DP

SCIST x NHDK x 南 11 校寒訓 - 資言資語

Koying

2023-02-02

本課程由以下贊助商贊助辦理

奧義智慧科技
Powered by CyCraft

DEVCORE

少年圖靈計畫
Young Turing Program

TEAMT5
Persistent Cyber Threat Hunters

協辦單位：ITSA

目錄

DP 入門

DP 入門

- DP (Dynamic Programming)，動態規劃
- 利用將問題拆解成子問題的方式來解決問題
- 有些人可能聽過分治，同樣也是將問題拆解為子問題，比較不一樣的是 DP 主要是利用「記憶化的方式」，將許多會重複用到的子問題記錄下來
- DP 問題經常會有「最佳子結構」、「重疊子問題」兩大特徵
- 簡單用一句話來形容 DP 在做的事，便是將各種會用到多次，且最符合我們需要的答案記錄下來，以供之後使用，有點像是進階版的建表

費氏數列

求出 $F_n \bmod 10^9 + 7 \quad (n \leq 10^6)$

- 以一般遞迴式的方式，我們會得到一個 $\mathcal{O}(2^n)$ 的複雜度，顯然是不符合我們的需求

DP 入門

費氏數列

求出 $F_n \bmod 10^9 + 7 \ (n \leq 10^6)$

- 以一般遞迴式的方式，我們會得到一個 $\mathcal{O}(2^n)$ 的複雜度，顯然是不符合我們的需求
- 如果將遞迴過程畫成一顆樹，會發現我們重複計算了很多「早就被算過」的東西

費氏數列

求出 $F_n \bmod 10^9+7 \quad (n \le 10^6)$

- 以一般遞迴式的方式，我們會得到一個 $\mathcal{O}(2^n)$ 的複雜度，顯然是不符合我們的需求
- 如果將遞迴過程畫成一顆樹，會發現我們重複計算了很多「早就被算過」的東西
- 如果能夠將已經算過的東西記錄下來，就能夠用「空間」換取大量的「時間」

費氏數列

求出 $F_n \bmod 10^9+7 \ (n \le 10^6)$

- 以一般遞迴式的方式，我們會得到一個 $\mathcal{O}(2^n)$ 的複雜度，顯然是不符合我們的需求
- 如果將遞迴過程畫成一顆樹，會發現我們重複計算了很多「早就被算過」的東西
- 如果能夠將已經算過的東西記錄下來，就能夠用「空間」換取大量的「時間」
- 這便是 DP 最經典的「重疊子問題」例子。而以空間換取時間的做法，則被稱為「記憶化搜索」

路徑問題

給一個 $n \times m$ 的方格，求從左上角走到右下角的路徑數，且每步只能往右或往下走

- 相信有認真上課的學員都知道，這題就是將原點設為 1，然後對於每個點 i, j，寫上 $i-1, j$、$i, j-1$ 兩個點的和

路徑問題

給一個 $n \times m$ 的方格，求從左上角走到右下角的路徑數，且每步只能往右或往下走

- 相信有認真上課的學員都知道，這題就是將原點設為 1，然後對於每個點 i, j，寫上 $i-1, j$、$i, j-1$ 兩個點的和
- 其實這就是動態規劃！

國中數學

路徑問題

給一個 $n \times m$ 的方格，求從左上角走到右下角的路徑數，且每步只能往右或往下走

- 相信有認真上課的學員都知道，這題就是將原點設為 1，然後對於每個點 i, j，寫上 $i-1, j$、$i, j-1$ 兩個點的和
- 其實這就是動態規劃！
- ~~OK，學校都已經教過了，今天的課就到這邊~~

小試身手

Grid Paths

路徑問題，有障礙物的版本

DP 的組成與實作

DP 的兩大要素

- DP 的運作過程由「狀態」、「轉移式」組成

DP 的兩大要素

- DP 的運作過程由「狀態」、「轉移式」組成
- 「狀態」指的是利用陣列在紀錄子問題答案時，其 index 所代表的意義
- 而「轉移式」代表的則是大的狀態與小的狀態之間的關係

DP 的兩大要素

- DP 的運作過程由「狀態」、「轉移式」組成
- 「狀態」指的是利用陣列在紀錄子問題答案時，其 index 所代表的意義
- 而「轉移式」代表的則是大的狀態與小的狀態之間的關係
- 以剛剛的費氏數列為例子，我們會將狀態定義為：dp_i 為費氏數列的第 i 項
- 而「轉移式」便是大家熟知的：$dp_i = dp_{i-1} + dp_{i-2}$

DP 的兩大要素

- DP 的運作過程由「狀態」、「轉移式」組成
- 「狀態」指的是利用陣列在紀錄子問題答案時，其 index 所代表的意義
- 而「轉移式」代表的則是大的狀態與小的狀態之間的關係
- 以剛剛的費氏數列為例子，我們會將狀態定義為：dp_i 為費氏數列的第 i 項
- 而「轉移式」便是大家熟知的：$dp_i = dp_{i-1} + dp_{i-2}$
- 這樣看似齊全了，但直接執行的話，會造成無限遞迴，因此我們還需要設計一個「邊界條件」，在這個例子便是 $dp_0 = 0, dp_1 = 1$

DP 的實作方式

- 想要算出最終的狀態，主要有兩種方式：
  1. Top down：從最終狀態 (F_n)，利用遞迴往回推
  2. Bottom up：從初始狀態 (F_0)，利用迴圈往前算，直到算到最終狀態
- 至於為什麼這樣命名呢？如果我們將遞迴樹畫出來，便可很簡單的發現其端倪了！

Top down 的特性

- 只要推出轉移式與初始狀態，便可很教直觀的寫出程式碼
- 在某些情況可能會遞迴過深
- 遞迴常數較大，要注意可能會造成效能損失
- 範例程式碼：Top Down.cpp

Bottom up 的特性

- 子問題需比母問題早算出，因此需要想好迴圈的順序
- 若將各個狀態與其轉移點的關係畫成一張圖，則迴圈的順序便是圖論中的「拓樸排序」
- 速度快，除了省去了遞迴常數之外，也經常能因 CPU 的快取機制獲得一部分的效能提升
- 範例程式碼：Bottom up.cpp

前綴和

前綴和

- 覺得 DP 很遙遠嗎？

前綴和

- 覺得 DP 很遙遠嗎？
- 其實你們都已經會了！

前綴和

- 覺得 DP 很遙遠嗎？
- 其實你們都已經會了！
- 其實前綴和就是一個簡單的 DP 問題

前綴和

- 覺得 DP 很遙遠嗎？
- 其實你們都已經會了！
- 其實前綴和就是一個簡單的 DP 問題
- dp_i 為 $a_1 \sim a_i$ 的總和，轉移式就是 $dp_i = dp_{i-1} + a_i$

