# Procesy stochastyczne

## Rafał Kozik gr. 2 Automatyka i Robotyka EAIiIB

## Zadanie 5.

Dane jest równanie rekurencyjne $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k$. Wiadomo, że $E[\mathbf{u}_k] = \overline{u}$, $R_u(k_1, k_2) = \sigma^2 I\delta(k_1 - k_2)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wyznacz i opisz własności $\mathbf{x}_k$.

## Rozwiązanie równania rekurencyjnego

Rozpisując wektor $\mathbf{x}_k$ jako:

$$\mathbf{x}_k = \left(\begin{smallmatrix} x_k \\ y_k \end{smallmatrix}\right) \tag{1}$$

można zapisać równanie rekurencyjne:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k + u_k \end{pmatrix} \tag{2}$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} u_i \end{pmatrix} \tag{3}$$

gdzie $x_0$ i $y_0$ są warunkami początkowymi.

## Wartość oczekiwana

$$E[\mathbf{x}_k] = E\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} u_i \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} E[x_0] \\ E[y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} u_i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} E[u_i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + k\overline{u} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ponieważ wartość oczekiwana zależy od czasu, więc analizowany proces nie jest stacjonarny.

## Macierz autokorelacji

$$R_x(k_1, k_2) = E[\mathbf{x}_{k_1}\mathbf{x}_{k_2}^T] = E\begin{pmatrix} x_{k_1}x_{k_2} & x_{k_1}y_{k_2} \\ y_{k_1}x_{k_2} & y_{k_2}y_{k_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(x_0^2) & E(x_0(y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k_2-1} u_i)) \\ E(x_0(y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k_1-1} u_i)) & E((y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k_1-1} u_i)(y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k_2-1} u_i)) \end{pmatrix} = \tag{5}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0(y_0 + k_2\overline{u}) \\ x_0(y_0 + k_1\overline{u}) & E((y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k_1-1} u_i)(y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k_2-1} u_i)) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Obliczenie wartości prawego dolnego elementu macierzy:

$$E\left(\left(y_0 + \sum_{i=0}^{k_1-1} u_i\right)\left(y_0 + \sum_{i=0}^{k_2-1} u_i\right)\right) = E\left(y_0^2\right) + E\left(y_0\sum_{i=0}^{k_1-1} u_i\right) + E\left(y_0\sum_{i=0}^{k_2-1} u_i\right) + E\left(\left(\sum_{i=0}^{k_1-1} u_i\right)\left(\sum_{i=0}^{k_2-1} u_i\right)\right) = \tag{7}$$

$$= y_0^2 + y_0(k_1 + k_2)\overline{u} + E\left(\left(\sum_{i=0}^{k_1-1} u_i\right)\left(\sum_{i=0}^{k_2-1} u_i\right)\right) \tag{8}$$

Z faktu, że prawy dolny element macierzy $R_u(k1, k2)$, czyli $E[u_{k_1}u_{k_2}]]$ jest równy $\sigma^2\delta(k_1 - k_2)$ wynika, że wartość oczekiwana z iloczynu dwóch zmiennych losowych jest różna od zera tylko wtedy, gdy $k_1 = k_2$, więc w wyrażeniu $\left(\sum\limits_{i=0}^{k_1-1} u_i\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{k_2-1} u_i\right)$ będzie tylko $\min(k_1, k_2)$ iloczynów których wartość oczekiwana jest różna od 0:

$$E\left(\left(\sum_{i=0}^{k_1-1} u_i\right)\left(\sum_{i=0}^{k_2-1} u_i\right)\right) = E\left(\sum_{i=0}^{\min(k_1,k_2)-1} u_i^2\right) = \sum_{i=0}^{\min(k_1,k_2)-1} E\left(u_i^2\right) = \sum_{i=0}^{\min(k_1,k_2)-1} \sigma^2 = \min(k_1, k_2)\sigma^2 \tag{9}$$

Więc

$$R_x(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0(y_0 + k_2\overline{u}) \\ x_0(y_0 + k_1\overline{u}) & y_0^2 + y_0(k_1 + k_2)\overline{u} + \min(k_1, k_2)\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

## Macierz autokowariancji

$$K_x(k_1,k_2) = R_x(k_1,k_2) - E\left(\mathbf{x}_{k_1}\right) E\left(\mathbf{x}_{k_2}\right)^T \tag{11}$$

$$E\left(\mathbf{x}_{k_1}\right) E\left(\mathbf{x}_{k_2}\right)^T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + k_1\overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + k_2\overline{u} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0\left(y_0 + k_2\overline{u}\right) \\ x_0\left(y_0 + k_1\overline{u}\right) & y_0^2 + y_0\overline{u}\left(k_1+k_2\right) + k_1k_2\overline{u} \end{pmatrix} \tag{12}$$

więc

$$K_x(k_1,k_2) = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0(y_0 + k_2\overline{u}) \\ x_0(y_0 + k_1\overline{u}) & y_0^2 + y_0(k_1+k_2)\overline{u} + \min(k_1,k_2)\sigma^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0\left(y_0 + k_2\overline{u}\right) \\ x_0\left(y_0 + k_1\overline{u}\right) & y_0^2 + y_0\overline{u}\left(k_1+k_2\right) + k_1k_2\overline{u} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$K_x(k_1,k_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \min\left(k_1,k_2\right)\sigma^2 - k_1k_2\overline{u} \end{pmatrix} \tag{14}$$

## Wariancja

$$V\left(\mathbf{x}_k\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ V\left(y_0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} u_i\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} u_i\right) \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$V\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i\right) = E\left(\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i\right)^2\right) - E^2\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i\right) = E\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i^2\right) + E\left(\sum_{i,j=0\ i\neq j}^{k-1} 2u_iu_j\right) - E^2\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i\right) \tag{16}$$

Jak było wspomniane wcześniej korzystając ze znanej macierzy $R_u$ można obliczyć:

$$E\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i^2\right) = k\sigma^2 \qquad E\left(\sum_{i,j=0\ i\neq j}^{k-1} 2u_iu_j\right) = 0 \tag{17}$$

więc

$$V\left(\mathbf{x}_k\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ k\sigma^2 - k^2\overline{u}^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$