Traitement Numérique des Données

M1 – INF 2163

AIDN: Applications Interactives et Données Numériques

Sylvie Gibet

1

Convolution

2

Convolution : définition

Convolution : définition

- Convolution en numérique :

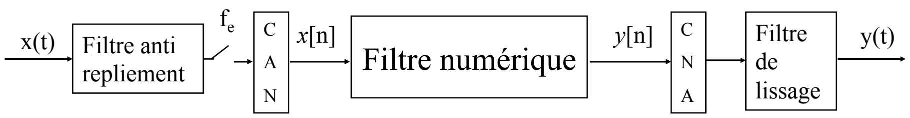
$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

Introduction au filtrage numérique

Filtrage numérique

- **Filtres numériques : branche la plus étudiée du traitement numérique des signaux**
- Développement des circuits intégrés numériques : réalisation directe des filtres numériques -> méthodes spécifiques pour la synthèse de filtres numériques
- On travaille sur des signaux physiques échantillonnés et numérisés. Si l'on note T_e la période d 'échantillonnage, les valeurs de la suite $\{x_n\}$ valent :

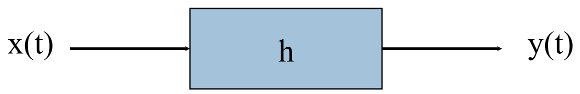
$$x[n] = x(nT_e)$$



Filtrage : définition

- **Réponse impulsionnelle d'un filtre**

  La réponse en régime permanent d'un filtre linéaire à une impulsion est la convolution de cette impulsion avec une fonction caractéristique du filtre appelée **réponse impulsionnelle**.



Soient h(t) la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire, et x(t) son entrée. La réponse y(t) du filtre à ce signal est donnée par :

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

7

Filtrage : pourquoi faire ?

- Filtrage :
  - rejeter la partie inutile du signal tout en conservant la partie porteuse de l'information utile
    - Partie inutile : hautes fréquences, basses fréquences, bande de fréquence
  - Amplifier une bande de fréquence
- Emission : mise en forme du signal pour l'adapter au canal de transmission
- Acquisition du signal :
  - éliminer au maximum le bruit qui perturbe le signal
  - une fois le signal filtré, extraire l'information utile

8

Fonctions possibles du filtrage

- **Atténuer** une ou plusieurs bandes de fréquences
  - **filtres passe-bas** quand on atténue les hautes fréquences
  - **filtres passe-haut** quand on atténue les basses fréquences
  - **filtres coupe-bande** quand on atténue une bande de fréquences
  - **filtres passe-bande** quand on favorise une bande de fréquences
- **Corriger la fonction de transfert** d'un canal qui introduit de la distorsion : le canal est dit dispersif et le filtre est appelé égaliseur

9

Représentation temporelle / fréquentielle

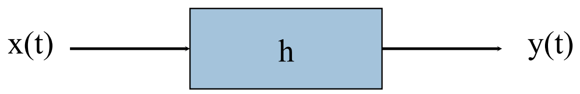
- **Représentation temporelle** : signal numérique de N points échantillonnés à la fréquence fs (2 échantillons temporels séparés de 1/fs)
  - Convolution !
- **Représentation fréquentielle** : transformée de Fourier discrète d 'un signal : signal à valeurs complexes de N points (2 échantillons fréquentiels séparés de fs/N)
  - Multiplication dans le domaine des fréquences !

10

Filtrage : représentation temporelle

- **Réponse impulsionnelle d'un filtre**

  La réponse en régime permanent d'un filtre linéaire à une impulsion est la convolution de cette impulsion avec une fonction caractéristique du filtre appelée **réponse impulsionnelle**.



Soient h(t) la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire, et x(t) son entrée. La réponse y(t) du filtre à ce signal est donnée par :

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

11

Représentation temporelle versus fréquentielle

- Temporel : Réponse impulsionnelle d'un filtre :

$$\mathbf{y(t) = h(t) * x(t)}$$

Si $x(t) = \delta(t)$: impulsion de Dirac, alors on a : $y(t) = h(t)$

La réponse impulsionnelle d'un filtre est sa réponse à l'impulsion de Dirac.

