Traitement Numérique des Données
M1 – INF 2163
AIDN: Applications Interactives et Données Numériques

Séries de Fourier

Sylvie Gibet

Plan - Traitement du signal

- Qu'est-ce qu'un signal ?
  - Théorie de l'échantillonnage
- Traitement numérique du signal
  - Série de Fourier discrète
  - Transformée de Fourier discrète
  - Transformée de Fourier rapide (FFT)
  - Applications au filtrage

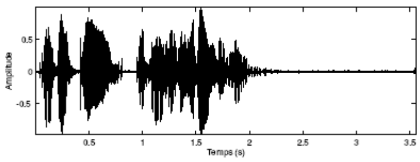
Théorème de l'échantillonage ou de Nyquist-Shannon - Rappel

- Le **théorème de Nyquist-Shannon** énonce que pour représenter correctement un signal numérisé, la fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal, afin de convertir ce signal d'une forme continue à une forme discrète (discontinue dans le temps).
- Ce théorème est à la base du passage continu -> discret des signaux

3

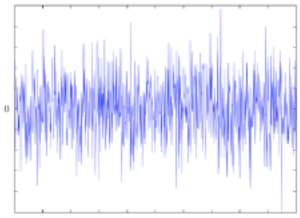
Série de Fourier - motivation

- Comment analyser/ produire un son particulier ?
  - Onde sonore, plus ou moins périodique, qui se propage dans l'air



Son de parole

temps

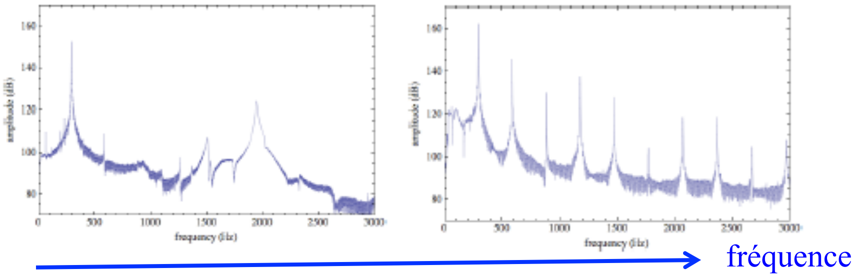


Bruit : non ordonné ni répétitif

4

Série de Fourier - motivation

- Créer des déformations périodiques dans l'air : il existe plein de façons de produire des sons à la même fréquence mais avec des timbres différents : ici la 440 Hz, jouée sur un piano et sur une guitare



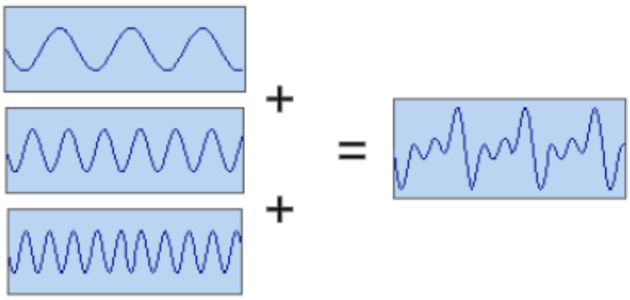
piano guitare

- On peut représenter une note par un graphique amplitude / fréquence : spectre en fréquence

5

Série de Fourier - motivation

- Quand on joue un son sur un instrument, on joue une note avec un timbre donné : fréquence fondamentale de la note f + harmoniques de la note : $n \cdot f$, avec n entier
- Les notes que l'on entend correspondent à la superposition de l'onde fondamentale et de ses harmoniques :



6

Série de Fourier - motivation

- Représentation d'un son quelconque : ajouter à l'onde sonore fondamentale de fréquence déterminée *f* les ondes harmoniques de fréquences 2*f*, 3*f*, 4*f*, … et ainsi de suite.
- La combinaison de la fondamentale et des harmoniques forment le son, parfois simple, souvent compliqué ; la fréquence de la note est celle de la sinusoïde fondamentale.
- On peut ainsi créer toute une gamme de sons, en jouant sur les amplitudes des harmoniques, en supprimant des harmoniques (*2f, 5f*, …).
- Inversement : peut-on décrire tout son comme la somme de ses harmoniques ? -> réponse grâce aux séries de Fourier

