

# 求解不适定反问题：MATLAB 的理论、实用算法和演示大纲

A.S. Leonov

注解：；本书概述了求解不适定线性和非线性反问题的理论，并介绍了求解其精度的实用算法。给出了来自各个科学分支的理论和应用不适定反问题的许多例子。问题的提出和解决伴随着所考虑的位置、方法和算法的数值演示，使用提供的软件在 MATLAB 环境中运行。这允许更深入地研究解决不适定问题的程序并评估其实际能力。本书对专攻应用数学、数学物理和求解反问题的数值方法的学生、研究生和研究人员，以及对这些问题感兴趣的所有研究人员都有用。

# 目录

<b>1 不适定反问题的求解方法</b>	<b>1</b>
1.1 什么是“反问题的解”和“求解不适定反问题”	1
1.2 是否能在不知道数据误差的情况下解决不适定问题	6
1.3 反问题的正则化	13
1.4 一般形式的正则化条件和变分调节算法	16
1.5 典型具体反问题的建立以及对应的变量修正算法	22



## 插图

- 1.1 左侧：函数图像  $\psi(\alpha)(1), \xi(\alpha)(2)$  和选择（参考）的  $\alpha_{ko}$  (点)。右侧：L-曲线的图像和选择（参考）的  $\alpha_L$ 。在小图中给出了问题的精确解（小圆圈）和利用 L-曲线（点）方法得到的近似。图像由确定的数据  $(A_0, u_0)$  得到。 . . . . . 7
- 1.2 左侧：L-曲线的反例。右侧：选择正则化参数的理论方法的比较 [精确解  $(\cdot-)$ 、广义残差原理  $(\quad)$ 、平滑泛函和修正准最优选择的广义原理 (xxx) ] 和 L-曲线方法  $(\cdot\cdot\cdot)$  . . . . . 10
- 1.3 (a)：隐式迭代方法的 L-曲线；(b)：最小化曲线的曲率半径  $r$ 。点显示了选定的迭代次数  $n$ 。线  $\gamma = \|z_{exact}\|$  显示了精确解的范数。右侧：L-曲线方法 (c) 与理论上合理的 GRF 方法 (d) 在隐式方法中停止迭代的比较 [ $(\cdot-)$ —精确解,  $(-)$ —近似解]。在图 (e) 显示了利用函数 pinv（即 OLS）获得的近似解。矩阵的扰动水平  $h = 10^{-7}$ 。 12
- 1.4 第三章第七节中具有非光滑精确解的反问题。左侧是分段均匀正则化算法（考虑解的单调性）的应用。右侧是具有变分收敛的方法的应用。 $(-)$  是精确解,  $(\cdot-)$  或  $(o)$  是近似值。 . . . . . 15
- 1.5 左侧：函数  $\beta_\eta(\alpha)$  和依据误差原则进行的变量选择。右侧：函数  $\varphi_\eta(\alpha)$  和依据平滑泛函原则进行的变量选择 . . . . . 24

- 1.6 左侧：在准最优解比较中使用修正的准最优参数选择方法；1-函数  $\Psi_{h\delta}(\alpha)$ ；2- $\psi_{h\delta}(\alpha)$ ，在 (2.7) 中出现过；展示使用修正的准最优参数选择值  $\alpha_\eta = \alpha_{h\delta}$ 。右侧：使用一般误差原则和广义平滑泛函原则选择；1-函数  $\rho_\eta(\alpha)$ ，2-函数  $\varepsilon_\eta(\alpha)$  . . . . . 25

表格

## 1| 不适定反问题的求解方法

### 1.1. 什么是“反问题的解”和“求解不适定反问题”

再看一下反问题的建立。假设  $Z$  和  $U$  是巴拿赫空间,  $\mathcal{D} \subset Z$  是给定集合,  $A$  是定义在  $\mathcal{D}$  上, 值域为  $U$  的算子。对于元素  $u \in U$  在集合  $\mathcal{D}$  上求解算子方程

$$Az = u, \quad z \in \mathcal{D}. \quad (1.1.1)$$

通常集合  $\mathcal{D}$  被解释为对所求解的先验约束集。问题(1.1.1)可以是不适定的。从一般意义上理解, 它可以无解; 若存在解, 它可能是不唯一的; 由于  $U$  中的数据扰动, 方程的解在  $Z$  中可能不稳定。

假设方程(1.1.1)在集合  $\mathcal{D}$  上有准解, 即存在元素 (多个元素)  $z^* \in \mathcal{D}$ , 使得

$$\|Az^* - u\|_U = \inf\{\|Az - u\|_U : z \in \mathcal{D}\} \equiv \mu \quad (1.1.2)$$

这里出现的数  $\mu \geq 0$  被称作集合  $\mathcal{D}$  上的算子方程(1.1.1)的不一致性度量。若方程可解, 则  $\mu = 0$ 。通常问题(1.1.2)的解被看作方程(1.1.1)的某个广义解。注意, 寻找准解的问题仍可能是模糊可解的和不稳定的 (示例详见第??章 §??和 [?, ?])。把所有准解构成的集合记作  $Z^*$ 。

所谓的**变分选择原则**通常用于分离问题(1.1.1)的特殊准解, 其总体目标是获得单个准解。为此给出 (假设) 某定义在  $\mathcal{D}$  上且下有界的泛函  $\Omega[z]$ 。考虑条件极值的问题: 找到元素  $\bar{z} \in Z^*$ , 使得

$$\Omega[\bar{z}] = \inf\{\Omega[z] : z \in Z^*\}. \quad (1.1.3)$$



因此, 问题(1.1.3)可选方程(1.1.1)的某些准解来优化额外引入的泛函  $\Omega[z]$ 。此泛函通常具有特殊的应用意义。下面给出泛函  $\Omega[z]$  的许多示例。问题(1.1.3)的解叫做方程(1.1.1)的 $\Omega$ —最优准解。它们构成的集合记作  $\bar{Z}$ 。

当然, 如果没有泛函  $\Omega[z]$  的特殊性质, 问题(1.1.3)可能再次无解或模糊可解。然而, 在许多情况下, 这些不适定性来自很自然的假设。下面给出该问题的两个典型且十分普遍的表述, 假设  $Z^* \neq \emptyset$ 。

典例 19.  $\Omega[z]$ —最优准解的存在性和唯一性。

回想一下, 泛函  $\Omega[z]$  在凸集  $\mathcal{D}$  上称为凸函数, 若对于任意的  $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$  和在每个  $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$  上, 成立等式

$$\Omega[\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2] \leq \alpha \Omega[z_1] + (1 - \alpha)\Omega[z_2]. \quad (1.1.4)$$

若等式(1.1.4)只当  $\alpha = 0$  或  $\alpha = 1$  时成立, 则  $\Omega[z]$  在  $\mathcal{D}$  上严格凸。最后, 若找到定义在  $t \geq 0$  的函数  $\delta(t)$ , 其中当  $t > 0, \delta(0) = 0, \delta(t) > 0$ , 满足

$$\Omega[\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2] \leq \alpha \Omega[z_1] + (1 - \alpha)\Omega[z_2] - \alpha(1 - \alpha)\delta(\|z_1 - z_2\|)$$

其中所有  $z_1, z_2 \in \mathcal{D}, \alpha \in [0, 1]$ , 则泛函  $\Omega[z]$  被称作  $\mathcal{D}$  上的严格一致凸。一个特例是强凸泛函, 其中  $\delta(t) = \kappa|t|, \kappa = \text{const} > 0$ 。

通常满足以下设置问题的条件集。

- 1] 设  $A$ -正则空间  $U$  中自反巴拿赫空间  $Z$  的线性连续算子,  $\mathcal{D}$ -闭凸集, 而泛函  $\Omega[z]$  在  $\mathcal{D}$  上是凸的和连续的, 其中对于每个  $z \in \mathcal{D}$  满足:  $\Omega[z] \geq g(\|z\|)$ 。这里  $g(x)$  是  $x \geq 0$  时的连续单增函数, 其中  $g(+\infty) = +\infty$ 。那么, 例如如 [?] 所述,  $\Omega$ —最优准解集非空。若此时泛函严格凸 (或严格一致凸), 则  $\Omega$ —最优准解唯一。
- 2] 如果算子 (可能是非线性的)  $A$  从  $Z$  到  $U$  是连续的, 此外, 方程(1.1.1)的残差泛函  $N[z] = \|Az - u\|_U$  在闭凸集  $\mathcal{D}$  上是凸的, 那么关于  $\Omega[z]$  的相同假设保证了  $\Omega$ —最优准解的存在性和唯一性。□

在本节中, 谈到**反问题 (1.1.1) 的解**, 我们在给定泛函  $\Omega[z]$  的集合  $\mathcal{D}$  上表示该方程的  $\Omega$ —最优准解, 假设它存在且是唯一的。如果方程(1.1.1) 在这种情况下是可解的, 则将讨论它的  $\Omega$ —最优解。当  $\mathcal{D} = Z$  时讨论方程的  $\Omega$ —最优伪解。

有必要讨论有关在这个问题建立中的未知解的先验信息的结构。它包括, 首先, 由集合  $\mathcal{D}$  的类型决定的关于未知解集的先验数据。其次, 未知解的最优标准。它由泛函  $\Omega[z]$  的类型给出, 也是先验信息的一部分。

由于问题(1.1.1)数据的扰动, 问题的  $\Omega$ -最优准解在  $Z$  中可能不稳定。在这种情况下, 有必要定义什么是“求解反问题”(或者, 换句话说, 什么是“找到  $\Omega$ -最优准解”)。上面给出的示例表明, 对求解过程的通常解释经常不适用于不稳定问题。在这方面, A.N. Tikhonov 在 1963 年提出了一个全新的**不适定问题正则化算法**概念。

设置问题(1.1.1)的可接受数据类:  $\Sigma = \{(A, u) : A \in \mathcal{A}, u \in U\}$ , 其中  $\mathcal{A}$  是从  $\mathcal{D}$  到  $U$  的有效算子集。假设问题的确切数据是可以接受的:  $(A, u) \in \Sigma$ 。进一步假设  $\{(A_h, u_\delta)\} \in \Sigma$  是任何问题的可接受的“近似”数据族, 它取决于参数  $h, \delta \geq 0$ 。这些参数通常分别具有算子和右侧的扰动误差水平特征的含义。这里假设  $A_h \rightarrow A, u_\delta \rightarrow u$ , 也就是说, 当  $h \rightarrow 0, \|A_h z - Az\|_U \rightarrow 0$ , 对于任意  $z \in \mathcal{D}$  和  $\|u_\delta - u\|_U \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$  成立。

定义 8. 通过正则化算法 (PA) 寻找反问题(1.1.1) 的  $\Omega$ -最优准解  $\bar{z} \in \mathcal{D}$  称为映射  $R(h, \delta, A_h, u_\delta)$ , 其中: 1) 对应于问题的任何可接受的近似数据  $(A_h, u_\delta)$  及其精度特征  $(h, \delta)$  的某个元素  $z_{h\delta} = R(h, \delta, A_h, u_\delta) \in \mathcal{D}$ ; 2) 保证在  $Z$  上  $h, \delta \rightarrow 0$  时收敛为:

$$z_{h\delta} = R(h, \delta, A_h, u_\delta) \rightarrow \bar{z}. \quad (1.1.5)$$

**求解不适定反问题**(1.1.1)表示用于找到其  $\Omega$ -最优准解的正则化算法。反问题的一个近似解是元素  $z_{h\delta} = R(h, \delta, A_h, u_\delta) \in \mathcal{D}$ , 满足定义 8 的要求。