前綴和

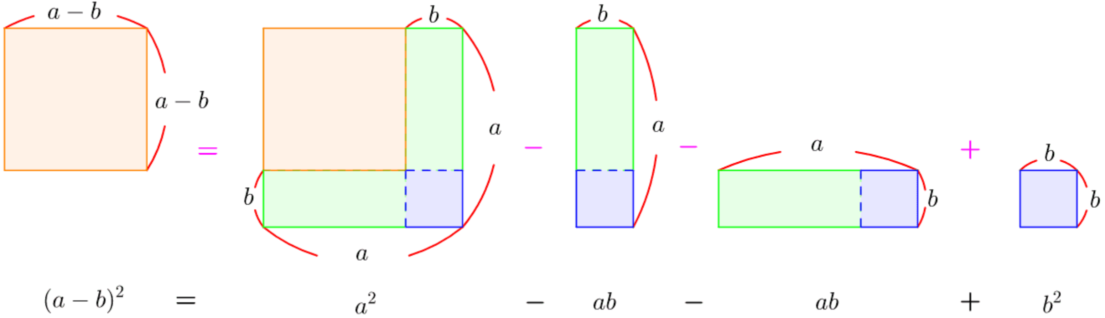
- 覺得 DP 很遙遠嗎？
- 其實你們都已經會了！
- 其實前綴和就是一個簡單的 DP 問題
- dp_i 為 $a_1 \sim a_i$ 的總和，轉移式就是 $dp_i = dp_{i-1} + a_i$
- 那如果是二維呢？

二維前綴和 - 排容

- 狀態：$dp_{i,j}$ 為 $\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} a_{i,j}$

二維前綴和 - 排容

- 狀態：$dp_{i,j}$ 為 $\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} a_{i,j}$
- 如何轉移呢？相信大家國中時都學過一個公式：$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$

- 狀態：$dp_{i,j}$ 為 $\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} a_{i,j}$
- 如何轉移呢？相信大家國中時都學過一個公式：$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$
- 這個公式便是利用排容原理，將重疊的部分扣除
- 

- 那簡單！我們的轉移式就也用排容來算就好了

二維前綴和 - 排容

- 那簡單！我們的轉移式就也用排容來算就好了
- $dp_{i,j} = \begin{cases} 0 & i = 0 \texttt{ or } j = 0 \\ dp_{i-1,j} + dp_{i,j-1} - dp_{i-1,j-1} + a_{i,j} & \texttt{otherwise} \end{cases}$

二維前綴和 - 排容

- 那簡單！我們的轉移式就也用排容來算就好了
- $dp_{i,j} = \begin{cases} 0 & i = 0 \texttt{ or } j = 0 \\ dp_{i-1,j} + dp_{i,j-1} - dp_{i-1,j-1} + a_{i,j} & \texttt{otherwise} \end{cases}$
- 那如果我們要求出 $(x1, y1), (x1, y2), (x2, y1), (x2, y2)$ 這塊矩形的總和，一樣使用排容原理即可

二維前綴和 - 排容

- 那簡單！我們的轉移式就也用排容來算就好了
- $dp_{i,j} = \begin{cases} 0 & i = 0 \texttt{ or } j = 0 \\ dp_{i-1,j} + dp_{i,j-1} - dp_{i-1,j-1} + a_{i,j} & \texttt{otherwise} \end{cases}$
- 那如果我們要求出 $(x1, y1), (x1, y2), (x2, y1), (x2, y2)$ 這塊矩形的總和，一樣使用排容原理即可
- $dp_{x2,y2} - dp_{x1-1,y2} - dp_{x2,y1-1} + dp_{x1-1,y1-1}$

滾動優化

Grid Paths

路徑問題，有障礙物的版本

- 我們回到剛剛那題 Grid Path

Grid Paths

路徑問題，有障礙物的版本

- 我們回到剛剛那題 Grid Path
- 觀察後可以發現，dp_i 的轉移點都是在 dp_{i-1}
- 代表 $dp_1 \sim dp_{i-2}$ 都是沒用的

Grid Paths

路徑問題，有障礙物的版本

- 我們回到剛剛那題 Grid Path
- 觀察後可以發現，dp_i 的轉移點都是在 dp_{i-1}
- 代表 $dp_1 \sim dp_{i-2}$ 都是沒用的
- 那我們何不省點空間呢？

滾動 DP

Grid Paths

路徑問題，有障礙物的版本

- 既然只用到兩列，那我們陣列就只開兩列 dp[0]、dp[1]

Grid Paths

路徑問題，有障礙物的版本

- 既然只用到兩列，那我們陣列就只開兩列 dp[0]、dp[1]
- 當 $i \equiv 0 \pmod 2$ 時，就使用 dp[0]，反之 dp[1]
- 這樣就可以將空間複雜度降到 n 了！

滾動 DP

Grid Paths

路徑問題，有障礙物的版本

- 既然只用到兩列，那我們陣列就只開兩列 dp[0]、dp[1]
- 當 $i \equiv 0 \pmod 2$ 時，就使用 dp[0]，反之 dp[1]
- 這樣就可以將空間複雜度降到 n 了！
- 需要注意的是，陣列中可能還存著以前的資訊，所以要先記得初始化

Grid Paths

路徑問題，有障礙物的版本

- 既然只用到兩列，那我們陣列就只開兩列 dp[0]、dp[1]
- 當 $i \equiv 0 \pmod 2$ 時，就使用 dp[0]，反之 dp[1]
- 這樣就可以將空間複雜度降到 n 了！
- 需要注意的是，陣列中可能還存著以前的資訊，所以要先記得初始化
- 一些小技巧：
  - 偶 0 奇 1：$i\&2$
  - 偶 1 奇 0：$i1$

線性 DP

AtCoder DP Contest A - Frog 1

每顆石頭的高度為 h_i，從第 i 顆跳到第 j 顆的代價是 $|h_i - h_j|$ 每次可以跳 1 或 2 格，求從第 1 格跳到第 N 格的最小代價

- 首先我們先訂定狀態：dp_i 為目前停在第 i 格的最小代價

AtCoder DP Contest A - Frog 1

每顆石頭的高度為 h_i，從第 i 顆跳到第 j 顆的代價是 $|h_i - h_j|$ 每次可以跳 1 或 2 格，求從第 1 格跳到第 N 格的最小代價

- 首先我們先訂定狀態：dp_i 為目前停在第 i 格的最小代價
- 經由題目可知，第 i 格可由第 $i-1, i-2$ 格得來，因此 $i-1, i-2$ 便是 i 的「轉移點」

AtCoder DP Contest A - Frog 1

每顆石頭的高度為 h_i，從第 i 顆跳到第 j 顆的代價是 $|h_i - h_j|$ 每次可以跳 1 或 2 格，求從第 1 格跳到第 N 格的最小代價

- 首先我們先訂定狀態：dp_i 為目前停在第 i 格的最小代價
- 經由題目可知，第 i 格可由第 $i-1, i-2$ 格得來，因此 $i-1, i-2$ 便是 i 的「轉移點」
- 有了轉移點之後，我們就能夠推出轉移式：
  $dp_i = \texttt{min}(dp_{i-1} + |h_i - h_{i-1}|, dp_{i-2} + |h_i - h_{i-1}|)$，而初始狀態則是：
  $dp_1 = 0, dp_2 = |h_1 - h_2|$

