, 进而通过解三角形可得 $t = 0$ 或 $t = 2$.

当 $t = 0$ 时, 得 $M(0, 0, 0)$, 此时切点坐标为 $A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), B(0, \sqrt{3}, 0)$, 锥面 S_1 的母线即为直线 MA , 其方程为 $L_1: \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{3}y - z = 0 \end{cases}$, S_1 即为 L_1 绕 z 轴所得旋转面, 其方程为 $S_1: z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$. 锥面 S_2 的母线即为直线 MB , 其方程为 $L_2: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, S_2 即为 L_2 绕 z 轴所得旋转面, 其方程为 $S_2: z = 0$.

当 $t = 2$ 时, 得 $M(0, 0, 2)$, 此时切点坐标为 $A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), B(0, \sqrt{3}, 2)$, 两条母线的方程分别为

$$L'_1: \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{3}y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ 和 } L'_2: \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

对应的锥面方程为

$$S'_1: z = 2 - \sqrt{3(x^2 + y^2)} \text{ 和 } S'_2: z = 2$$

三、(15 分) 设 n 阶复方阵 A_1, \dots, A_{2n} 均相似于对角阵, \mathbb{C}^n 表示复 n 维列向量空间. 证明:

1、 $\mathbb{C}^n = \ker A_k \oplus \text{Im } A_k$. 这里

$$\ker A_k = \{\alpha \mid A_k \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{C}^n\}, \quad \text{Im } A_k = \{A_k \beta \mid \beta \in \mathbb{C}^n\} \quad (k = 1, \dots, 2n).$$

2、若对所有的 $k < j$ 皆有 $A_k A_j = 0$ ($k, j = 1, 2, \dots, 2n$), 则 A_1, \dots, A_{2n} 中至少有 n 个矩阵为零矩阵.

【参考解答】: 由 A_k 可复对角化可知, 存在可逆矩阵 $P_k = (p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$ 使得

$$A_k P_k = \text{diag}(\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}) P_k$$

不妨设 $p_1^{(k)}, \dots, p_t^{(k)}$ 为关于特征值 0 的特征向量, $p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}$ 为关于特征值 $\lambda \neq 0$ 的特征向量. 于是,

$$\begin{aligned} \ker A_k &= \text{span} \{p_1^{(k)}, \dots, p_t^{(k)}\}, \\ \text{Im } A_k &= \text{span} \{p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}\}. \end{aligned}$$

这里若 A_k 不以 0 为特征值时, $\ker A_k = 0$.

事实上, 若 $\dim \ker A_k > t$, 则特征值 0 的代数重数 $> t$, 矛盾. 从而有

$$\ker A_k = \text{span} \{ p_1^{(k)}, \dots, p_t^{(k)} \}$$

另一方面, $\forall y \in \mathbb{C}^n, y$ 可写成 $y = a_1 p_1^{(k)} + \dots + a_n p_n^{(k)}$, 结果

$$Ay = a_{t+1} \lambda_{t+1}^{(k)} p_{t+1}^{(k)} + \dots + a_n \lambda_n^{(k)} p_n^{(k)} \in \text{span} \{ p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)} \}.$$

从而有 $\text{Im } A_k = \text{span} \{ p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)} \}$, 故有

$$\mathbb{C}^n = \ker A_k \oplus \text{Im } A_k.$$

现由条件 $A_1 A_2 = 0$ 得 $\text{Im } A_2 \subseteq \ker A_1$, 进而有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2) \oplus \text{Im } A_2 \oplus \text{Im } A_1.$$

事实上, 由 $\mathbb{C}^n = \ker A_2 \oplus \text{Im } A_2$ 可知, $\forall u \in \ker A_1, u = u_1 + u_2$, 其中

$$u_1 \in \ker A_2, u_2 \in \text{Im } A_2.$$

又由 $\text{Im } A_2 \subseteq \ker A_1$ 得

$$u_1 = (u - u_2) \in \ker A_2 \cap \ker A_1.$$

结果 $\ker A_1$ 有直和分解:

$$\ker A_1 = (\ker A_2 \cap \ker A_1) \oplus \text{Im } A_2$$

于是 $\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2) \oplus \text{Im } A_2 \oplus \text{Im } A_1$.