因此, 要解决不适定(不稳定)问题, 仅能够确定寻找其“近似解”的计算过程  $R(h, \delta, A_h, u_\delta)$  是不够的。还需要分析该过程对  $h, \delta \rightarrow 0$  的渐近性质, 并确保满足定义 8 的要求 2)。如果不进行这种渐近分析, 则即使对于问题数据中的任意小错误, 被认为是“近似解”的元素也可能与所寻求的  $\Omega$ -最优准解  $\bar{z}$  相距任意“远”。在这种情况下不能假设我们已经设法解决了不适定问题。

正是由于这个原因, 迄今为止提出的所有正则化算法都伴随着代表指定渐近分析的“收敛定理”。

为了理论研究和实际应用的方便, 根据 A.N.Tikhonov, 使用以下形式的正则化算法是很方便的。引入算子族  $R^\alpha(A_h, u_\delta)$ , 它取决于某个参数  $\alpha$  - 正则化参数。这些算子将每个可接受的近似数据与某个元素  $z^\alpha = z^\alpha(A_h, u_\delta) = R^\alpha(A_h, u_\delta) \in \mathcal{D}$  相关联。然后根据数据  $(h, \delta, A_h, u_\delta)$  选择正则化参数  $\alpha = \alpha(h, \delta, A_h, u_\delta)$  以保证收敛(1.1.5): 在  $Z$  上  $z^{\alpha(h, \delta, A_h, u_\delta)} \rightarrow \bar{z}$ , 其中  $h, \delta \rightarrow 0$ 。最终我们得到满足定义 8, 形式为  $z^{\alpha(h, \delta, A_h, u_\delta)} = R^{\alpha(h, \delta, A_h, u_\delta)}(A_h, u_\delta)$  的算法。

开发了许多方法来构建正则化算法  $R^\alpha(A_h, u_\delta)$  和适当选择正则化参数。已知变分、迭代、谱正则化算法以及其他一些算法。在这本书中主要使用变分 PA。这样做的理由将在下面的 §5 中给出。同时, 为了多样化给出求解一些线性不适定问题的迭代和谱正则化算法的示例。

例 20. 一种用于寻找线性代数方程组正规伪解  $Az = u$  的迭代正则化算法。

再考虑一个形式为(??)的线性方程组。它的精确 (对于  $h = 0$ ) 和近似扩展矩阵具有形式

$$[A_h | u] = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & h & 1 \end{array} \right), \quad 0 \leq h < 1,$$

正规伪解为向量  $\bar{z} = (1, 0)^T$ 。求解该方程组应用形式为  $z_n = P_h z_{n-1} + v_h, z_0 = (0, 0)^T$  的迭代过程, 其中  $P_h = E - A_h^T A_h, v_h = A_h^T u$ ,  $E$  为单位矩阵。这就是所谓的求解线性代数方程组的显式方法 (例如, 参见 [?])。不难计算出

$$\begin{aligned} z_n &\equiv R^n(A_h, u) = \sum_{k=0}^{n-1} P_h^k v_h = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-(1-h^2)^n}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-(1-h^2)^n}{h} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

因此,  $z_n \rightarrow (1, 1/h)^T \equiv z_h$ , 其中  $n \rightarrow \infty$ 。这意味着该问题中的显式迭代法本身给出了一个近似解  $z_h$ , 对于  $\bar{z}, h \rightarrow 0$  来说, 它不会是一个稳定的近似。然而, 如果我们取值  $n = n(h)$  作为正则化参数并选择它使得  $n(h)h \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ , 那么, 从(1.1.6)可以看出,  $z_{n(h)} \rightarrow \bar{z}$ 。这样, 基于显式迭代方法的计算过程  $z_{n(h)} = R^{n(h)}(A_h, u)$  将是一种正则化算法, 它用于寻找我们方程组的正规伪解。□

可以在 [?] 中找到有关迭代正则化概念的详细信息。

例 21. 谱算法 (TSVD 方法) 寻找线性代数方程组的正规伪解  $Az = u$ 。

我们将求解线性方程组  $Az = u$ , 其中  $A$  是一个大小为  $m \times n$  的矩阵,  $z \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ 。由于这个方程组可能没有常规解, 我们将在最小二乘法 (MHK) 的意义上解决它, 即搜索其伪解 - 向量  $z^* \in \mathbb{R}^n$ , 其中方程组残差  $\mathbb{R}^m$  中的最小欧几里德范数为:

$$\|Az^* - u\|_2^2 = \inf \{ \|Az - u\|_2^2 : z \in \mathbb{R}^n \}$$

这保证了方程组的可解性 (在 MHK 的意义上) 但不能避免伪解非唯一性的可能。因此, 这种情况下反问题的最终建立是找到  $\Omega$ -最优伪解。最方便的是选择  $\Omega[z] = \|z\|_2^2$ 。那么满足上述问题 1] 的所有条件和  $\Omega$ -最优伪解  $\bar{z}$ , 它在给定的情况下, 在欧几里得空间  $\mathbb{R}^n$  中存在唯一一个正规伪解。

欧几里得空间中的正规伪解理论上用矩阵  $A$  的奇异值分解 (见定理 14) 表示。假设我们知道这个奇异值分解:  $A = URV^T$ , 其中  $U, V$  分别是大小为  $m \times m$  和  $n \times n$  的正交矩阵, 且  $R = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_M)$  是大小为  $m \times n$  的矩形对角矩阵, 在对角线上包含矩阵  $A$  的奇异数  $\rho_1, \dots, \rho_M$ ,  $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_M \geq 0$ 。这里  $M = \min(m, n)$ 。则可以求出  $A$  的伪逆矩阵。已知 (参见, 例如 [?, ?, ?] 等),  $A^+ = VR^+U^T$ , 其中  $R^+ = \text{diag}(\theta(\rho_1), \dots, \theta(\rho_M))$  是一个大小为  $n \times m$  的矩形对角矩阵, 函数  $\theta(x)$  定义为:  $\theta(x) = \{x^{-1}, x \neq 0; 0, x = 0\}$ 。因此, 利用找到的伪逆矩阵计算正规伪解:  $\bar{z} = A^+u = VR^+U^T u$ 。

如上所述 (第??章 §??), 由于方程组矩阵的扰动, 这个计算过程一般来说是不稳定的。若  $A_h$  是精度  $h > 0$  的近似矩阵:  $\|A - A_h\|_E \leq h$ , 则计算其近似奇异值分解  $A_h = U_h R_h V_h^T$  后, 不能保证正规伪解  $\bar{z}_h = A_h^+ u = V_h R_h^+ U_h^T u$  和有近似矩阵的方程组将接近精确的正规伪解  $\bar{z}$ 。因此, 在过程中提出  $\bar{z}_h = V_h R_h^+ U_h^T u$  接零 “小” 奇异值矩阵  $R_h$  (参见, 例如, [?, ?, ?] )。这种方法被称为 “TSVD 方法” (truncated SVD)。它通过引入参数矩阵族  $A_h^+(\alpha) = V_h R_h^+(\alpha) U_h^T$  来形式化。这里  $\alpha > 0$  是正则化参数,  $R_h^+(\alpha) = \text{diag}(\theta[\xi_\alpha(\rho_1)], \dots, \theta[\xi_\alpha(\rho_M)])$ , 而  $\xi_\alpha(x) = \{x, |x| > \alpha; 0, |x| \leq \alpha\}$ 。函数  $\xi_\alpha(x)$  在这个算法中 “过滤” 小的奇异值矩阵  $A_h$ 。正则化算法是在应用 TSVD 过程的基础上构建的, 根据规则:  $z_{h\delta}^\alpha =$

$A_h^+(\alpha)u_\delta = V_h R_h^+(\alpha)U_h^T u_\delta$ ，其中  $u_\delta$ — 方程组的近似右侧。以一种特殊的方式根据矩阵  $h > 0$  的误差来选择正则化参数，可以实现满足定义的正则化算法的要求(1.1.5)，即实现近似解  $z_{h\delta}^{\alpha(h)}$  收敛到期望的正规伪解  $\bar{z}$ 。相应的研究可以在 [?] 中找到，该算法的更详细讨论在第 5 章 §1 中给出。在最简单的情况下可以假设  $\alpha(h) = h$ 。

使用 TSVD 过程应用正则化算法来求解示例 20 中的问题。在这个例子中，近似矩阵的奇异值分解实际上是这样设置的： $U_h = V_h = E, R_h = \text{diag}(1, h)$ 。因此，假设  $\alpha(h) = h$ ，我们得到： $R_h^+(\alpha(h)) = \text{diag}(\theta[\xi_{\alpha(h)}(1)], \theta[\xi_{\alpha(h)}(h)]) = \text{diag}(1, 0)$ 。结果表明， $z_h^{\alpha(h)} = V_h R_h^+(\alpha(h))U_h^T u = \bar{z}$  对于任意  $h, 0 \leq h < 1$  成立。这个简单示例中的算法立即给出了所需的正规伪解。□

在第四章中给出了迭代和谱算法的其他示例。

## 1.2. 是否能在不知道数据误差的情况下解决不适定问题

在 A.N.Tikhonov[?, ?] 的工作中，不仅明确定义了”解决不适定问题”的含义，而且还指出了解决方案即特定的正则化算法  $R(h, \delta, A_h, u_\delta)$ 。它被称为 A.N.Tikhonov 正则化方法，并将在之后的章节中以各种形式详细讨论。在这里，我们规定它的形式在这样的情况下，当在反问题 (2.1) 的公式中，空间  $Z$  和  $U$  是希尔伯特空间， $\mathcal{D} = \mathcal{Z}$ ，算子  $A$  是线性的且从  $Z$  到  $U$  是连续的，等式 (2.1) 具有唯一的解  $\bar{z} \in \mathcal{Z}$ 。数字  $h$  和  $\delta$  用来确定估计范围  $\|A - A_h\| \leq h, \|u - u_\delta\| \leq \delta$ 。在这样的条件下，正则化方法使用元素的参数族  $z^\alpha = (\alpha I + A_h^* A_h)^{-1} A_h^* u_\delta = T(\alpha, A_h, u_\delta) \in \mathcal{Z}$ ，其中  $I$  是  $\mathcal{Z}$  中的单位算子。当根据问题的数据适当选择正则化参数  $\alpha = \alpha(h, \delta, A_h, u_\delta) > 0$  时，我们将简单地表示为  $\alpha = \alpha_\eta$ ，这个参数族产生了正则化算法，即  $z^{\alpha_\eta} = T(\alpha_\eta, A_h, u_\delta) \rightarrow \bar{z}$  当  $\eta = (j, \delta) \rightarrow 0$ 。最初，A.N.Tikhonov 提出了正则化参数所谓的”先验”选择，其中解析地设置了依赖性  $\alpha = \alpha(h, \delta)$ ，服从条件  $\alpha(h, \delta) \rightarrow 0, (h + \delta)^2 / \alpha(h, \delta) \rightarrow 0$  当  $h, \delta \rightarrow 0$ 。例如，可以假设  $\alpha(h, \delta) = h + \delta$ 。在之后提出了其他选择  $\alpha$  的方法——后验选择（参见 4 和章节 3）。这种形式的 A.N.Tikhonov 正则化方法在解决许多应用问题方面表现

图 1.1: 左侧: 函数图像  $\psi(\alpha)(1), \xi(\alpha)(2)$  和选择 (参考) 的  $\alpha_{ko}$ (点)。右侧: L-曲线的图像和选择 (参考) 的  $\alpha_L$ 。在小图中给出了问题的精确解 (小圆圈) 和利用 L-曲线 (点) 方法得到的近似。图像由确定的数据  $(A_0, u_0)$  得到。

出高效率。

与此同时, 早在 20 世纪 60 年代初, 出现了问题是否有可能构建一个正则化算法, 该算法显然不依赖于数据的误差估计  $h, \delta$ , 并以  $Z_{h\delta} = R(A_h, u_\delta)$  的形式给出。这种诱人的可能性首先在 A.N.Tikhonov 和 V.B.Glasko 的数值实验中得到证明 [?]. 他们提出了参数的所谓准最优选择, 其中  $\alpha_{ko} = \alpha(A_h, \delta)$  位于函数的全局最小值点

$$\psi(\alpha) = \left\| \alpha \frac{dz^\alpha}{d\alpha} \right\|^2, \quad \alpha \geq 0. \quad (1.2.7)$$

