

第十二届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类低年级组) 试题与参考答案

一、填空题 (本题 20 分, 每小题 5 分)

1、设 $\Omega : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \leq 1$, 则积分

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【参考答案】: $\frac{1424\pi}{15}$

2、设 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{k^2}}{k}, y_n = \int_0^n e^{x^2} dx$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【参考答案】: 2

3、矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【参考答案】: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

4、设 A 为 2021 阶对称矩阵, A 的每一行均为 $1, 2, \dots, 2021$ 的一个排列, 则 A 的迹 $\text{tr } A = \underline{\hspace{2cm}}.$

【参考答案】: 1011×2021

二、(15 分) 给定 yOz 平面上的圆 $C : y = \sqrt{3} + \cos \theta, z = 1 + \sin \theta (\theta \in [0, 2\pi])$.

1、求 C 绕 z 轴旋转所得到的环面 S 的隐式方程.

2、设 $z_0 \geq 0$, 以 $M(0, 0, z_0)$ 为顶点的两个锥面 S_1 和 S_2 的半顶角之差为 $\pi/3$, 且均与环面 S 相切(每条母线都与环面相切), 求 z_0 和 S_1, S_2 的隐式方程.

【参考解答】: 1、由 yOz 平面的圆 C 的参数方程消去参数 θ 可得

$$C : \begin{cases} (y - \sqrt{3})^2 + (z - 1)^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

由此可得绕 z 轴旋转获得的环面 S 的方程

$$(\pm\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{3})^2 + (z - 1)^2 = 1$$

化简得到

$$S: (x^2 + y^2 + (z-1)^2 + 2)^2 = 12(x^2 + y^2).$$

2、记圆 C 的圆心坐标为 $O'(0, \sqrt{3}, 1)$, M 的坐标为 $(0, 0, t)$, M 与圆 C 的两个切点坐标分别为 A, B , 则由两个圆锥半顶角之差为 $\frac{\pi}{3}$ 可得 $\angle O'MA = \angle O'MB = \frac{\pi}{6}$, 进而通过解三角形可得 $t = 0$ 或 $t = 2$.

当 $t = 0$ 时, 得 $M(0, 0, 0)$, 此时切点坐标为 $A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), B(0, \sqrt{3}, 0)$, 锥面 S_1 的母线即为直线 MA , 其方程为 $L_1: \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{3}y - z = 0 \end{cases}$, S_1 即为 L_1 绕 z 轴所得旋转面, 其方程为 $S_1: z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$. 锥面 S_2 的母线即为直线 MB , 其方程为 $L_2: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, S_2 即为 L_2 绕 z 轴所得旋转面, 其方程为 $S_2: z = 0$.

当 $t = 2$ 时, 得 $M(0, 0, 2)$, 此时切点坐标为 $A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), B(0, \sqrt{3}, 2)$, 两条母线的方程分别为

$$L'_1: \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{3}y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ 和 } L'_2: \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

对应的锥面方程为

$$S'_1: z = 2 - \sqrt{3(x^2 + y^2)} \text{ 和 } S'_2: z = 2$$

三、(15 分) 设 n 阶复方阵 A_1, \dots, A_{2n} 均相似于对角阵, \mathbb{C}^n 表示复 n 维列向量空间. 证明:

1、 $\mathbb{C}^n = \ker A_k \oplus \text{Im } A_k$. 这里

$$\ker A_k = \{\alpha \mid A_k \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{C}^n\}, \text{Im } A_k = \{A_k \beta \mid \beta \in \mathbb{C}^n\} (k = 1, \dots, 2n).$$

2、若对所有的 $k < j$ 皆有 $A_k A_j = 0 (k, j = 1, 2, \dots, 2n)$, 则 A_1, \dots, A_{2n} 中至少有 n 个矩阵为零矩阵.

【参考解答】: 由 A_k 可复对角化可知, 存在可逆矩阵 $P_k = (p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$ 使得

$$A_k P_k = \text{diag}(\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}) P_k$$

不妨设 $p_1^{(k)}, \dots, p_t^{(k)}$ 为关于特征值 0 的特征向量, $p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}$ 为关于特征值 $\lambda \neq 0$ 的特征向量. 于是,

$$\begin{aligned} \ker A_k &= \text{span} \{p_1^{(k)}, \dots, p_t^{(k)}\}, \\ \text{Im } A_k &= \text{span} \{p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}\}. \end{aligned}$$

这里若 A_k 不以 0 为特征值时, $\ker A_k = 0$.