Vers les séries de Fourier

- 1807 : Fourier présente son travail sur l'équation de la chaleur
- Théorie analytique de la chaleur : la propagation de la chaleur sur un anneau suit un mouvement harmonique
- Équation de diffusion

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

  - *y(x, t)* : déplacement périodique de la vibration de l'objet,
  - λ période dans l'espace,
  - *T* période et
  - Φ la phase

Vers les séries de Fourier

- Fourier pense que l'équation de la chaleur peut être représentée par une série infinie de sinus et cosinus
- Il approxime le phénomène observé par une somme finie, constituée des harmoniques de la période fondamentale *T* (ou fréquence F = 1/T)
- Plus généralement, il affirme que les fonctions trigonométriques (sin et cos) peuvent être les constituants élémentaires de toute fonction périodique.

9

Les séries de Fourier

- Un signal périodique de fréquence *f* et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence *f* (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de *f*. Ces signaux ont des amplitudes et des positions de phase appropriées.
- De même, on peut décomposer toute onde récurrente en une somme de sinusoïdes (fondamentale et harmoniques).

10

Les séries de Fourier

L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets :

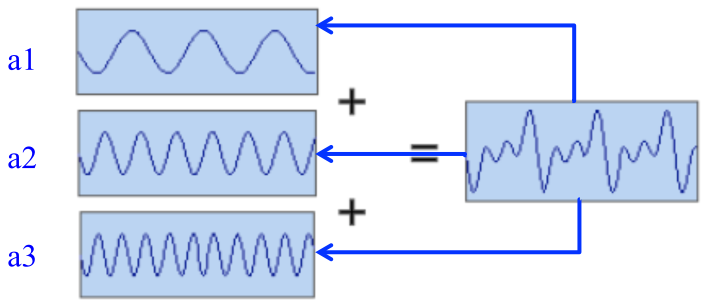
- l'**analyse**, qui consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier ;
- la **synthèse**, qui permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.

11

Les séries de Fourier

L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets :

- l'**analyse**, qui consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier :

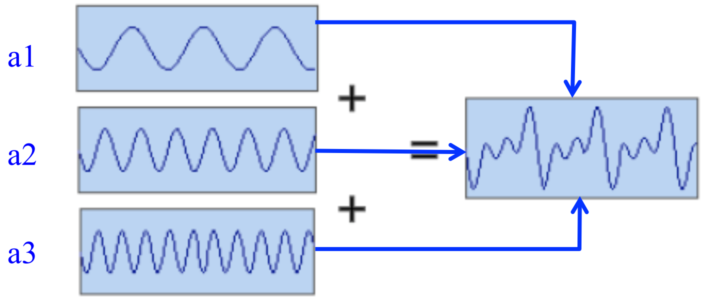


12

Les séries de Fourier

L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets :

- la **synthèse**, qui permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.



13

Séries de Fourier : analyse

- Soit un signal périodique réel : $s(t) = s(t + kT)$, T période fondamentale
- Alors il existe une décomposition fondamentale de ce signal en série de Fourier

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2\pi kt}{T}) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{2\pi kt}{T})$$

a_k et b_k étant les coefficients réels de la décomposition dits coefficients de Fourier

14

Séries de Fourier

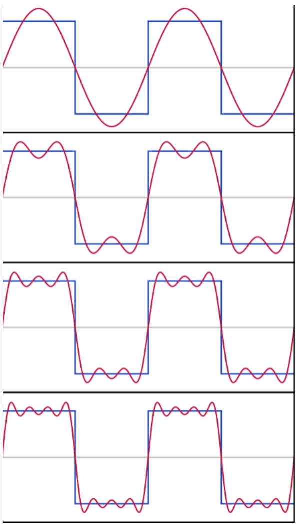
- a_k et b_k peuvent être calculés ainsi :

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(\dfrac{2\pi kt}{T})dt \quad ; \quad b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(\dfrac{2\pi kt}{T})dt \\ \dfrac{a_0}{2} \quad \textit{composante continue} \end{cases}$$