它基于以下考虑。正则化参数的最优值, 它给出了近似解的最佳精度, 应该从最小条件  $\inf\{\|z^\alpha - \bar{z}\|: \alpha \geq 0\}$  中选择。但是, 它无法找到, 因为精确解  $\bar{z}$  是未知的。另一方面, 对于”很小” $\alpha$ , 在  $z^\alpha \rightarrow \bar{z}$  收敛的假设下, 似乎很自然的估计  $z^\alpha - \bar{z} \sim \alpha \frac{dz^\alpha}{d\alpha}$ , 因为  $\|z^\alpha - \bar{z}\| \sim \alpha \left\| \frac{dz^\alpha}{d\alpha} \right\|$  这导致了通过最小化函数 (1.2.7) 找到”准最优”修正参数的想法。函数 (1.2.7) 的典型图和所选修正参数  $\alpha_{ko}$  在 1.2 左侧给出 (曲线 1)。该图对应于线性方程组  $A_0 z = u_0$ , 其中  $A_0 = \text{diag}(1, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5})$ ,  $u_0 = (1, 0.02, 0.0015, 0.0001, 0.3 \cdot 10^{-5})^T$ 。

可以示出, 元素  $w^\alpha = \alpha \frac{dz^\alpha}{d\alpha}$  由公式  $w^\alpha = -\alpha(\alpha I + A_h^* A_h)^{-1} z^\alpha$  定义, 这使得在每个点处的函数 (1.2.7) 的计算在复杂度上与元素的计算相当。数值实验表明, 对于许多问题模型, 所获得的近似解具有良好的质量。然而, 在无限维希尔伯特空间  $Z$  和  $U$  的一般情况下, 所有试图证明准最优选择参数  $\alpha$  是作为正则化算法的基础, 而不使用关于未知解  $\bar{z}$  的额外详细信息的尝试, 都没有给出结果。此外, 在一些反例中表明, 具有准最优选择  $\alpha$  的正则化方法, 当  $h, \delta \rightarrow 0$  时不会提供向  $\bar{z}$  近似收敛性 (例如, 参见工作 [?])。唯一的情况成功证明了准最优 Tikhonov 近似的收敛性 (2.5), 是在有限维空间  $Z$  和  $U$  [?] 中精确给定算子  $A$  的情况。但是, 如上所述, 找到等式 (2.1) 的正交伪解的问题将被适定建立。

还有另一种已知的方法不使用值  $h, \delta$  来选择参数  $\alpha$ 。这就是所谓的“比率准则”[?]，其中参数被选择为函数的局部最小值最接近零的点

$$\xi(\alpha) = \frac{\|w^\alpha\|^2}{\|z^\alpha\|^2} = \frac{\psi(\alpha)}{\|z^\alpha\|^2}. \quad (1.2.8)$$

函数  $\xi(a)$  的典型如 1.2 左侧所示（曲线 2）。这种方法也给出了良好的数值结果 [?]，但它与准最优  $\alpha$  方法一样，只适用于有精确矩阵的线性方程组解的适定问题 [?]

用 GCV（一般交叉验证）方法选择  $\alpha$  也会出现类似的情况 [?]，其中  $\alpha(A_\delta, u_\delta)$  位于函数全局最小值的点

$$G(\alpha) = \left\| (\alpha I + A_h A_h^*)^{-1} u_\delta \right\| \cdot \left[ \text{tr} (\alpha I + A_h A_h^*)^{-1} \right]^{-1}, \quad \alpha \geq 0, \quad (1.2.9)$$

因此也不依赖于  $h, \delta$ 。在这个公式中， $\text{tr}$  是算子的迹（参见 [?]）。对于用 GCV 方法选择  $\alpha$ ，也给出了反例，表明这样的  $\alpha$  可能不存在，同时也无法给出 Tikhonov 近似的收敛性 (2.5)（见 [?]

事实证明，现有的反例和考虑选择  $\alpha$  的方法的根据缺乏不是偶然的。对于找到形式为 (2.1) 的方程组的正交伪解的问题，理解这种现象的关键给出

**定理 15.** 设  $\mathcal{L}$  是从  $Z$  到  $U$  的线性连续算子集合。进一步假设， $R(A_h, u_\delta)$  是  $Z$  中直积  $\Sigma = \mathcal{L} \times U$  的映射。若  $R(A_h, u_\delta)$  是问题 (2.1) 的正则化算法，它不显式依赖于  $h, \delta$ ，则映射  $P(A, u) = A^+ u$  在  $\Sigma$  上有定义且连续。

这个定理的证明在 [?] 给出了。A.B.Bakushinsky 先前在 [?] 中证明了类似的命题。

根据这个定理显然可得，不明确使用值  $h, \delta$  的正则化算法只可能存在于适定性（稳定的）问题 (2.1) 中。实际上，问题数据集  $\Sigma$  上的映射  $\bar{z} = A^+ u$  的连续性意味着计算正交伪解  $\bar{z}$  问题的适定性（稳定性）。

因此，根据定理 15，所有“不使用误差估计  $h, \delta$  来解决不适定问题的方法”实际上都仅适用于解决稳定（适定）问题。这些方法包括正则化参数的准最优选择 [?]，比值准则 [?]，GCV 方法 [?]，来自工作 [?, ?] 的 TSVD 方法的变体，其中在不使用  $h, \delta$  的情况下执行光谱切割，以及其他一些方法。作为解决适定问题

的方法，它们可以用于，例如，寻找具有不受干扰矩阵的固定维度的线性代数方程组的伪解（解）。定理 15 的结果解释了，为什么在无限维希尔伯特空间  $Z$  和  $U$  的一般情况下，所有试图从理论上证明这些方法是正则化算法的尝试都是不成功的。

对这些解决不适定（不稳定）问题的方法的适应性只能基于使用一些关于精确解  $\bar{z}$ ，问题精确数据  $(A, u)$ ，和关于特征随机变量  $A_h, u_\delta$  的详细附加信息。通常，这些信息与精确解  $\|\bar{z}\|$  范数的上限估计的知识或与对  $\bar{z}$  的特殊光谱约束的应用相关联。这样的信息通常会给出适定性问题，因此可以使用不显式使用数据误差估计的方法来解决问题。应该注意的是，这只能用于精确和近似数据问题的非常“狭窄”的子集。

“不使用数据误差”选择正则化参数的方法之一需要特别考虑。这就是所谓的“方法”（见 [?, ?]）。关键不在于它在解决应用问题时获得了一定的分布，也不在于它实际上只适用于解决适定问题（即使如此也并非总是如此）。这种方法最令人不快和意想不到的特点是，对于许多问题，它在近似解中给出了无法消除的系统误差（见 [?]）。

对于上述形式的 A.N.Tikhonov 正则化方法，L-曲线方法包括选择参数  $\alpha$  作为“L-曲线”最大曲率点，即参数指定的线  $L = \{(\ln \|A_h z^\alpha - u_\delta\|, \ln \|z^\alpha\|) : \alpha > 0\}$ 。L-曲线的典型图示于图 1.2 右侧并对应于此系统的解，其函数  $\psi(a)$  和  $\xi(a)$  的图绘制在左边。L-曲线方法的作者在一系列模型计算中“证实”了它，而没有对当  $h, \delta \rightarrow 0$  时的近似解行为进行理论上的渐近分析。这对于解决不适定问题的算法是不可接受的。

在对该方法详细理论分析期间，事实证明，它不仅无法解决不适定问题，而且还无法获得最简单的有限维适定问题的近似解。这很容易验证对于“方程”  $z = 1$ ，即方程 (2.1)，其具有  $Z = U = \mathbb{R}$ ,  $A = E$ ,  $u = 1$ ，并对于任意  $h$  和  $\delta$  有近似数据  $A_h = E$ ,  $u_\delta = 1$ 。显然， $\|z^\alpha\| = \frac{1}{\alpha+1}$ ,  $\|A_h z^\alpha - u_\delta\| = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ 。相应的 L-曲线的图示于图 1.2 左侧。它还展示了正则化参数  $\alpha_L(A_h, u_\delta) = 1$  的选定值，这个值不依赖于  $h$  和  $\delta$  并在所有误差水平下给出相同的“近似解”  $z^{\alpha_L(A_h, u_\delta)} = 0.5$ ，当然，它不会收敛到精确解  $\bar{z} = 1$ 。从数值上看，这是利用演示 L\_counterexample



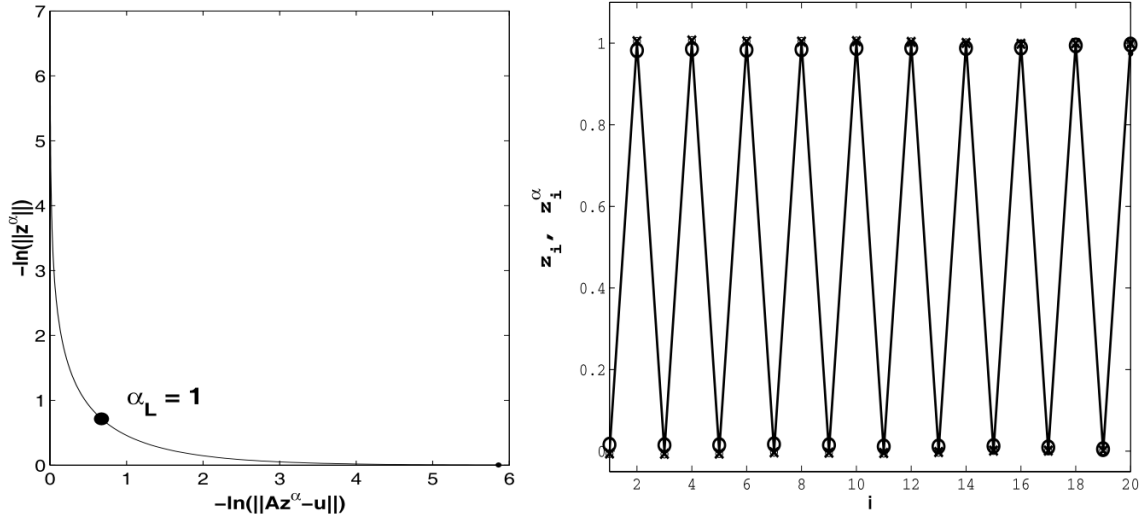


图 1.2: 左侧: L-曲线的反例。右侧: 选择正则化参数的理论方法的比较 [精确解 (—)、广义残差原理 (○)、平滑泛函和修正准最优选择的广义原理 (xxx)] 和 L-曲线方法 (···)

来验证的。在图 1.2 右侧的示例中也观察到该方法的相同行为。在另一个反例中，具有数据  $A = \text{diag}(1, 0)$ ,  $A_h = \text{diag}(1, h)$ ,  $u = u_\delta = (1, 1)^T$  的两个方程的系统——表明形如  $L = \{(\|A_h z^\alpha - u_\delta\|, \|z^\alpha\|) : \alpha > 0\}$  的 L-曲线方法，在近似解  $\|z^{\alpha_L(A_h, u_\delta)} - \bar{z}\| \rightarrow 0.5$  当  $h, \delta \rightarrow 0$ ，给出了致命的系统误差（见 [?]）。

