## Лема про розростання

у теорії формальних мов велике значення мають твердження, в яких формулюється необхідна умова приналежності мови до того чи іншого класу мов. Ці твердження відомі в літературі за назвою лем про розростання (або лем про "накачування"). За допомогою цих лем вдається довести, що та чи інша мова не є мовою цього класу, наприклад, не є регулярною, не є контекстновільною тощо. Доводити такі "негативні" твердження набагато важче, ніж "позитивні" (що мова є мовою цього класу), бо в останньому випадку достатньо придумати будь-яку граматику відповідного класу, яка породжує цю мову, тоді як в першому потрібно якось довести, що не існує граматики цього класу, яка породжує мову.

Застосування лем про розростання полягає в такому: довівши, що мова не задовольняє умову леми про розростання, ми можемо бути впевнені в тому, що вона не належить до відповідного класу мов.

## Лема про розростання для регулярних мов

У цій лемі стверджується, що будь-яка регулярна мова допускає представлення всіх своїх ланцюжків у вигляді з'єднання трьох ланцюжків, причому середній ланцюжок з цих трьох не є порожнім, обмеженим за довжиною, і його "накачка" — повторення будь-яку кількість разів — або викидання НЕ ВИВОДИТЬ за межі мови (тобто дає ланцюжки, що належать цій регулярній мові).

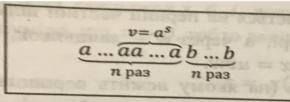
Якщо L — регулярна мова, то існує натуральна константа  $k_L$  (залежна від L), така, що для будь-якого ланцюжка  $x \in L$ , довжина якого не менша за  $k_L$ , x допускає представлення у вигляді x = uvw, де  $v \neq \lambda$  і  $|v| \leq k_L$ , причому для будь-якого  $n \geq 0$  ланцюжок  $x_n = uv^n w \in L$ .

## Доведення регулярності або нерегулярності мови. Приклад:

Доведемо нерегулярність мови

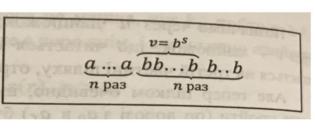
$$L(M) = \{ a^n b^n, n \ge 0 \}.$$

Вибираючи n настільки великим, щоб воно перевищувало  $k_L$  (константу леми), одержуємо такі можливі випадки розміщення середнього v в ланцюжку  $a^n b^n$ . Зокрема можливі варіанти:

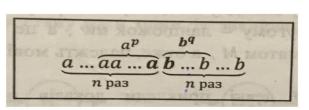


1. 
$$v = a^s$$
,  $s < n$  , тобто "накачуваний" підланцюжок  $v$  цілком розташовується в "зоні символів  $a$ ".

Накачування в цьому випадку виведе за межі мови, оскількик при повторенні ланцюжка v кількість символів a необмежено зростатиме, а кількість символів b залишатиметься сталою.



2. 
$$v = b^s$$
,  $s < n$ , тобто "накачуваний" підланцюжок  $v$  цілком розташовується в "зоні символів  $b$ ". Накачування неможливе з тієї ж причини, що і в попередньому випадку.



3. 
$$v = a^p b^q$$
, де  $0 , тобто "накачуваний" підланцю-жок  $v$  розташовується на стику зон символів  $a$  і  $b$ .  
У цьому випадку при накачуванні підланцюжок  $ab$  входить в слово, яке$ 

вже не належить мові L.

Отже, мова  $a^n b^n$  нерегулярна.

<u>Бачимо, що існують ланцюжки, для яких жодні представлення у вигляді з'єднання</u> трьох ланцюжків не задовільняють умови леми про розростання для регулярних мов.

## Контрольне завдання №21

Довести регулярність мови  $L(M) = \{a^n b^m, n \ge 0, m \ge 0\}$