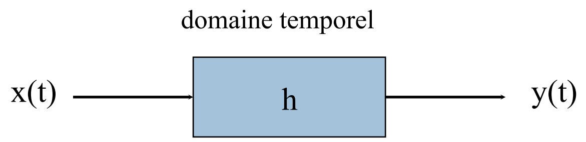
- Fréquentielle : réponse en fréquence : H(f)

$$\mathbf{Y(f) = H(f) \,.\, X(f)}$$

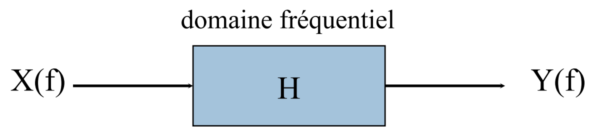
où H(f), X(f) et Y(f) sont les TF respectives de h(t), x(t) et y(t)

12

Filtrage : définition



$$y(t) = h(t) * x(t)$$



$$Y(f) = H(f) \,.\, X(f)$$

13

Réponse en fréquence: d'un signal ou d'un filtre

- Objectif : permet de voir son comportement en termes de fréquences.
- Dans de nombreux cas, la réponse en fréquence donne beaucoup plus d'informations sur la fonction d'un système que sa réponse impulsionnelle
- On dit aussi fonction de transfert du filtre
- Remarque : la réponse en fréquence d'un système est la TF de la réponse impulsionnelle

14

Convolution par la TFD

- Autre application de la TFD : convolution de deux signaux
- Dans le domaine temporel, on utilise la convolution pour calculer la sortie d'un système
- Dans le domaine fréquentiel, on fait la multiplication

$$x[n] * h[n] \Leftrightarrow X[k].\ H[k]$$

15

Convolution par la TFD

- Bien qu'il y ait des étapes supplémentaires, c'est plus rapide de passer par la TFD pour faire la convolution !
- Etapes : TFD de $x[n]$, TFD de $h[n]$, multiplication, transformée inverse

16

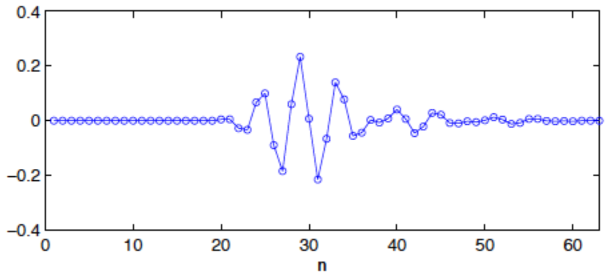
Convolution par la TFD

- Quelques problèmes
  - La longueur de la convolution n'est pas la même que la TFD
  - Pour un signal de longueur N et $h[n]$ de longueur M, la longueur de la convolution est : $N+M-1$
  - La longueur de la TFD est : N (si $N>M$)
  - Il manque des points : il faut donc ajouter des zéros aux signaux pour qu'ils soient de longueur $N+M-1$ avant de faire la TFD.

17

Réponse en fréquence

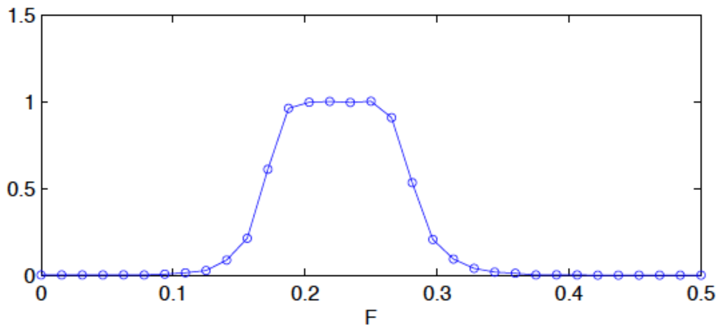
- Exemple : réponse impulsionnelle d'un système quelconque. Il est difficile de déterminer la fonction du système



