

第十二届全国大学生数学竞赛初赛 《数学类 A 卷》试题及参考解答

一、(15 分) 设 $N(0, 0, 1)$ 是球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的北极点.

$$A(a_1, a_2, 0), B(b_1, b_2, 0), C(c_1, c_2, 0)$$

为 xOy 面上不同的三点. 设连接 N 与 A, B, C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1, B_1, C_1 .

(1) 求连接 N 与 A 两点的直线方程;

(2) 求点 A_1, B_1, C_1 三点的坐标;

(3) 给定点 $A(1, -1, 0), B(-1, 1, 0), C(1, 1, 0)$, 求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.

【参考解答】: (1) 由直线的两点式方程, 直接可得过 N, A 两点的直线方程为

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z-1}{-1}.$$

(2) 直线 NA 的参数方程为

$$x = a_1 t, y = a_2 t, z = 1 - t$$

将其代入球面方程, 得

$$(a_1 t)^2 + (a_2 t)^2 + (1 - t)^2 = 1$$

解得参数值为 $t = \frac{2}{a_1^2 + a_2^2 + 1}$ 或 $t = 0$. 从而可得 A_1 的坐标为

$$A_1 \left(\frac{2a_1}{a_1^2 + a_2^2 + 1}, \frac{2a_2}{a_1^2 + a_2^2 + 1}, \frac{a_1^2 + a_2^2 - 1}{a_1^2 + a_2^2 + 1} \right)$$

同理可得 B_1, C_1 的坐标为

$$B_1 \left(\frac{2b_1}{b_1^2 + b_2^2 + 1}, \frac{2b_2}{b_1^2 + b_2^2 + 1}, \frac{b_1^2 + b_2^2 - 1}{b_1^2 + b_2^2 + 1} \right)$$

$$C_1 \left(\frac{2c_1}{c_1^2 + c_2^2 + 1}, \frac{2c_2}{c_1^2 + c_2^2 + 1}, \frac{c_1^2 + c_2^2 - 1}{c_1^2 + c_2^2 + 1} \right)$$

(3) 由(2)和已知坐标, 代入可得 A_1, B_1, C_1 的坐标为

$$A_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), B_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), C_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

所以, 由向量混合积的几何意义, 可得四面体体积为

$$V = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{NA_1}, \overrightarrow{NB_1}, \overrightarrow{NC_1} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \frac{32}{27} = \frac{16}{81}$$

二、(15分) 求极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020})}$

【参考解答】：改写极限式，有

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2021 \ln n + \ln \frac{1^{2020} + \cdots + n^{2020}}{n^{2021}}}$$

【思路一】由定积分定义，得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2021}} (1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{2020} + \left(\frac{2}{n}\right)^{2020} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^{2020} \right] \\ &= \int_0^1 x^{2020} dx = \frac{1}{2021} \end{aligned}$$

代入极限式得 $I = \frac{1}{2021}$.

【思路二】由 Stolz 公式，得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2021}} (1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2020}}{n^{2021} - (n-1)^{2021}} = \frac{1}{2021} \end{aligned}$$

故 $\ln \frac{1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020}}{n^{2021}}$ 有界. 故 $I = \frac{1}{2021}$.

三、(15分) 设 A, B 均为 2020 阶正交矩阵，齐次线性方程组 $Ax = Bx$ ($x \in \mathbb{R}^{2020}$) 的解空间维数为 3. 问：矩阵 A, B 是否可能相似？证明你的结论.

【参考解答】： A, B 一定不相似. 证明如下：

令 $C = AB^{-1}$. 由于 A, B 均为正交矩阵，故 C 也是正交矩阵. C 视为复矩阵是酉矩阵，故可以复对角化. 即存在复可逆矩阵 T 和复对角矩阵 D ，使得 $T^{-1}CT = D$ ，其中 D 的主对角线上的元素即为 C 的复特征值.

齐次线性方程组 $Ax = Bx$ 的解空间维数为 3，则 $\text{rank}(A - B) = 2017$. 进而

$$\begin{aligned} \text{rank}(D - I) &= \text{rank}(T^{-1}(C - I)T) \\ &= \text{rank}(C - I) = \text{rank}((A - B)B^{-1}) \\ &= \text{rank}(A - B) = 2017 \end{aligned}$$

这表明对角矩阵 D 的主对角线上恰有 3 个元素是 1，即 C 有三重特征值 1. 由于正交矩阵的实特征值为 1 或 -1，而非实数特征值共轭成对出现，共有偶数个. 又 C 共有 2020 个特征值(计重数)，故 C 有特征值 -1，且重数为奇数.

