

第十二届全国大学生数学竞赛决赛 (非数学类) 试题与参考答案

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin^2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) =$ _____.

【参考答案】: 由等价无穷小和定积分的定义, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin^2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) &= \int_0^1 x \sin^2(1+x) dx \\ &= \frac{1}{8} (2 - 2 \sin 4 - \cos 4 + \cos 2). \end{aligned}$$

2、设 $P_0(1, 1, -1), P_1(2, -1, 0)$ 为空间的两点, 则函数 $u = xyz + e^{xyz}$ 在点 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0 P_1}$ 方向的方向导数为_____.

【参考答案】: $\overrightarrow{P_0 P_1}$ 方向的单位向量为 $\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$, 且

$$\begin{aligned} u_x|_{P_0} &= yz(1 + e^{xyz})|_{P_0} = -(1 + e^{-1}) \\ u_y|_{P_0} &= xz(1 + e^{xyz})|_{P_0} = -(1 + e^{-1}) \\ u_z|_{P_0} &= xy(1 + e^{xyz})|_{P_0} = 1 + e^{-1} \end{aligned}$$

因此方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = \frac{2}{\sqrt{6}}(1 + e^{-1})$

3、记空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} (a > 0)$, 则积分 $\oint_{\Gamma} (1+x)^2 ds =$ _____.

【参考答案】: 由积分的对称性和被积函数定义在曲线上, 得

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (1+x)^2 ds &= \int_{\Gamma} (1 + 2x + x^2) ds \\ &= \int_{\Gamma} ds + \frac{2}{3} \int_{\Gamma} (x+y+z) ds + \frac{1}{3} \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \left(1 + \frac{a^2}{3} \right) \int_{\Gamma} ds = 2\pi a \left(1 + \frac{a^2}{3} \right) \end{aligned}$$

4、设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 16 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 且 $|A| > 0, ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$, 其

中 I 为单位矩阵, 则 $B =$ _____.

【参考答案】: 由 $AA^* = |A|I$ 及 $|A^*| = 16$ 可知, $|A| = 4$. 对

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$$

的两边同时左乘 A^{-1} 右乘 A , 得 $B = A^{-1}B + 3I$, 即 $(I - A^{-1})B = 3I$, 所以

$$B = 3(I - A^{-1})^{-1} = 3\left(I - \frac{1}{4}A^*\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & -1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

5、函数 $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{2}{x_3} (x_i > 0, i = 1, 2, 3)$ 的所有极值点为_____.

【参考答案】：利用均值不等式可知， $u(x_1, x_2, x_3) \geq 4\sqrt[4]{2}$. 另一方面，有

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 1 - \frac{x_2}{x_1^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1} - \frac{x_3}{x_2^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{1}{x_2} - \frac{2}{x_3^2}$$

令 $\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, (k = 1, 2, 3)$ ，即 $1 - \frac{x_2}{x_1^2} = 0, \frac{1}{x_1} - \frac{x_3}{x_2^2} = 0, \frac{1}{x_2} - \frac{2}{x_3^2} = 0$. 由此解得 u 在

定义域内的唯一驻点 $P_0\left(\frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^4}\right)$ ，且 u 在该点取得最小值 $u(P_0) = 4\sqrt[4]{2}$ ，这是函数唯

一的极值. 因此 u 的唯一极值点为 $\left(\frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^4}\right)$.

【注】也可用通常的充分性条件(海赛矩阵正定)判断驻点 P_0 为极小值点.

二、(12分) n 为正整数，求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}} \sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}} \cdots \sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}} - 1}{3\pi \arcsin x - (x^2 + 1) \arctan^3 x}.$$

【参考解答】：令 $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}} \sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}} \cdots \sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}} - 1$ ，则 $f(0) = 1$ ，

且

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{4} \ln \frac{1+2x}{1-2x} + \frac{1}{6} \ln \frac{1+3x}{1-3x} + \cdots + \frac{1}{2n} \ln \frac{1+nx}{1-nx} \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{1+2x} + \frac{2}{1-2x} \right) + \\ &\quad \cdots + \frac{1}{2n} \left(\frac{n}{1+nx} + \frac{n}{1-nx} \right) \end{aligned}$$

所以 $f'(0) = n$. 注意到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ ，因此

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3\pi \arcsin x - (x^2 + 1) \arctan^3 x} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{n}{3\pi}$$

三、(12分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] x^n$ 的收敛域.