利用 $A_1 A_3 = 0, A_2 A_3 = 0$ 及 $\mathbb{C}^n = \ker A_3 \oplus \text{Im } A_3$, 重复前述对 $\ker A_1$ 进行分解的过程又可得

$$\ker A_2 \cap \ker A_1 = (\ker A_3 \cap \ker A_2 \cap \ker A_1) \oplus \text{Im } A_3$$

从而有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2 \cap \ker A_3) \oplus \text{Im } A_3 \oplus \text{Im } A_2 \oplus \text{Im } A_1$$

最后有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \dots \cap \ker A_{2n}) \oplus \text{Im } A_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } A_{2n}$$

两边取维数得

$$n = \dim(\ker A_1 \cap \dots \cap \ker A_{2n}) + \text{rank } A_1 + \dots + \text{rank } A_{2n}$$

因此 $\text{rank } A_1, \dots, \text{rank } A_{2n}$ 中至少有 n 个为 0, 即 A_1, \dots, A_{2n} 中至少有 n 个矩阵为零矩阵. 证毕.

四、(20 分) 称实函数 f 满足条件 (P) : 若 f 在 $[0, 1]$ 上非负连续,

$$f(1) > f(0) = 0, \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = +\infty,$$

且对任何 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 成立 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

1、令 $c > 0$, 对于 $f_1(x) = cx$ 和 $f_2(x) = \sqrt{x}$, 分别验证 f_1, f_2 是否满足条件 (P) , 并

计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_1(x) - x f_1'(x))^m e^{f_1'(x)}$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_2(x) - x f_2'(x))^m e^{f_2'(x)}$.

2、证明: $\forall m \geq 1$, 存在满足条件(P)的函数 f 以及趋于零的正数列 $\{x_n\}$, 使得 f 在每一点 x_n 可导, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - x_n f'(x_n))^m e^{f'(x_n)} = +\infty$.

【参考解答】: 注意到 $f(x) - xf'(x) = -x^2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)'$.

1、易见 f_1, f_2 都在 $[0, 1]$ 上非负连续, $f_1(1) > f_1(0) = 0, f_2(1) > f_2(0) = 0$. 对于

$$x > 0, f_1'(x) = c, f_1''(x) = 0, f_2'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, f_2''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

因此, f_1, f_2 均是 $[0, 1]$ 上的凹函数. 由于

$$\int_0^1 \frac{1}{f_1(x)} dx = +\infty, \int_0^1 \frac{1}{f_2(x)} dx < +\infty$$

所以 f_1 满足条件(P) 而 f_2 不满足条件(P).

另一方面 $f_1(x) - xf_1'(x) \equiv 0$, 因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_1(x) - xf_1'(x))^m e^{f_1'(x)} = 0.$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (f_2(x) - xf_2'(x))^m e^{f_2'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = +\infty.$$

2、从 1 的结果得到提示, 我们用类似函数 \sqrt{x} 与 cx 的函数来构造想要的例子. 注意到对于 $(0, 1]$ 中严格单调下降并趋于零的点列 $\{a_n\}$, 当函数 f 的图像为依次连接 $(a_n, \sqrt{a_n})$ 的折线且 $f(0) = 0$ 时, 条件(P) 成立.

