

Мінімізація скінченного автомата

Щоб представити алгоритм побудови для будь-якого скінченного автомата еквівалентного йому автомата з мінімальною кількістю станів, введемо *такі обмеження на вид скінченного автомата*, які не порушують загальності викладень:

- припускаємо, що автомат, який підлягає мінімізації, є детермінованим;
- припускаємо, що у вихідному скінченному автоматі немає станів, що недосяжні з початкового стану.

Мінімізація скінченного автомата

На множині станів автомата $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, I, F \rangle$ задамо сімейство відношень еквівалентності:

1) побудуємо відношення 0-еквівалентності \cong^0 так:

$$q_1 \cong^0 q_2,$$

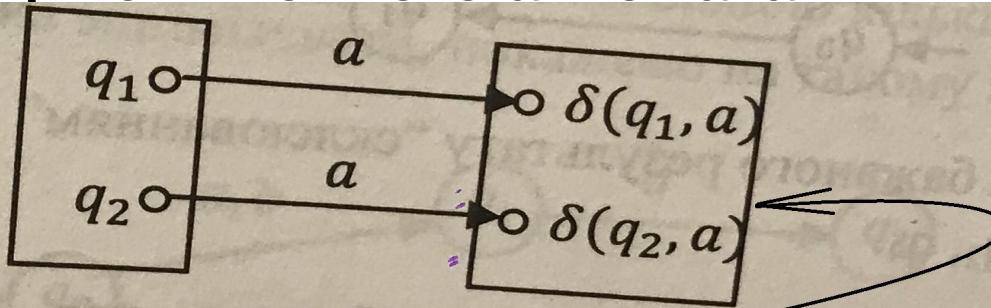
якщо обидва стани одночасно належать F або $Q \setminus F$, тобто обидва стани одночасно є заключними або одночасно незаключними;

2) побудуємо відношення k -еквівалентності \cong^k :

при $k \geq 1$ приймемо $q_1 \cong^k q_2$ тоді і тільки тоді, коли

- $q_1 \cong^{k-1} q_2$, тобто стани $q_1, q_2 \in (k-1)$ -еквівалентні;
 - для будь-якого входного символу a стани, в які можна потрапити по дузі з міткою a зі стану q_1 та зі стану q_2 , також $(k-1)$ -еквівалентні.
- Позначимо множину станів, в які можна потрапити з q_1 по дузі з міткою a через $\delta(q_1, a)$, а множину станів, в які можна потрапити з q_2 по дузі з міткою a через $\delta(q_2, a)$.

Мінімізація скінченного автомата



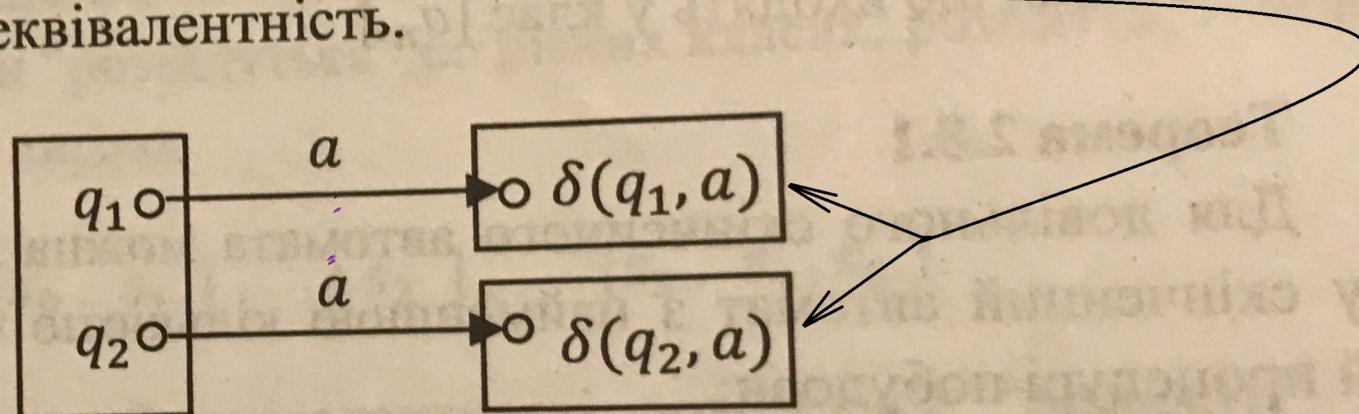
На цьому рисунку $q_1, q_2 \in (k - 1)$ -еквівалентні, тобто вони належать одному і тому самому класу $(k - 1)$ -еквівалентності С. Ці стани стануть k -еквівалентними, якщо для будь-якого входного символу a стани $\delta(q_1, a)$ та $\delta(q_2, a)$ також є $(k - 1)$ -еквівалентними, тобто належать до того самого класу еквівалентності С.

