

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
КАФЕДРА СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА



Отчёт по практикуму

«Задачи биоматематики»

Студент 515 группы
Чэнь Цзюлун

Руководитель практикума
асп. В.В. Абрамова

Москва, 2023

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
3	Анализ задачи	4
3.1	Отношения концентраций p_3 и p_4	5
3.2	Поиск устойчивых точек	6
4	Эксперименты	8
4.1	Случай $k_3 < k_4$	9
4.2	Случай $k_3 > k_4$	9
4.3	Случай $k_3 = k_4$	9
5	Литература	10
6	Приложение	11
6.1	Математическая деривация уравнения	11
6.2	программ 1	12
6.3	программ 2	13
6.4	программ 3	13

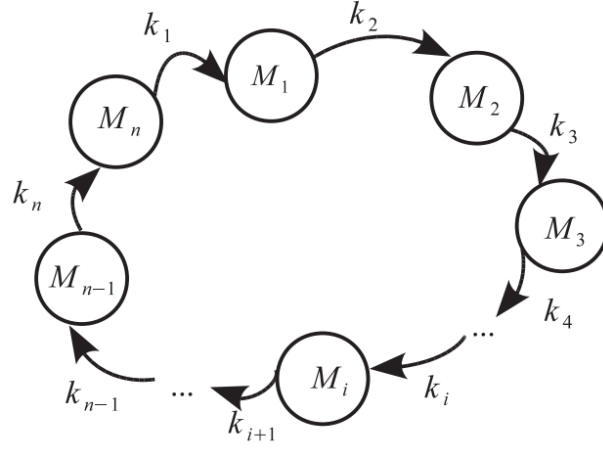


Рис. 1: Замкнутый цикл, в котором скорость роста M_i зависит от концентрации его предшественника M_{i-1} .

1 Введение

В случае гиперциклической репликации (см. рис. 1) макромолекулы вида M_1 являются катализаторами для молекул M_2 , молекулы вида M_2 - катализаторами для M_3 и так далее. На последнем шаге M_n является катализатором для M_1 , и мы получаем замкнутый цикл, в котором скорость роста M_i зависит от концентрации его предшественника M_{i-1} .

Эйгеном впервые предложил такой гиперцикл [2]. Он представляет собой простейшую форму взаимопомощи: каждый тип молекул, прямо или косвенно, извлекает пользу из всех других, находящихся в гиперцикле. В результате получается замкнутый цикл, в котором каждый тип молекул является катализатором для следующего типа молекулы.

Пусть k_i - скорость ингибирования репликации $i+1$ вида молекул (считая по модулю k), $p_i = [M_i]$ - относительная концентрация i -го типа молекул. Тогда динамика системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{p}_i = p_i(k_i p_{i-1} - \sum_{j=1}^n k_j p_j p_{j-1})$$

Система обладает следующими свойствами [3]:

а. Гиперциклическое уравнение имеет глобально устойчивое внутреннее положение равновесия, если $k \leq 4$. Если $k > 4$, то гиперциклическое уравнение имеет глобально устойчивый предельный цикл.

б. Гиперциклическое уравнение является постоянным (биологически устойчивым).

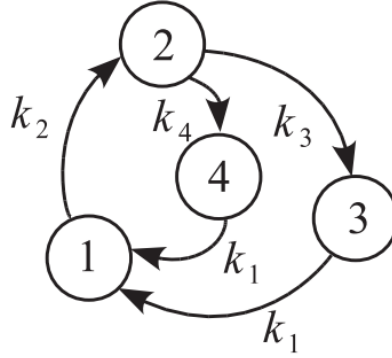


Рис. 2: Упражнение 10.2

2 Постановка задачи

Упражнение 10.2: Рассмотрим гиперциклическую репликацию, граф которой представлен на рис. 2.

Доказать, что если $k_3 > k_4$, то «выживает» цикл **Г1**: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, а если $k_4 > k_3$, то — цикл **Г2**: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Что произойдет, если $k_4 = k_3$?