于是, 我们可以尝试寻找这样一系列 $\{a_n\}$ 以及 $x_n \in (a_{n+1}, a_n)$ 以满足题目的要求. 具体地, 取 $a_0 = 1, x_n \in (a_{n+1}, a_n)$ 待定. 我们给出 f 的表达式如下:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a_{n+1}} + k_n(x - a_{n+1}), & x \in (a_{n+1}, a_n]; n \geq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{其中 } k_n = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}.$$

注意到

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{2k_n} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{\sqrt{a_n}}{2} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\text{取 } a_{n+1} = a_n e^{-\frac{2}{n\sqrt{a_n}}}, \text{ 即有 } 0 < a_{n+1} < a_n, \text{ 且 } \int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{f(x)} dx \geq \frac{1}{n}.$$

$$\text{另一方面, 在 } (a_{n+1}, a_n) \text{ 内, } f'(x) = k_n \geq \frac{1}{2\sqrt{a_n}},$$

$$f(x) - xf'(x) = \frac{\sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \geq \frac{\sqrt{a_n} e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}$$

因此, 任取 $x_n \in (a_{n+1}, a_n)$, 均有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - x_n f'(x_n))^m e^{f'(x_n)} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{a_n} e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2} \right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{a_n}}} = +\infty$$

因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - x_n f'(x_n))^m e^{f'(x_n)} = +\infty$.

五、(10 分) 设 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 是 \mathbb{R} 上可测函数列, $f_n^2, f^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) (\forall n \geq 1)$, 且对 $\mathcal{L} - a.e. x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dm = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dm,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^2 dm = 0$.

【参考证明】: 【思路一】 因为 $f^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ 及 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} |f(x)|^2 dm < \varepsilon$$

且对任何可测集 $E \subseteq \mathbb{R}$, 当 $mE < \delta$ 时, 有

$$\int_E |f(x)|^2 dm < \varepsilon.$$

又 $f_n(x) \rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty) \mathcal{L} - a.e. x \in \mathbb{R}$. 由叶果诺夫定理, 存在可测子集 $E_\varepsilon \subseteq [-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$ 使得 $mE_\varepsilon < \delta, \{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon] \setminus E_\varepsilon$ 上一致收敛到 $f(x)$.

令 $E_1 = [-n_\varepsilon, n_\varepsilon] \setminus E_\varepsilon$, 有

$$\int_{E_1} |f_n(x) - f(x)|^2 dm \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

且

$$\int_{E_1} |f_n(x)|^2 dm \rightarrow \int_{E_1} |f(x)|^2 dm, \quad n \rightarrow \infty$$

事实上,

$$f_n(x) \rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty, x \in E_1, mE_1 < \infty),$$

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N$ 以及 $x \in E_1$, 成立

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \int_{E_1} |f_n(x) - f(x)|^2 dm \leq \varepsilon^2 \cdot mE_1,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_1} |f_n(x) - f(x)|^2 dm = 0.$$

又

$$\left| \left(\int_{E_1} |f_n(x)|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_{E_1} |f(x)|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq \left(\int_{E_1} |f_n(x) - f(x)|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}}$$

得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_1} |f_n(x)|^2 dm = \int_{E_1} |f(x)|^2 dm.$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dm = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dm$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_1^c} |f_n(x)|^2 dm = \int_{E_1^c} |f(x)|^2 dm.$$

注意到 $E_1^c = (\mathbb{R} \setminus [-n_\varepsilon, n_\varepsilon]) \cup E_\varepsilon, mE_\varepsilon < \delta$, 得

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x) - f(x)|^2 dm \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_1} |f_n(x) - f(x)|^2 dm \\ & \quad + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_1^c} |f_n(x)|^2 dm + 2 \int_{E_1^c} |f(x)|^2 dm \\ & < 8\varepsilon \end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x) - f(x)|^2 dm = 0.$$

【思路二】 记 $f_0 = f$. 由假设得 $\left\{ \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x) dm \right\}_{n \geq 0}$ 有界. 设 S 为它的一个上界. 任取

$g \in L^2(\mathbb{R})$, 我们要证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x) dm$$

先令 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 其中 $C_c(\mathbb{R})$ 表示 \mathbb{R} 上有紧支集的连续函数全体. 任取 $A > 0$ 以及 $M > 0$ 使得 $\text{supp } g \subseteq [-A, A]$. 记 $E \equiv E_A = [-A, A]$, 则

$$mE(|f_n| > M) \leq \frac{1}{M^2} \int_E |f_n(x)|^2 dm \leq \frac{S}{M^2}$$

于是

$$\begin{aligned} & \left| \int_E f_n(x)g(x) dm - \int_E f(x)g(x) dm \right| \\ & \leq \frac{2S}{M} \|g\|_\infty + \left| \int_E g\tilde{f}_{n,M} dm - \int_E g\tilde{f}_{0,M} dm \right| \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{f}_{n,M}(x) = \begin{cases} f_n(x), & |f_n(x)| \leq M \\ M, & f_n(x) > M \\ -M, & f_n(x) < -M \end{cases}$$

