

## 第十二届全国大学生数学竞赛决赛 (非数学类) 试题

### 一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

1、极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin^2 \left( 1 + \frac{k}{n} \right) =$  \_\_\_\_\_.

2、设  $P_0(1, 1, -1), P_1(2, -1, 0)$  为空间的两点, 则函数  $u = xyz + e^{xyz}$  在点  $P_0$  处沿  $\overrightarrow{P_0 P_1}$  方向的方向导数为\_\_\_\_\_.

3、记空间曲线  $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} (a > 0)$ , 则积分  $\oint_{\Gamma} (1+x)^2 ds =$  \_\_\_\_\_.

4、设矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 16 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ , 且  $|A| > 0, ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$ , 其中  $I$  为单位矩阵, 则  $B =$  \_\_\_\_\_.

5、函数  $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{2}{x_3} (x_i > 0, i = 1, 2, 3)$  的所有极值点为\_\_\_\_\_.

### 二、(12 分) $n$ 为正整数, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}} \sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}} \cdots \sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}} - 1}{3\pi \arcsin x - (x^2 + 1) \arctan^3 x}.$$

### 三、(12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] x^n$ 的收敛域.

四、(12 分) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导, 且

$$f(a) = f(b) = 0, \int_a^b f(x) dx = 0$$

(1). 证明: 存在互不相同的点  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , 使得

$$f'(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2;$$

(2) 证明: 存在  $\xi \in (a, b), \xi \neq x_i, i = 1, 2$ , 使得  $f''(\xi) = f(\xi)$ .

五、(12 分) 设  $A$  是  $n$  阶实对称矩阵, 证明:

(1) 存在实对称矩阵  $B$ , 使得  $B^{2021} = A$ , 且  $AB = BA$ ;

(2) 存在一个多项式  $p(x)$ , 使得上述矩阵  $B = p(A)$ ;

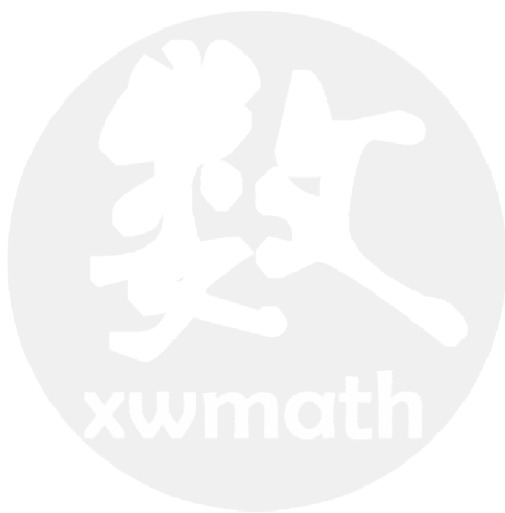
(3) 上述矩阵  $B$  是唯一的.

六、(12分) 设  $A_n(x, y) = \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$ , 其中  $0 < x, y < 1$ , 证明:

$$\frac{2}{2-x-y} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x, y)}{n+1} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} \right).$$

七、(12分) 设  $f(x), g(x)$  是  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  的连续函数, 且  $f(x)$  单调增加, 求证:

$$\int_0^1 f(g(x)) dx \leq \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx$$



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)