AtCoder DP Contest A - Frog 1

每顆石頭的高度為 h_i，從第 i 顆跳到第 j 顆的代價是 $|h_i - h_j|$ 每次可以跳 1 或 2 格，求從第 1 格跳到第 N 格的最小代價

- 首先我們先訂定狀態：dp_i 為目前停在第 i 格的最小代價
- 經由題目可知，第 i 格可由第 $i-1, i-2$ 格得來，因此 $i-1, i-2$ 便是 i 的「轉移點」
- 有了轉移點之後，我們就能夠推出轉移式：$dp_i = \texttt{min}(dp_{i-1} + |h_i - h_{i-1}|, dp_{i-2} + |h_i - h_{i-1}|)$，而初始狀態則是：$dp_1 = 0, dp_2 = |h_1 - h_2|$
- 時間複雜度 $\mathcal{O}(n)$

線性 DP

AtCoder DP Contest A - Frog 1

每顆石頭的高度為 h_i，從第 i 顆跳到第 j 顆的代價是 $|h_i - h_j|$ 每次可以跳 1 或 2 格，求從第 1 格跳到第 N 格的最小代價

- 首先我們先訂定狀態：dp_i 為目前停在第 i 格的最小代價
- 經由題目可知，第 i 格可由第 $i-1, i-2$ 格得來，因此 $i-1, i-2$ 便是 i 的「轉移點」
- 有了轉移點之後，我們就能夠推出轉移式：$dp_i = \texttt{min}(dp_{i-1} + |h_i - h_{i-1}|, dp_{i-2} + |h_i - h_{i-1}|)$，而初始狀態則是：$dp_1 = 0, dp_2 = |h_1 - h_2|$
- 時間複雜度 $\mathcal{O}(n)$
- 這種有關線性遞迴的 DP 便稱為「線性 DP」

AtCoder DP Contest A - Frog 1

每顆石頭的高度為 h_i，從第 i 顆跳到第 j 顆的代價是 $|h_i - h_j|$ 每次可以跳 1 或 2 格，求從第 1 格跳到第 N 格的最小代價

- 首先我們先訂定狀態：dp_i 為目前停在第 i 格的最小代價
- 經由題目可知，第 i 格可由第 $i-1, i-2$ 格得來，因此 $i-1, i-2$ 便是 i 的「轉移點」
- 有了轉移點之後，我們就能夠推出轉移式：$dp_i = \texttt{min}(dp_{i-1} + |h_i - h_{i-1}|, dp_{i-2} + |h_i - h_{i-1}|)$，而初始狀態則是：$dp_1 = 0, dp_2 = |h_1 - h_2|$
- 時間複雜度 $\mathcal{O}(n)$
- 這種有關線性遞迴的 DP 便稱為「線性 DP」
- $dp_i = \begin{cases} 0 & \texttt{if } i = 1 \\ |h_1 - h_2| & \texttt{if } i = 2 \\ \texttt{min}(dp_{i-1} + |h_i - h_{i-1}|, dp_{i-2} + |h_i - h_{i-1}|) & \texttt{otherwise} \end{cases}$

CSES Dice Combinations

你有無限多顆六面骰，求丟出的點數總和為 n 的方法數

- 解決一些排列組合問題也是 DP 的其中一個用處

CSES Dice Combinations

你有無限多顆六面骰，求丟出的點數總和為 n 的方法數

- 解決一些排列組合問題也是 DP 的其中一個用處
- 狀態應該不難訂：dp_i 為丟出的點數總和為 i 的方法數

CSES Dice Combinations

你有無限多顆六面骰，求丟出的點數總和為 n 的方法數

- 解決一些排列組合問題也是 DP 的其中一個用處
- 狀態應該不難訂：dp_i 為丟出的點數總和為 i 的方法數
- 觀察一下題目條件，可以發現當目前點數為 $i-6 \sim i-1$ 時，再丟一顆骰子，點數和就有機會變成 i

CSES Dice Combinations

你有無限多顆六面骰，求丟出的點數總和為 n 的方法數

- 解決一些排列組合問題也是 DP 的其中一個用處
- 狀態應該不難訂：dp_i 為丟出的點數總和為 i 的方法數
- 觀察一下題目條件，可以發現當目前點數為 $i-6 \sim i-1$ 時，再丟一顆骰子，點數和就有機會變成 i
- 因此 $i-1 \sim i-6$ 便是 i 的轉移點

CSES Dice Combinations

你有無限多顆六面骰，求丟出的點數總和為 n 的方法數

- 解決一些排列組合問題也是 DP 的其中一個用處
- 狀態應該不難訂：dp_i 為丟出的點數總和為 i 的方法數
- 觀察一下題目條件，可以發現當目前點數為 $i-6 \sim i-1$ 時，再丟一顆骰子，點數和就有機會變成 i
- 因此 $i-1 \sim i-6$ 便是 i 的轉移點
- 最終轉移式：$dp_i = \begin{cases} 1 & \texttt{if } i = 0 \\ \sum_{j=1}^{i} dp_i & \texttt{if } i \leq 6 \\ \sum_{j=i-6}^{i-1} dp_i & \texttt{otherwise} \end{cases}$

例題

AtCoder DP Contest A - Frog 1

每顆石頭的高度為 h_i，從第 i 顆跳到第 j 顆的代價是 $|h_i - h_j|$ 每次可以跳 1 或 2 格，求從第 1 格跳到第 N 格的最小代價

CSES Dice Combinations

你有無限多顆六面骰，求丟出的點數總和為 n 的方法數

AtCoder DP Contest B - Frog 2

每顆石頭的高度為 h_i，從第 i 顆跳到第 j 顆的代價是 $|h_i - h_j|$ 每次可以跳 $1 \sim k$ 格，求從第 1 格跳到第 N 格的最小代價

2020 台南一中 x 台南女中聯合寒訓 pD. 公假無雙

見原題

例題

AtCoder DP Contest C - Vacation

每天有三種活動，每種活動都有一個分數，求相鄰兩天不為同一活動時的最大分數和

CSES Removing Digits

給定一數字 n，每次可以減去 n 的任意一位數字，求最少減幾次可以減到 0 $(n \leq 10^6)$
如：$27 \to 20 \to 18 \to 10 \to 9 \to 0$

CF 1625C. Road Optimization

一條長度為 l 的道路上有 n 個限速牌，每個限速牌上會寫著一個數字 a_i，代表車子以最高限速行駛時，每公里需要花 a_i，而車子經過該車速牌就會調整車速為限速牌上的最高時速。
你可以移除最多 k 個限速牌，求車子開過所需的最少時間

背包問題

背包問題

- 背包問題算是 DP 中最經典的題型，網路上直接搜尋動態規劃大概十篇有九篇都是背包問題
- 背包問題主要分為三種：
  1. 0-1 背包問題：每種物品只有一個
  2. 無限背包問題：每種物品有無限個
  3. 有限背包問題：每種物品有有限個
- 今天的課程會提到前兩種（其實也是線性 DP 的變種）