注意到 $\tilde{f}_{n,M} \rightarrow \tilde{f}_{0,M}(x), a.e. x \in \mathbb{R}$, 结合控制收敛定理, 我们有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_E f_n(x)g(x) dm - \int_E f(x)g(x) dm \right| \leq \frac{2S}{M} \|g\|_\infty$$

于是由 $M > 0$ 的任意性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)g(x) dm = \int_E f(x)g(x) dm.$$

注意到 $\text{supp } g \subseteq [-A, A]$, 即(1)对于 $g \in C_c(\mathbb{R})$ 成立.

由 $C_c(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的稠密性可得对任何 $g \in L^2(\mathbb{R})$, (1) 成立. 最后得到

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^2 dm \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (f_n^2(x) + f^2(x) - 2f_n(x)f(x)) dm \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f^2(x) + f^2(x) - 2f(x)f(x)) dm = 0. \end{aligned}$$

六、(10 分) 设函数列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 G 上解析, 且在 G 中内闭一致收敛于函数 $f(z)$.

证明:

1、若 $f(z)$ 不恒为零, l 是 G 内可求长的简单闭曲线, 其内部属于 G , 且不经过 $f(z)$ 的零点, 则存在正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时, 在 l 的内部 $f_n(z)$ 和 $f(z)$ 有相同个数的零点;

2、若 $\{f_n(z)\}$ 在区域 G 内还是单叶的, $f(z)$ 不为常数, 则 $f(z)$ 在 G 内单叶解析.

【参考证明】: 1、由 Weierstrass 定理, $f(z)$ 在 G 内解析. 因 $f(z)$ 在 l 上不为零, 所以

$$\min_{z \in l} |f(z)| = m > 0.$$

又 $\{f_n(z)\}$ 在 l 上一致收敛到 $f(z)$, 存在正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时, 在 l 上有

$$|f_n(z) - f(z)| < m$$

即当 $n \geq N$ 时, 在 l 上有 $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$. 由 Rouché 定理, 在 l 的内部, $f_n(z)$ 和 $f(z)$ 有相同个数的零点.

2、反证法. 若 $f(z)$ 在 G 内不是单叶的, 那么在 G 内至少存在两点 z_1 和 z_2 ($z_1 \neq z_2$) 使得 $f(z_1) = f(z_2)$. 令 $F_n(z) = f_n(z) - f(z_1)$, 则 $\{F_n(z)\}$ 在 G 内闭一致收敛于不恒为零的解析函数 $F(z) = f(z) - f(z_1)$.

在 G 内分别以 z_1, z_2 为心, 作不交且外离的两个小圆

$$C_1: |z - z_1| = r_1 \text{ 和 } C_2: |z - z_2| = r_2.$$

由第 1 部分结论, 存在正整数 N , 使当 $n \geq N$ 时, $F_n(z)$ 在 C_1 与 C_2 的内部与 $F(z)$ 有相同个数的零点, 即在 C_1 与 C_2 内分别存在 z_1^* 与 z_2^* , 使

$$f(z_1^*) = f_n(z_2^*) = f_n(z_1).$$

这与 $f_n(z)$ 在 G 内单叶矛盾.

七、(10 分) 设 R 为有单位元的交换环, $R[x]$ 是 R 上的一元多项式环,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x].$$

证明: $f(x)$ 在环 $R[x]$ 中可逆当且仅当 a_0 在 R 中可逆且 a_1, \dots, a_n 均为 R 中的幂零元.