C 的行列式是其所有特征值(计重数)之积. 注意到 C 的非实数特征值共轭成对出现，它

们的乘积为正数,故 $\det C < 0$. 特别有 $\det(AB^{-1}) = \det C \neq 1$. 即 $\det A \neq \det B$, 所以 A, B 不相似.

四、(20 分) 称非常值一元 n 次多项式(合并同类项后)的 $n-1$ 次项(可能为 0)为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k , 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得 $f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$, 且 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

【参考解答】: 显然 $f(x) = x^{2020}$ 满足题意. 以下证明这是唯一解.

设 $f(x)$ 的 2020 个复根为 $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$. 对每个 $k (1 \leq k \leq 2020)$, 由题设条件可设 $f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$, 其中 $g_k(x), h_k(x)$ 分别为 m_k 次和 n_k 次非常值首一多项式, 第二项系数均为 a_k . 设 $g_k(x)$ 的所有复根为 $y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,m_k}$; $h_k(x)$ 的所有复根为 $z_{k,1}, z_{k,2}, \dots, z_{k,n_k}$. 这些根恰为所有 $x_j (j \neq k)$. 由韦达定理,

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{m_k-1} (y_{k,1} + y_{k,2} + \dots + y_{k,m_k}) \\ &= (-1)^{n_k-1} (z_{k,1} + z_{k,2} + \dots + z_{k,n_k}) \end{aligned}$$

对每个 k , 将上式改写为

$$\sum_{j \neq k} \varepsilon_{kj} x_j = 0$$

其中 $\varepsilon_{kj} = 1$ 或 -1 .

这样, 我们得到了关于 $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$ 的齐次线性方程组, 其系数矩阵 A 为 2020 阶方阵, 主对角线上元素为 0. 主对角线外元素为 1 或 -1 . 令 B 为 2020 阶方阵, 其主对角线上元素为 0, 主对角线外元素为 1, 则容易计算出 B 的行列式为 $\det B = -2019$. 由行列式定义, $\det A$ 与 $\det B$ 的奇偶性相同, 故 $\det A \neq 0$.

从而上述齐次线性方程组只有零解, 即 $x_1 = x_2 = \dots = x_{2020} = 0$. 这便证明了 $f(x) = x^{2020}$

【注】 上面证明 $\det A \neq 0$ 也可以如下进行: 显然 $\det A \equiv \det B \pmod{2}$. 由于

$$\det B = -2019 \equiv 1 \pmod{2}$$

所以 $\det A \equiv 1 \pmod{2}$, 故 $\det A \neq 0$.

五、(15 分) 设 φ 是 \mathbb{R} 上严格单调增加的连续函数, ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2} = \psi \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \varphi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi(x_{n+1}) \right), n \geq 2.$$

证明: $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

【参考证明】: $\{x_n\}$ 收敛. 证明如下: 记 $y_n = \varphi(x_n)$, 则

$$y_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) y_n + \frac{1}{\sqrt{n}} y_{n+1}, n \geq 2.$$

令 $a_n = \min\{y_n, y_{n-1}\}, b_n = \max\{y_n, y_{n-1}\}, n \geq 3$, 则

$$a_n \leq y_{n+1} \leq b_n, n \geq 3$$

进而可得 $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, n \geq 3$. 所以 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均单调有界, 从而收敛.

特别, $\{y_n\}$ 有界. 由于

$$y_{n+2} - y_{n+1} = -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(y_{n+1} - y_n), n \geq 2$$

因此可得

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq |y_3 - y_2| \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right), n \geq 2$$

由于 $\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ 趋于 0, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{n+1} - y_n) = 0$. 所以

$$b_n - a_n = |y_n - y_{n-1}| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

从而可知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的极限相等, 从而 $\{y_n\}$ 收敛. 最后, 由 ψ 的连续性可得 $\{x_n\}$ 收敛.

六、(20 分) 对于有界区间 $[a, b]$ 的划分

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$$

其范数定义为 $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq n} (x_{k+1} - x_k)$. 现设 $[a, b]$ 上函数 f 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $M > 0$, 使得对任何 $x, y \in [a, b]$, 成立 $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. 定义

$$s(f; P) \equiv \sum_{k=0}^n \sqrt{|x_{k+1} - x_k|^2 + |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^2}$$

若 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)$ 存在, 则称曲线 $y = f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a, b]$ 的 2^n 等分. 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f; P_n)$ 存在. (2) 曲线 $y = f(x)$ 可求长.

【参考证明】: 【思路一】 由题设可知

$$0 \leq s(f; P) \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{M^2 + 1} |x_{k+1} - x_k| = (b - a) \sqrt{M^2 + 1}$$

因此, $s(f; P)$ 有界.