0-1 背包問題

AtCoder DP Contest D - Knapsack 1

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(N \leq 100, W \leq 10^5, w_i \leq W, v_i \leq 10^9)$

- 題目問的是最多裝 W 的最大價值，那我們就用重量當作狀態吧！dp_i 代表重量為 i 時的最大價值

0-1 背包問題

AtCoder DP Contest D - Knapsack 1

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(N \leq 100, W \leq 10^5, w_i \leq W, v_i \leq 10^9)$

- 題目問的是最多裝 W 的最大價值，那我們就用重量當作狀態吧！dp_i 代表重量為 i 時的最大價值
- 對於重量 i，可以透過拿取第 j 種物品讓重量變為 $i + w_j$，因此轉移點為 $i - w_j$

0-1 背包問題

AtCoder DP Contest D - Knapsack 1

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(N \leq 100, W \leq 10^5, w_i \leq W, v_i \leq 10^9)$

- 題目問的是最多裝 W 的最大價值，那我們就用重量當作狀態吧！dp_i 代表重量為 i 時的最大價值
- 對於重量 i，可以透過拿取第 j 種物品讓重量變為 $i + w_j$，因此轉移點為 $i - w_j$
- 那我們就可以很輕鬆的推出轉移式了！

0-1 背包問題

AtCoder DP Contest D - Knapsack 1

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(N \leq 100, W \leq 10^5, w_i \leq W, v_i \leq 10^9)$

- 題目問的是最多裝 W 的最大價值，那我們就用重量當作狀態吧！dp_i 代表重量為 i 時的最大價值
- 對於重量 i，可以透過拿取第 j 種物品讓重量變為 $i + w_j$，因此轉移點為 $i - w_j$
- 那我們就可以很輕鬆的推出轉移式了！
- $dp_i = \begin{cases} 0 & \texttt{if } \mathit{if} < 0 \\ \texttt{max}(dp_i, dp_{i-w_j} + v_j) & \texttt{otherwise} \end{cases}$

0-1 背包問題

AtCoder DP Contest D - Knapsack 1

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(N \leq 100, W \leq 10^5, w_i \leq W, v_i \leq 10^9)$

- 題目問的是最多裝 W 的最大價值，那我們就用重量當作狀態吧！dp_i 代表重量為 i 時的最大價值
- 對於重量 i，可以透過拿取第 j 種物品讓重量變為 $i + w_j$，因此轉移點為 $i - w_j$
- 那我們就可以很輕鬆的推出轉移式了！
- $dp_i = \begin{cases} 0 & \texttt{if } \mathit{if} < 0 \\ \texttt{max}(dp_i, dp_{i-w_j} + v_j) & \texttt{otherwise} \end{cases}$
- 實作小細節：由於要求最大價值，因此對於所有 $i > 0$，dp_i 的初始值為 $-\infty$，最後答案便是最大的 i 滿足 $dp_i > 0$

0-1 背包問題

AtCoder DP Contest E - Knapsack 2

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最小重量
$(N \leq 100, W \leq 10^9, w_i \leq W, v_i \leq 10^3)$

- 可以發現 W 最大來到了 10^9，因此我們需要更改狀態設計

0-1 背包問題

AtCoder DP Contest E - Knapsack 2

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最小重量
$(N \leq 100, W \leq 10^9, w_i \leq W, v_i \leq 10^3)$

- 可以發現 W 最大來到了 10^9，因此我們需要更改狀態設計
- 除了重量，還有甚麼可以當作狀態呢？

AtCoder DP Contest E - Knapsack 2

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最小重量

$(N \leq 100, W \leq 10^9, w_i \leq W, v_i \leq 10^3)$

- 可以發現 W 最大來到了 10^9，因此我們需要更改狀態設計
- 除了重量，還有甚麼可以當作狀態呢？
- 觀察一下題目，發現最多裝 W 的最大價值，可以轉換為最大價值且最多裝 W，因此可以換個方向，改以價值當作狀態

0-1 背包問題

AtCoder DP Contest E - Knapsack 2

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最小重量
$(N \leq 100, W \leq 10^9, w_i \leq W, v_i \leq 10^3)$

- 可以發現 W 最大來到了 10^9，因此我們需要更改狀態設計
- 除了重量，還有甚麼可以當作狀態呢？
- 觀察一下題目，發現最多裝 W 的最大價值，可以轉換為最大價值且最多裝 W，因此可以換個方向，改以價值當作狀態
- dp_i 代表價值 i 時所需的最小重量

0-1 背包問題

AtCoder DP Contest E - Knapsack 2

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最小重量
$(N \leq 100, W \leq 10^9, w_i \leq W, v_i \leq 10^3)$

- 可以發現 W 最大來到了 10^9，因此我們需要更改狀態設計
- 除了重量，還有甚麼可以當作狀態呢？
- 觀察一下題目，發現最多裝 W 的最大價值，可以轉換為最大價值且最多裝 W，因此可以換個方向，改以價值當作狀態
- dp_i 代表價值 i 時所需的最小重量
- $dp_i = \begin{cases} 0 & \texttt{if } i = 0 \\ \texttt{min}(dp_i, dp_{i-v_j} + w_j) & \texttt{otherwise} \end{cases}$

0-1 背包問題

AtCoder DP Contest E - Knapsack 2

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最小重量
$(N \leq 100, W \leq 10^9, w_i \leq W, v_i \leq 10^3)$

- 可以發現 W 最大來到了 10^9，因此我們需要更改狀態設計
- 除了重量，還有甚麼可以當作狀態呢？
- 觀察一下題目，發現最多裝 W 的最大價值，可以轉換為最大價值且最多裝 W，因此可以換個方向，改以價值當作狀態
- dp_i 代表價值 i 時所需的最小重量
- $dp_i = \begin{cases} 0 & \texttt{if } i = 0 \\ \texttt{min}(dp_i, dp_{i-v_j} + w_j) & \texttt{otherwise} \end{cases}$
- 初始狀態：$dp_i = \infty \ (i > 0)$，答案就是最大的 i 滿足 $dp_i \leq W$

無限背包問題

Minimizing Coins

硬幣問題，有無限個面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的最少硬幣數量 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 還記得貪心課講到的硬幣問題嗎？當面額不存在倍數關係時，就可以用 DP 來解決！

無限背包問題

Minimizing Coins

硬幣問題，有無限個面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的最少硬幣數量 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 還記得貪心課講到的硬幣問題嗎？當面額不存在倍數關係時，就可以用 DP 來解決！
- 題目要問湊出 x 的最少數量，那我們就用總和當作狀態

無限背包問題

Minimizing Coins

硬幣問題，有無限個面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的最少硬幣數量 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 還記得貪心課講到的硬幣問題嗎？當面額不存在倍數關係時，就可以用 DP 來解決！
- 題目要問湊出 x 的最少數量，那我們就用總和當作狀態
- dp_i 為湊出 i 元的最少硬幣數量