因此，在一些数值实验中显示“良好的实际结果”的方法 [?, ?] 不应该用于解决不适定问题，因为它的各种形式在理论上都是站不住脚的。

现在，我们展示了所列的不使用  $h$  和  $\delta$  来选择正则化参数的方法的缺点。

Quasiopt 模型实现了上述形式的 A.N.Tikhonov 正则化方法，用于求解具有大小为  $20 \times 20$  的规范 Jordan 矩阵的线性方程组：  $A = [a_{ij}]$  其中  $a_{ij} = 0, a_{ii} = 1, (i = 1, \dots, 20), a_{ii+1} = 1, (i = 1, \dots, 19)$ 。方程组右侧为  $u = (1, \dots, 1)^T$  且不受误差干扰。近似矩阵与精确矩阵的区别仅在于元素  $a_{201} = h$ 。正则化参数的选择是根据理论上得到证实的广义残差原理和平滑泛函的广义原理，这将在 S4 和 S3 的

第 3 章中详细讨论。此外，还对正则化参数进行了修正的准最优选择，这在 [53] 中被证实为正则化算法。在这种方法中，参数  $(h, \delta, A_h, u_\delta)$  被发现为最接近于修改函数 (2.7) 最小值的零点：

$$\Psi_{h\delta}(\alpha) = \left\| \alpha \frac{dz^\alpha}{d\alpha} \right\|^2 + \frac{(\delta + h\|z^\alpha\|)^2}{\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (1.2.10)$$

用这种方式选择的参数  $\alpha$  显然取决于数据错误。已经证明了，参数  $\alpha_{m.q.opt} = \alpha_{m.q.opt}(h, \delta, A_h, u_\delta)$  的发现值给出了一个近似解  $z^{\alpha_{m.q.opt}}$ ，它收敛于问题的正交伪解。

所有这些理论上合理的 PA 在演示中与 L-曲线方法进行了比较。在图 1.2 右侧展示了问题的精确解（由折线连接的点）和矩阵相对误差  $h = 0.001$  下的近似解。可以看到，与使用理论上合理的方法（圆圈和十字）发现的近似值相比，L-曲线方法（点）找到的近似值存在显著误差。

L-曲线方法有时也被尝试用于不适定问题的迭代正则化 [?]。在这种方法中，正则化参数的作用是由过程中最后一次迭代的次数起到的。定理 15 的结果在这种情况下也是有效的：它表明，具有独立于  $h, \delta$  的停止规则的迭代算法不会正则化。程序 L\_curve 演示了这一点。该模块实现了具有 Jordan 矩阵和具有相同类型扰动的相同线性方程组的解决方案。有多种迭代方法可供选择：隐式、显式和共轭梯度方法。在所有这些方法中，在最小化方程组的残差的同时计算形为  $z^n = P_n z^{n-1} + v_n, Z^0 = 0$  的序列，其中算子  $P_n$  和元素  $v_n$  根据所使用的程序确定（见 [?]）。例如，对于隐式方法  $P_n = (E + A_h^T A_h)^{-1}, v_n = (E + A_h^T A_h)^{-1} A_h^T u_\delta$ 。该方法生成一个 PA，其中具有足够赋值的迭代数  $N = n(h, \delta, A_h, u_\delta)$ ，在该处终止进程。根据定理 15，这个数字应该显式取决于  $h, \delta$ 。然而，对于使用从一组点  $L = \{(\beta_n, \gamma_n)\} = \{(\|A_h z^n - u_\delta\|, \|z^n\|)\}$  获得线的方法，情况并非如此，迭代的最后度量  $N = n_L$  被选择为其最大曲率（即最小曲率半径）的点。在演示中，该方法用于矩阵的各种级别的相对误差： $h = 10^{-1} - 10^{-7}$ 。在演示过程中，事实证明，随着  $h$  减小，数字  $N = n_L$  已经稳定在  $h = 10^{-3}$ 。这导致了所得近似解的稳定性。在图 1.3 中，展示了 L-曲线 (a) 以及这条线的曲率半径对迭代次数 (b) 的依赖性。在右侧展示了对于  $h = 10^{-7}$ ，使用理论上不正确的 L-曲线方法和广

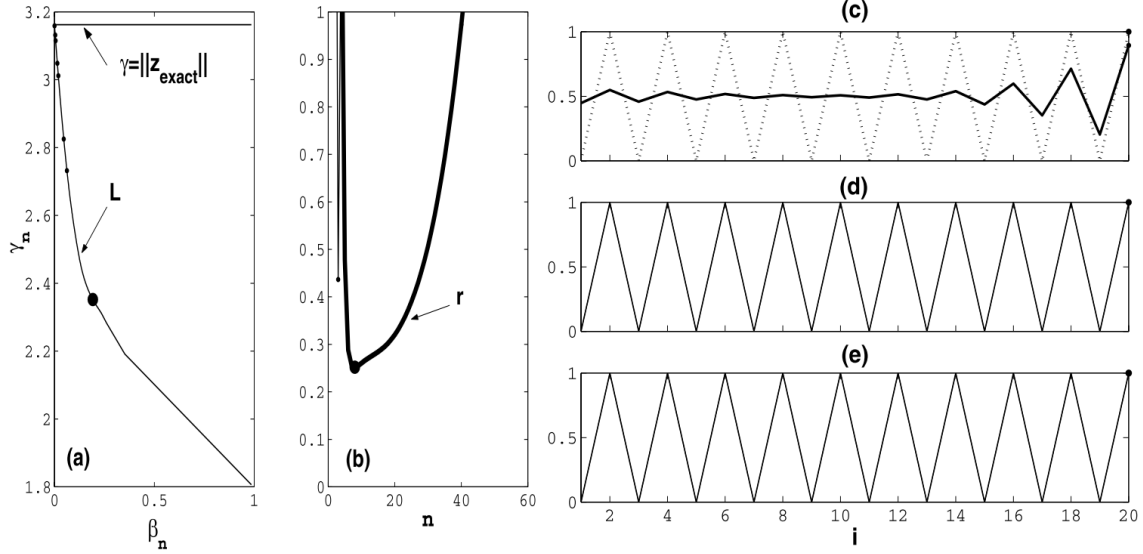


图 1.3: (a): 隐式迭代方法的 L-曲线; (b): 最小化曲线的曲率半径  $r$ 。点显示了选定的迭代次数  $n$ 。线  $\gamma = \|z_{exact}\|$  显示了精确解的范数。右侧: L-曲线方法 (c) 与理论上合理的 GRF 方法 (d) 在隐式方法中停止迭代的比较 [(·-)-精确解, (-)-近似解]。在图 (e) 显示了利用函数 pinv (即 OLS) 获得的近似解。矩阵的扰动水平  $h = 10^{-7}$ 。

义残差原理 (GFR) [?] 的合理迭代版本得到的近似解。在所解决的问题中该方法的系统误差是特征性的, 并且该误差随误差  $h$  的减小而变化。对于理论上合理的 GRF 方法, 在肉眼上近似解的图与精确解的图没有区别。该图还展示了使用 Matlab 函数 pinv (下图) 计算的解。该函数包含一种由参数 Tol 控制的正则化, 使其可用于矩阵有小扰动的情况。即使这样的正则化也给出了比 L-曲线方法更好的结果。对于其余的迭代方法, 获得了类似的结果。

### 1.3. 反问题的正则化

在解决建构的不适定反问题的时候经常出现这个问题：对于给定的问题存在解决问题的正则化算法么？事实证明，其并不是永远存在的。此外，反问题的大类是已知的，且对于它们来说不存在正则化算法。在这一节中，我们将概述这一领域的理论成果。这里我们讨论在 Banach 解空间  $Z$  中为问题  $(A, u) \in \Sigma = \mathcal{L} \times U$  的不同精确度的数据寻找线性方程 (2.1) 的正态伪解  $\bar{z}$  的反问题。这里  $\mathcal{L}$  是所有在赋范空间  $U$  中由  $Z$  生成的线性连续算子的集合。因此，我们对定义在某些数据子集  $\bar{\Sigma} \subset \Sigma$  上的映射  $\bar{z} = A^+u$  感兴趣。我们将  $\bar{\Sigma}$  称之为可接受的精确问题数据。接下来，让我们给出一种方法来解决我们的反问题，即。算子  $z_{h\delta} = R_{h\delta}(h, \delta, A_h, u_\delta)$ ，它根据近似数据  $(A_h, u_\delta) \in \Sigma$  及其精度估计  $h, \delta$ ，给出了一个近似的解  $z_{h\delta} \in Z$

定义 9：使用算法  $R_{h\delta}$  通过误差级别为  $h, \delta$  的近似数据计算正态伪解  $\bar{z} = A^+u$  的误差值称为值

$$\Delta(R_{h\delta}, h, \delta, A, u) = \sup\{\|R_{h\delta}(h, \delta, A_h, u_\delta) - A^+u\| : \\ \forall (A_h, u_\delta) \in \Sigma, \|u - u_\delta\| \leq \delta, \|A - A_h\| \leq h\}.$$

定义 10：计算算子方程 (2.1) 的正态伪解的问题被称为可以在可接受的精确数据集  $\bar{\Sigma} \subset \Sigma$  上正则化的问题，如果存在解法  $R_{h\delta}$ ，其中

$$\lim_{h, \delta \rightarrow 0} \Delta(R_{h\delta}, h, \delta, A, u) = 0 \quad \forall (A, u) \in \bar{\Sigma}.$$

在这种情况下算子  $R_{h\delta}$  是一个正则化算法，因为从定义 9, 10 可以推出 (2.5) 的收敛性。当满足定义 10 的时候，称映射  $P(A, u) = A^+u$  在其定义域  $\bar{\Sigma}$  上可正则化。

不适定问题的正则化理论的基本结果（见参考文献 18）包含在以下两个定理中。其中，假设问题 (2.1) 的算子  $A$  是精确指定的，即  $h = 0$ 。

定理 16：如果算子  $P(A, u) = A^+u$  将可接受的精确数据集  $\bar{\Sigma}$  映射到某个集合  $P(\bar{\Sigma}) \subset Z$  并且计算正态伪解的问题在  $\bar{\Sigma}$  中是可正则化的，则由空间  $U$  的可分性可以推得集合  $P(\bar{\Sigma}) \subset Z$  也具有可分性。

这个理论有个重要的推论。让我们用精确定义的线性算子  $A$  来研究逆问题 (2.1)，其中假设线性算子  $A$  是有界的且从  $Z$  到  $U$  是单值的。然后映射  $P(u) = A^+u = A^{-1}u$  将可接受数据集  $\bar{\Sigma} = AZ \subset U$  转换为集  $P(\bar{\Sigma} = P(AZ) = Z)$ 。如果空间  $U$  可分，空间  $Z$  不可分，那么，如同定理 16 推得的那样，这个映射不可正则化。所以对于这样的问题在空间  $Z$  中不存在正则化算法  $R_\delta(\delta, u_\delta)$ 。换句话说，无论我们采用什么算法  $R_\delta(\delta, u_\delta)$  来求解，都有一个适定的精确的等式 (2.1) 的等号右侧部分  $\tilde{u} \in \bar{\Sigma}$ ，其近似解  $z_\delta = R_\delta(\delta, u_\delta)$  当  $\delta \rightarrow 0$  时，不会按照空间  $Z$  的范数收敛到精确解  $\bar{z} = A^+\tilde{u}$ 。

为此，所考虑问题的解空间通常选择为可分的。出于同样的原因，许多作者试图构建一个 PA，该 PA 给出了根据具有有界变化的函数的不可分空间  $Z = V[a, b]$  的范数的收敛性，即无法获得“变分收敛”。相反，获得了其他类型的收敛。也是出于同样的原因，对于反问题的求解，实际上不使用本性有界函数 [42] 的不可分空间  $L_\infty[a, b]$ 。

