

Цифровые фильтры

Лабораторная работа по курсу «Системы цифровой обработки сигналов»

1. Цель лабораторной работы

Цель лабораторной работы – исследование частотных и импульсных характеристик нескольких типичных схем цифровых фильтров, изучение их зависимости от коэффициентов фильтра, формирование представлений о связи амплитудно-частотной, импульсной и передаточных характеристик цифрового фильтра.

2. Теоретические сведения

Линейные цифровые фильтры

Линейный цифровой фильтр – это дискретная система (физическое устройство или программа для ЭВМ), которая преобразует последовательность $\{x_k\}$ числовых отсчетов входного сигнала в последовательность $\{y_k\}$ отсчетов выходного сигнала:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \rightarrow (y_0, y_1, y_2, \dots)$$

или, сокращенно:

$$\{x_k\} \rightarrow \{y_k\}$$

Линейный цифровой фильтр обладает тем свойством, что сумма любого числа входных сигналов, умноженных на произвольные коэффициенты, преобразуется в сумму его откликов на отдельные слагаемые, т.е. из соответствий:

$$\{x_k^{(1)}\} \rightarrow \{y_k^{(1)}\} \dots \dots \{x_k^{(N)}\} \rightarrow \{y_k^{(N)}\}$$

следует, что

$$\alpha_1 \{x_k^{(1)}\} + \dots + \alpha_N \{x_k^{(N)}\} \rightarrow \{\alpha_1 y_k^{(1)} + \dots + \alpha_N y_k^{(N)}\} \quad (1)$$

При любых коэффициентах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$.

Работа линейного цифрового фильтра описывается разностным уравнением:

$$y_n = \sum_{j=1}^M b_j y_{n-j} + \sum_{l=0}^N a_l x_{n-l}, \quad (2)$$

где a_l, b_j – коэффициенты, зависящие только от номера.

Системная функция

Системная или передаточная функция $H(z)$ – это отношение z-образов выходного $Y(z)$ и входного $X(z)$ сигналов фильтра при нулевых начальных условиях:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (3)$$

Применив z-преобразование к (2), получим:

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^N a_l z^{-l}}{1 + \sum_{j=1}^M b_j z^{-j}}. \quad (4)$$

В анализе цифровых фильтров системная функция имеет такое же значение, как частотные характеристики при анализе аналоговых фильтров. Системная функция определяется только коэффициентами фильтра и не зависит от входного сигнала. Зная системную функцию и входной сигнал, можно найти выходной сигнал фильтра.

Положения полюсов системной функции на комплексной плоскости используется при оценке устойчивости фильтра: фильтр устойчив, если полюса (точки z , при которых знаменатель равен нулю) лежат внутри круга единичного радиуса, т.е. $|z| < 1$.

Частотные характеристики

Частотные характеристики цифрового фильтра получаются из системной функцией подстановкой $z = \exp(i\omega\Delta t)$

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^N a_l e^{-li\omega\Delta t}}{1 + \sum_{j=1}^M b_j e^{-ji\omega\Delta t}}. \quad (5)$$

Частотная характеристика цифрового фильтра – периодическая функция частоты с периодом Δt , соответствующим частоте дискретизации $1/f_d$. Использование для анализа цифровых фильтров частотной характеристики позволяет установить необходимые соответствия с частотными характеристиками аналоговых прототипов.

Анализ обработки сигналов в частотной области более привычен для радиоинженеров, чем применение z-преобразования.

Импульсная характеристика

Импульсная характеристика h_n представляет собой реакцию фильтра при нулевых начальных условиях на входное воздействие:

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0 \\ 0, & \text{при } n \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Учитывая, что z-преобразование δ -функции равно 1, получим связь системной функции с импульсной характеристикой через прямое и обратное z-преобразование

$$\begin{aligned} h_n &= Z^{-1}\{H(z)\}, \\ H(z) &= Z\{h_n\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Зная импульсную характеристику, можно рассчитать принудительных начальных условиях выходной сигнал фильтра по заданному входному сигналу. Выходной сигнал представляет собой линейную свертку последовательностей x_n и h_n , причем эти последовательности могут быть как конечными, так и бесконечными:

$$y_n = \sum_{l=0} h_l x_{n-l}, \quad (8)$$

Где верхний предел суммирования определяется длиной импульсной характеристики.