【参考证明】: 先证充分性. 由于 a_0 可逆, 记

$$b_i = a_0^{-1}a_i, 1 \leq i \leq n, g(x) = b_1x + \cdots + b_nx^n.$$

则有 $f(x) = a_0(1 + g(x))$. 对任意 $1 \leq i \leq n, a_i$ 幂零, 故存在正整数 m_i 使得

$a_i^{m_i} = 0$. 令 $N = \max\{m_1, \dots, m_n\}$, 则有 $a_i^N = 0$, 从而 $b_i^N = a_0^{-N} a_i^N = 0$. 由于

$$g(x)^{nN} = (b_1 x + \dots + b_n x^n)^{nN}$$

展开式中任一项系数形如

$$\frac{(nN)!}{k_1! \dots k_n!} b_1^{k_1} \dots b_n^{k_n}$$

其中 $0 \leq k_1, \dots, k_n \leq nN$ 且 $k_1 + \dots + k_n = nN$, 从而必存在某个 k_j 使得 $k_j \geq N$. 由此 $b_j^{k_j} = 0$, 从而 $g(x)^{nN} = 0$. 于是

$$\begin{aligned} f(x) \cdot a_0^{-1} (-g(x) + g(x)^2 - \dots + (-1)^{nN-1} g(x)^{nN-1}) \\ = 1 + (-1)^{nN-1} g(x)^{nN} = 1 \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $R[x]$ 中可逆.

为证明必要性, 首先证明如下论断: 若 $a \in R$ 不是幂零元, 则存在 R 的素理想 P 使得 $a \notin P$. 事实上, 考虑集合

$$S = \{I \mid I \text{ 是 } R \text{ 的理想且 } I \cap \{a, a^2, \dots\} = \emptyset\}.$$

由于 a 不是幂零元, 显然 R 的零理想 $(0) \in S$, 因此 S 非空. S 按照集合的包含关系成为一个偏序集, 任取 S 的一个链 (全序子集) $T = \{I_\alpha \mid \alpha \in J\}$, 其中 J 为指标集. 令 $A = \bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha$, 则 A 是 R 的理想且 $A \cap \{a, a^2, \dots\} = \emptyset$, 即 $A \in S$. 显然 A 为链 T

的上界, 根据 Zorn 引理, 偏序集 S 有极大元 P . 显然 $a \notin P$, 下面证明 P 为 R 的素理想. 反之, 若存在 $u, v \in R \setminus P$, 但是 $uv \in P$. 由 P 的极大性, 理想 $(u) + P$ 和 $(v) + P$ 均不在 S 中, 从而存在正整数 s 和 t 使得 $a^s \in (u) + P$, $a^t \in (v) + P$. 设 $a^s = uy + p_1, a^t = vz + p_2$, 其中 $y, z \in R, p_1, p_2 \in P$, 则有

$$a^{s+t} = (uy + p_1)(vz + p_2) = (uv)yz + (uy)p_2 + p_1(vz) + p_1p_2,$$

由 $uv, p_1, p_2 \in P$ 得到 $a^{s+t} \in P$, 与 $P \in S$ 矛盾.

下面证明必要性. 由于 $f(x)$ 可逆, 故存在 $h(x) \in R[x]$ 使得 $f(x)h(x) = 1$.

设 $h(x)$ 的常数项为 h_0 , 从而 $a_0 h_0 = 1$, 故 a_0 在 R 中可逆. 任取 R 的一个素理想 P , 对于 $a \in R$, 用 \bar{a} 表示 a 在自然同态 $\eta: R \rightarrow \bar{R} = R/P$ 下的像, 即

$$\bar{a} = \eta(a) = a + P.$$

记 $\bar{f}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \dots + \bar{a}_n x^n \in \bar{R}[x]$ 为 $f(x)$ 在自然同态 η 下诱导出来的像, 由 $f(x)h(x) = 1$ 可得 $\bar{f}(x)\bar{h}(x) = \bar{1}$, 所以 $\bar{f}(x)$ 在 $\bar{R}[x]$ 中可逆. 由于 P 为素理想, \bar{R} 为整环, 即 $\bar{f}(x)$ 是整环上的可逆多项式, 所以 $\bar{f}(x) = \bar{a}_0$ 为 \bar{R} 中的可逆元, 从而对于任意 $1 \leq i \leq n$ 有 $\bar{a}_i = \bar{0}$, 即 $a_i \in P$, 故 a_i 包含在 R 的所有素理想中, 所以 a_i 为幂零元.