無限背包問題

Minimizing Coins

硬幣問題，有無限個面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的最少硬幣數量 $(n \le 100, x, c_i \le 10^6)$

- 還記得貪心課講到的硬幣問題嗎？當面額不存在倍數關係時，就可以用 DP 來解決！
- 題目要問湊出 x 的最少數量，那我們就用總和當作狀態
- dp_i 為湊出 i 元的最少硬幣數量
- $dp_i = \begin{cases} 0 & \texttt{if } i = 0 \\ \texttt{min}(dp_i, dp_{i-c_j} + 1) & \texttt{otherwise} \end{cases}$

Minimizing Coins

硬幣問題，有無限個面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的最少硬幣數量 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 還記得貪心課講到的硬幣問題嗎？當面額不存在倍數關係時，就可以用 DP 來解決！
- 題目要問湊出 x 的最少數量，那我們就用總和當作狀態
- dp_i 為湊出 i 元的最少硬幣數量
- $dp_i = \begin{cases} 0 & \texttt{if } i = 0 \\ \texttt{min}(dp_i, dp_{i-c_j} + 1) & \texttt{otherwise} \end{cases}$
- 初始狀態：$dp_i = \infty \ \ (i > 0)$，答案就是 dp_x

CSES Coin Combinations I

你有面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的方案數量，[1, 2, 3]、[1, 3, 2] 算是兩種 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 狀態應該很明顯：dp_i 為湊出 i 元的方法數

跟排列組合有關的背包問題

CSES Coin Combinations I

你有面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的方案數量，[1, 2, 3]、[1, 3, 2] 算是兩種 $(n \le 100, x, c_i \le 10^6)$

- 狀態應該很明顯：dp_i 為湊出 i 元的方法數
- 轉移式：$dp_i = \begin{cases} 1 & \texttt{if } i = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} dp_{i-c_j} & \texttt{otherwise} \end{cases}$

跟排列組合有關的背包問題

CSES Coin Combinations I

你有面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的方案數量，[1, 2, 3]、[1, 3, 2] 算是兩種 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 狀態應該很明顯：dp_i 為湊出 i 元的方法數
- 轉移式：$dp_i = \begin{cases} 1 & \texttt{if } i = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} dp_{i-c_j} & \texttt{otherwise} \end{cases}$
- Trivial la！

CSES Coin Combinations II

你有面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的方案數量，[1, 2, 3]、[1, 3, 2] 算是同一種 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 多了排列算同一種的限制該怎麼辦？

跟排列組合有關的背包問題

CSES Coin Combinations II

你有面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的方案數量，[1, 2, 3]、[1, 3, 2] 算是同一種 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 多了排列算同一種的限制該怎麼辦？
- 我們觀察一下原本的轉移式會有甚麼問題

CSES Coin Combinations II

你有面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的方案數量，[1, 2, 3]、[1, 3, 2] 算是同一種 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 多了排列算同一種的限制該怎麼辦？
- 我們觀察一下原本的轉移式會有甚麼問題
- 如果外層迴圈是 $1 \sim x$（價值），內層迴圈為 $1 \sim n$（面額），那麼就會發生重複計算的問題，如上所述

跟排列組合有關的背包問題

CSES Coin Combinations II

你有面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的方案數量，[1, 2, 3]、[1, 3, 2] 算是同一種 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 多了排列算同一種的限制該怎麼辦？
- 我們觀察一下原本的轉移式會有甚麼問題
- 如果外層迴圈是 $1 \sim x$（價值），內層迴圈為 $1 \sim n$（面額），那麼就會發生重複計算的問題，如上所述
- 如何解決？簡單，將硬幣面額的順序固定

跟排列組合有關的背包問題

CSES Coin Combinations II

你有面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的方案數量，[1, 2, 3]、[1, 3, 2] 算是同一種 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

- 多了排列算同一種的限制該怎麼辦？
- 我們觀察一下原本的轉移式會有甚麼問題
- 如果外層迴圈是 $1 \sim x$（價值），內層迴圈為 $1 \sim n$（面額），那麼就會發生重複計算的問題，如上所述
- 如何解決？簡單，將硬幣面額的順序固定
- 因此我們只需要將兩層迴圈替換就可以了！

例題

AtCoder DP Contest D - Knapsack 1

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(N \leq 100, W \leq 10^5, w_i \leq W, v_i \leq 10^9)$

AtCoder DP Contest E - Knapsack 2

有 N 種物品，每種物品的重量為 w_i，價值為 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最小重量
$(N \leq 100, W \leq 10^9, w_i \leq W, v_i \leq 10^3)$

Minimizing Coins

硬幣問題，有無限個面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的最少硬幣數量
$(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

例題

CSES Coin Combinations I

你有面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的方案數量，[1, 2, 3]、[1, 3, 2] 算是兩種 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

CSES Coin Combinations II

你有面額為 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的硬幣，求湊出 x 元的方案數量，[1, 2, 3]、[1, 3, 2] 算是同一種 $(n \leq 100, x, c_i \leq 10^6)$

Book Shop

見原題

補充 - 有限背包問題

有限背包問題

總共有 n 種物品，每個物品有其數量 c_i、重量 w_i、價值 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值

$(n \leq 1000, c_i \leq 10^9, w_i \leq 100, W \leq 1000)$

- 注意物品數量不再是無限或是 0-1

補充 - 有限背包問題

有限背包問題

總共有 n 種物品，每個物品有其數量 c_i、重量 w_i、價值 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(n \le 1000, c_i \le 10^9, w_i \le 100, W \le 1000)$

- 注意物品數量不再是無限或是 0-1
- 如果將每個物品都拆開來看的話，光是物品數量就會超過 10^9

補充 - 有限背包問題

有限背包問題

總共有 n 種物品，每個物品有其數量 c_i、重量 w_i、價值 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(n \leq 1000, c_i \leq 10^9, w_i \leq 100, W \leq 1000)$

- 注意物品數量不再是無限或是 0-1
- 如果將每個物品都拆開來看的話，光是物品數量就會超過 10^9
- 還記得二進位這東西嗎？我們只需要有 $2^0, 2^1, \ldots, 2^n$，便可湊出 $0 \sim 2^{n+1} - 1$

補充 - 有限背包問題

有限背包問題

總共有 n 種物品，每個物品有其數量 c_i、重量 w_i、價值 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(n \leq 1000, c_i \leq 10^9, w_i \leq 100, W \leq 1000)$

- 注意物品數量不再是無限或是 `0-1`
- 如果將每個物品都拆開來看的話，光是物品數量就會超過 10^9
- 還記得二進位這東西嗎？我們只需要有 $2^0, 2^1, \ldots, 2^n$，便可湊出 $0 \sim 2^{n+1} - 1$
- 在這裡也同理！我們將 c_i 拆成 $2^0, 2^1, \ldots$，就可以將物品數量變為 $\texttt{log}\, c_i$ 了！