18

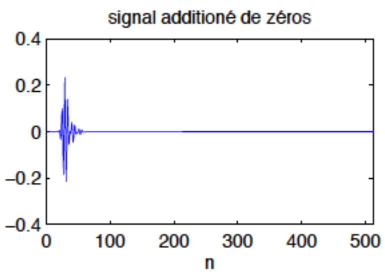
Réponse en fréquence

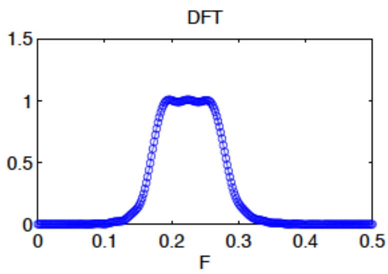
- Exemple : en faisant la TFD de ce signal, la fonction est plus claire : c'est un filtre passe-bande.



Réponse en fréquence

- Pour obtenir plus de résolution, on va effectuer la TFD avec plus de points. On ajoute des zéros à la fin du signal.





- On n'a pas augmenté la précision du spectre, seulement sa résolution

Définition des filtres – Résumé

- **Définition** des filtres numériques : un filtre numérique LTI associe à la suite d'entrée {x(n)} la suite de sortie {y(n)}.

$$\{x(n)\} \longrightarrow \boxed{\text{Filtre } \{h(n)\}} \longrightarrow \{y(n)\}$$

- **Un filtre linéaire à temps discret** réalise une **opération de convolution** entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du filtre :

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

- La suite h(n) qui caractérise le filtre, est sa réponse impulsionnelle

21

Définition des filtres – Convolution

$$\{x(n)\} \longrightarrow \boxed{\text{Filtre } \{h(n)\}} \longrightarrow \{y(n)\}$$

```
def filtrage_convolution(x,h):
    N = len(h)
    n = len(x)
    y = np.zeros(n)
    for n in range(N-1,n):
        accum = 0.0
        for k in range(N):
            accum += h[k]*x[n-k]
        y[n] = accum
    return y
```

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

22

Réponse en fréquence

- Fonction de transfert d'un filtre : $H(f) = |H(f)| \exp(j\Phi(f))$
  avec $|H(f)|$: gain, amplitude, ou module (TF de h(t))
  $\Phi(f)$: phase

  - $H(f) = |H(f)| (\cos(\Phi(f)) + j \sin(\Phi(f))$
  - $\mathrm{real}(H(f)) = |H(f)| (\cos(\Phi(f)))$
  - $\mathrm{imag}(H(f)) = |H(f)| (\sin(\Phi(f)))$
  - $\Phi(f) = \mathrm{atan}(\mathrm{real}(H(f)) / \mathrm{imag}(H(f)))$
  - Gain en dB (décibel) : $HdB(f) = 20\log_{10}(|H(f)|)$

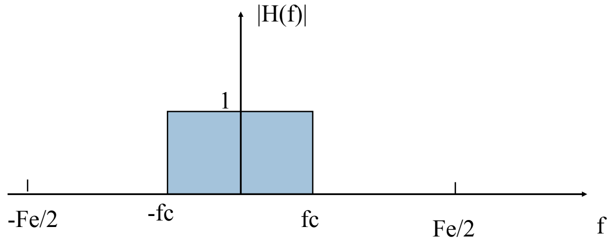
Filtres LTI (Linear Time Invariant)

Filtres linéaires et invariants dans le temps

- Les filtres LTI sont utilisés comme des fonctions d'atténuation ou d'amplification des composantes fréquentielles d'un signal d'entrée
- Ils sont classés suivant l'amplitude de leur réponse en fréquence |H(f)| : passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande.
- Autre caractéristique des filtres idéaux : réponse en phase linéaire dans la bande-passante (signal d'entrée retardé mais non déformé)