但是，如果不在全空间，而是在它的可分子空间上求解这个问题，那么还是可以得到根据不可分空间  $Z$  的范数得到的近似解的收敛性。例如，如果在 Sobolev 空间  $W_1^1[a, b]$  中存在有关所求的解的特性的先验信息，且这个 Sobolev 空间恰好也是空间  $V[a, b]$  的可分子空间，则对于空间  $V[a, b]$  是可以实现的。这个问题将在 §7 的第三章中更详细地讨论。现在我们可以看一下 `Var_converg()` 演示的初步解释，它比较了不适定反问题的近似解的一致收敛性和它们在  $Z = W_1^1[a, b]$  情况下的变分收敛性以及其它空间的收敛性。一般而言，变分收敛提供了更高质量的近似解，尤其是在精确解不平滑的情况下。这就是为什么开发了特殊的正则化算法来保证在  $V[a, b]$ （见 [143, 68]）空间的特殊可分子集上的这种收敛。在 `Var_converg()` 演示过程中在数据的相对误差水平  $\delta\%0.1, h0.01\%$  上获得的典型解如图 4 所示。

让我们回到具有固定算子  $A$  的反问题的正则性讨论。

定理 17: 从空间  $U$  到可分赋范线性空间  $Z$  的映射  $P(u) = A^+$  在自己的定义域  $(\mathcal{D}(A^+))$  上是可正则化的，当且仅当在集合  $\mathcal{D}(A^+)$  上它是在  $U$  上连续的映

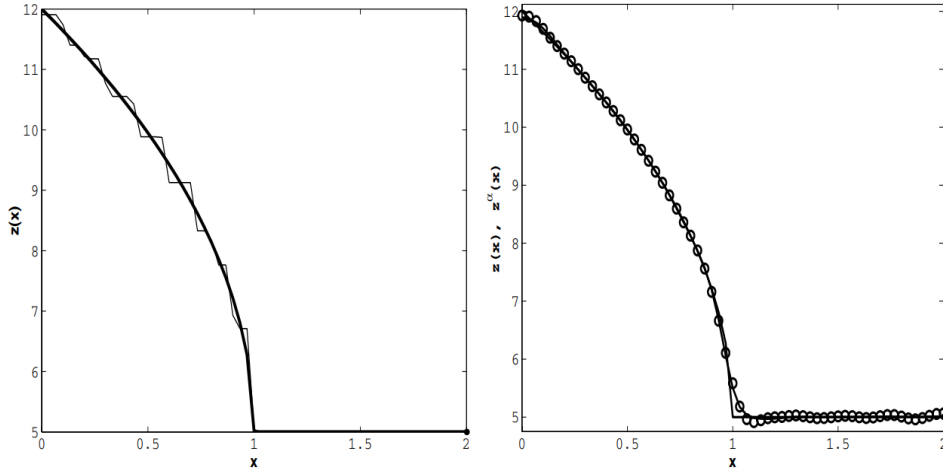


图 1.4: 第三章第七节中具有非光滑精确解的反问题。左侧是分段均匀正则化算法 (考虑解的单调性) 的应用。右侧是具有变分收敛的方法的应用。(-) 是精确解, (·) 或 (o) 是近似值。

射的逐点极限, 即如果存在一系列连续算子  $P_n : U \rightarrow Z$ , 那么

$$(2.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n u - A^+ u\|_Z = 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^+)$$

在许多情况下, 条件 (2.10) 可以很容易地被验证。例如, 如果  $Z$  和  $U$  是可分的 Hilbert 空间, 则带有完全线性算子  $A$  的方程 (2.1) 的正规伪解的计算可以通过 Tikhonov 系列算子  $T_n(u) = (\alpha_n I + A^* A)^{-1} A^* u$  正则化。这已在许多地方中得到证明 (见 [4, 18, 38, 79] 等)。这里  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $u$  是算子  $A^+$  的定义域  $\mathcal{D}(A^+)$  中的任意元素。

还有一些问题违反了定理 17 的条件 (2.10), 因此这些问题将无法正则化。因此, 例如, 有作用在  $C[0, 1]$  到  $L_2[0, 1]$  上的 Menikhes[76] 线性积分算子  $A$  的例子, 对于这些算子, 第一类的积分方程  $Az = u$  是不可正则化的, 即没有针对此类逆问题的正则化算法。这些例子的一个特征是算子的核  $N(A)$  是无限维的。

### 1.4. 一般形式的正则化条件和变分调节算法

在本节中，我们要研究反问题的一般情况，在下一章节中，将针对具体案例进行专门分析。

假设  $Z$  是一个具有元素  $z \in Z$  的拓扑空间，并且具有一些顺序收敛  $\tau$  的拓扑结构。引入一个从  $Z$  作用到赋范空间  $U$  的算子  $A$ （在一般情况下，非线性）。假设元素  $u \in U$  并定义一些非空集  $\mathcal{D}$ ， $\mathcal{D} \subset Z$ 。考虑下面的算子方程

$$Az = u, z \in \mathcal{D} \quad (1.4.11)$$

对于元素  $u$  的集合，我们的解假设方程(1.4.11)的拟解集元素  $u$  不为空。

$$Z^* = \arg \inf \{ \|Az - u\|_U : z \in \mathcal{D} \}$$

对于许多形式为 (1.4.11) 的方程，它可以包含多个元素。然后，为了找到（选择）方程(1.4.11)的特殊拟解，我们将使用一些辅助泛函  $\Omega[z]$ ，在  $\mathcal{D}$  上有定义并且有下界，即我们将在它的帮助下寻求方程(1.4.11)的  $\Omega$ -最优拟解，也就是说元素  $\bar{z} \in Z^*$ ，满足

$$\Omega[\bar{z}] = \inf \{ \Omega[z] : z \in Z^* \} \equiv \bar{\Omega} \quad (1.4.12)$$

我们将它们的集合表示为  $\bar{Z}$ ，那么  $\bar{\Omega} = \Omega[\bar{Z}]$ 。引入算子方程(1.4.11)不相容性的度量  $\mu = \|A\bar{Z} - \mu\|_U = \inf \{ \|Az - u\|_U : z \in \mathcal{D} \}$ 。假设用已知的近似数据  $\{A_h, u_\delta, \Omega_\varepsilon\}$  代替问题(1.4.11),(1.4.12)中确切的数据  $\{A, u, \Omega\}$ 。这里的算子  $A_h$ （一般来说，非线性）从  $Z$  作用到  $U$ ，泛函  $\Omega_\varepsilon$  定义在  $\mathcal{D}$  上， $u_\delta \in U$ 。近似值以“精度”  $\eta = (h, \delta, \varepsilon)$  给出。精度是指以某种方式确定的数值参数  $h, \delta, \varepsilon$ ，并且满足：对于任意  $z \in \mathcal{D}$ ，当  $\eta \rightarrow 0$ ，有  $\|u_\delta - u\| \rightarrow 0$ ， $\|A_h z - Az\| \rightarrow 0$ ， $\Omega_\varepsilon[z] \rightarrow \Omega[z]$ 。需要从这组元素中  $\{A_h, u_\delta, \Omega_\varepsilon, h, \delta, \varepsilon\}$  构造问题(1.4.11),(1.4.12)的  $\tau$ -稳定近似解，即对于  $\eta \rightarrow 0$  满足  $z_\eta \xrightarrow{\tau} \bar{Z}$ ，其中  $z_\eta \in \mathcal{D}$ 。

在这种情况下，可以方便地从理论角度考虑许多具有近似数据的应用反问题，尤其是不适定问题。如果算子  $A, A_h$  和泛函  $\Omega[z]$ ， $\Omega_\varepsilon[z]$  不具有某些特殊性质，则不可能构造  $\tau$ -稳定近似解。具体构造如下：

A) 残差泛函  $N(z) = \|Az - u\|_U$ ,  $N_h(z) = \|A_h z - u\|_U$  在集合  $\mathcal{D}$  是  $\tau$ -序列下半连续的, 对于任何满足  $z_n \xrightarrow{\tau} z \in \mathcal{D}$  的元素序列  $\{z_n \in \mathcal{D}\}$ , 满足极限关系:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Az_n - u\|_U \geq \|Az - u\|_U, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_h z_n - u\|_U \geq \|A_h z - u\|_U, \forall u \in U.$$

例如, 如果运算符在集合  $\mathcal{D}$  上是  $\tau$  连续的, 则可以确定:  $\forall \{z_n\} \subset \mathcal{D} : z_n \xrightarrow{\tau} z \in \mathcal{D} \Rightarrow Az_n \xrightarrow{U} Az, A_h z_n \xrightarrow{U} A_h z$ .

解决不适定问题算法的核心位置是泛函  $\Omega[z]$  上的条件。在所考虑的问题陈述中, 它其实扮演着双重角色。一方面, 它是为选择问题(1.4.11)的特殊拟解而引入的。因此, 往往是“使用者”赋予的, 带有一定的“物理意义”。另一方面, 它应该具有数学的正则化特性, 以保证  $\Omega$ -最优拟解的存在, 即问题 (1.4.12) 的可解性, 并确保在正则化算法的帮助下获得近似解  $z_n \in \mathcal{D}$  的  $\tau$  稳定性。从简单的例子中可以清楚地看出, 并不是每个预定的泛函  $\Omega[z]$  都具有这样的特性。在一般的形式下, 这些正则化的特性已经被许多作者从不同的位置进行了研究 (见参考文献 110、38、79 中的评论)。例如, 在 [110] 中, 指出了拓扑空间中正则化泛函的充分条件。在我们的例子中, 它们可以这样写:

B1)  $\Omega[z]$  和  $\Omega_\varepsilon[z]$  在集合  $\mathcal{D}$  是  $\tau$ -序列下半连续的; B2) 非空集合  $\Omega_C = \{z \in \mathcal{D} : \Omega[z] \leq C\}$   $\tau$ -列紧

现在假设问题(1.4.11), (1.4.12) 有一系列近似数据:  $\{h_n, \delta_n, \varepsilon_n, A_n, u_n, \Omega_n\}$ , 其中  $A_n = A_{h_n}$ ,  $u_n = U_{\delta_n}$ ,  $\Omega_n[z] = \Omega_{\varepsilon_n}[z]$ , 并且  $h_n, \delta_n, \varepsilon_n \rightarrow 0$ 。设  $z_n = z_n(h_n, \delta_n, \varepsilon_n, A_n, u_n, \Omega_n) \in \mathcal{D}$  是作为反问题近似解的元素。以下关于近似解的一般收敛定理是成立的 [110]。

**定理 1.4.1.** 如果条件 A), B1), B2) 都成立, 那么对于序列  $\{z_n\}$  的近似解满足如下正则化条件:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Omega[z_n] \leq \bar{\Omega}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Az_n - u\|_U = \mu \quad (1.4.13)$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $z_n \xrightarrow{\tau} \bar{Z}$ ,  $\Omega[z_n] \rightarrow \bar{\Omega}$ 。因此, 在正则化条件 A)、B1)、B2) 下, 构造近似解使得它们满足正则化条件就足够了。这自动确保了  $\tau$ -收敛近似于反问题  $\Omega$ -最优拟解集了。



对于问题的一般形式的一个重要特例,上面所说的也是正确的,其中  $Z$  是 Banach 空间,拓扑  $\tau$  是弱收敛的拓扑。在这种情况下,弱正则化条件可以表述为:

(A) 残差泛函  $N(z) = \|Az - u\|_U$ ,  $N_h(z) = \|A_h z - u\|_U$  在集合  $\mathcal{D}$  上是弱下半连续的; (B1) 泛函  $\Omega[z]$  和  $\Omega_\epsilon[z]$  在  $\mathcal{D}$  上也是弱下半连续的; (B2) 集合  $\Omega_C = \{z \in \mathcal{D} : \Omega[z] \leq C\}$  是弱序闭和弱紧致的。