Предполагая, что существует постоянный поток, выводящий излишки молекул за пределы системы, найдем, что $f = k_2 p_1 p_2 + k_3 p_2 p_3 + k_4 p_2 p_4 + k_1 p_1 p_3 + k_1 p_1 p_4$, и окончательно получим, что система для относительных концентраций макромолекул (квазивидов) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = p_2(k_2 p_1 - f) \\ \dot{p}_3 = p_3(k_3 p_2 - f) \\ \dot{p}_4 = p_4(k_4 p_2 - f) \\ \dot{p}_1 = p_1(k_1 p_3 + k_1 p_4 - f) \end{cases}$$

Уравнение отражает динамику концентраций макромолекул в системе, учитывая влияние различных процессов взаимодействия. Константы k_1, k_2, k_3, k_4 представляют собой параметры, описывающие скорости соответствующих химических реакций, а p_1, p_2, p_3, p_4 — относительные концентрации соответствующих макромолекул.

Подробное объяснение математических шагов и выводов представлено в Приложении 6.1, где читатель может более подробно ознакомиться с процессом деривации данного уравнения.

3 Анализ задачи

В данном разделе мы представим два подхода к демонстрации Упражнения 10.2. Первый метод заключается в изучении изменений отношения концентраций p_3 и p_4 , в то время как второй метод направлен на поиск устойчивых точек. Важным

аспектом данного раздела является проведение аналитических выводов на основе использованных методов.

3.1 Отношения концентраций p_3 и p_4

Для изучения динамики отношения концентраций p_3 и p_4 мы можем рассмотреть производную по времени этого отношения.

Во-первых, вычислим производную отношения p_3 и p_4 по времени, используя правило дифференцирования отношения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_3}{p_4} \right) = \frac{\dot{p}_3 p_4 - p_3 \dot{p}_4}{p_4^2}$$

Затем подставим уравнения для \dot{p}_3 и \dot{p}_4 в полученное выражение:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_3}{p_4} \right) = \frac{(k_3 p_2 p_3 - p_3 f) p_4 - p_3 (k_4 p_2 p_4 - p_4 f)}{p_4^2}$$

Упростим это выражение:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_3}{p_4} \right) = \frac{(k_3 - k_4) p_2 p_3 p_4}{p_4^2}$$

1. В случае, если $k_3 = k_4$, получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_3}{p_4} \right) = 0$$

Это означает, что отношение p_3 и p_4 является константой, и мы можем предположить, что $p_3 = C \cdot p_4$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_1(k_1 p_4 - f) \\ \dot{p}_2 = p_2(k_2 p_1 - f) \\ \dot{p}_4 = p_4(k_4 p_2 - f) \end{cases}$$

где $f = k_2 p_1 p_2 + k_4 p_2 p_4 + k_1 p_1 p_4$.

Эта задача представляет собой классическую задачу гиперциклической репликации. Из свойств (а), указанных в разделе 1, мы получим глобально устойчивое внутреннее положение равновесия.

2. В случае $k_3 > k_4$, производная отношения p_3 и p_4 по времени положительна:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_3}{p_4} \right) = \frac{(k_3 - k_4) p_2 p_3 p_4}{p_4^2} > 0$$

Концентрация p_3 по сравнению с p_4 постоянно увеличивается, что означает, что при постоянном количестве реагентов концентрация p_4 будет постепенно стремиться к нулю.

3. В случае $k_3 < k_4$, аналогично, но концентрация p_3 будет постепенно стремиться к нулю.