八、(10 分) 设 $S: r = (x, y, h(x, y))$ 为三维欧氏空间中的光滑曲面, $h(x, y)$ 是关于 x, y 的光滑函数.

1、求 S 的平均曲率的表达式.

2、设 S 为极小曲面, 当 $h(x, y) = f(x) + g(y)$ 时, 求 $h(x, y)$ 的表达式, 其中函数 f, g 均为光滑函数.

【参考解答】: 1、经计算可得

$$\begin{aligned} r_x &= (1, 0, h_x), r_y = (0, 1, h_y), \\ r_{xx} &= (0, 0, h_{xx}), r_{xy} = (0, 0, h_{xy}), r_{yy} = (0, 0, h_{yy}). \end{aligned}$$

经计算可得 S 的单位法向量

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{|\vec{r}_x \times \vec{r}_y|} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} (-h_x, -h_y, 1)$$

以及 S 的第一基本形式系数和第二基本形式的系数

$$\begin{aligned} E &= r_x \cdot r_x = 1 + h_x^2, F = r_x \cdot r_y = h_x h_y, G = r_y \cdot r_y = 1 + h_y^2, \\ L &= r_{xx} \cdot n = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}, M = r_{xy} \cdot n = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}, \\ N &= r_{yy} \cdot n = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \end{aligned}$$

于是, 可得 S 的平均曲率

$$\begin{aligned} H &= \frac{LG - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{h_{xx}(1 + h_y^2) - 2h_x h_y h_{xy} + h_{yy}(1 + h_x^2)}{2(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

2、当 $h(x, y) = f(x) + g(y)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} h_x &= f'(x), h_y = g'(y), h_{xx} = f''(x), \\ h_{xy} &= 0, h_{yy} = g''(y) \end{aligned}$$

于是, 我们有

$$H = \frac{f''(x)(1 + (g'(y))^2) + g''(y)(1 + (f'(x))^2)}{2(1 + (f'(x))^2 + (g'(y))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

当 S 为极小曲面, 即 $H \equiv 0$ 时, 得到

$$f''(x)(1 + (g'(y))^2) + g''(y)(1 + (f'(x))^2) = 0,$$

即

$$\frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2} = -\frac{g''(y)}{1 + (g'(y))^2}$$

根据 (1), 我们设

$$\frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2} = c$$

其中 c 为常数. 求解上述方程我们得到

$$f(x) = -\frac{1}{c} \ln \cos(cx + d),$$

$$g(y) = \frac{1}{c} \ln \cos(cy + b),$$

其中 d, b 是常数. 于是得到

$$h(x, y) = \frac{1}{c} \ln \frac{\cos(cy + b)}{\cos(cx + d)}.$$

当 $c = 0$ 时, 我们得到 $f''(x) = g''(y) = 0$. 此时, 我们有

$$f(x) = a_1 x + b_1, g(y) = a_2 y + b_2,$$

其中 a_1, a_2, b_1, b_2 都是常数. 于是, $h(x, y) = a_1 x + a_2 y + b_1 + b_2$.

九、(10 分) 设有一列盒子, 已知第 k 个盒子中有 k 个球, 其中 1 个是红球, 另外 $k - 1$ 个是白球. 现从前 n 个盒子中各取一球, 记 S_n 表示取出的 n 个球中红球的个数. 证明:

- 1、 $\frac{S_n}{\ln(n)}$ 依概率收敛于 1;
- 2、 $\frac{S_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}$ 依分布收敛于标准正态分布 $N(0, 1)$;
- 3、对任意 $r > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\frac{|S_n - \ln(n)|^r}{\ln^r(n) + |S_n - \ln(n)|^r} \right) = 0$.