根据定理(1.4.1),弱正则化条件 (A)、(B1)、(B2) 与正则性条件(1.4.13) 一起导致近似  $z_\eta \rightarrow \bar{Z}$  的弱收敛和  $\Omega[z_\eta] \rightarrow \bar{\Omega}$  的收敛。从应用的角度来看,近似解的弱收敛性常常被证明是没有意义的。当  $\eta \rightarrow 0$  时,  $z_\eta \rightarrow \bar{Z}$  在 Banach 空间  $Z$  中的强收敛将是可取的。这意味着该组近似解的所有强极限点都是反问题的  $\Omega$ -最优拟解。特别地,如果  $\Omega$ -最优拟解  $\bar{z}$  是唯一的,则  $z_\eta \rightarrow \bar{z}$ 。如果除了性质 (B1) 和 (B2) 之外,泛函  $\Omega[z]$  还具有所谓的  $H$ -性质,则可以获得强收敛。

**定义 1.4.2.** 泛函  $\Omega[z]$  在集合  $\mathcal{D}$  上具有  $H$ -性质,如果任何序列  $\{z_n \in \mathcal{D}\}$  弱收敛到某个极限  $z_0 \in \mathcal{D} : z_n \rightarrow z_0$ , 并且存在形式  $\Omega[z_n] \rightarrow \Omega[z_0]$  的收敛,则在  $Z$  中强收敛到  $z_0 : z_n \rightarrow z_0$ 。

由定义(1.4.2)可知,在附加条件下,弱正则化条件下求解反问题的算法有可能获得强收敛性:

(C) 泛函  $\Omega[z]$  在集合  $\mathcal{D}$  上具有  $H$ -性质

满足条件 (A), (B1) 和 (B2) 的定理(1.4.1),如果也满足条件 (C),那么就给出了 Banach 空间  $Z$  中近似解到问题(1.4.11),(1.4.12)的一组  $\Omega$ -最优拟解的强收敛性。

为了说明,考虑一个典型和众所周知的例子。设  $Z = \mathcal{D} = L_2[a, b]$  和  $\Omega[z] = \|z\|_{L_2}^2$ 。已知空间  $L_2$  中的范数是弱下半连续的,而该空间中的球是弱紧致的 [42]。因此,满足条件 (B1),(B2)。此外, Hilbert 空间  $L_2[a, b]$  中的泛函  $\|\cdot\|_{L_2}$  具有  $H$ -性质 [42]。因此,本例中近似解 (1.4.13) 的正则性条件不仅导致它们在  $L_2$  中弱收敛到精确正态伪解  $\bar{Z}$  的集合,而且导致它们强收敛。

类似的推理对泛函  $\Omega[z] = \|z\|_{L_2}^p$  有效,因为在 Banach 空间  $L_p$  中  $p \geq 1$ , 其

中范数也具有  $H$ - 性质。然而, 并不总是可以使用范数泛函来获得强收敛。例如, 在空间  $L_1[a, b]$  中, 范数从例子中很容易看出, 不具有  $H$ - 性质和性质 (B2)。因此, 对于这个空间的强正则化, 需要使用其他泛函。

使用 **变分正则化算法** 在一般情况和巴拿赫空间  $Z$  的情况下解决问题(1.4.11),(1.4.12)都很方便。为了描述它们, 需要引入以下条件, 以通过近似值来逼近问题的精确数据:

$$\|u - u_\delta\| \leq \delta, \|Az - A_h z\|_U \leq \xi(h, z), 0 \leq \Omega_\varepsilon[z] - \Omega[z] \leq \Theta(\varepsilon, z), \quad (1.4.14)$$

其中  $\varepsilon(h, z), \Theta(\varepsilon, z)$  是称为近似度量的已知泛函。近似度量的形式显示了  $h, \varepsilon$  的数值特征如何具体地确定了近似数据的准确性。在实践中, 最常遇到以下类型的近似度量:

- 1) 均匀逼近的条件:  $\xi(h, z) = h, \Theta(\varepsilon, z) = \varepsilon, \forall z \in \mathcal{D}$ , 通常在求解集合  $\mathcal{D}$  上的反问题时出现, 该集合  $\mathcal{D}$  在空间  $Z$  上有解或泛函  $\Omega[z]$  的值有上界;
- 2) 线性逼近的条件:

$$\xi(h, z) = h\xi_0(\Omega[z]), \Theta(\varepsilon, z) = \varepsilon\theta_0(\Omega[z]), \forall z \in \mathcal{D}$$

其中当  $t \geq \Omega^* = \inf\{\Omega[z] : z \in \mathcal{D}\}$ ,  $\xi_0(t), \theta_0(t) \geq 0$  是连续递增函数; 这些条件对于在整个空间  $Z$  或其凸子集  $\mathcal{D}$  上求解线性反问题是典型的: 它们对于一些非线性问题也满足; 此类近似度量的典型示例: 当  $\Omega[z] = \|z\|^2$  时,  $\Theta(\varepsilon, z) = \varepsilon(1 + \Omega[z])$  或者  $\xi(h, z) = h\|z\|$ 。

- 3) 非线性逼近的条件:  $\xi(h, z) = \psi_A(h, \Omega[z]), \Theta(\varepsilon, z) = \psi_\Omega(\varepsilon, \Omega[z]), \forall z \in \mathcal{D}$ , 其中函数  $\psi_A, \psi_\Omega \geq 0$  在第二个参数中是连续单调递增的,  $\psi_A(0, \Omega) = \psi_\Omega(0, \Omega)$  对于任意满足条件的  $\Omega$  值成立; 在求解非线性算子方程时会遇到这种近似度量 (参见 [110] 和第 3-1 章)。条件 1)、2) 是条件 3) 的特例。

如果满足上述任一近似条件, 则定理(1.4.1) 的正则条件可以写成等价形式:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Omega_n[z_n] \leq \bar{\Omega}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n z_n - u_n\|_U = \mu.$$

在一般形式中, 当  $\eta = (h, \delta, \varepsilon) \rightarrow 0$  时, 近似解  $z_\eta \in \mathcal{D}$  族的条件如下:

$$\overline{\lim}_{\eta \rightarrow 0} \Omega_\varepsilon[z_\eta] \leq \bar{\Omega}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \|A_h z_\eta - u_\delta\|_U = \mu. \quad (1.4.15)$$

可以证明下面的收敛定理。

**定理 1.4.3.** 让条件  $A)$ 、 $B1)$ 、 $B2)$  和一些近似条件  $1) - 3)$  得到满足。那么正则性条件(1.4.15) 意味着问题 (1.4.11) 的近似解  $\{z_\eta\}$  族  $\tau$ - 序列收敛: 对于任何序列  $\{\eta_n\}, \eta_n \rightarrow 0$ , 结果是  $z_{\eta_n} \xrightarrow{\tau} \bar{Z}$ 。同样, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\Omega[z_{\eta_n}] \rightarrow \bar{\Omega}$ 。

最著名的是三个变分 PA——A.N. Tikhonov 正则化方法 (一般形式)、广义残差法 (OMH) 和广义拟解法 (OMK) [110]。

**A. N. Tikhonov 的正则化方法** 元素  $z^{\alpha_\eta} \in \mathcal{D}$  作为  $z_\eta$  的近似解, 实现了平滑函数的全局最小值

$$M^{\alpha_\eta}[z] = \alpha_\eta \Omega_\varepsilon[z] + \|A_h z - u_\delta\|_U^2 \quad (1.4.16)$$

在集合  $\mathcal{D}$  上。这里  $\alpha_\eta$  是从数据  $\{A_h, u_\delta, \Omega_\varepsilon, h, \delta, \varepsilon\}$  中以特殊方式选择的正则化参数。选择该参数的方法在文献中有详细描述 (例如, 参见 [107, 110]) 并将在下面讨论。进行选择是为了在理论上确保满足关系。

$$\overline{\lim}_{\eta \rightarrow 0} \Omega_\varepsilon[z^{\alpha_\eta}] \leq \bar{\Omega}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \|A_h z^{\alpha_\eta} - u_\delta\|_U = \mu \quad (1.4.17)$$

-正则条件(1.4.15)的一个特例。如果满足定理 (1.4.3) 的条件, 则正则性条件 (1.4.17) 意味着近似解  $z^{\alpha_\eta}$  对反问题的  $\Omega$ - 最优拟解的集合  $\bar{Z}$  的  $\tau$  收敛和  $\Omega[z^{\alpha_\eta}] \rightarrow \bar{\Omega}$  的收敛。对于具有弱收敛性  $\tau$  拓扑的 Banach 空间, 在附加条件 (C) 下, 当  $\eta \rightarrow 0$  时, 我们得到强收敛性  $z^{\alpha_\eta} \rightarrow \bar{Z}$ 。

正则化参数, 如 §2 中所述, 必须由数据错误级别  $h$  和  $\delta$  明确确定。由于近似条件的特殊性, 它对数  $\varepsilon$  的依赖性不是基本的 [142, 61, 62]。如果仅根据值  $\eta = (h, \delta, \varepsilon)$  进行选择, 则参数  $\alpha_\eta$  的这种选择称为**先验**。如果参数还依赖于其他任务数据, 即  $\alpha_\eta = \alpha_\eta(A_h, u_\delta, \Omega_\varepsilon, h, \delta, \varepsilon)$ , 那么我们谈到选择  $\alpha_\eta$  的**后验**方式。

对于均匀或线性近似  $1)$ 、 $2)$  的条件, 可以执行参数的先验选择, 例如, 以满足如下要求:  $\alpha_\eta = \alpha(h, \delta) \rightarrow 0, (h + \delta)^2 / \alpha_\eta \rightarrow 0$  (参见 [107, 110])。请注意, 这样的选择不需要知道指定泛函  $\Omega_\varepsilon$  的精度  $\varepsilon$ : 近似解的收敛性应当确保为  $\varepsilon, h, \delta \rightarrow 0$ 。

**广义残差法 (OMH)**。根据这种方法, 找到问题(1.4.11),(1.4.12)的近似解, 我们取一些元素  $z_\eta \in \mathcal{D}$ , 满足:

$$\Omega_\varepsilon[z_\eta] = \inf \{ \Omega_\varepsilon[z] : \|A_h z - u_\delta\| \leq \mu_\eta + \delta + \xi(h, z), z \in \mathcal{D} \}. \quad (1.4.18)$$

这里的  $\mu_\eta = \inf \{ \|A_h z - u_\delta\| + \delta + \xi(h, z), z \in \mathcal{D} \}$  是对等式(1.4.11) 的不一致性度量  $\mu$  的估计。它有时被称为**不一致的广义度量**。在精确定义的运算符和正则化函数的特殊情况下, 即对于  $\eta = \delta, \xi(h, z) = 0, \Theta(\varepsilon, z) = 0$ , 问题(1.4.18)会具有如下形式

$$\Omega[z_\delta] = \inf \{ \Omega[z] : \|A z - u_\delta\| \leq \mu_\delta + \delta, z \in \mathcal{D} \}. \quad (1.4.19)$$

并称为**残差法** (见 [37, 38])。在假设 A)、B1)、B2) 和任何近似条件 1) - 3) 的满足下, 极值问题 (1.4.18),(1.4.19)的解存在, 并且在某些情况下它是唯一的。此外, 在某些情况下, 广义残差方法等效于具有特殊选择的参数  $\alpha$  [38, 110] 的 A.N. Tikhonov 正则化方法。**拟解的广义方法 (OMK)** 基于解决一个极值问题: 找到一个元素  $z_\eta \in \mathcal{D}$ , 其中

$$\|A_h z_\eta - u_\delta\| = \inf \{ \|A_h z - u_\delta\| : \Omega_\varepsilon[z] \leq \bar{\Omega}_{h,\delta}, z \in \mathcal{D} \}. \quad (1.4.20)$$