有限背包問題

總共有 n 種物品，每個物品有其數量 c_i、重量 w_i、價值 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(n \leq 1000, c_i \leq 10^9, w_i \leq 100, W \leq 1000)$

- 注意物品數量不再是無限或是 0-1
- 如果將每個物品都拆開來看的話，光是物品數量就會超過 10^9
- 還記得二進位這東西嗎？我們只需要有 $2^0, 2^1, \ldots, 2^n$，便可湊出 $0 \sim 2^{n+1} - 1$
- 在這裡也同理！我們將 c_i 拆成 $2^0, 2^1, \ldots$，就可以將物品數量變為 $\log c_i$ 了！
- 最後，再將這些拆好的物品，做 0-1 背包問題即可，時間複雜度 $nW \log c_i$

補充 - 有限背包問題

有限背包問題

總共有 n 種物品，每個物品有其數量 c_i、重量 w_i、價值 v_i，背包的容量為 W，求背包裡的物品的最大價值
$(n \leq 1000, c_i \leq 10^9, w_i \leq 100, W \leq 1000)$

- 注意物品數量不再是無限或是 0-1
- 如果將每個物品都拆開來看的話，光是物品數量就會超過 10^9
- 還記得二進位這東西嗎？我們只需要有 $2^0, 2^1, \ldots, 2^n$，便可湊出 $0 \sim 2^{n+1} - 1$
- 在這裡也同理！我們將 c_i 拆成 $2^0, 2^1, \ldots$，就可以將物品數量變為 $\log c_i$ 了！
- 最後，再將這些拆好的物品，做 0-1 背包問題即可，時間複雜度 $nW \log c_i$
- 之後如果你們有機會學到 DP 優化，會再將這個做法優化到更快

更多例題

例題

- Array Description
- Counting Towers
- CF 1526C1. Potions (Easy Version)

子序列 DP

一些名詞解釋

- Subsequence 子序列：從一個字串中挑出幾個字元組成的字串，前後相對順序不變，如：abc 的子序列為 a, b, c, ab, ac, bc, abc
- Substring 子字串：從一個字串中挑出某個區間的字元組成的字串，如：abc 的子字串為 a, b, c, ab, bc, abc

LCS

- LCS：Longest Common Subsequence，最長共同子序列

LCS

- LCS：Longest Common Subsequence，最長共同子序列
- 給定兩字串 s_1, s_2，求一個最長的字串長度，使得該字串為 s_1, s_2 的子序列

LCS

- 子序列 DP 的轉移式算是比較特別的

LCS

- 子序列 DP 的轉移式算是比較特別的
- $dp_{i,j}$：s_1 的前 i 個元素與 s_2 的前 j 個元素的 LCS 長度

LCS

- 子序列 DP 的轉移式算是比較特別的
- $dp_{i,j}$：s_1 的前 i 個元素與 s_2 的前 j 個元素的 LCS 長度
- 怎麼轉移呢？可以觀察到，$s_{1,i}$ 與 $s_{2,j}$ 只有兩種關係：一樣 or 不一樣

- 我們先來看 $s_{1,i} = s_{2,j}$ 的情況

LCS

- 我們先來看 $s_{1,i} = s_{2,j}$ 的情況
- 假設 $s_{1,i} = s_{2,j}$，那麼以 $s_{1,i}$ 為結尾的某個共同子序列，去掉結尾之後，就會變成 s_1 的前 $i-1$ 個元素與 s_2 的前 $j-1$ 個元素的 LCS

- 我們先來看 $s_{1,i} = s_{2,j}$ 的情況
- 假設 $s_{1,i} = s_{2,j}$，那麼以 $s_{1,i}$ 為結尾的某個共同子序列，去掉結尾之後，就會變成 s_1 的前 $i-1$ 個元素與 s_2 的前 $j-1$ 個元素的 LCS
- 例如：$s_1 =$ abcd，$s_2 =$ acd，而 $i = 4, j = 3$ 時，$s_{1,4} = s_{2,3}$，因此以 d 結尾的 LCS 就會是"abc"、"ac" 的 LCS 加上 d

LCS

- 我們先來看 $s_{1,i} = s_{2,j}$ 的情況
- 假設 $s_{1,i} = s_{2,j}$，那麼以 $s_{1,i}$ 為結尾的某個共同子序列，去掉結尾之後，就會變成 s_1 的前 $i-1$ 個元素與 s_2 的前 $j-1$ 個元素的 LCS
- 例如：$s_1 =$ abcd，$s_2 =$ acd，而 $i = 4, j = 3$ 時，$s_{1,4} = s_{2,3}$，因此以 d 結尾的 LCS 就會是"abc"、"ac" 的 LCS 加上 d
- 發現這些性質之後，我們就可以推出在這樣的情況，$dp_{i,j} = dp_{i-1,j-1} + 1$ 了！

LCS

- 那假如不一樣呢？

LCS

- 那假如不一樣呢？
- 因為 $s_{1,i} \neq s_{2,j}$，所以 (i,j) 的 LCS 一定不會有 $s_{1,i}$ 或是 $s_{2,j}$

- 那假如不一樣呢？
- 因為 $s_{1,i} \neq s_{2,j}$，所以 (i,j) 的 LCS 一定不會有 $s_{1,i}$ 或是 $s_{2,j}$
- 這代表 i,j 都是沒用的！

- 那假如不一樣呢？
- 因為 $s_{1,i} \neq s_{2,j}$，所以 (i,j) 的 LCS 一定不會有 $s_{1,i}$ 或是 $s_{2,j}$
- 這代表 i,j 都是沒用的！
- 既然他沒用，那我們就隨便抓之前的狀態當作最佳解吧！

LCS

- 那假如不一樣呢？
- 因為 $s_{1,i} \neq s_{2,j}$，所以 (i, j) 的 LCS 一定不會有 $s_{1,i}$ 或是 $s_{2,j}$
- 這代表 i, j 都是沒用的！
- 既然他沒用，那我們就隨便抓之前的狀態當作最佳解吧！
- 在這個狀態下的轉移式：$dp_{i,j} = \texttt{max}(dp_{i-1,j}, dp_{i,j-1})$

$$dp_{i,j} = \begin{cases} dp_{i-1,j-1} + 1 & \texttt{if } s_{1,i} = s_{2,j} \\ \texttt{max}(dp_{i-1,j}, dp_{i,j-1}) & \texttt{otherwise} \end{cases}$$

LCS 構造解

- 我們可以先來看看動畫

LCS 構造解

- 我們可以先來看看動畫
- $s_{1,i} = s_{2,j}$：代表轉移點在 $(i-1, j-1)$
- 將答案 ans 加上 $s_{1,i}$、`i - 1`、`j - 1`

LCS 構造解

- 我們可以先來看看動畫
- $s_{1,i} = s_{2,j}$：代表轉移點在 $(i-1, j-1)$
- 將答案 ans 加上 $s_{1,i}$、`i - 1`、`j - 1`
- $s_{1,i} \neq s_{2,j}$：代表轉移點在 $(i-1, j)$ 或是 $(i, j-1)$
- 看哪個比較大，將 i, j 移至該點