事实上，若 $\dim \ker A_k > t$ ，则特征值 0 的代数重数 $> t$ ，矛盾。从而有

$$\ker A_k = \text{span} \{ p_1^{(k)}, \dots, p_t^{(k)} \}$$

另一方面， $\forall y \in \mathbb{C}^n, y$ 可写成 $y = a_1 p_1^{(k)} + \dots + a_n p_n^{(k)}$ ，结果

$$Ay = a_{t+1} \lambda_{t+1}^{(k)} p_{t+1}^{(k)} + \dots + a_n \lambda_n^{(k)} p_n^{(k)} \in \text{span} \{ p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)} \}.$$

从而有 $\text{Im } A_k = \text{span} \{ p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)} \}$ ，故有

$$\mathbb{C}^n = \ker A_k \oplus \text{Im } A_k.$$

现由条件 $A_1 A_2 = 0$ 得 $\text{Im } A_2 \subseteq \ker A_1$ ，进而有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2) \oplus \text{Im } A_2 \oplus \text{Im } A_1.$$

事实上，由 $\mathbb{C}^n = \ker A_2 \oplus \text{Im } A_2$ 可知， $\forall u \in \ker A_1, u = u_1 + u_2$ ，其中

$$u_1 \in \ker A_2, u_2 \in \text{Im } A_2.$$

又由 $\text{Im } A_2 \subseteq \ker A_1$ 得

$$u_1 = (u - u_2) \in \ker A_2 \cap \ker A_1.$$

结果 $\ker A_1$ 有直和分解：

$$\ker A_1 = (\ker A_2 \cap \ker A_1) \oplus \text{Im } A_2$$

于是 $\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2) \oplus \text{Im } A_2 \oplus \text{Im } A_1$ 。

利用 $A_1 A_3 = 0, A_2 A_3 = 0$ 及 $\mathbb{C}^n = \ker A_3 \oplus \text{Im } A_3$ ，重复前述对 $\ker A_1$ 进行分解的过程又可得

$$\ker A_2 \cap \ker A_1 = (\ker A_3 \cap \ker A_2 \cap \ker A_1) \oplus \text{Im } A_3$$

从而有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2 \cap \ker A_3) \oplus \text{Im } A_3 \oplus \text{Im } A_2 \oplus \text{Im } A_1$$

最后有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \dots \cap \ker A_{2n}) \oplus \text{Im } A_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } A_{2n}$$

两边取维数得

$$n = \dim(\ker A_1 \cap \dots \cap \ker A_{2n}) + \text{rank } A_1 + \dots + \text{rank } A_{2n}$$

因此 $\text{rank } A_1, \dots, \text{rank } A_{2n}$ 中至少有 n 个为 0，即 A_1, \dots, A_{2n} 中至少有 n 个矩阵为零矩阵。证毕。

四、(20 分) 称实函数 f 满足条件 (P) ：若 f 在 $[0, 1]$ 上非负连续，

$$f(1) > f(0) = 0, \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = +\infty,$$

且对任何 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 成立 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 。

1、令 $c > 0$ ，对于 $f_1(x) = cx$ 和 $f_2(x) = \sqrt{x}$ ，分别验证 f_1, f_2 是否满足条件 (P) ，并

计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_1(x) - x f_1'(x))^m e^{f_1'(x)}$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_2(x) - x f_2'(x))^m e^{f_2'(x)}$ 。

2、证明: $\forall m \geq 1$, 存在满足条件(P)的函数 f 以及趋于零的正数列 $\{x_n\}$, 使得 f 在每一点 x_n 可导, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - x_n f'(x_n))^m e^{f'(x_n)} = +\infty$.

【参考解答】: 注意到 $f(x) - xf'(x) = -x^2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)'$.