3.2 Поиск устойчивых точек

Будем искать устойчивые точки ($\dot{p}_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{cases} k_1 p_1 (p_3 + p_4) - p_1 f = 0 \\ k_2 p_1 p_2 - p_2 f = 0 \\ k_3 p_2 p_3 - p_3 f = 0 \\ k_4 p_2 p_4 - p_4 f = 0 \end{cases}$$

- Рассмотрим случай $k_3 > k_4 \Rightarrow p_4 = 0$:

$$\begin{cases} k_1 (p_3 + p_4) = k_2 p_1 \\ k_2 p_1 = k_3 p_2 \\ k_2 p_1 = f \\ p_4 = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} p_3 = \frac{k_2}{k_1} p_1 \\ p_2 = \frac{k_2}{k_3} p_1 \\ k_2 p_1 = f \\ p_4 = 0 \end{cases}$$

Подставим p_2 , p_3 в f :

$$k_2 p_1 = k_2 p_1^2 + \frac{k_2^2}{k_3} p_1^2 + \frac{k_2^2}{k_1} p_1^2$$

Так как $p_1 \neq 0$:

$$k_2 = k_2 p_1 + \frac{k_2^2}{k_3} p_1 + \frac{k_2^2}{k_1} p_1$$

$$p_1 = \frac{k_1 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}$$

Тогда положение равновесия $A = (p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*)$:

$$\begin{cases} p_1^* = \frac{k_1 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} \\ p_2^* = \frac{k_1 k_2}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} \\ p_3^* = \frac{k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} \\ p_4^* = 0 \end{cases}$$

Найдем якобиан в точке A . (Вычисление представлено в Приложении 6.3)

$$\begin{bmatrix} -\frac{k_1^2 k_2 k_3 (k_2 + k_3)}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} & -\frac{k_1 k_2 k_3^2 (k_1 + k_3)}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} & \frac{k_1^3 k_2 k_3}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} & \frac{k_1^2 k_2 k_3 (k_1 + k_3 - k_4)}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} \\ \frac{k_1 k_2^2 k_3}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} & -\frac{k_1 k_2^2 k_3 (k_1 + k_3)}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} & -\frac{k_1^2 k_2 k_3 (k_1 + k_2)}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} & -\frac{k_1^2 k_2 (k_1 k_3 + k_2 k_4)}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} \\ -\frac{k_1 k_2^2 k_3 (k_2 + k_3)}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} & \frac{k_1 k_2 k_3^2}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} & -\frac{k_1 k_2 k_3^2 (k_1 + k_2)}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} & -\frac{k_1 k_2 k_3 (k_1 k_3 + k_2 k_4)}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_1 k_2 (-k_3 + k_4)}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} \end{bmatrix}$$

Каждый элемент этой матрицы имеет общий множитель, а именно

$$\frac{k_1 k_2 k_3}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2}$$

Мы можем извлечь этот общий фактор, а затем упростить матрицу. Матрица после извлечения общих факторов выглядит следующим образом:

$$\frac{k_1 k_2 k_3}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2} \begin{bmatrix} -k_1 (k_2 + k_3) & -k_3 (k_1 + k_3) & k_1^2 & k_1 (k_1 + k_3 - k_4) \\ k_2^2 & -k_2 (k_1 + k_3) & -k_1 (k_1 + k_2) & -k_1 (k_1 k_3 + k_2 k_4) \\ -k_2 (k_2 + k_3) & k_3^2 & -k_3 (k_1 + k_2) & -k_2 (k_1 k_3 + k_2 k_4) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_1 k_2 (-k_3 + k_4)}{k_1 k_2 k_3} \end{bmatrix}$$

Так как умножение на положительные константы не влияет на устойчивость матрицы, мы можем вынести константу $\frac{k_1 k_2 k_3}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)^2}$. Из формы матрицы следует, что $\lambda_1 = \frac{k_1 k_2 (-k_3 + k_4)}{k_1 k_2 k_3}$ - это вещественное отрицательное число (поскольку $k_3 > k_4$). мы сначала удаляем последний столбец и последнюю строку, чтобы получить матрицу 3×3 .