Импульсная характеристика обычно имеет вид затухающей функции. Время затухания импульсной характеристики обратно пропорционально ширине полосы пропускания фильтра. Время затухания до некоторого заданного уровня, например, в $e = 2,71$ раз, называется *постоянной времени фильтра*.

Импульсная характеристика резонансных фильтров, кроме затухания, имеет колебательный характер, причем частота колебаний соответствует резонансной частоте фильтра. Фильтр верхних частот в цифровой технике вследствие свойства периодичности частотных характеристик эквивалентен полосовому или резонансному фильтру с частотой $\omega\Delta t = \pi$. Этот фильтр имеет максимальную частоту колебаний импульсной характеристики $f = \frac{1}{2\Delta t}$.

3. Основные схемы цифровых фильтров

Трансверсальный фильтр

Трансверсальными называют фильтры, построенные по обобщенной схеме, приведенной на рис. 1, выходной сигнал которой соответствует уравнению:

$$y_k = a_0x_k + a_1x_{k-1} + a_2x_{k-2} + \dots + a_Nx_{k-N} = \sum_{l=0}^N a_lx_{k-l}. \quad (9)$$

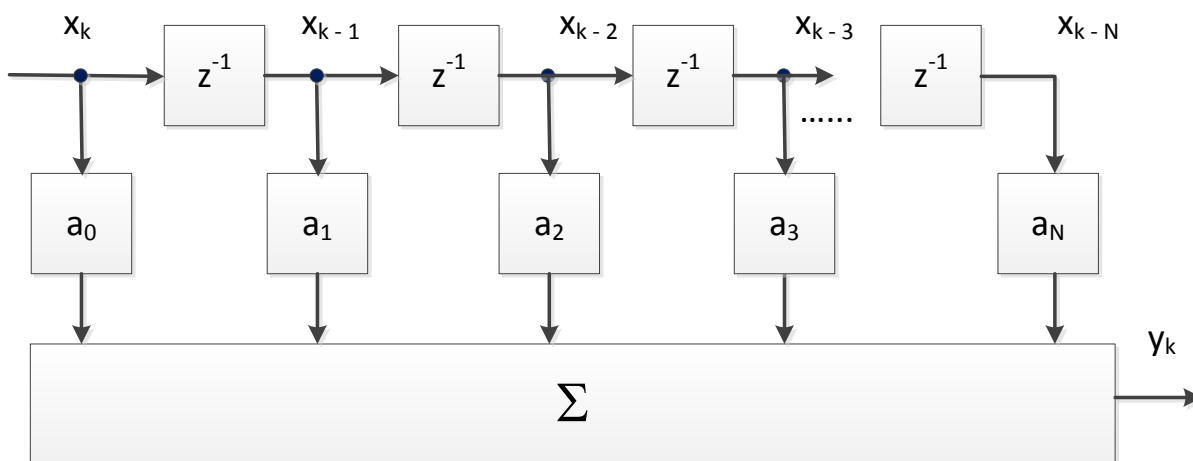


Рис. 1. Структурная схема трансверсального фильтра

У трансверсальных фильтров отсутствует обратная связь, т. е. все b – коэффициенты равны нулю, эти фильтры всегда устойчивы. Они имеют конечную импульсную характеристику (КИХ), длительность которой равна $(N + 1)$ отсчету.