1、易见 f_1, f_2 都在 $[0, 1]$ 上非负连续, $f_1(1) > f_1(0) = 0, f_2(1) > f_2(0) = 0$. 对于

$$x > 0, f_1'(x) = c, f_1''(x) = 0, f_2'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, f_2''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

因此, f_1, f_2 均是 $[0, 1]$ 上的凹函数. 由于

$$\int_0^1 \frac{1}{f_1(x)} dx = +\infty, \int_0^1 \frac{1}{f_2(x)} dx < +\infty$$

所以 f_1 满足条件(P) 而 f_2 不满足条件(P).

另一方面 $f_1(x) - xf_1'(x) \equiv 0$, 因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_1(x) - xf_1'(x))^m e^{f_1'(x)} = 0.$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (f_2(x) - xf_2'(x))^m e^{f_2'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = +\infty.$$

2、从 1 的结果得到提示, 我们用类似函数 \sqrt{x} 与 cx 的函数来构造想要的例子. 注意到对于 $(0, 1]$ 中严格单调下降并趋于零的点列 $\{a_n\}$, 当函数 f 的图像为依次连接 $(a_n, \sqrt{a_n})$ 的折线且 $f(0) = 0$ 时, 条件(P) 成立.

于是, 我们可以尝试寻找这样一系列 $\{a_n\}$ 以及 $x_n \in (a_{n+1}, a_n)$ 以满足题目的要求. 具体地, 取 $a_0 = 1, x_n \in (a_{n+1}, a_n)$ 待定. 我们给出 f 的表达式如下:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a_{n+1}} + k_n(x - a_{n+1}), & x \in (a_{n+1}, a_n]; n \geq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{其中 } k_n = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}.$$

注意到

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{2k_n} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{\sqrt{a_n}}{2} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\text{取 } a_{n+1} = a_n e^{-\frac{2}{n\sqrt{a_n}}}, \text{ 即有 } 0 < a_{n+1} < a_n, \text{ 且 } \int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{f(x)} dx \geq \frac{1}{n}.$$

$$\text{另一方面, 在 } (a_{n+1}, a_n) \text{ 内, } f'(x) = k_n \geq \frac{1}{2\sqrt{a_n}},$$

$$f(x) - xf'(x) = \frac{\sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \geq \frac{\sqrt{a_n} e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}$$

因此, 任取 $x_n \in (a_{n+1}, a_n)$, 均有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - x_n f'(x_n))^m e^{f'(x_n)} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{a_n} e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2} \right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{a_n}}} = +\infty$$

因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - x_n f'(x_n))^m e^{f'(x_n)} = +\infty$.

五、(15分) 设 $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 和 A 均为实数. 回答以下问题:

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\alpha + \beta) = A$ 成立的充要条件是什么?

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(n\alpha_1 + \beta_1) + \sin(n\alpha_2 + \beta_2)) = 0$ 成立的充要条件是什么?

【参考解答】: 为方便引用, 标记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\alpha + \beta) = A \quad (1)$$

以及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(n\alpha_1 + \beta_1) + \sin(n\alpha_2 + \beta_2)) = 0 \quad (2)$$

【思路一】: 我们给出如下答案.

1、满足的条件为:

$$\sin \alpha = 0, \sin \beta = A, \sin(\alpha + \beta) = A.$$

2、满足的条件为:

$$\sin \alpha_2 = \pm \sin \alpha_1 \neq 0, \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) = 1, 1 \pm \cos(\beta_1 \mp \beta_2) = 0.$$

解答过程.

1、条件(1)等价于

$$\sin((n+2)\alpha + \beta) \rightarrow A, n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

(3)-(1)并整理得到

$$\sin \alpha \cos(n\alpha + \beta) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (4)$$

同理可得

$$\sin^2 \alpha \sin(n\alpha + \beta) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

上式和(4)表明, 必有 $\sin \alpha = 0$, 否则

$$\sin(n\alpha_1 + \beta_1) \rightarrow 0, \cos(n\alpha_1 + \beta_1) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

而矛盾. 再由 (1) 等价于

$$\sin(2n\alpha_1 + \beta_1) \rightarrow A, \sin(2n\alpha_1 + \alpha + \beta_1) \rightarrow A$$

得到

$$\sin \alpha_1 = 0, \sin \beta_1 = \sin(\alpha_1 + \beta_1) = A.$$

故 (1) 成立.