【参考证明】: 1、对于 $k = 1, 2, \dots, n$, 记

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{从第 } k \text{ 个盒子中取出红球} \\ 0, & \text{从第 } k \text{ 个盒子中取出白球} \end{cases}$$

则 X_k 独立且服从 $0 - 1$ 分布 $B\left(1, \frac{1}{k}\right)$, 并且 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. 只需证明, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

事实上

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) &= P(|S_n - \ln(n)| \geq \varepsilon \ln(n)) \\ &\leq \frac{E(S_n - \ln(n))^2}{\varepsilon^2 \ln^2(n)} = \frac{\text{Var}(S_n) + (ES_n - \ln(n))^2}{\varepsilon^2 \ln^2(n)} \\ \text{Var}(S_n) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

并且 $ES_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. 注意 $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$ 蕴含

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1, \ln(n) + \frac{1}{n} \leq ES_n \leq \ln(n) + 1$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{\ln^2(n)} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(ES_n - \ln(n))^2}{\ln^2(n)} = 0.$$

故 $P\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$.

2、注意 $\frac{S_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\ln(n)}} + \frac{ES_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}$. 由

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq ES_n \leq \ln(n) + 1$$

知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ES_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} = 0$. 故应用 $\frac{\text{Var}(S_n)}{\ln(n)} \rightarrow 1$, 只需证明 $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}$ 依分布收敛

于标准正态分布 $N(0,1)$.

【思路一】验证李雅普诺夫 (Lyapunov) 条件成立, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{1}{(\text{Var}(S_n))^2} \sum_{k=1}^n E(X_k - EX_k)^4 \rightarrow 0$$

事实上, 由于

$$\sum_{k=1}^n E(X_k - EX_k)^4 = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 - \frac{1}{k}\right)^4 \frac{1}{k} + \frac{1}{k^4} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \right\} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k},$$

且 $\frac{\text{Var}(S_n)}{\ln(n)} \rightarrow 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\text{Var}(S_n))^2} \sum_{k=1}^n E(X_k - EX_k)^4 = 0.$$

【思路二】验证下列林德贝格 (Lindeberg) 条件成立, 即对任意 $\tau > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{\text{Var}(S_n)} \sum_{k=1}^n E\left\{(X_k - EX_k)^2 I(|X_k - EX_k| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)})\right\} \rightarrow 0$$

或

$$\frac{1}{\text{Var}(S_n)} \sum_{k=1}^n \int_{|x - EX_k| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)}} (x - EX_k)^2 dF_k(x) \rightarrow 0$$

其中 $F_k(x) = P(X_k \leq x)$.

事实上, 由于 $\text{Var}(S_n) \rightarrow \infty$, 所以当 n 较大时, 对

$$1 \leq k \leq n, I(|X_k - EX_k| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)}) = 0$$

故

$$\frac{1}{\text{Var}(S_n)} \sum_{k=1}^n E \left\{ (X_k - EX_k)^2 I(|X_k - EX_k| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)}) \right\} \rightarrow 0$$

3、注意 $E \left(\frac{|S_n - \ln(n)|^r}{\ln^r(n) + |S_n - \ln(n)|^r} \right) = E \left(\frac{\left| \frac{S_n}{\ln(n)} - 1 \right|^r}{1 + \left| \frac{S_n}{\ln(n)} - 1 \right|^r} \right)$. 由 1 小题知, 对任意

$$\varepsilon > 0, P \left(\left| \frac{S_n}{\ln(n)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0.$$

记 $\frac{S_n}{\ln(n)} - 1$ 的分布函数为 $F_n(x) = P \left(\frac{S_n}{\ln(n)} - 1 \leq x \right)$. 由于函数 $g(x) = \frac{|x|^r}{1 + |x|^r}$