Применив к уравнению (9) z -преобразование, получим:

$$Y(z) = a_0X(z) + a_1z^{-1}X(z) + \dots + a_Nz^{-N}X(z) = A(z)X(z), \quad (10)$$

где $A(z)$ – z -образ последовательности коэффициентов $\{a_k\}$.

Из уравнения (10) следует, что системная функция трансверсального фильтра равна

$$H(z) = a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N} = A(z), \quad (11)$$

а импульсная характеристика *совпадает* с последовательностью коэффициентов $\{h_k\} = \{a_k\}$.

Рекурсивный фильтр

Рекурсивными называют фильтры, имеющие обратную связь, т.е. использующие предыдущие выходные отсчеты для получения новых отсчетов (рекурсия). У этих фильтров как минимум один b – коэффициент должен быть отличен от нуля. Если не учитывать эффектов квантования чисел по уровню, то рекурсивные фильтры имеют бесконечные импульсные характеристики (БИХ). Рекурсивные фильтры могут быть неустойчивыми, необходимо проверять положение полюсов системной функции в соответствии с критерием устойчивости.

Структурная схема цифрового рекурсивного фильтра, построенная непосредственно по выражению (4), приведена на рис. 2.

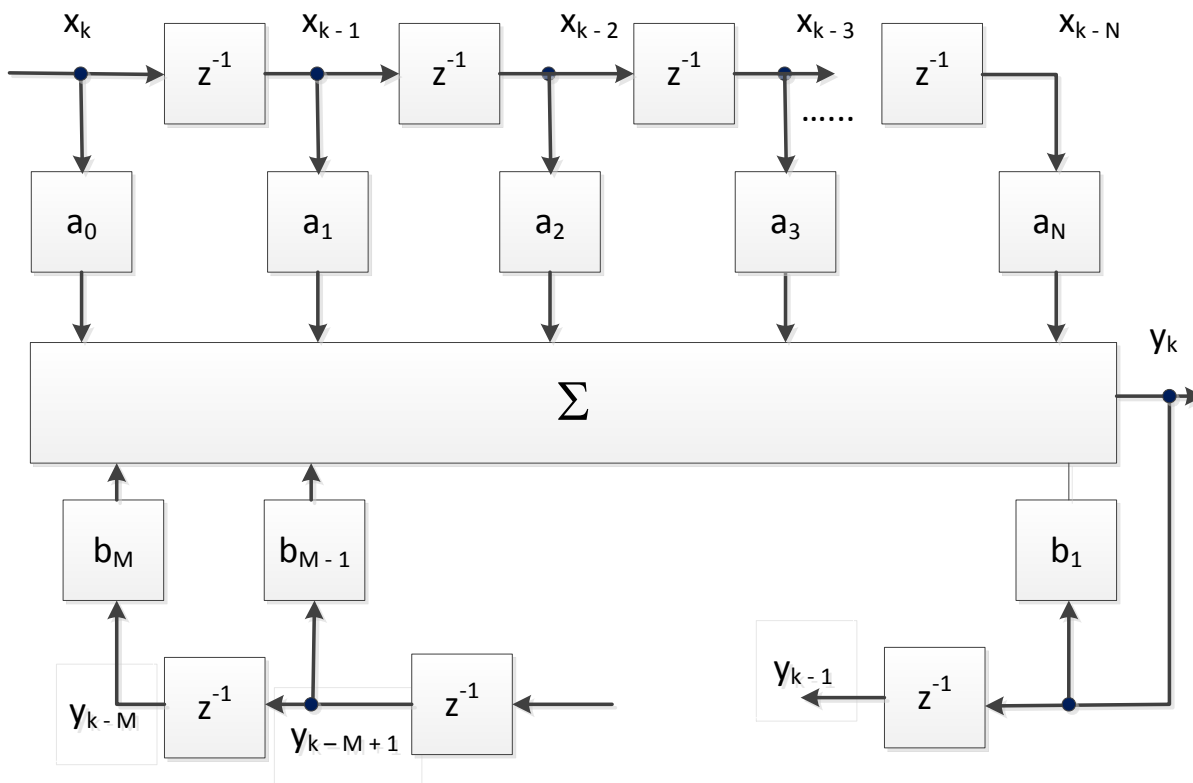


Рис. 2. Структурная схема цифрового рекурсивного фильтра

В отличие от схемы трансверсального фильтра (рис. 1), в ней присутствует схема обратной связи, соответствующая знаменателю (4).