2、再来证明结论 2. 条件 (2) 等价于

$$\sin((n+2)\alpha_1 + \beta_1) + \sin((n+2)\alpha_2 + \beta_2) \rightarrow 0. \quad (5)$$

(5) - (2) 并整理, 得到

$$\sin \alpha_1 \cos(n\alpha_1 + \beta_1) + \sin \alpha_2 \cos(n\alpha_2 + \beta_2) \rightarrow 0. \quad (6)$$

同理, 可得

$$\sin^2 \alpha_1 \sin(n\alpha_1 + \beta_1) + \sin^2 \alpha_2 \sin(n\alpha_2 + \beta_2) \rightarrow 0. \quad (7)$$

(2) 乘以 $\sin^2 \alpha_2$, 减去(7), 得到

$$(\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1) \sin(n\alpha_1 + \beta_1) \rightarrow 0$$

故必有 $\sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1$, 于是有

$$\sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1 = 0 \text{ 或者 } \sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1 \neq 0.$$

若 $\sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1 = 0$, 即 $\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 = 0$, 代入 (2) 即得

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = 0, \sin \beta_1 + \sin \beta_2 = \sin(\alpha_1 + \beta_1) + \sin(\alpha_2 + \beta_2) = 0$$

若 $\sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1 \neq 0$, 则 $\sin \alpha_2 = \pm \sin \alpha_1 \neq 0$, 由 (6) 和 (7) 得

$$\begin{aligned} \sin(n\alpha_1 + \beta_1) + \sin(n\alpha_2 + \beta_2) &\rightarrow 0 \\ \cos(n\alpha_1 + \beta_1) \pm \cos(n\alpha_2 + \beta_2) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

上两式等价于右边平方和超于 0, 即

$$A_1^2 + A_2^2 \pm 2A_1A_2 \cos(n(\alpha_1 \mp \alpha_2) + (\beta_1 \mp \beta_2)) \rightarrow 0.$$

$$\leftrightarrow \text{由题(1), (1), } \sin \alpha_2 = \pm \sin \alpha_1 \neq 0$$

$$\sin(\alpha_1 \mp \alpha_2) = 0, \Rightarrow \alpha_1 \mp \alpha_2 = 2p\pi$$

$$1 \pm \cos(\beta_1 \mp \beta_2) = 0$$

从而 (2) 成立的条件是

$$\sin \alpha_2 = \pm \sin \alpha_1 \neq 0, \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) = 1, 1 \pm \cos(\beta_1 \mp \beta_2) = 0.$$

【思路二】: 问题 1 和 2 都可以视为如下问题的特例:

设 $m \geq 2, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 均为实数, C_1, C_2, \dots, C_m 均为非零复数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m C_j e^{ni\lambda_j} = 0$$

成立的充要条件是什么.

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m C_j e^{ni\lambda_j} = 0, \text{ 则对任何 } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ 均有}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m C_j e^{ni(\lambda_j - \lambda)} = 0.$$

进一步, 由 Stolz 公式.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n C_j e^{ki(\lambda_j - \lambda)} = 0. \quad (8)$$

我们断言, $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ 之中必有一个, 设为 λ_ℓ 使得 $e^{i(\lambda_\ell - \lambda_1)} = 1$, 即 $\frac{\lambda_\ell - \lambda_1}{2\pi}$ 为整数. 否

则, 在(8)中取 $\lambda = -\lambda_1$, 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n C_j e^{ki(\lambda_j - \lambda_1)} \\ &= C_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^m C_j \frac{e^{(n+1)i(\lambda_j - \lambda_1)} - 1}{e^{i(\lambda_j - \lambda_1)} - 1} = 0 \end{aligned}$$

一般地, 可得

$e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, \dots, e^{i\lambda_m}$ 中任何一个必然等于余下 $m-1$ 个中的另一个. (9)

1、(1) 化为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{i\beta} e^{in\alpha} - e^{-i\beta} e^{-in\alpha} - 2iA) = 0.$$

情形 1.1. $A = 0$. 此时 $m = 2$.

$$\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\alpha, C_1 = e^{i\beta}, C_2 = -e^{-i\beta}.$$

由(9), $e^{i\alpha} = e^{-i\alpha}$, 进而 $e^{i\beta} = e^{-i\beta}$. 即 $\frac{\alpha}{\pi}, \frac{\beta}{\pi}$ 为整数.