【参考解答】：记 $a_n = 1 - n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $a_n \sim \frac{1}{2n}$. 所以

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 为了证明 $\{a_n\}$ 是单调递减数列, 考虑函数

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right), x \geq 1.$$

利用不等式: 当 $a > 0$ 时, $\ln(1+a) > \frac{a}{1+a}$, 得

$$f'(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} > 0$$

即 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上的增函数, 所以

$$a_n - a_{n+1} = (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) - n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) > 0$$

根据莱布尼兹审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1)$.

四、(12分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且

$$f(a) = f(b) = 0, \int_a^b f(x) dx = 0$$

(1). 证明: 存在互不相同的点 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 使得

$$f'(x_i) = f(x_i), i = 1, 2;$$

(2) 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, $\xi \neq x_i, i = 1, 2$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

【参考解答】: (1) 令 $F(x) = e^{-x} \int_a^x f(t) dt$, 则 $F(a) = F(b) = 0$. 对 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上利用洛尔定理, 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $F'(x_0) = 0$, 即

$$f(x_0) = \int_a^{x_0} f(t) dt.$$

再令 $G(x) = f(x) - \int_a^x f(t) dt$, 则 $G(a) = G(x_0) = G(b) = 0$. 对 $G(x)$ 分别在 $[a, x_0]$ 与 $[x_0, b]$ 上利用洛尔定理, 存在 $x_1 \in (a, x_0)$ 及 $x_2 \in (x_0, b)$ 使得 $G'(x_1) = G'(x_2) = 0$, 即 $f'(x_i) = f(x_i), i = 1, 2$ 且 $x_1 \neq x_2$.

(2) 令 $\varphi(x) = e^x [f'(x) - f(x)]$, 则 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, 且

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= e^x [f'(x) - f(x)] + e^x [f''(x) - f'(x)] \\ &= e^x [f''(x) - f(x)] \end{aligned}$$

对 $\varphi(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上利用洛尔定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = f(\xi)$, 显然 $\xi \neq x_i, i = 1, 2$.

五、(12分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵，证明：

- (1) 存在实对称矩阵 B ，使得 $B^{2021} = A$ ，且 $AB = BA$ ；
- (2) 存在一个多项式 $p(x)$ ，使得上述矩阵 $B = p(A)$ ；
- (3) 上述矩阵 B 是唯一的。

【参考解答】：(1) 因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q ，使得 $A = QDQ^T$ ，其中 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ，而 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为矩阵 A 的特征值。令

$$B = QD^{\frac{1}{2021}}Q^T,$$

其中 $D^{\frac{1}{2021}} = \text{diag}\left(\lambda_1^{\frac{1}{2021}}, \lambda_2^{\frac{1}{2021}}, \dots, \lambda_n^{\frac{1}{2021}}\right)$ ，则

$$B^{2021} = \left(QD^{\frac{1}{2021}}Q^T\right)^{2021} = QDQ^T = A$$

且满足

$$\begin{aligned} AB &= QDQ^TQD^{\frac{1}{2021}}Q^T = QDD^{\frac{1}{2021}}Q^T \\ &= QD^{\frac{1}{2021}}DQ^T = QD^{\frac{1}{2021}}Q^TQDQ^T = BA \end{aligned}$$

(2) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是 A 的所有两两互异的特征值 ($1 \leq s \leq n$)，利用待定系数法及克拉默法则，存在唯一的 s 次多项式 $p(x) = x^s + a_1x^{s-1} + \dots + a_{s-1}x + a_s$ ，使得

$$p(\lambda_i) = \lambda_i^{\frac{1}{2021}}, (i = 1, 2, \dots, s)$$

因为 $p(D) = D^{\frac{1}{2021}}$ ，所以

$$p(A) = p(QDQ^T) = Qp(D)Q^T = QD^{\frac{1}{2021}}Q^T = B.$$

(3) 设另存在 n 阶实对称矩阵 C 使得 $C^{2021} = A$ ，则 $B = p(A) = p(C^{2021})$ ，所以

$$BC = p(C^{2021})C = Cp(C^{2021}) = CB.$$

由于 B, C 都可相似对角化，故存在 n 阶可逆实矩阵 T 及实对角矩阵 D_1, D_2 ，使得

$$B = TD_1T^{-1}, C = TD_2T^{-1}$$

因此 $C^{2021} = A = B^{2021} \Rightarrow D_2^{2021} = D_1^{2021} \Rightarrow D_2 = D_1 \Rightarrow C = B$ ，唯一性得证。

六、(12分) 设 $A_n(x, y) = \sum_{k=0}^n x^{n-k}y^k$ ，其中 $0 < x, y < 1$ ，证明：

$$\frac{2}{2-x-y} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x, y)}{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} \right).$$