这里的值  $\bar{\Omega}_{h,\delta}$  是  $\Omega[\bar{z}]$  的先验给定上限, 因此对于  $h, \delta \rightarrow 0$ ,  $\bar{\Omega}_{h,\delta} \rightarrow \bar{\Omega} = \Omega[\bar{z}]$ 。有时在应用的反问题中, 这个估计是已知的, 尽管知道它通常会使问题在某些拓扑中稳定。由于条件 A)、B1) 和 B2) 以及近似条件 1) - 3), 存在被接受为近似解的元素  $z_\eta$ 。有时它是明确定义的。如果在(1.4.20)中使用精确泛函  $\Omega[z]$ , 那么这种算法称为算子方程的拟解法 [38, 110]。它是具有一组特殊限制的 §2 Ch. 1 的拟解方法的特例。

广义残差法和广义拟解法的算法确保所获得的近似解满足正则性条件(1.4.15) (见 [110])。因此, 根据定理 (1.4.3), 我们获得了对集合  $\bar{Z}$  的近似解  $z_\eta$  的  $\tau$ -收敛。特别是, 对于具有弱收敛拓扑的 Banach 空间  $Z$ , 这给出: 对于  $\eta \rightarrow 0$ ,  $z_\eta \rightarrow \bar{Z}$  和  $\Omega[z_\eta] \rightarrow \bar{\Omega}$ 。如果条件 (C) 也满足, 那么这意味着近似  $z_\eta \rightarrow \bar{Z}$  的强收敛。

从这个角度来看, 变分 PA 很方便, 因为它很容易在其中包含对问题解决方案的额外先验约束, 以适当的方式指定集合  $\mathcal{D}$ 。在本节的总结中, 我们注意到所述的变分 PA 通常具有最佳的精度顺序 (参见 [38, 100, 110] 和第 4 章)。

### 1.5. 典型具体反问题的建立以及对应的变量修正算法

在本节中, 我们具体的讨论在 §4 中 (2.11), (2.12) 的一般反问题在不同的巴拿赫空间  $Z$  中的建立, 特别注意这个问题: 对于这些泛函数  $\Omega[z]$  在空间  $Z$  中不仅仅满足性质 (B1) 和 (B2), 并且也得保证  $H$ -性质。现在让我们来看看, 在 A.H. 季洪诺夫正则化算法和 OMH, OMK 方法下, 对于这些具体的情况可以得到什么。

#### 1. 在希尔伯特空间下的线性问题

在本节中我们假设, 希尔伯特空间  $Z$  和  $U$  分别对应着矢量积和  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Z, \langle \cdot, \cdot \rangle_U$  在  $Z$  中为弱拓扑收敛, 如果她没有被特殊的重新定义, 那来看一下在问题 (2.11), (2.12) 最普遍的生成。

**1.1 关于正规拟解的问题** 假设  $D$  是凸的封闭集合在空间  $Z$  上, 而算子  $A, A_h: Z \rightarrow U$ —在  $D$  上线性并且不连续, 给出正则化泛函数为如下形式:  $\Omega[z] = \|z\|_Z^2$ , 很明显的可以看出来, 所有条件 (A), (B1), (B2), 和 (C) 都满足: 条件 (A) 和 (B1) 可以由不连续的算子和在希尔伯特空间  $Z$  和  $U$  下的弱下半连续性中得出, 而条件 (B2) 从在  $Z$  上的球的弱紧性可以得出, 条件 (C) 根据在希尔伯特空间下的范数的  $H$ -性质得出。我们假设, 问题 (2.11) 有准解在集合  $D$  上, 在最简单的情况下, 这是正确的, 如果有关于方程可解性的先验信息。这个时候从条件 (A), (B1) 和 (B2) 可以推出最优  $\Omega$  存在并且唯一, 也就是说, 在这种情况下是准解问题  $\bar{z}$  是正则化了的。实际上, 问题 (2.11), (2.12) 等价于最简化一个在希尔伯特空间的凸的封闭集上的强凸泛函数  $\Omega[z] = \|z\|_Z^2$ , 而这样的问题是可解的, 可以通过已知的关于最简化泛函数的魏尔施特拉斯定理。(参考 [14])。在本章节任何地方我们都认为解  $\bar{z}$  是非奇异的:  $\bar{z} \neq 0$ 。对于具体数据我们进一步定义他们趋近  $\{A_h, u_\delta\}$ , 拥有精度  $\eta = (h, \delta)$  并且受近似条件 1) 或者 2) 并且  $\varepsilon = 0$  的

限制。

**正则化方法** A.H. 季洪诺夫认为在本情况下：希尔伯特空间收敛到一个最简化的强凸函数

$$M_\eta^\alpha[z] = \alpha \|z\|_Z^2 + \|A_h z - u_\delta\|_U^2, \quad \alpha > 0 \quad (2.21)$$

在封闭凸集合  $\mathcal{D} \subset Z$ ，所以极限  $z^\alpha \in \mathcal{D}$  泛函数 (2.21) 存在并且唯一对于任意的  $\alpha > 0$ 。让我们回到选择参数正则化的问题上，**先验选择**，首先指定在 [103,104]，包括依赖条件  $\alpha_\eta = \alpha_\eta(h, \delta)$ ，对于满足条件  $\alpha_\eta \rightarrow 0, (\delta + h)^2/\alpha_\eta \rightarrow 0$  当  $\eta \rightarrow 0$ 。比如，可以取  $\alpha_\eta = \delta + h$ ，先验选择提供近似的强收敛解在空间  $Z: z^{\alpha_\eta} \rightarrow \bar{z}$  当  $\eta \rightarrow 0$ 。在固定数据精度下先验选择的一些任意性导致不同依赖关系的近似解存在显着差异  $\alpha_\eta(h, \delta)$ ，也就是，方法精确度，也就是说，在  $\|z^{\alpha_\eta} - \bar{z}\|_Z$  的情况下，固定的  $h, \delta$  可能因不同的函数  $\alpha_\eta$  而发生改变，这种情况影响了后验选择方法  $\alpha$  的制定。

**后验方法**中参数的选择将借助一些辅助函数的帮助，这些函数可以被计算当  $\alpha > 0$  并且在泛函 (2.21) 的极限  $z^\alpha$  的帮助下。除此之外，因为在一般情况下，不知道式子 (2.11) 是否可解，这种参数选择方法包含算子方程的不一致性度量  $\mu$  的稳定可计算上限。例如，对于在这种评级中近似的线性度量  $\xi(h, z) = h\|z\|$  可以取如下值

$$\mu_{h\delta} = \inf \{ \|A_h z - u_\delta\| + \delta + h\|z\| : \forall z \in \mathcal{D} \}, \quad (2.22)$$

而对于更简单的一致性度量  $\xi(h, z) = h$ ，其中  $h$  是个数

$$\mu_{h\delta} = \inf \{ \|A_h z - u_\delta\| + \delta + h : \forall z \in \mathcal{D} \}. \quad (2.23)$$

可以证出， $\mu_{h\delta} \geq \mu$  和  $\mu_{h\delta} \rightarrow \mu$  当  $h, \delta \rightarrow 0$  时。对于寻找  $\mu_{h\delta}$  的计算程序可以参考章节 §2 第 3 节，如果我们已知式子 (2.11) 存在解，那么对于以下所有  $\alpha$  的选择方法中，数  $\mu_{h\delta}$  都可以排除掉。后验方法中参数选择的正则公式是否存在取决于用于近似运算算子的条件。如果满足一致近似条件 1) 对于  $\xi(h, z) = h$ ，那么以下  $\alpha$  的近似取法是最常用的。

**误差原则** (参考 [37,79])，在其中可以通过最简化季洪诺夫函数  $M^\alpha[z]$  对于不同的  $\alpha > 0$  来计算函数  $\beta_\eta(\alpha) = \|A_h z^\alpha - u_\delta\|^2$ 。这个函数的典型形式的证明当

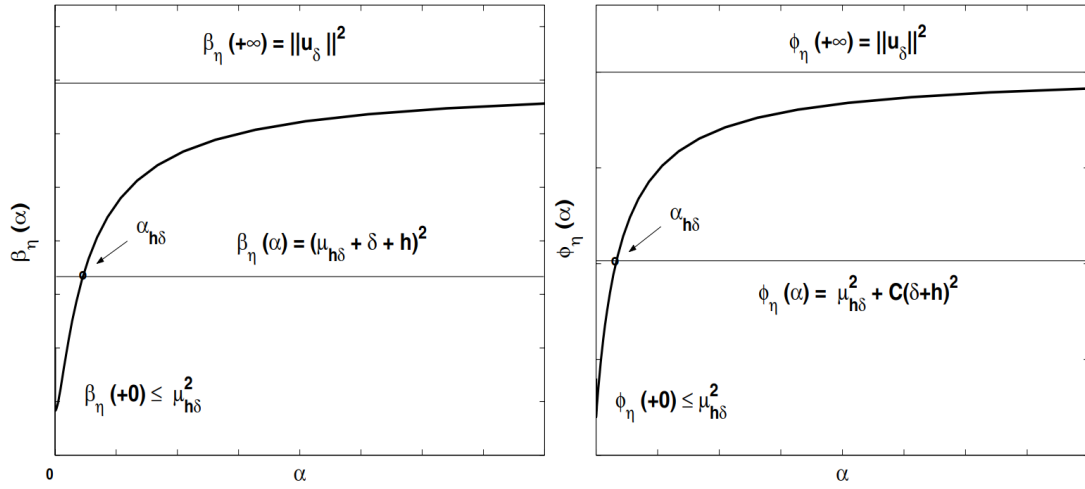


图 1.5: 左侧: 函数  $\beta_\eta(\alpha)$  和依据误差原则进行的变量选择。右侧: 函数  $\varphi_\eta(\alpha)$  和依据平滑泛函原则进行的变量选择

$D = Z$  时请参考图 1.5 的左侧, 在本题的生成情况下, 她是不连续, 单调非递减的当  $\alpha > 0$ , 因此  $\beta_\eta(+0) \leq \mu_{h\delta}^2$  和  $\beta_\eta(+\infty) = \|u_\delta\|^2$ 。当变量  $\alpha_\eta > 0$  时, 可以通过根式

$$\beta_\eta(\alpha) = (\mu_{h\delta} + \delta + h)^2 \quad (2.24)$$

来找出数值。

**平滑泛函原则** (参考 [79,110])。辅助函数  $\varphi_\eta(\alpha) = M^\alpha[z^\alpha]$  的计算形式在图 1.5 的右侧。这个函数是不连续的, 单调递增的, 并且是上凸的当  $\alpha > 0$ , 并且拥有极限值式子  $\varphi_\eta(+0) \leq \mu_{h\delta}^2$   $\varphi_\eta(+\infty) = \|u_\delta\|^2$ 。例如当  $\alpha_\eta > 0$  时, 可以选择这个根式

$$\varphi_\eta(\alpha) = \mu_{h\delta}^2 + C(\delta + h)^2 \quad (2.25)$$

其中  $C > 1$ -常数算法

**修正的准最优参数选择** (参考 [53]) 之所以叫做修正的准最优函数是因为主要是将变量修正至最小点趋近 0。这种函数有多种表达形式, (参考 [53,51])。例

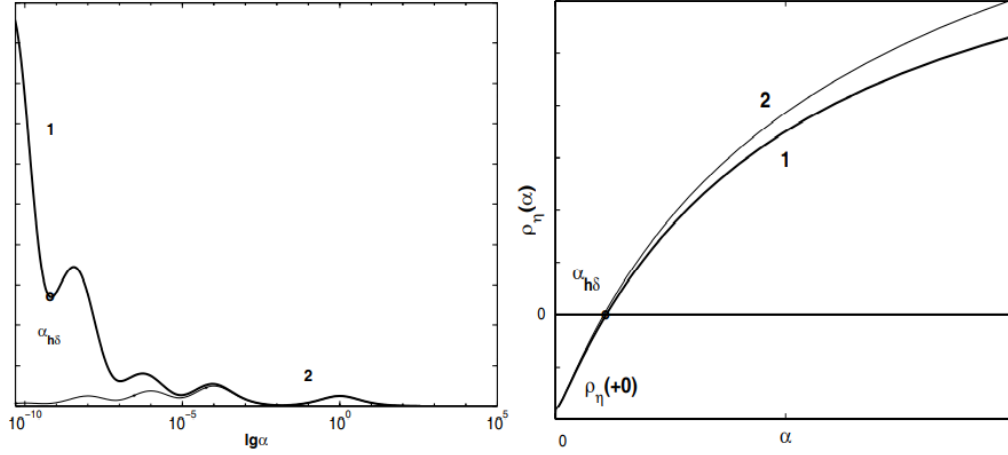


图 1.6: 左侧: 在准最优解比较中使用修正的准最优参数选择方法; 1-函数  $\Psi_{h\delta}(\alpha)$ ; 2- $\psi_{h\delta}(\alpha)$ , 在 (2.7) 中出现过; 展示使用修正的准最优参数选择值  $\alpha_\eta = \alpha_{h\delta}$ 。右侧: 使用一般误差原则和广义平滑泛函原则选择; 1-函数  $\rho_\eta(\alpha)$ , 2-函数  $\varepsilon_\eta(\alpha)$