15

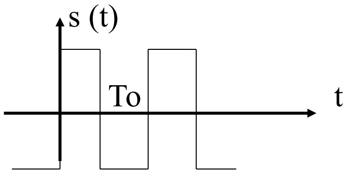
Séries de Fourier - exemple

- Exemple du signal carré de période T :
  - Représenté par la somme des 4 premières sinusoïdes de féquences 1/T, 2/T, 3/T, 4/T



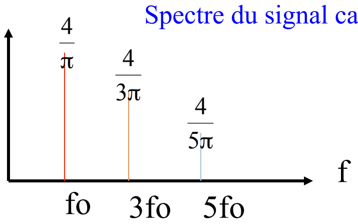
16

Série de Fourier : exemple



Signal carré

Spectre du signal carré



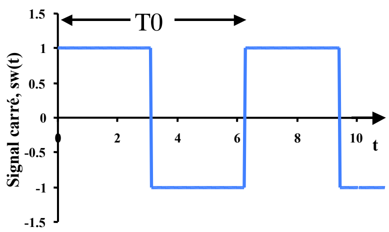
Décomposition du signal carré en série de Fourier

$$s(t) = \frac{4}{\pi}\sin(2\pi f_0 t) + \frac{4}{3\pi}\sin(2\pi(3f_0)t) + \frac{4}{5\pi}\sin(2\pi(5f_0)t) + ...$$

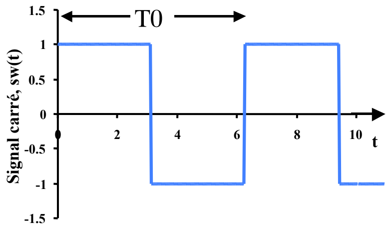
fréquence fondamentale : f_0
Harmoniques : f_0, $3f_0$, $5f_0$

Série de Fourier : exemple

Fonction carré impaire : T0 = 2*π



Série de Fourier du signal carré : calcul

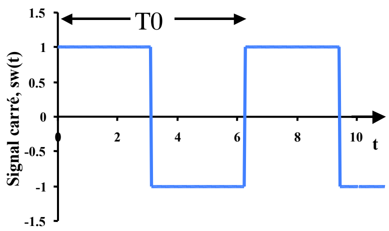


Fonction carré impaire : T0 = 2*π

$$b_k = \frac{2}{k \cdot \pi} \cdot \{ 1 - \cos k\pi \}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{k \cdot \pi} & , \ k \ impair \\ 0 & , \ k \ pair \end{cases}$$

Série de Fourier du signal carré : calcul



Fonction carré impaire : T0 = 2*π

$$b_k = \frac{2}{k \cdot \pi} \cdot \{ 1 - \cos k\pi \}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{k \cdot \pi} & , \ k \ impair \\ 0 & , \ k \ pair \end{cases}$$

$$a_k = 0$$

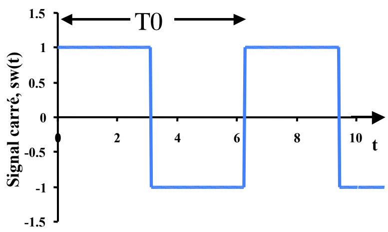
Série de Fourier du signal carré : calcul

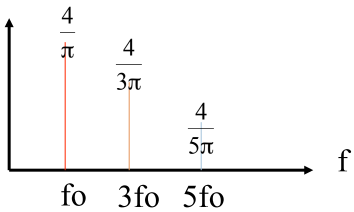
Fonction carré impaire : T0 = 2*π

$$b_k = \frac{2}{k\cdot\pi}\cdot\{\,1-\cos k\pi\,\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{k\cdot\pi} \;, & k\ impair \\ 0 \;, & k\ pair \end{cases}$$

$$a_k = 0$$





$$\boxed{s(t) = \frac{4}{\pi}\cdot\sin 2\pi\, f0t + \frac{4}{3\cdot\pi}\cdot\sin 2\pi\,(3f0)t + \frac{4}{5\cdot\pi}\cdot\sin 2\pi\,(5f0)t + \ldots}$$