Можна сказати, що $(k - 1)$ -еквівалентні стани будуть також і k -еквівалентними, якщо переход з них по будь-якому входному символу “зберігає”

$(k - 1)$ -еквівалентність станів.

Мінімізація скінченного автомата

Якщо ж знайдеться хоча б один вхідний символ a такий, що стани $\delta(q_1, a)$ та $\delta(q_2, a)$, отримані переходом з q_1, q_2 хоча б по одній дузі з певною міткою опиняться в різних класах $(k - 1)$ -еквівалентності то стани q_1, q_2 вже НЕ БУДУТЬ k -еквівалентними (вони розій-дуться по різних класах k -еквівалентності, оскільки перехід з них по деякому символу порушує $(k - 1)$ -еквівалентність.



Мінімізація скінченного автомата

Отже, кожен клас k -еквівалентності або розбивається на кілька попарно непересічних класів $(k + 1)$ -еквівалентності, або не зміниться, якщо всі його стани залишаться $(k + 1)$ -еквівалентними. Це означає, що кількість множин станів у класі k -еквівалентності з ростом k може збільшуватись або залишатися незмінною.

Мінімізація скінченного автомата полягає в послідовному подрібненні (“розділті”) множини станів Q автомата M на класи еквівалентності доти, поки не отримаємо розділття, яке вже не можна подрібнити (очевидно, що таке розділття завжди існує через скінченність множини станів). Більш строго: зазначені вище відношення еквівалентності будуються до такого найменшого k , що відношення \cong^{k-1} збігається з відношенням \cong^k . Це відношення і визначає найдрібніше розділття множини станів. Позначимо його просто \equiv .

Мінімізація скінченного автомата

Тоді мінімальний скінчений автомат $M' = \langle Q', \Sigma, \Delta', I', F' \rangle$, що еквівалентний початковому автомatu M , визначається так:

- до множини станів Q' вводять тільки по одному стану з кожного класу еквівалентності – позначимо такий узагальнений для класу еквівалентності n стан через $[q_n]$.
- вхідним станом (єдиним) стане узагальнений стан $[q_0]$, який позначає клас, куди входять початкові стани автомата M : $I' = \{ [q_0] \}$.
- заключним станом (єдиним) стане узагальнений заключний стан $[f]$, що представляє клас еквівалентності, куди входять заключні стани автомата M : $F' = \{ [f] \}$.
- множина переходів $\Delta' = \{ \langle [q_n], a, [\delta([q_n], a] \rangle \}$, тобто в множину переходів входять тільки переходи між класами еквівалентності з класу еквівалентності з узагальненим станом $[q_n]$ по дузі з міткою a в узагальнений стан класу еквівалентності, куди потрапили всі стани $q \in Q$ автомата M , в які можна потрапити по дузі з міткою a з станів, що входять у клас $[q_n]$.

Мінімізація скінченного автомата

Важливе уточнення

Для перетворювачів (трансдукторів) мінімізацію кінцевих станів не виконуємо.