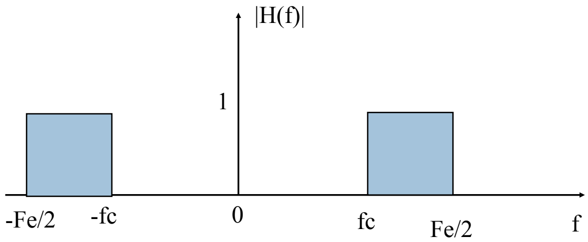
Types de filtres

- **Passe-bas**
  - il élimine les fréquences supérieures à la fréquence de coupure f_c du filtre.



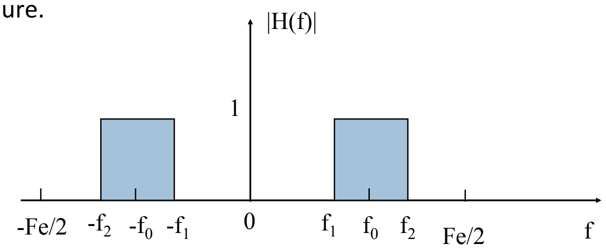
Types de filtres

- **Passe-haut**
  - il ne laisse passer que les fréquences supérieures à la fréquence de coupure f_c du filtre.



Types de filtres

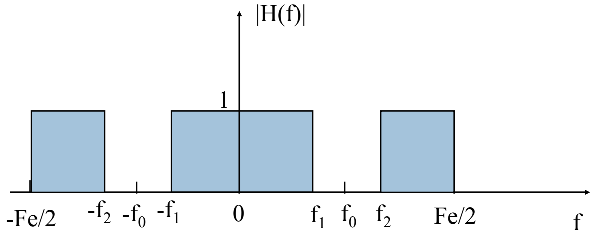
- **Passe-bande**
  - Pour ce type de filtre, il est nécessaire de définir une fréquence de coupure basse f_{c1} et une fréquence de coupure haute f_{c2} . Ce filtre conserve toutes les fréquences situées entre les deux fréquences de coupure.



27

Types de filtres

- **Coupe-bande**
  - ou réjecteur de bande ; c'est le filtre complémentaire du passe-bande. Il élimine les fréquences intermédiaires entre les fréquences de coupure basse et haute.



28

Types de filtres

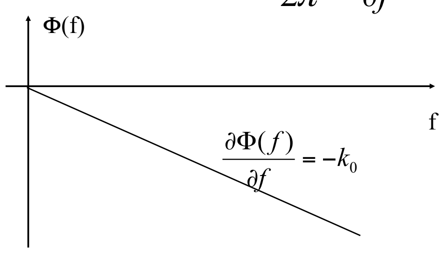
- **Passe-tout**
  - ou déphaseur pur ; ce filtre n'a pas pour vocation d 'éliminer telle ou telle composante fréquentielle. En effet, le gain fréquentiel de ce filtre est constant quelle que soit la fréquence. Par contre, il engendre un déphasage.

29

Phase : temps de propagation de groupe

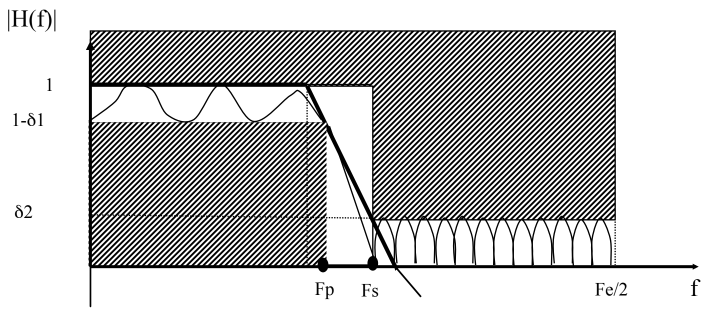
- Caractéristique de la phase (ou group delay) : mesure du retard introduit sur chaque composante spectrale par le filtrage.