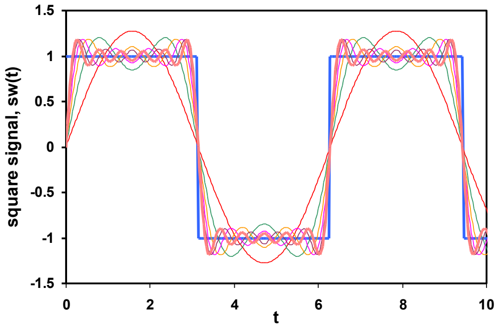
Programme en Python

```
def serieFourier (ordre, N) :
        R = np.zeros(N);
        t = np.linspace(0,((N-1)/N)*2*(np.pi),N);
        for i in range(N):
                x=t[i]
                # calcul de gj(x), avec j variant de 1 à ordre
                y = 0
                for k in range(1,ordre+1):
                        terme = (2*(1-(-1)**k)*np.sin(k*x))/(k*(np.pi));
                        y = y + terme;
                R[i]=y
        return R

sf = serieFourier(20, 1000)
plt.plot(sf)
```

Série de Fourier : synthèse

Reconstruction de signaux carrés à partir des termes spectraux

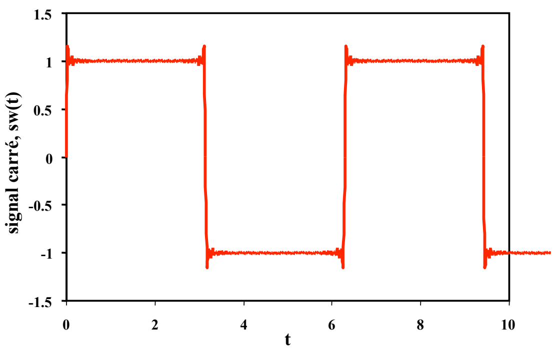


La convergence peut être lente (~1/k) – idéalement, suite infinie.
Pratiquement, série tronquée quand les résidus sont en dessous d'un seuil de tolérance.
(⇒ *erreur*). ***Mais*** … Phénomène de Gibbs'.

Phénomène de Gibbs

Overshoot @ chaque discontinuité

$$s_{79}(t) = \sum_{k=1}^{79}\left[b_k \cdot \sin(2\pi k t/T_0)\right]$$



- Découvert par Michelson, 1898. Expliqué par Gibbs.
- "overshoot" max (crête à crête) = 8.95% de l'amplitude de la discontinuité (souvent peu gênant car bien inférieur si k grand).

Séries de Fourier

- Conditions nécessaires et suffisante pour qu'un signal périodique puisse être décomposable en série de Fourier ?
- Conditions de Dirichlet

Séries de Fourier

Conditions de Dirichlet

Pour chaque période :

(a) s(t) continue par morceaux;

(b) s(t) monotone par morceaux;

(c) s(t) partout intégrable, $\int_0^T |s(t)|\, dt < \infty$

Séries de Fourier

Conditions de Dirichlet

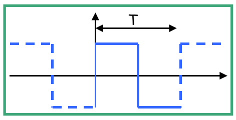
Pour chaque période :

(a) s(t) continue par morceaux;

(b) s(t) monotone par morceaux;

(c) s(t) partout intégrable, $\int_0^T |s(t)|\, dt < \infty$

Exemple: signaux carrés



Séries de Fourier

Conditions de Dirichlet

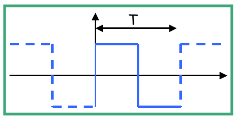
Pour chaque période :

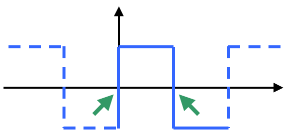
(a) s(t) continue par morceaux;

(b) s(t) monotone par morceaux;

(c) s(t) partout intégrable, $\int_0^T |s(t)|\, dt < \infty$

Exemple: signaux carrés





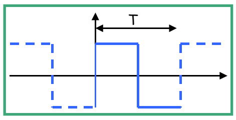
(a) ☑

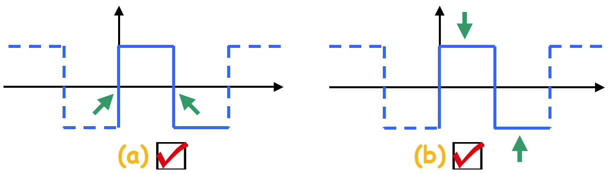
Séries de Fourier

Conditions de Dirichlet

Pour chaque période :
- (a) s(t) continue par morceaux;
- (b) s(t) monotone par morceaux;
- (c) s(t) partout intégrable, $\int_0^T |s(t)|\, dt < \infty$

