

Procesy stochastyczne

Rafał Kozik gr. 2 Automatyka i Robotyka EAIiB

Zadanie 5.

Dane jest równanie rekurencyjne $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k$. Wiadomo, że $E[\mathbf{u}_k] = \bar{u}$, $R_u(k_1, k_2) = \sigma^2 I \delta(k_1 - k_2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wyznacz i opisz własności \mathbf{x}_k .

Rozwiązanie równania rekurencyjnego

Rozpisując wektor \mathbf{x}_k jako:

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad (1)$$

można zapisać równanie rekurencyjne:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k + u_k \end{pmatrix} \quad (2)$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} u_i \end{pmatrix} \quad (3)$$

gdzie x_0 i y_0 są warunkami początkowymi.

Wartość oczekiwana

$$E[\mathbf{x}_k] = E \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} u_i \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} E[x_0] \\ E[y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} u_i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} E[u_i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + k\bar{u} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Macierz

$$R_x(k_1, k_2) = E[\mathbf{x}_{k_1} \mathbf{x}_{k_2}^T] = E \begin{pmatrix} x_{k_1} x_{k_2} & x_{k_1} y_{k_2} \\ y_{k_1} x_{k_2} & y_{k_1} y_{k_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(x_0^2) & E(x_0(y_0 + \sum_{i=0}^{k_2-1} u_i)) \\ E(x_0(y_0 + \sum_{i=0}^{k_1-1} u_i)) & E((y_0 + \sum_{i=0}^{k_1-1} u_i)(y_0 + \sum_{i=0}^{k_2-1} u_i)) \end{pmatrix} = \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0(y_0 + k_2\bar{u}) \\ x_0(y_0 + k_1\bar{u}) & E((y_0 + \sum_{i=0}^{k_1-1} u_i)(y_0 + \sum_{i=0}^{k_2-1} u_i)) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Obliczenie wartości prawego dolnego elementu macierzy:

$$E \left(\left(y_0 + \sum_{i=0}^{k_1-1} u_i \right) \left(y_0 + \sum_{i=0}^{k_2-1} u_i \right) \right) = E(y_0^2) + E \left(y_0 \sum_{i=0}^{k_1-1} u_i \right) + E \left(y_0 \sum_{i=0}^{k_2-1} u_i \right) + E \left(\left(\sum_{i=0}^{k_1-1} u_i \right) \left(\sum_{i=0}^{k_2-1} u_i \right) \right) = \quad (7)$$

$$= y_0^2 + y_0(k_1 + k_2)\bar{u} + E \left(\left(\sum_{i=0}^{k_1-1} u_i \right) \left(\sum_{i=0}^{k_2-1} u_i \right) \right) \quad (8)$$

Z faktu, że prawy dolny element macierzy $R_u(k_1, k_2)$, czyli $E[u_{k_1} u_{k_2}]$ jest równy $\sigma^2 \delta(k_1 - k_2)$ wynika, że wartość oczekiwana z iloczynu dwóch zmiennych losowych jest różna od zera tylko wtedy, gdy $k_1 = k_2$, więc w wyrażeniu $\left(\sum_{i=0}^{k_1-1} u_i \right) \left(\sum_{i=0}^{k_2-1} u_i \right)$ będzie tylko $\min(k_1, k_2)$ iloczynów których wartość oczekiwana jest różna od 0:

$$E \left(\left(\sum_{i=0}^{k_1-1} u_i \right) \left(\sum_{i=0}^{k_2-1} u_i \right) \right) = E \left(\sum_{i=0}^{\min(k_1, k_2)-1} u_i^2 \right) = \sum_{i=0}^{\min(k_1, k_2)-1} E(u_i^2) = \sum_{i=0}^{\min(k_1, k_2)-1} \sigma^2 = \min(k_1, k_2) \sigma^2 \quad (9)$$

Więc

$$R_x(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0(y_0 + k_2\bar{u}) \\ x_0(y_0 + k_1\bar{u}) & y_0^2 + y_0(k_1 + k_2)\bar{u} + \min(k_1, k_2)\sigma^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Macierz

$$K_x(k_1, k_2) = R_x(k_1, k_2) - E(\mathbf{x}_{k_1}) E(\mathbf{x}_{k_2})^T \quad (11)$$

$$E(\mathbf{x}_{k_1}) E(\mathbf{x}_{k_2})^T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + k_1 \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + k_2 \bar{u} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0(y_0 + k_2 \bar{u}) \\ x_0(y_0 + k_1 \bar{u}) & y_0^2 + y_0 \bar{u}(k_1 + k_2) + k_1 k_2 \bar{u} \end{pmatrix} \quad (12)$$

wiec

$$K_x(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0(y_0 + k_2 \bar{u}) \\ x_0(y_0 + k_1 \bar{u}) & y_0^2 + y_0 \bar{u}(k_1 + k_2) + \min(k_1, k_2) \sigma^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0(y_0 + k_2 \bar{u}) \\ x_0(y_0 + k_1 \bar{u}) & y_0^2 + y_0 \bar{u}(k_1 + k_2) + k_1 k_2 \bar{u} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$K_x(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \min(k_1, k_2) \sigma^2 - k_1 k_2 \bar{u} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Wariancia

$$V(\mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ V\left(y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} u_i\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i\right) \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$V\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i\right) = E\left(\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i\right)^2\right) - E\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i^2\right) + E\left(\sum_{i,j=0}^{k-1} 2u_i u_j\right) - E^2\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i\right) \quad (16)$$

Jak było wspomniane wcześniej korzystając ze znanej macierzy R_u można obliczyć:

$$E\left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i^2\right) = k\sigma^2 \quad E\left(\sum_{i,j=0}^{k-1} 2u_i u_j\right) = 0 \quad (17)$$

więc

$$V(\mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ k\sigma^2 - k^2 \bar{u}^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$