(1) 由平面上点和点距离的三角不等式, 可得

$$s(f; P_n) \leq s(f; P_{n+1}), \forall n \geq 1$$

因此, $\{s(f; P_n)\}$ 单调增加, 结合有界性可知其收敛. 设极限为 L .

一般地, 对于划分 P, Q , 用 $P \oplus Q$ 表示由 P, Q 的所有分点为分点的划分, 则

$$s(f; P \oplus Q) \geq s(f; P)$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 有 $m \geq 1$ 使得

$$s(f; P_m) \geq L - \varepsilon$$

对于划分 P ，用 $P \oplus P_m$ 表示由 P, P_m 的所有分点为分点的划分，则

$$s(f; P \oplus P_m) \geq s(f; P_m) \geq L - \varepsilon$$

在 $s(f; P \oplus P_m)$ 的和式中，与 $s(f; P)$ 的和式中不同的项是涉及 P_m 的分点的项，总数不超过 2^{m+1} 项，相应的小区间长度不超过 $\|P \oplus P_m\| \leq \|P\|$ ，因此，这些项的和不超过 $2^{m+1}\sqrt{M^2 + 1}\|P\|$ 。于是

$$\begin{aligned} s(f; P) &\geq s(f; P \oplus P_m) - 2^{m+1}\sqrt{M^2 + 1}\|P\| \\ &\geq L - \varepsilon - 2^{m+1}\sqrt{M^2 + 1}\|P\| \end{aligned}$$

这样 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L - \varepsilon$ ，进而有 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L$ 。

类似地，记 $K = \overline{\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)}$ 。对于任何 $\varepsilon > 0$ ，有划分 Q 使得

$$s(f; Q) \geq K - \varepsilon$$

则 $s(f; Q \oplus P_m) \geq s(f; Q) \geq K - \varepsilon$ 。在 $s(f; Q \oplus P_m)$ 的和式中，与 $s(f; P_m)$ 的和式中不同的项是涉及 Q 的分点的项，总数不超过 $2N$ 项，其中 N 是划分 Q 的分点数。因此，这些项的和不超过 $2N\sqrt{M^2 + 1}\|P_m\|$ 。于是

$$\begin{aligned} s(f; P_m) &\geq s(f; Q \oplus P_m) - 2N\sqrt{M^2 + 1}\|P_m\| \\ &\geq K - \varepsilon - 2N\sqrt{M^2 + 1}\|P_m\| \end{aligned}$$

这样， $L = \lim_{m \rightarrow \infty} s(f; P_m) \geq K - \varepsilon$ 。进而得 $L \geq K$ 。结合

$$K \geq \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L$$

得 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) = L$ 。即 $y = f(x)$ 可求长。

【思路二】事实上，结合到(1)是(2)的推论，我们只需直接证明(2)。证明过程如下：
 由题设可知有

$$0 \leq s(f; P) \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{M^2 + 1} |x_{k+1} - x_k| = (b - a)\sqrt{M^2 + 1}$$

因此， $s(f; P)$ 有界。

对于划分 P, Q ，用 $P \oplus Q$ 表示由 P, Q 的所有分点为分点的划分，由平面上点和点距离的三角不等式，立即有

$$s(f; P \oplus Q) \geq s(f; P)$$

考虑划分列 $\{Q_k\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k\| = 0$ 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(f; Q_k) = L \equiv \overline{\lim_{\|P\| \rightarrow 0} s(f; P)}$$

对于每个 $k \geq 1$ ，设 N_k 为划分 Q_k 的分点数。

$$s(f; P \oplus Q_k) \geq s(f; Q_k) \geq L - \varepsilon$$

在 $s(f; P \oplus Q_k)$ 的和式中，与 $s(f; P)$ 的和式中不同的项是涉及 Q_k 的分点的项，总数不超过 $2N_k$ 项，相应的小区间长度不超过 $\|P \oplus Q_k\| \leq \|P\|$ 。因此，这些项的和不超过 $2N_k \sqrt{M^2 + 1} \|P\|$ 。于是

$$\begin{aligned} s(f; P) &\geq s(f; P \oplus Q_k) - 2N_k \sqrt{M^2 + 1} \|P\| \\ &\geq s(f; Q_k) - 2N_k \sqrt{M^2 + 1} \|P\| \end{aligned}$$

这样 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq s(f, Q_k), \forall k \geq 1$ ，进而有

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L = \overline{\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)}$$

所以 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)$ 存在，即 $y = f(x)$ 可求长。自然也就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f; P_n)$ 存在。



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)