LCS 構造解

- 我們可以先來看看動畫
- $s_{1,i} = s_{2,j}$：代表轉移點在 $(i-1, j-1)$
- 將答案 ans 加上 $s_{1,i}$、`i - 1`、`j - 1`
- $s_{1,i} \neq s_{2,j}$：代表轉移點在 $(i-1, j)$ 或是 $(i, j-1)$
- 看哪個比較大，將 i, j 移至該點
- 最後 ans 的逆序就是答案！

LCS 例題

AtCoder DP Contest F. LCS

給兩字串，求 LCS

編輯距離

編輯距離

- 對於兩個字串 s_1, s_2，你有以下三種方法可以操作：
  - 刪除某個字元
  - 插入某個字元
  - 修改某個字元
- 求需要最少操作幾次，才能將 s_1 變成 s_2
- 操作次數稱為編輯距離

舉例

- abc 可由一次刪除變成 ac
- abc 可由一次插入變成 abdc
- abc 可由一次修改變成 abd

轉移式

- 提示：這邊的狀態定義跟 LCS 一樣，轉移式也跟 LCS 有異曲同工之妙
- $dp_{i,j}$ 為 $s_{1,1} \dots s_{1,i}$ 跟 $s_{2,1} \dots s_{2,j}$ 的編輯距離
- 試想可以怎麼從 LCS 的定義轉換過來

轉移式

- 提示：這邊的狀態定義跟 LCS 一樣，轉移式也跟 LCS 有異曲同工之妙
- $dp_{i,j}$ 為 $s_{1,1} \ldots s_{1,i}$ 跟 $s_{2,1} \ldots s_{2,j}$ 的編輯距離
- 試想可以怎麼從 LCS 的定義轉換過來
- $s_{1,i} = s_{2,j}$：顯然不需要在 (i,j) 做任何操作
- 轉移式：$dp_{i,j} = dp_{i-1,j-1}$

轉移式 - 刪除

- 接著是不同的情況

轉移式 - 刪除

- 接著是不同的情況
- 我們可以將 $s_{1,i}$ 刪除來得到 $s_{1,i-1}$
- 也就是說，(i,j) 可由一次編輯得到 $(i-1,j)$ 的狀態
- $dp_{i,j} = dp_{i-1,j} + 1$

轉移式 - 插入

- 如果要在 $s_{1,i}$ 後插入一個字元，你會選哪個？

轉移式 - 插入

- 如果要在 $s_{1,i}$ 後插入一個字元，你會選哪個？
- 顯然：$s_{2,j}$，這樣才有意義

轉移式 - 插入

- 如果要在 $s_{1,i}$ 後插入一個字元，你會選哪個？
- 顯然：$s_{2,j}$，這樣才有意義
- 既然你要為了 $s_{2,j}$ 再插入一個字元使其相等，那為何不乾脆刪掉 $s_{2,j}$？

轉移式 - 插入

- 如果要在 $s_{1,i}$ 後插入一個字元，你會選哪個？
- 顯然：$s_{2,j}$，這樣才有意義
- 既然你要為了 $s_{2,j}$ 再插入一個字元使其相等，那為何不乾脆刪掉 $s_{2,j}$？
- 所以刪除等價於插入，轉移式相同

轉移式 - 修改

- 修改後長度不變，但能夠滿足 $s_{1,i} = s_{2,i}$

- 修改後長度不變，但能夠滿足 $s_{1,i} = s_{2,i}$
- 而相等的情況我們剛剛討論過了，轉移點 (i, j)，只是這次需要花費一次編輯

轉移式 - 修改

- 修改後長度不變，但能夠滿足 $s_{1,i} = s_{2,i}$
- 而相等的情況我們剛剛討論過了，轉移點 (i, j)，只是這次需要花費一次編輯
- 轉移式：$dp_{i,j} = dp_{i-1,j-1} + 1$

最終轉移式

- 最後，我們把三種情況的轉移式合併起來
- $$dp_{i,j} = \begin{cases} dp_{i-1,j-1} & s_{1,i} = s_{2,j} \\ \texttt{min}(dp_{i-1,j-1}, dp_{i-1,j}, dp_{i,j-1}) + 1 & \texttt{otherwise} \end{cases}$$
- 時間複雜度 $\mathcal{O}(n^2)$

例題

CSES Edit Distance

編輯距離經典題

編輯距離

- 編輯距離看起來好像很廢？

編輯距離

- 編輯距離看起來好像很廢？
- 但他幫我完成了一份分數蠻高的探究與實作報告

編輯距離

- 編輯距離看起來好像很廢？
- 但他幫我完成了一份分數蠻高的探究與實作報告
- 事實上，編輯距離可用來計算兩個 DNA 的相似程度

編輯距離

- 編輯距離看起來好像很廢？
- 但他幫我完成了一份分數蠻高的探究與實作報告
- 事實上，編輯距離可用來計算兩個 DNA 的相似程度
- 如果你們有生物報告或是探究報告要做，可以參考一下（O

LIS

LIS

- Longest Increasing Subsequence，最長遞增子序列
- 跟 LCS 一樣，都是子序列問題
- 只是從” 共同” 的子序列，變成一個字串裡最長且元素呈現遞增 $(s_i \leq s_{i+1})$ 的子序列
- 例如 16723 的 LIS 就是 123

$\mathcal{O}(n^2)$ 作法

- 狀態定義：dp_i：以第 i 個元素為結尾的 LIS

$\mathcal{O}(n^2)$ 作法

- 狀態定義：dp_i：以第 i 個元素為結尾的 LIS
- 對於所有 $j < i$，如果 $s_j \leq s_i$，那就代表 s_i 可以接在 s_j 後面

$\mathcal{O}(n^2)$ 作法

- 狀態定義：dp_i：以第 i 個元素為結尾的 LIS
- 對於所有 $j < i$，如果 $s_j \leq s_i$，那就代表 s_i 可以接在 s_j 後面
- 因此 i 的轉移點就是對於所有 j，滿足 $j < i, s_j \leq s_i$

$\mathcal{O}(n^2)$ 作法

- 狀態定義：dp_i：以第 i 個元素為結尾的 LIS
- 對於所有 $j < i$，如果 $s_j \leq s_i$，那就代表 s_i 可以接在 s_j 後面
- 因此 i 的轉移點就是對於所有 j，滿足 $j < i, s_j \leq s_i$
- 取最好的接上去就可以了！

$\mathcal{O}(n^2)$ 作法

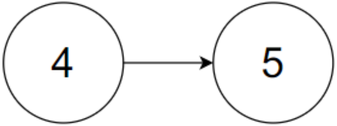
- 狀態定義：dp_i：以第 i 個元素為結尾的 LIS
- 對於所有 $j < i$，如果 $s_j \le s_i$，那就代表 s_i 可以接在 s_j 後面
- 因此 i 的轉移點就是對於所有 j，滿足 $j < i, s_j \le s_i$
- 取最好的接上去就可以了！
- $dp_i = \max\limits_{j=1}^{i-1}(dp_j + 1), \ \ s_j \le s_i$