如, 可以使用如下这种

$$\Psi_{h\delta}(\alpha) = \left\| \alpha \frac{dz^\alpha}{d\alpha} \right\|^2 + \frac{(\delta + h)^2}{\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (2.26)$$

当  $D = Z$  时, 第一个余因子可以由下列关系很好的计算出来 [51]

$$\psi_{h\delta}(\alpha) = \left\| \alpha \frac{dz^\alpha}{d\alpha} \right\|^2 = \|\alpha v^\alpha\|^2, \quad v^\alpha = \frac{dz^\alpha}{d\alpha} = -(\alpha I + A_h^* A_h)^{-2} A_h^* u_\delta$$

计算这一部分可以使用与这个序列一样的反算子:  $z^\alpha = (\alpha I + A_h^* A_h)^{-1} A_h^* u_\delta$ ,  $v^\alpha = -(\alpha I + A_h^* A_h)^{-1} z^\alpha$ 。函数  $\Psi_{h\delta}(\alpha)$  和  $\psi_{h\delta}(\alpha)$  的典型形式在图 1.6左侧展示了。这里同时展示了当  $\alpha > 0$  时, 函数  $\Psi_{h\delta}(\alpha)$  的局部极小值趋近 0。对于近似线性度量 2) 并且  $\xi(h, z) = h\|z\|_Z$ , 在这种情况下是变量的选择有时是无解的, 而有时不能给出稳定解。因此在 [30,31] 中建议和论述了根据经验得来的选择方法。



### 广义残差原则计算辅助函数

$$\gamma_\eta(\alpha) = \|z^\alpha\|^2, \pi_\eta(\alpha) = \left( \mu_{h\delta} + \delta + h\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)} \right)^2, \rho_\eta(\alpha) = \beta_\eta(\alpha) - \pi_\eta(\alpha) \quad (2.27)$$

这个函数是不连续的当  $\alpha_\eta > 0$  的时候, 函数  $\gamma_\eta(\alpha)$  和  $\pi_\eta(\alpha)$  单调非递增, 而  $\rho_\eta(\alpha)$  是单调非递减的, 因此单调性将是严格的当集合  $D = Z$  时, 函数的最后一部分叫广义误差。当集合  $D = Z$  她的函数图像在图 1.6 右侧展示了。在广义误差数  $\alpha_\eta > 0$  的原则下寻找修正的变量相当于解下列根式

$$\rho_\eta(\alpha) = 0 \quad (2.28)$$

这个方程是可解的 (至少对于《足够小的  $h$  和  $\delta$ 》), 如果  $\bar{z} \neq 0$ , 对于本线性问题, 可以证明, 对于任意的根  $\alpha_\eta > 0$ , 式子 (2.28) 对于不变的  $\eta$  可以给出同样的近似解  $z_\eta = z^{\alpha_\eta}$  (参考注释 2), 对于  $h = 0$  误差原则和广义误差原则是一致的。

广义平滑函数法则 (opcf) . 引入辅助函数

$$\bar{\pi}_\eta(\alpha) = \left[ \mu_{h\delta} + C \left( \delta + h\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)} \right) \right]^2, \varepsilon_\eta(\alpha) = \alpha\gamma_\eta(\alpha) + \beta_\eta(\alpha) - \bar{\pi}_\eta(\alpha) \quad (2.29)$$

在这里, 常数  $C > 1$ 。函数  $\varepsilon_\eta(\alpha)$  连续且单调递增。此外, 当  $\varepsilon_\eta(+0) < 0$   $\varepsilon_\eta(+\infty) = \|u_\delta\|^2 - (\mu_{h\delta} + C\delta)^2 > 0$ , 当  $h$  和  $\delta$  都足够小时。(参考 [110]) 因此, 方程

$$\varepsilon_\eta(\alpha) = 0$$

有唯一解  $\alpha_\eta > 0$ , 此解为选定的正则化变量。函数  $\varepsilon_\eta(\alpha)$  的图像在 1.6(曲线 2) 中列出。在  $h = 0$  的情况下, 广义平滑函数法则与平滑函数法则相符。在  $D = Z$  时使用**伪最优参数选择** (pov) 并引入辅助函数

$$\zeta_\eta(\alpha) = \alpha^{3/2} \left\langle (\alpha I + A_h A_h^*)^{-3} u_\delta, u_\delta \right\rangle$$

该函数在  $\alpha > 0$  时连续且单调递增。正则化参数  $\alpha_\eta > 0$  正是方程 (2.31) 的解。

$$\zeta_\eta(\alpha) = K \left( \delta + h\sqrt{\gamma(\alpha)} + \frac{\mu_{h\delta}h}{\sqrt{\alpha}} \right) + \mu_{h\delta}, \quad K = > 3 \quad (2.31)$$

在工作 [58] 中给出了该方法, 并证明了值  $\alpha_\eta$  的存在性和唯一性, 也证明了该方法的正则性质。上述的选择正则化变量的方法给出了满足正则化要求的近似解  $z^{\alpha_\eta}$ 。由于满足了条件 (A), (B1), (B2) 和 (C), 根据定理 19, 可推得当  $\eta \rightarrow 0$ , 有强收敛  $z^{\alpha_\eta} \rightarrow \bar{z}$ , 也就是说, 得到了问题的近似解在希尔伯特空间  $Z$  中的稳定性。这时常能引发一个问题: 为什么在 A.H. 季洪诺夫的正则化方法论中, 研究的正好是上述的各种不同的选择  $\alpha$  的方法呢? 问题是, 它们中大部分都给出了有着**最优 (或伪最优) 精度序列的近似解**。这些我们将在第四章说明。现在我们探讨其他的变分正则化算法。

在**广义偏差方法**中, 当问题 (2.11), (2.12) 中的近似解逼近条件 2) 时, 引入元素  $z_{h\delta} \in \mathcal{D}$ , 对于下列函数

$$\|z_{h\delta}\|_Z = \inf \{ \|z\|_Z : \|A_h z - u_\delta\|_U \leq \mu_\eta + \delta + h\|z\|_Z, z \in \mathcal{D} \} \quad (2.32)$$

当  $h = 0$  时, 转化为

$$\|z_\delta\|_Z = \inf \{ \|z\|_Z : \|Az - u_\delta\|_U \leq \mu_\delta + \delta, z \in \mathcal{D} \} \quad (2.33)$$

在 [110, 38] 中证明了, (2.32) 中, 有着通过广义闭合差原则下变量选择的正则化方法得到的唯一解  $z_{h\delta} \in \mathcal{D}$ , 且该解与  $z^{\alpha_\eta}$  相近。因此, 对于我们所探讨的任务而言, 正则化方法是等价于广义闭合差方法的。

**广义准解方法**用于找极值问题的解: 找到一个元素, 满足  $z_{h\delta} \in \mathcal{D}$

$$\|A_h z_{h\delta} - u_\delta\|_U = \inf \{ \|A_h z - u_\delta\|_U : \|z\|_Z \leq \bar{\Omega}_{h\delta}, z \in \mathcal{D} \} \quad (2.34)$$

在这里,  $\bar{\Omega}_{h\delta}$  是上面所给的对于  $\bar{\Omega} = \|\bar{z}\|_Z$  先验的估算, 使得当  $h, \delta \rightarrow 0$  时,  $\bar{\Omega}_{h\delta} \rightarrow \bar{\Omega}$ 。由于满足条件 (A), (B1), (B2) 和 (C), 问题 (2.34) 有解。至少在  $h$  和  $\delta$  足够小时, 该问题的解是唯一的。广义闭合差方法和广义准解方法算法满足正则的条件, 保证能够获得近似解以及他们在  $\eta \rightarrow 0$  时, 有强收敛  $z^{\alpha_\eta} \rightarrow \bar{z}$ 。这些近似解都有着最优的精度序列。

**1.2 伪解问题.** 这时先前的问题中的个别情况, 在这里集合  $D$  和集合  $D$  相同。因此我们可以以算子方程的形式书写并计算在希尔伯特空间中季洪诺夫方程

最小值的充分必要条件:

$$(\alpha I + A_h^* A_h) z = A_h^* u_\delta \implies z^\alpha = (\alpha I + A_h^* A_h)^{-1} A_h^* u_\delta \quad (2.35)$$

左边的等式有助于明确辅助函数的性质。定理 20。所有的辅助函数都是无限可微的。除此之外，第一和第二阶的函数余项  $\varphi(\alpha), \gamma(\alpha), \beta(\alpha)$  和  $\varepsilon(\alpha)$  都有以下形式:

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= \gamma(\alpha), \beta'(\alpha) = -\alpha\gamma'(\alpha), \gamma'(\alpha) = \langle v^\alpha, z^\alpha \rangle \\ \varepsilon'(\alpha) &= \gamma(\alpha) - Ch \left[ \mu_{h\delta} + C(\delta + h\sqrt{\gamma(\alpha)}) \right] \frac{\gamma'(\alpha)}{\sqrt{\gamma(\alpha)}}, \\ \rho'(\alpha) &= -\alpha\gamma'(\alpha) - h \left( \mu_{h\delta} + \delta + h\sqrt{\gamma(\alpha)} \right) \frac{\gamma'(\alpha)}{\sqrt{\gamma(\alpha)}}, \gamma''(\alpha) = 3 \|v^\alpha\|^2, \\ \rho''(\alpha) &= -(\alpha + h^2) \gamma''(\alpha) - \gamma'(\alpha) - \frac{(\mu_{h\delta} + \delta)h}{2 \|z^\alpha\|^3} \left[ 2\gamma''(\alpha)\gamma(\alpha) - (\gamma'(\alpha))^2 \right], \\ \varepsilon''(\alpha) &= \gamma'(\alpha) - \frac{(Ch)^2 [\gamma'(\alpha)]^2}{2\gamma(\alpha)} - Ch \left[ \mu_{h\delta} + C(\delta + h\sqrt{\gamma(\alpha)}) \right] \\ &\quad \cdot \frac{\left[ 2\gamma''(\alpha)\gamma(\alpha) - (\gamma'(\alpha))^2 \right]}{2\gamma(\alpha)^{3/2}} \end{aligned}$$

在这里  $v^\alpha = -(\alpha I + A_h^* A_h)^{-1} z^\alpha$ . 函数  $\gamma(\alpha)$  为下凸函数, 而  $\varphi_\eta(\alpha), \varepsilon(\alpha)$  为上凸。定理的证明已在假设 3 中给出。辅助函数的补充性质有利于找到方程 (2.24) (2.25) (2.28) (2.30) 和 (2.31) 中的正则化参数。

## 参考文献

- [1] *Mitidieri E., Pokhozhaev S. I.* A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. V. 234. P. 1–362.