$$B = \begin{bmatrix} -k_1 (k_2 + k_3) & -k_3 (k_1 + k_3) & k_1^2 \\ k_2^2 & -k_2 (k_1 + k_3) & -k_1 (k_1 + k_2) \\ -k_2 (k_2 + k_3) & k_3^2 & -k_3 (k_1 + k_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -k_1 (k_2 + k_3) - \lambda & -k_3 (k_1 + k_3) & k_1^2 \\ k_2^2 & -k_2 (k_1 + k_3) - \lambda & -k_1 (k_1 + k_2) \\ -k_2 (k_2 + k_3) & k_3^2 & -k_3 (k_1 + k_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Через библиотеку Sympy Python (см. 6.4) мы получаем:

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= -k_1k_2 - k_1k_3 - k_2k_3 \\ \lambda_3 &= -\frac{k_1k_2}{2} - \frac{k_1k_3}{2} - \frac{k_2k_3}{2} - \frac{\sqrt{3}ik_1k_2}{2} - \frac{\sqrt{3}ik_1k_3}{2} - \frac{\sqrt{3}ik_2k_3}{2} \\ \lambda_4 &= -\frac{k_1k_2}{2} - \frac{k_1k_3}{2} - \frac{k_2k_3}{2} + \frac{\sqrt{3}ik_1k_2}{2} + \frac{\sqrt{3}ik_1k_3}{2} + \frac{\sqrt{3}ik_2k_3}{2}\end{aligned}\quad (1)$$

Из положительных значений параметров k_i , где $i = 1, 2, 3, 4$, следует отрицательность вещественных частей всех собственных значений якобиана. Таким образом, положение равновесия $A = (p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*)$ является устойчивым.

- В случае $k_3 < k_4$, аналогично.
- Учитывая, что $\sum_{j=1}^4 p_j = 1$, $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, будем искать особые точки на симплексе. Рассмотрим внутренние особые точки. Получим:

$$\begin{cases} k_1(p_3 + p_4) = f \\ k_2p_1 = f \\ k_3p_2 = f \\ k_4p_2 = f \end{cases}$$

Из системы уравнений следует, что внутренняя особая точка на симплексе будет существовать только при $k_3 = k_4$. В таком случае мы можем рассматривать 3 и 4 как один и тот же вид с популяцией $N_5 = N_3 + N_4$. Покажем это, рассмотрев производную отношения количества молекул этих видов:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{N_3}{N_4} \right) = \frac{\dot{N}_3N_4 - N_3\dot{N}_4}{N_4^2} = \frac{k_3N_4N_2N_3 - k_4N_3N_2N_4}{N_4^2} = 0.$$

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = k_1N_1N_5 \\ \dot{N}_2 = k_2N_1N_2 \\ \dot{N}_5 = k_3N_2N_5 \end{cases}$$

Данная задача является классической задачей гиперциклической репликации. Из свойств (а), указанных в разделе 1, мы получим глобально устойчивое внутреннее положение равновесия.

4 Эксперименты

Для решения данной системы уравнений мы применяем метод численного интегрирования, в частности, метод Рунге-Кутты.

Теперь давайте рассмотрим следующий случай:

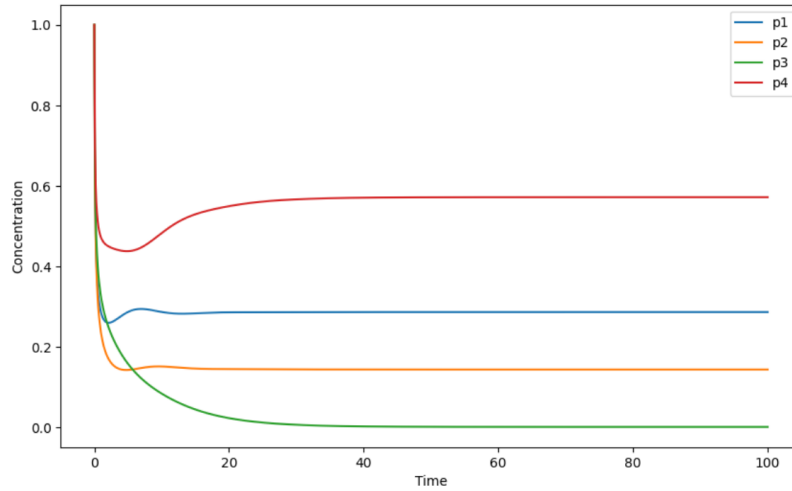


Рис. 3: График зависимости концентрации от времени при условии $k_3 < k_4$

4.1 Случай $k_3 < k_4$

Предположим, что начальное значение k_3 равно 3, а начальное значение k_4 равно 4. Также предположим, что начальные значения p_1 , p_2 , p_3 и p_4 равны 1. Мы устанавливаем временной интервал от 0 до 100 с шагом 0,01.

С использованием алгоритма Рунге-Кутты (см. 6.2), мы обнаруживаем, что если $k_3 < k_4$, то цикл **Г2**: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ будет устойчивым (см. рис. 3). Это означает, что концентрации других типов макромолекул, не принадлежащих **Г2**, стремятся к нулю. Таким образом, **Г2** выигрывает конкуренцию у **Г1**.

4.2 Случай $k_3 > k_4$

Допустим, что начальные значения k_3 и k_4 равны 4 и 3 соответственно, а начальные значения p_1 , p_2 , p_3 и p_4 равны 1. Мы рассматриваем временной интервал от 0 до 100 с шагом 0,01.

Применяя алгоритм Рунге-Кутты, мы обнаруживаем, что если $k_3 > k_4$, то цикл **Г1**: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ становится устойчивым (см. рис. 4). Это означает, что концентрации других типов макромолекул, не принадлежащих **Г1**, стремятся к нулю. Таким образом, **Г1** выигрывает конкуренцию у **Г2**.

4.3 Случай $k_3 = k_4$

Для более четкого отображения графика, мы сокращаем время реакции и устанавливаем интервал времени от 0 до 20 с шагом 0,001. Для построения графика 5а, мы предполагаем, что начальные значения k_3 и k_4 равны 3, а начальные значения концентраций p_1 , p_2 , p_3 и p_4 равны 1. Для построения графика 5b, мы также