Exemple: signaux carrés



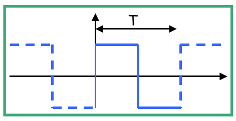


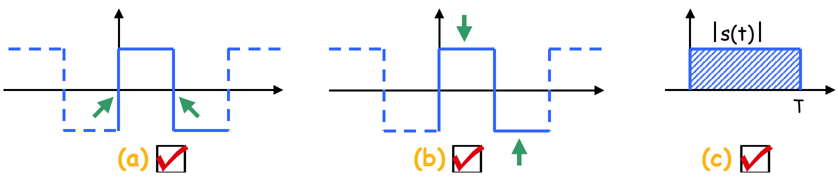
Séries de Fourier

Conditions de Dirichlet

Pour chaque période :
- (a) s(t) continue par morceaux;
- (b) s(t) monotone par morceaux;
- (c) s(t) partout intégrable, $\int_0^T |s(t)|\, dt < \infty$

Exemple: signaux carrés





Séries de Fourier (résumé)

Une fonction <u>périodique</u> s(t) qui satisfait les conditions de Dirichlet peut être représentée sous la forme d'une série de Fourier, avec des termes reliés d'un point de vue harmonique (termes sinus/cosinus) .

synthèse

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)]$$

Pour tout t

a_0, a_k, b_k : coefficients de Fourier.
k: nombre harmonique (indice),
T: période, $\omega = 2\pi/T$

analyse

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t)dt$$

Moyenne du signal, composante continue de fréquence 0

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \cos(k\omega t)dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \sin(k\omega t)dt$$

Note: $\{1/T, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t)\}_k$ forme une base orthogonale de l'espace vectoriel des fonctions périodiques.

Série de Fourier discrète - Analyse

- On obtient :

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n].\cos(\frac{2\pi kn}{N})$$

$$b[k] = \sum_{k=0}^{N-1} s[n]\sin(\frac{2\pi kn}{N})$$

$$c[k] = a[k] - j.b[k]$$

- Ou encore :

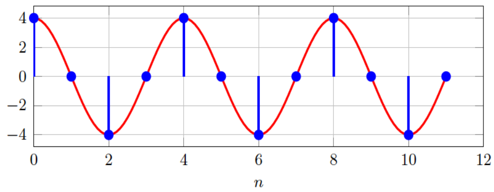
$$\boxed{c[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n].e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}}$$

32

Exemple

- Soit un signal continu : $x(t) = 4 \cos(100.\pi.t)$, échantillonné à 2 fois la fréquence de Nyquist-Shannon, pour 3 périodes.

$F = 50Hz$, $f_N = 100Hz$, donc $f_s = 200Hz$

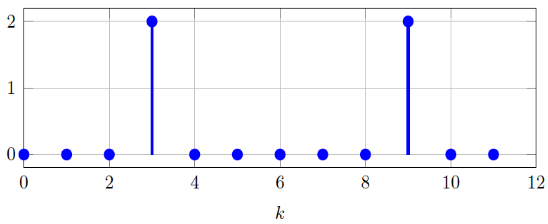


Le signal échantillonné est x[n] = {4,0,-4,0,4,0,-4,0,4,0,-4,0}

33

Exemple (2)

- On applique l'équation de la SFD pour calculer le spectre.



Cependant, on a 2 pics dans le spectre, alors qu'il n'y a qu'un seul cosinus.

34

Exemple (3)

- On a un pic à k=3 et k=9

  F = f/fs = 50/200 = 3/12 = k/N

  (fs-f)/fs = 150/200 = (12-3)/12 = 9/12

- Est-ce que ça implique qu'on a 2 cosinus dans le signal ?
  - Il faut considérer la composante négative :

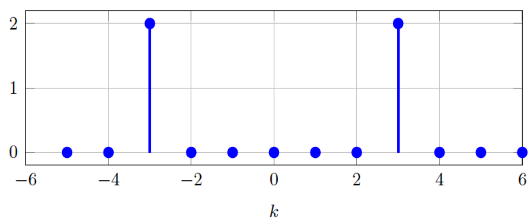
    $2\cos(-2.\pi.50.t) + 2\cos(2.\pi.50.t) = 4\cos(2.\pi.50.t)$