情形 1.2. $A \neq 0$. 此 $m = 3$.

$$\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\alpha, \lambda_3 = 0, C_1 = e^{i\beta}, C_2 = -e^{-i\beta}, C_3 = -2iA$$

由(9), 此时, 必有 $e^{i\alpha} = e^{-i\alpha} = 1$, 进而 $e^{i\beta} - e^{-i\beta} - 2iA = 0$. 即 $\frac{\alpha}{\pi}$ 为偶数, 且

$A = \sin \beta$. 易见上述条件也是充分的. 总之, 本小题条件成立的充要条件是: 存在整数 k, j 使得

$$\begin{cases} A = 0 \\ \alpha = k\pi \text{ 或 } \begin{cases} A = \sin \beta \\ \alpha = 2k\pi \end{cases} \\ \beta = j\pi \end{cases}$$

2、条件 (2) 化为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{i\beta_1} e^{in\alpha_1} - e^{-i\beta_1} e^{-in\alpha_1} + e^{i\beta_2} e^{in\alpha_2} - e^{-i\beta_2} e^{-in\alpha_2}) = 0.$$

此时 $m = 4$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1, \lambda_2 = -\alpha_1, \lambda_3 = \alpha_2, \lambda_4 = -\alpha_2 \\ C_1 &= e^{i\beta_1}, C_2 = -e^{-i\beta_1}, C_3 = e^{i\beta_2}, C_4 = -e^{-i\beta_2} \end{aligned}$$

于是由(9), 它们必然可以分为两对, 每一对有相同的值(不排除四个值均相同).

情形 2.1. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_2} = e^{i\lambda_3} = e^{i\lambda_4}$.

这等价于 $\frac{\alpha_1}{\pi}, \frac{\alpha_2}{\pi}$ 均为整数, 且有相同的奇偶性. 进一步,

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

而这等价于 $\sin \beta_1 + \sin \beta_2 = 0$, 等价于 $\frac{\beta_2 - \beta_1}{\pi}$ 是奇数.

情形 2.2. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_2} \neq e^{i\lambda_3} = e^{i\lambda_4}$.

这等价于 $\frac{\alpha_1}{\pi}, \frac{\alpha_2}{\pi}$ 均为整数，但有不同的奇偶性。进一步

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4 = 0$$

而这等价于 $\frac{2\beta_1}{\pi}, \frac{2\beta_2}{\pi}$ 是奇数。

情形 2.3. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_3} \neq e^{i\lambda_2} = e^{i\lambda_4}$ 。

这等价于 $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\pi}$ 为偶数，但 $\frac{\alpha_1}{\pi}$ 不是整数。进一步

$$C_1 + C_3 = C_2 + C_4 = 0$$

而这

等价于 $\frac{\beta_2 - \beta_1}{\pi}$ 是奇数。

情形 2.4. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_4} \neq e^{i\lambda_2} = e^{i\lambda_3}$ 。

这等价于 $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\pi}$ 为偶数，但 $\frac{\alpha_1}{\pi}$ 不是整数。进一步

$$C_1 + C_4 = C_2 + C_3 = 0$$

而这等价于 $\frac{\beta_2 + \beta_1}{\pi}$ 是奇数。

易见上述条件也是充分的。总之，本小题条件成立的充要条件是：存在整数 k, j, p, q ，使得以下四者之一成立

$$\begin{cases} \alpha_1 = k\pi, \\ \alpha_2 = k\pi + 2j\pi \\ \beta_2 = \beta_1 + (2p+1)\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = k\pi \\ \alpha_2 = k\pi + 2j\pi + \pi \\ \beta_1 = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi \\ \beta_2 = \left(q + \frac{1}{2}\right)\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{\pi} \notin \mathbb{Z}, \\ \alpha_2 = \alpha_1 + 2k\pi, \\ \beta_2 = \beta_1 + (2p+1)\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\pi} \notin \mathbb{Z} \\ \alpha_2 = -\alpha_1 + 2k\pi \\ \beta_2 = -\beta_1 + (2p+1)\pi. \end{cases}$$