Каноническая схема построения фильтров

В целях экономии памяти цифровые рекурсивные фильтры строят по канонической схеме (см. рис. 3), в которой используется минимально возможное количество ячеек памяти, соответствующее наибольшему из чисел M, N .

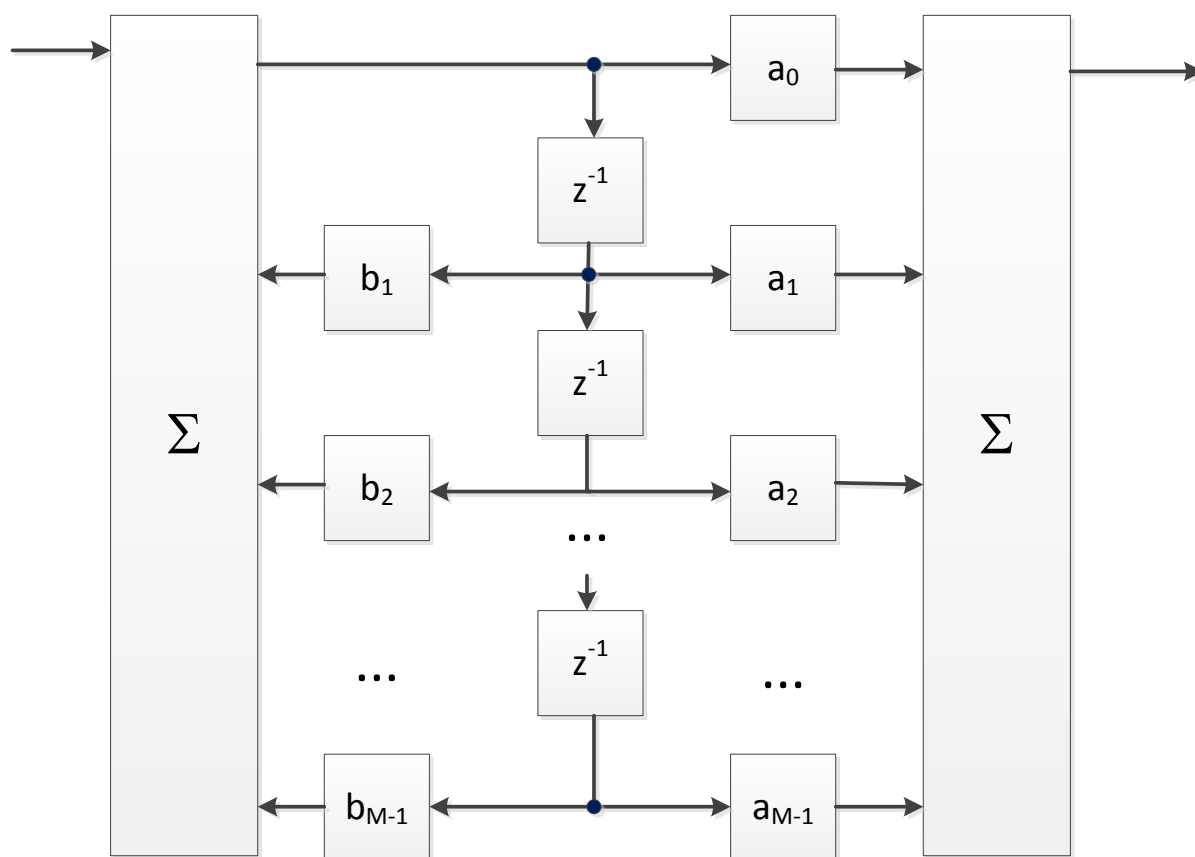


Рис.3. Каноническая схема фильтра

Сравните со схемой, приведенной на рис.2, она требует $(N + M)$ ячеек памяти для хранения входных и выходных сигналов.