【参考解答】：【思路一】当 $x = y$ 时， $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x, x)}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ，等式成立。

当 $x \neq y$ 时，注意到 $A_n(x, y) = A_n(y, x)$ ，故可设 $0 < x < y < 1$ ，因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x, y)}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{y}{x}\right)^k = \frac{1}{y-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n - x^n}{n} = \frac{1}{y-x} \ln \frac{1-x}{1-y}$$

所以不等式化为

$$\frac{2}{2-x-y} \leq \frac{1}{y-x} \ln \frac{1-x}{1-y} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} \right). (*)$$

对于 $0 \leq t < 1$ ，有

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) = \frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}$$

所以 $t \leq \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \leq \frac{t}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)$. 令 $t = \frac{y-x}{2-x-y}$ ，则 $0 < t < 1$ ，代入上式即得所证不等式(*)成立.

【思路二】因为 $\frac{2}{2-x-y} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+y}{2} \right)^n$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ，所以问题转换为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+y}{2} \right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x, y)}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (x^n + y^n)$$

这只需证明：对任意 $n \geq 0$ ，都有

$$\left(\frac{x+y}{2} \right)^n \leq \frac{A_n(x, y)}{n+1} \leq \frac{1}{2} (x^n + y^n)$$

其中 $0 < x, y < 1$.

用数学归纳法. $n = 0, 1$ 时，显然. 假设 $n = p$ 时，结论成立，当 $n = p+1$ 时，

$$\begin{aligned} A_{p+1}(x, y) &= \sum_{k=0}^{p+1} x^{p+1-k} y^k = x^{p+1} + y A_p(x, y) \\ A_{p+1}(x, y) &= \sum_{k=0}^{p+1} x^{p+1-k} y^k = y^{p+1} + x A_p(x, y) \\ A_{p+1}(x, y) &= \frac{1}{2} (x^{p+1} + y^{p+1}) + \frac{1}{2} (x+y) A_p(x, y) \\ &= \frac{1}{2} (x^{p+1} + y^{p+1}) + \frac{p+1}{2} (x+y) \frac{A_p(x, y)}{p+1} \\ &\leq \frac{1}{2} (x^{p+1} + y^{p+1}) + \frac{p+1}{2} (x+y) (x^p + y^p) \\ &\leq \frac{1}{2} (x^{p+1} + y^{p+1}) + \frac{p+1}{2} (x^{p+1} + y^{p+1}) \end{aligned}$$

所以 $A_{p+1}(x, y) \leq \frac{p+2}{2} (x^{p+1} + y^{p+1})$. 另一方面，仍由上式及归纳假设，可得

$$\begin{aligned} A_{p+1}(x, y) &\geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1} + \frac{p+1}{2}(x+y)\left(\frac{x+y}{2}\right)^p \\ &= (p+2)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1} \end{aligned}$$

因此，所证不等式对任意 $n \geq 0$ 及 $0 < x, y < 1$ 都成立.

七、(12分) 设 $f(x), g(x)$ 是 $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 的连续函数，且 $f(x)$ 单调增加，求证：

$$\int_0^1 f(g(x))dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$$

【参考解答】： 令 $F(x) = f(x) - x$ ，则问题转换为证明

$$\int_0^1 [F(g(x)) - F(x)]dx \leq \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

这只需证明

$$F_{\max}(x) - \int_0^1 F(x)dx \leq \frac{1}{2}, \text{ 即 } \int_0^1 F(x)dx \geq F_{\max}(x) - \frac{1}{2}$$

记 $\max F(x) = F(x_0) = a$ ，由于 $0 \leq f(x) \leq 1$ ，则 $-x \leq F(x) \leq 1-x$ ，所以 $a \leq 1$ 。因为 $f(x)$ 单调增加，当 $x \in [x_0, 1]$ 时， $f(x) \geq f(x_0)$ ，即

$$F(x) + x \geq F(x_0) + x_0 = a + x_0$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x)dx &= \int_0^{x_0} F(x)dx + \int_{x_0}^1 F(x)dx \geq \int_0^{x_0} (-x)dx + \int_{x_0}^1 (a + x_0 - x)dx \\ &= a - \frac{1}{2} + x_0(1 - x_0) \geq a - \frac{1}{2} = \max F(x) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



考研竞赛数学(ID:xwmath)
 一个专注于大学数学公共基础课
 资源分享的微信公众平台
 高等数学, 线性代数
 概率论与数理统计
 考研数学, 竞赛数学
 数学文化, 实验与建模
 大学学习、生活历程
因为专业, 所以精彩