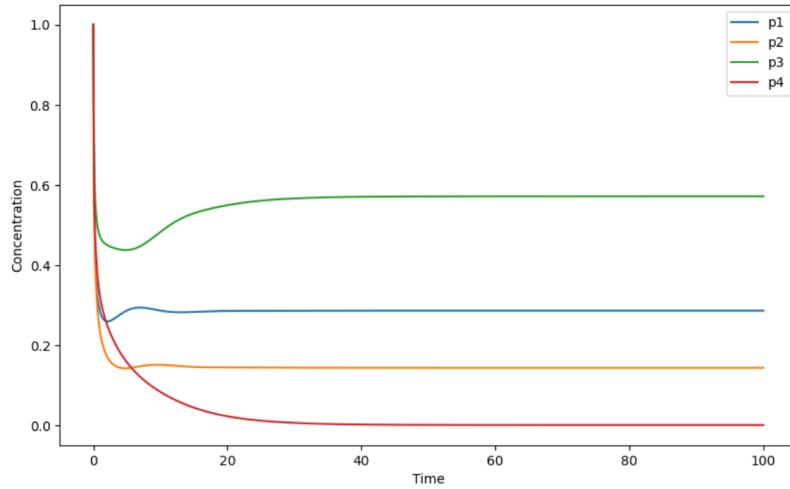


Рис. 4: График зависимости концентрации от времени в случае $k_3 > k_4$

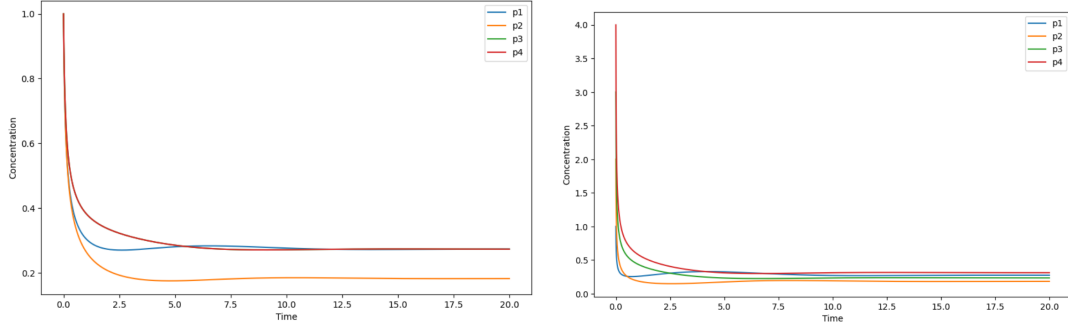
предполагаем, что начальные значения k_3 и k_4 равны 3, но начальные значения концентраций различаются: $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $p_4 = 4$.

Из графика (см. рис. 5) мы можем наблюдать, что в случае равенства k_3 и k_4 , оба цикла **Г1** и **Г2** оказываются устойчивыми. Однако, при равных начальных значениях концентраций $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$, в конечном итоге мы получаем, что $p_3 = p_4 = 0.27$. В то время как при различных начальных значениях концентраций $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $p_4 = 4$, в конечном итоге мы получаем, что $p_3 = 0.23$, а $p_4 = 0.31$. Это подчеркивает важность начальных условий в динамике системы.

5 Литература

Список литературы

- [1] Абрамова В. В. *Курс "Прикладные задачи системного анализа: задачи биоматематики"*. 2023.
- [2] Eigen M. and Schuster P. *The hypercycle: A principle of natural self-organisation*. Berlin-Heidelberg: Springer, 1979.
- [3] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. *Динамические системы и модели биологии: учебное пособие*. Москва: Физматлит, 2009.



(a) Концентрации от времени при начальных значениях $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$ (b) Концентрации от времени при начальных значениях $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3, p_4 = 4$

Рис. 5: рафик зависимости концентрации от времени, когда $k_3 = k_4$

6 Приложение

6.1 Математическая деривация уравнения

Пусть $N_i(t)$ - количество молекул i в момент времени t . Уравнения динамики системы могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{N}_2 = k_2 N_1 N_2 \\ \dot{N}_3 = k_3 N_2 N_3 \\ \dot{N}_4 = k_4 N_2 N_4 \\ \dot{N}_1 = k_1 N_1 (N_3 + N_4) \end{cases}$$

Рассмотрим $p_i(t) = \frac{N_i(t)}{\sum_{j=1}^n N_j}$, где $p_i(t)$ - концентрация молекул i -ого в момент времени t . Тогда:

$$\dot{p}_i = \frac{\dot{N}_i}{\sum_{j=1}^4 N_j(t)} - \frac{N_i \sum_{j=1}^4 \dot{N}_j(t)}{\sum_{j=1}^4 N_j}$$

Рассмотрим \dot{p}_1 :

$$\dot{p}_1 = \frac{k_1 N_1 (N_3 + N_4)}{\sum_{j=1}^4 N_j} - \frac{N_1 \sum_{j=1}^4 \dot{N}_j(t)}{\sum_{j=1}^4 N_j} = (k_1 p_1 (p_3 + p_4) - p_1 \frac{\sum_{j=1}^4 \dot{N}_j(t)}{\sum_{j=1}^4 N_j}) \sum_{j=1}^4 N_j$$

Воспользуемся заменой $\frac{dp_1}{d\tau} = \frac{dp_1}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}$, где $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sum_{j=1}^4 N_j}$. Обозначим $f = \frac{\sum_{j=1}^4 \dot{N}_j}{\sum_{j=1}^4 N_j} = k_2 p_1 p_2 + k_3 p_2 p_3 + k_4 p_2 p_4 + k_1 p_1 p_3 + k_1 p_1 p_4$. Тогда:

$$\dot{p}_1 = k_1 p_1 (p_3 + p_4) - p_1 f$$

Аналогичными преобразованиями для \dot{p}_2 , \dot{p}_3 и \dot{p}_4 получим:

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = k_2 p_1 p_2 - p_2 f \\ \dot{p}_3 = k_3 p_2 p_3 - p_3 f \\ \dot{p}_4 = k_4 p_2 p_4 - p_4 f \\ \dot{p}_1 = k_1 p_1 (p_3 + p_4) - p_1 f \end{cases}$$

6.2 программ 1

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

# Define the system of differential equations
def model(p, t, k1, k2, k3, k4):
    p1, p2, p3, p4 = p
    f = k2 * p1 * p2 + k3 * p2 * p3 + k4 * p2 * p4 +
    k1 * p1 * p3 + k1 * p1 * p4
    dp1dt = p1 * (k1 * p3 + k1 * p4 - f)
    dp2dt = p2 * (k2 * p1 - f)
    dp3dt = p3 * (k3 * p2 - f)
    dp4dt = p4 * (k4 * p2 - f)
    return [dp1dt, dp2dt, dp3dt, dp4dt]

# Set initial conditions and time points
initial_conditions = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]
t = np.linspace(0, 100, 1000) # Adjust the time points as needed

# Set parameter values
k1_val = 1.0
k2_val = 2.0
k3_val = 3.0
k4_val = 4.0

# Solve the system of differential equations
solution = odeint(model, initial_conditions, t, args=(k1_val,
k2_val, k3_val, k4_val))

# Plot the results
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(t, solution[:, 0], label='p1')
plt.plot(t, solution[:, 1], label='p2')
plt.plot(t, solution[:, 2], label='p3')
```

```
plt.plot(t, solution[:, 3], label='p4')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Concentration')
plt.legend()
plt.show()
```

6.3 программ 2

```
import sympy as sp
```

```
# Define the variables
```

```
p1, p2, p3, p4 = sp.symbols('p1_p2_p3_p4')
k1, k2, k3, k4 = sp.symbols('k1_k2_k3_k4')
```

```
# Define the equilibrium points
```

```
p1_star = k1*k3 / (k1*k2 + k1*k3 + k2*k3)
p2_star = k1*k2 / (k1*k2 + k1*k3 + k2*k3)
p3_star = k2*k3 / (k1*k2 + k1*k3 + k2*k3)
p4_star = 0
```

```
# Define the functions
```

```
f = k2*p1*p2 + k3*p2*p3 + k4*p2*p4 + k1*p1*p3 + k1*p1*p4
dot_p1 = p1*(k1*p3 + k1*p4 - f)
dot_p2 = p2*(k2*p1 - f)
dot_p3 = p3*(k3*p2 - f)
dot_p4 = p4*(k4*p2 - f)
```

```
# Calculate the Jacobian matrix
```

```
J = sp.Matrix([dot_p1, dot_p2, dot_p3, dot_p4]).jacobian([p1, p2, p3, p4])
```

```
# Substitute the equilibrium points into the Jacobian matrix
```

```
J_at_A = J.subs({p1: p1_star, p2: p2_star, p3: p3_star, p4: p4_star})
```

```
# Convert the Jacobian matrix to LaTeX
```

```
latex_code = sp.latex(J_at_A)
print(latex_code)
```

6.4 программ 3

```
from sympy import Matrix, symbols, latex
```

```

# Define symbols
k1, k2, k3 = symbols('k1_k2_k3')

# Define matrix
B = Matrix([
    [-k1 * (k2 + k3), -k3 * (k1 + k3), k1**2],
    [k2**2, -k2 * (k1 + k3), -k1 * (k1 + k2)],
    [-k2 * (k2 + k3), k3**2, -k3 * (k1 + k2)]
])

# Calculate eigenvalues
eigvals = B.eigenvals()

# Output eigenvalues in LaTeX format
for i, eigval in enumerate(eigvals):
    print(f"Eigenvalue_{i+1}:_{latex(eigval)}")

```