以上条件可以归并为：存在整数 k, j, p, q ，以及 $\varepsilon = \pm 1$ 使得以下二者之一成立

$$\begin{cases} \alpha_1 = k\pi \\ \alpha_2 = k\pi + 2j\pi + \pi, \\ \beta_1 = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi, \\ \beta_2 = \left(q + \frac{1}{2}\right)\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 = \varepsilon\alpha_1 + 2k\pi \\ \beta_2 = \varepsilon\beta_1 + (2p+1)\pi \end{cases}$$

六、(15分) 设 g 为 \mathbb{R} 上恒正的连续函数，对于正整数 n 以及 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ，考虑微分方程

$$\begin{cases} y'(x) = y^{\frac{1}{2n+1}}(x)g(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

证明:

- 1、方程 (1) 有定义在整个 \mathbb{R} 上的解(称为全局解);
- 2、若 $y_0 = 0$ 则方程(1)有无穷多个全局解;
- 3、若 $y = y(x)$ 是方程(1)的解, 则 y 在 \mathbb{R} 上非负, 或在 \mathbb{R} 上非正.

【参考解答】: 1、若 $y_0 = 0$, 则 $y \equiv 0$ 为全局解.

若 $y_0 \neq 0$. 注意到函数 $y = y(x)$ 为方程 (1) 的解当且仅当 $y = -y(x)$ 为方程(1)的解, 故不妨设 $y_0 > 0$. 在 $y \neq 0$ 的区间内求解 (1) 得到

$$y^{\frac{2n}{2n+1}}(x) = y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x)$$

其中

$$G(x) = \frac{2n}{2n+1} \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

由于 g 恒正, G 严格单增, 而 $G(x_0) = 0$. 于是

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) \in [-\infty, 0).$$

情形 I. $\alpha + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} \geq 0$.

此时 $G(x) + y_0^{\frac{2n}{2n+1}}$ 恒正. 取

$$y(x) = \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x) \right)^{\frac{2n+1}{2n}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

即知它为方程 (1) 的全局解.

情形 II. $\alpha + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} < 0$.

此时, 有唯一的 $\gamma \in (-\infty, x_0)$ 使得 $G(\gamma) + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} = 0$. 取

$$y(x) = \begin{cases} \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x) \right)^{\frac{2n+1}{2n}}, & x > \gamma, \forall x \in \mathbb{R} \\ 0, & x \leq \gamma, \end{cases}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} y'_+(\gamma) &= \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \frac{1}{x - \gamma} \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x) \right)^{\frac{2n+1}{2n}} \\ &= g(\gamma) \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x) \right)^{\frac{1}{2n}} = 0 \end{aligned}$$

于是 $y'(0) = 0$. 进而可知 y 为方程(1)的全局解.

2. 由 1 的结论, 任取 $\gamma \geq x_0$, 可见以下函数均是方程 (1)的全局解

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{2n}{2n+1} \int_{\gamma}^x g(t) dt \right)^{\frac{2n+1}{2n}}, & x > \gamma \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ 0, & x \leq \gamma \end{cases}$$

3. 设 $y(x)$ 是方程(1)在区间 I 上的解 (I 不必是 \mathbb{R}), 均有

$$\left(y^2(x) \right)' = 2y(x)y'(x) = 2y^{\frac{2n+2}{2n+1}}(x)g(x) \geq 0, \quad \forall x \in I.$$

因此, $y^2(x)$ 在 I 上单调增加. 由连续函数的介值定理即知 $y(x)$ 或在 I 上非负, 或在 I 上非正.



考研竞赛数学(ID:xwmath)
 一个专注于大学数学公共基础课
 资源分享的微信公众平台
 高等数学, 线性代数
 概率论与数理统计
 考研数学, 竞赛数学
 数学文化, 实验与建模
 大学学习、生活历程
因为专业,所以精彩