$\mathcal{O}(n \log n)$ 作法

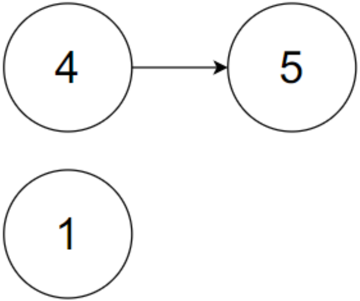
- $\mathcal{O}(n^2)$ 實在是太遜了，能不能更快？

$\mathcal{O}(n \log n)$ 作法

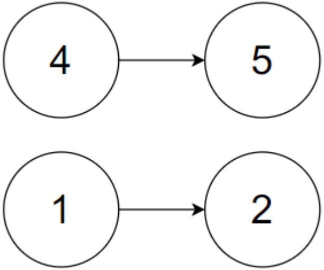
- $\mathcal{O}(n^2)$ 實在是太遜了，能不能更快？
- 遞增 $\Rightarrow$ 單調性 $\Rightarrow$ 能不能二分搜阿 ??
- 我們畫圖試試看，假設我們有 $\{4, 5, 1, 2, 3, 10, 7, 2\}$



- 一開始 $4, 5$ 都遞增，所以直接連起來

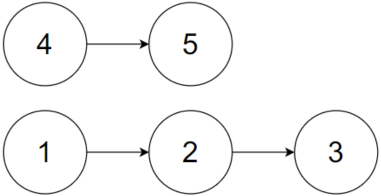


- 接下來的 1 比任何一個數字都還要小，因此我們先擺在旁邊

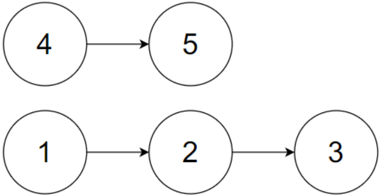


- $2 > 1$，所以我們接在 1 後面

LIS

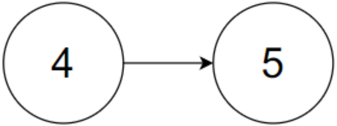


- $3 > 2$，所以接在 2 後面
- 可以發現，第二條鍊已經比第一條鍊長了，所以將第一條鍊捨棄
- 同樣位在第二位，$5 > 2$，顯然 2 的潛力比較高（畢竟可以接比較多東西）

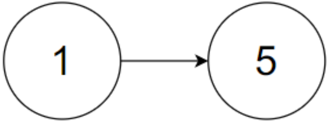


- 換句話說，如果在兩條鍊的同一位有兩數字 a, b，且 $a > b$，那麼直接留下 b 而不是 a 肯定是最好的
- 也就是將數字大的直接淘汰
- 那我們重新試試看

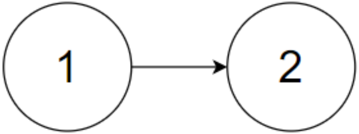
LIS



- 這步驟一樣

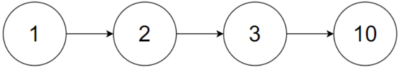


- 原本 1 應該是另一條鍊的第一項，但跟他並排的 $2 > 1$，潛力比較不好
- 所以我們把 2 捨棄，填上 1



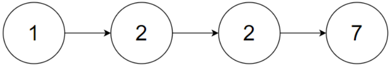
- 再把 5 用 2 替换掉

LIS



- 將 $3, 10$ 接上

LIS



- 依剛剛的規則，用 $7, 2$ 將 $10, 3$ 替換掉
- 最後得到的就是 LIS 長度了！

- 觀察一下規則可以發現，當我們加入新元素 A_i 時，我們可以在鍊裡找到一個元素 A_j 並將其取代（A_j 滿足 $A_j \leq A_i$ 且 A_j 盡可能小）

- 觀察一下規則可以發現，當我們加入新元素 A_i 時，我們可以在鍊裡找到一個元素 A_j 並將其取代（A_j 滿足 $A_j \leq A_i$ 且 A_j 盡可能小）
- 有沒有很像二分搜？

LIS

- 觀察一下規則可以發現，當我們加入新元素 A_i 時，我們可以在鍊裡找到一個元素 A_j 並將其取代（A_j 滿足 $A_j \leq A_i$ 且 A_j 盡可能小）
- 有沒有很像二分搜？
- 其實這就是在做 `lower bound`

LIS

- 觀察一下規則可以發現，當我們加入新元素 A_i 時，我們可以在鍊裡找到一個元素 A_j 並將其取代（A_j 滿足 $A_j \leq A_i$ 且 A_j 盡可能小）
- 有沒有很像二分搜？
- 其實這就是在做 `lower bound`
- 每次找到一個元素取代，若沒元素能夠取代就在鍊的尾端接上

LIS

- 觀察一下規則可以發現，當我們加入新元素 A_i 時，我們可以在鍊裡找到一個元素 A_j 並將其取代（A_j 滿足 $A_j \leq A_i$ 且 A_j 盡可能小）
- 有沒有很像二分搜？
- 其實這就是在做 lower bound
- 每次找到一個元素取代，若沒元素能夠取代就在鍊的尾端接上
- 時間複雜度 $\mathcal{O}(n \log n)$

- 應該有人有疑問：假設目前鍊長 4，我替換掉了位置 2，阿 $3, 4$ 又沒辦法接在 2 後面，怎麼會合法？

- 應該有人有疑問：假設目前鍊長 4，我替換掉了位置 2，阿 $3,4$ 又沒辦法接在 2 後面，怎麼會合法？
- 這是因為這個鍊其實不是真正的 LIS，只是紀錄各種 IS 在同一位置上的最佳解罷了

- 應該有人有疑問：假設目前鍊長 4，我替換掉了位置 2，阿 $3, 4$ 又沒辦法接在 2 後面，怎麼會合法？
- 這是因為這個鍊其實不是真正的 LIS，只是紀錄各種 IS 在同一位置上的最佳解罷了
- 你可以把他想像成是在”新陳代謝”

子序列 DP 的構造解

- 前面都是在講最大長度，沒有講構造出的答案

子序列 DP 的構造解

- 前面都是在講最大長度，沒有講構造出的答案
- DP 問題中，一個非常關鍵的點就是目前狀態的轉移點是哪一個

子序列 DP 的構造解

- 前面都是在講最大長度，沒有講構造出的答案
- DP 問題中，一個非常關鍵的點就是目前狀態的轉移點是哪一個
- 我們可以對每個狀態紀錄他是由哪個轉移點轉移得來的
- 最後再從最後一個一直往前推，就能夠找到答案了！
- 這部分就留給學員回家實作了

例題

CSES Increasing Subsequence

LIS 經典題目

APCS 202101 4. 飛黃騰達

見原題

2021 TOIP pC

見原題