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\Phi(f)}{\partial f}$$



30

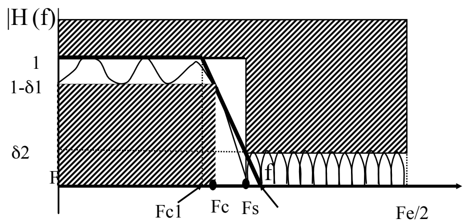
Gabarit d'un filtre LTI passe-bas



δ1 : ondulation dans la BP
δ2 : ondulation dans la BC
fréquence limite de la BP : F_p
fréquence limite de la BC : F_s

Gabarit d'un filtre LTI passe-bas

- Choix des paramètres Fc, Fs : déterminent la pente d'atténuation du filtre dans la bande de transition ; la valeur de cette pente fixe l'ordre du filtre, puisqu'elle vaut -20N dB/décade où N définit l'ordre du filtre



Propriétés importantes

Conditions pour la réalisation d'un filtre

- **Stabilité** : garantit que la réponse du filtre à un signal borné est aussi un signal borné

- **Causalité**
  - avant t=t0, il n'y a pas de réponse : h(t) = 0 si t<= t_0
  - réponse à partir de t_0 (instant d'excitation du filtre)

33

Propriétés importantes

Systèmes linéaires invariants dans le temps

- **Linéarité** : soit 2 suites x1(n) et x2(n) avec les sorties correspondantes y1(n) et y2(n). Dire que le système est linéaire signifie que :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R, \quad \lambda_1 x_1(n) + \lambda_2 x_2(n) \rightarrow \lambda_1 y_1(n) + \lambda_2 y_2(n)$$

34

Propriétés importantes

Invariance dans le temps

La réponse d'un filtre invariant à une excitation ne dépend pas de l 'instant où démarre cette excitation, mais seulement de l'entrée et du comportement du filtre.

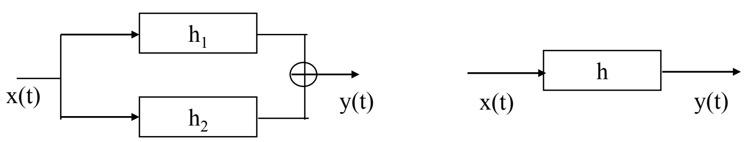
- Soit la suite x(n) et la sortie correspondante y(n). Dire que le système est invariant en temps signifie que :

à la suite $x(n-n_0)$ correspond la sortie $y(n-n_0)$ et ceci quelque soit n_0.

35

Composition des filtres linéaires

- **Addition : montage en parallèle**

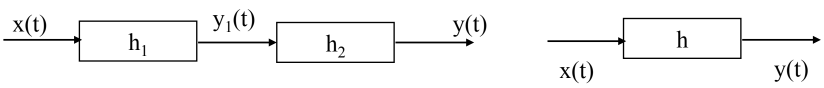


$$h(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t) = (h_1(t) + h_2(t)) * x(t)$$
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

36

Composition des filtres linéaires

- **Produit: montage en cascade**



$$y_1(t) = h_1(t) * x(t)$$
$$y(t) = h_2(t) * y_1(t) = h_2(t) * (h_1(t) * x(t)) = (h_2(t) * h_1(t)) * x(t)$$
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

37

Filtrage numérique

Théorie de l'échantillonnage

- Si $f_e > 2\ f_{max}$ (f_{max} fréquence maximale du signal x(t)),
- Avantages des filtres numériques
  - reproductibles sans réglage
  - programmables
  - ne dérivent, ni en temps, ni en température
  - facilement adaptatifs (et dans ce cas non invariables dans le temps)
  - permettent la réalisation de filtres à phase parfaitement linéaire
- Inconvénients des filtres numériques
  - Consommation
  - limitation en fréquence (fréquence des CAN et vitesse des opérateurs de calcul numérique comme les multiplieurs)

38