第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《数学类 A 卷》试题

一、(15 分) 设 $N(0,0,1)$ 是球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 的北极点.

$$A(a_1,a_2,0), B(b_1,b_2,0), C(c_1,c_2,0)$$

为 xOy 面上不同的三点. 设连接 N 与 A,B,C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1，B_1,C_1.

(1) 求连接 N 与 A 两点的直线方程；

(2) 求点 A_1,B_1,C_1 三点的坐标；

(3) 给定点 $A(1,-1,0), B(-1,1,0), C(1,1,0)$，求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.

二、(15 分) 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}$

三、(15 分) 设 A,B 均为 2020 阶正交矩阵，齐次线性方程组 $Ax=Bx\ \left(x\in\mathbb{R}^{2020}\right)$ 的解空间维数为 3. 问：矩阵 A,B 是否可能相似？证明你的结论.

四、(20 分) 称非常值一元 n 次多项式(合并同类项后)的 $n-1$ 次项(可能为 0)为第二项.求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$，满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k，都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$，使得 $f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x)$，且 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

五、(15 分) 设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调增加的连续函数，ψ 是 φ 的反函数，实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2}=\psi\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\right), n\geq 2.$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

六、(20 分) 对于有界区间 $[a,b]$ 的划分

$$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}=b$$

其范数定义为 $\|P\|=\max\limits_{0\leq k\leq n}(x_{k+1}-x_k)$. 现设 $[a,b]$ 上函数 f 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $M>0$，使得对任何 $x,y\in[a,b]$，成立 $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$. 定义

$$s(f;P)\equiv\sum_{k=0}^{n}\sqrt{|x_{k+1}-x_k|^2+|f(x_{k+1})-f(x_k)|^2}$$

若 $\lim\limits_{\|P\|\to 0^+}s(f;P)$ 存在，则称曲线 $y=f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a,b]$ 的 2^n 等分. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}s(f;P_n)$ 存在.　　(2) 曲线 $y=f(x)$ 可求长.