在 $[0, \infty)$ 上是单调非降函数, 所以

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\left| \frac{S_n}{\ln(n)} - 1 \right|^r}{1 + \left| \frac{S_n}{\ln(n)} - 1 \right|^r} \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^r}{1 + |x|^r} dF_n(x) \\ &= \left(\int_{|x| \leq \varepsilon} + \int_{|x| > \varepsilon} \right) \frac{|x|^r}{1 + |x|^r} dF_n(x) \leq \frac{\varepsilon^r}{1 + \varepsilon^r} + \int_{|x| > \varepsilon} dF_n(x) \\ &= \frac{\varepsilon^r}{1 + \varepsilon^r} + P \left(\left| \frac{S_n}{\ln(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right). \end{aligned}$$

于是由 ε 的任意性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\frac{|S_n - \ln(n)|^r}{\ln^r(n) + |S_n - \ln(n)|^r} \right) \rightarrow 0.$$

十、(10 分) 考虑求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的下列数值格式:

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = h(b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + b_2 f_{n-2}),$$

其中 a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 为常数, $f_j = f(x_j, y_j), j = n-2, n-1, n$.

- 1、确定常数 a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 , 使得上述数值格式具有尽可能高阶的精度;
- 2、分析上一步得到的数值格式的稳定性与收敛性.

【参考解答】: 定义算子 L 如下:

$$L(y(x)) := y(x) + a_1 y(x-h) + a_2 y(x-2h) - h(b_0 y'(x) + b_1 y'(x-h) + b_2 y'(x-2h)).$$

将 y, y' 在 x 处做 Taylor 展开可以得到:

$$\begin{aligned} L(y(x)) &= y(x) + a_1 \left(\sum_{j=0}^k \frac{(-h)^j}{j!} y^{(j)}(x) + \frac{(-h)^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi_1) \right) \\ &\quad + a_2 \left(\sum_{j=0}^k \frac{(-2h)^j}{j!} y^{(j)}(x) + \frac{(-2h)^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi_2) \right) \\ &\quad - b_0 h y'(x) - b_1 h \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-h)^j}{j!} y^{(j+1)}(x) + \frac{(-h)^k}{k!} y^{(k+1)}(\eta_1) \right) \\ &\quad - b_2 h \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-2h)^j}{j!} y^{(j+1)}(x) + \frac{(-2h)^k}{k!} y^{(k+1)}(\eta_2) \right) \\ &= (1 + a_1 + a_2) y(x) - (a_1 + 2a_2 + b_0 + b_1 + b_2) h y'(x) \\ &\quad + \sum_{j=2}^k (a_1 + 2^j a_2 + j b_1 + 2^{j-1} j b_2) \frac{(-h)^j}{j!} y^{(j)}(x) + O(h^{k+1}) \\ &:= \sum_{j=0}^k d_j (-h)^j / j! y^{(j)}(x) + O(h^{k+1}). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} d_0 &:= 1 + a_1 + a_2, \quad d_1 := a_1 + 2a_2 + b_0 + b_1 + b_2, \\ d_j &:= a_1 + 2^j a_2 + j b_1 + 2^{j-1} j b_2 = 0, \quad j = 2, 3, 4 \end{aligned}$$

令 $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$, 解得

$$a_1 = 0, a_2 = -1, b_0 = 1/3, b_1 = 4/3, b_2 = 1/3$$

此时 $d_5 = 4/3 \neq 0$. 因此格式的最高精度是 4 阶, 所求格式为:

$$y_n - y_{n-2} = \frac{1}{3} (f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

2、对上述格式, 令 $p(z) = z^2 - 1, q(z) = \frac{1}{3}(z^2 + 4z + 1)$. $p(z) = 0$ 的两个根 ± 1 的模长为 1, 且均为单根, 故格式稳定. 另一方面, $p(1) = 0$ 且 $p'(1) = q(1) = 2$, 因此格式相容, 进而收敛.



考研竞赛数学(ID:xwmath)
 一个专注于大学数学公共基础课
 资源分享的微信公众平台
 高等数学, 线性代数
 概率论与数理统计
 考研数学, 竞赛数学
 数学文化, 实验与建模
 大学学习、生活历程
 因为专业, 所以精彩