- La SFD a la propriété d'être symétrique conjugué :

  $X[k] = X^*[N-k]$

Exemple (4)

- On réarrange l'abscisse pour identifier les composantes négatives



- Les pics sont à k=-3 et k=3, qui sont donc à la même fréquence

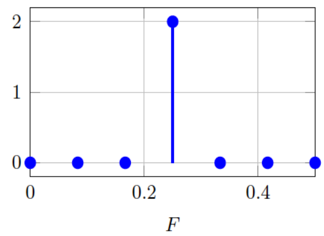
Exemple (5)

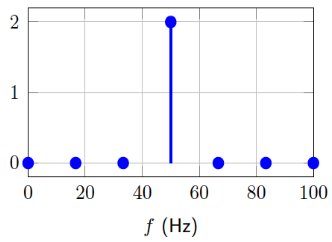
- Les points de N/2 + 1 à N-1 sont le conjugué des points de N/2 à 0
- Abscisse : n'a de sens que par rapport à la fréquence d'échantillonnage
  - Les points de k = 0 à N-1 peuvent être remplacés par F = k/N ; l'abscisse variera de 0 à 1
  - Les points de k = 0 à N-1 peuvent être remplacés par f = (k/N) f_s ; l'abscisse variera de 0 à f_s
  - On peut aussi représenter les fréquences de façon radiale : on multiplie par $2.\pi$.

37

Exemple (6)

- On peut retracer le spectre en fonction de *F* ou f_s.





- Le pic est bien à la bonne fréquence : 50Hz.

38

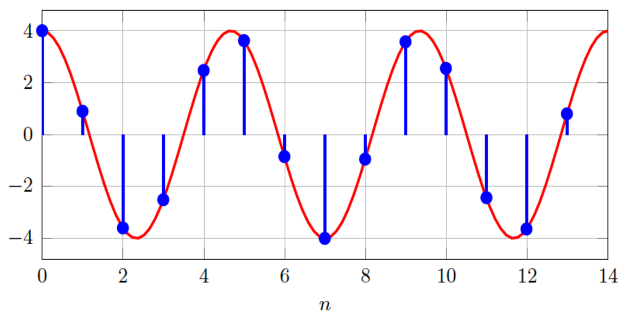
Problèmes de la série de Fourier discrète (SFD)

- On peut avoir des erreurs dans le spectre si l'échantillonnage n'est pas fait correctement.
- Il y a des erreurs si on n'échantillonne pas pour un nombre entier de points par période.
- Reprenons l'exemple précédent, mais cette fois on échantillonne à 240Hz au lieu de 200Hz.

39

Problèmes de la série de Fourier discrète (SFD)

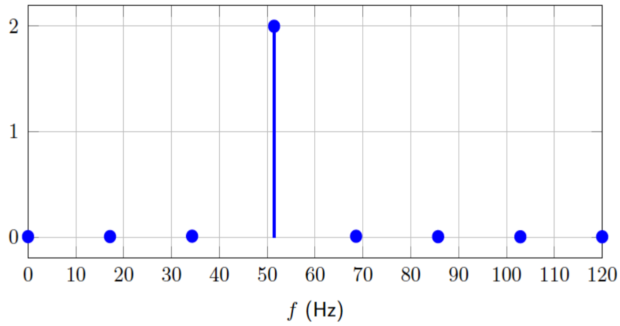
- On échantillonne à 240Hz : on a 240/50 = 4.8 échantillons par période.



40

Problèmes de la série de Fourier discrète (SFD)

- On calcule la SFD de ce signal



Il y a erreur dans la fréquence : c'est 51.5 Hz environ, erreur de 3%

41

Problèmes de la série de Fourier discrète (SFD)

- On peut comprendre ce phénomène en considérant que de 0 à 120 Hz, il y a 8 points. L'intervalle de 0 à 120 Hz est divisé en 7 : 17.14 Hz par pas.
- Le point le plus près de 50 Hz est 3 x 17.14, soit 51.4 Hz.
- Dans ce cas, on n'a pas assez de points pour représenter correctement le 50 Hz.
- L'intervalle entre les points est appelé l'espacement spectral.

42

Fuite spectrale

- Si on n'échantillonne pas un signal par un nombre entier de points par période, il y aura une erreur dans les coefficients de la série de Fourier.
- On appelle ce phénomène *la fuite spectrale*.
- La série de Fourier discrète calculée donnera des fréquences autres que celles dans le signal (mais quand même près de la vraie valeur).

43

Effets de la fuite spectrale

- La fuite spectrale est présente si on n'échantillonne pas pour un nombre entier de points par période.
- La transformée de Fourier aura des composantes non nulles à des fréquences autres que celles du signal.
- Il peut aussi y avoir du repliement si le signal continu contient des harmoniques de fréquence plus élevée que la fréquence d'échantillonnage.

44

Comment minimiser la fuite spectrale

- On peut minimiser les effets de la fuite spectrale si on échantillonne à une fréquence plus élevée que la fréquence de Nyquist-Shannon.

- De façon pratique, pour avoir une erreur plus petite que 5% dans les M premières harmoniques, il faut échantillonner à $f_s = 8f_M$, où f_M est la fréquence de la $M^{ième}$ harmonique.

45

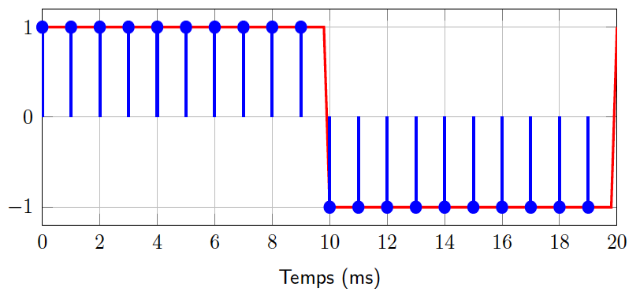
Comment minimiser la fuite spectrale

- On devrait idéalement échantillonner pour un nombre entier de points par période.
- Pratiquement, ceci est rarement possible, car on ne connait pas a priori les fréquences d'un signal.
- On doit réduire l'espacement spectral.

46

Exemple

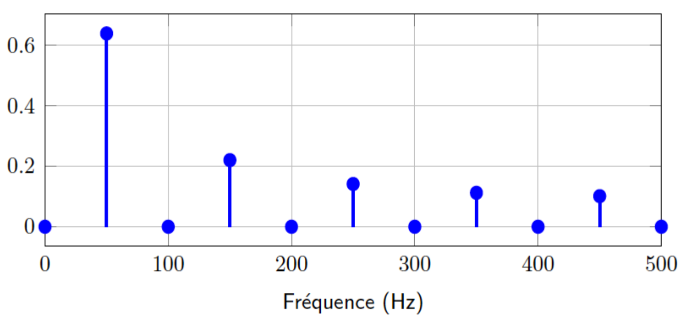
- Soit une onde carrée de 50 Hz échantillonnée à 1 kHz : 20 échantillons par période



47

Exemple (2)

- Le spectre :



48

Exemple (3)

- On compare les coefficients de la série de Fourier à ceux de la SFD :

	$\lvert C(k)\rvert$	$\lvert X[k]\rvert$	Erreur
DC	0	0	0
Fondamentale	0.6366	0.6346	0.3%
2^e harmonique	0	0	0
3^e harmonique	0.212	0.206	2.9%
4^e harmonique	0	0	0
5^e harmonique	0.1273	0.1169	8.2%

La fondamentale et la 3ème harmonique ont moins de 5% d'erreur.

49

Séries de Fourier (résumé)

Une fonction <u>périodique</u> s(t) qui satisfait les conditions de Dirichlet peut être représentée sous la forme d'une série de Fourier, avec des termes reliés d'un point de vue harmonique (termes sinus/cosinus) .

synthèse

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)\right]$$

Pour tout t

a_0, a_k, b_k : coefficients de Fourier.
k: nombre harmonique (indice),
T: période, $\omega = 2\pi/T = 2\pi F$
F : fréquence fondamentale

analyse

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,dt$$

Moyenne du signal, composante continue de fréquence 0

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \cos(k\omega t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \sin(k\omega t)\,dt$$

Note: $\{1/T, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t)\}_k$ forme une base orthogonale de l'espace vectoriel des fonctions périodiques.