4. Примеры фильтров

Трансверсальный фильтр второго порядка

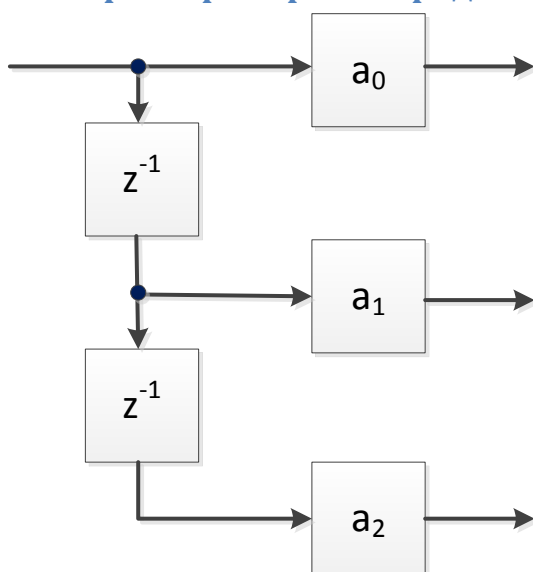


Рис.4. Структура трансверсального фильтра второго порядка.

Передаточная функция:

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = a_0 \frac{z^2 + \frac{a_1}{a_0} z + a_2/a_0}{z^2} \quad (12)$$

Функция имеет нули в точках

$$z_{0\ 1,2} = -\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^2 - \frac{a_2}{a_0}} \quad (13)$$

Особый интерес представляют случаи

$$a_0 = a_2 = 1 \text{ и } |a_1| < 2$$

Когда

$$z_{0\ 1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4}} \quad (14)$$

Модуль этого выражения равен 1, комплексно сопряженные нули лежат на окружности единичного радиуса. В частности, при $a_1 = -2$ двукратный нуль лежит в точке $z = (1,0)$ комплексной плоскости $(Re(z); Im(z))$. Этот случай соответствует широко распространенному в практике режекторному фильтру второго порядка с бесконечно большим затуханием на частоте $\omega = 0$, в которой $e^{i\omega\Delta} = 1$.

Амплитудно-частотная характеристика такого фильтра

$$H(j\omega) = 4 \sin^2 \frac{\omega\Delta}{2} \quad (15)$$

Изменением коэффициента a_1 можно перемещать нули по окружности единичного радиуса на z -плоскости, что равносильно перемещению нуля по оси частот.

Рекурсивный фильтр первого порядка

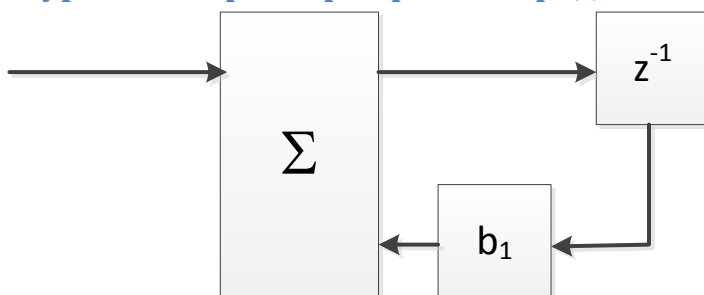


Рис.5. Структура рекурсивного фильтра

первого порядка

Передаточная функция

$$H(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1}} = \frac{z}{z - b_1} \quad (16)$$

Имеет нуль в точке $z = (0; 0)$ и полюс в точке $z = (b_1; 0)$

Каноническая схема рекурсивного фильтра второго порядка

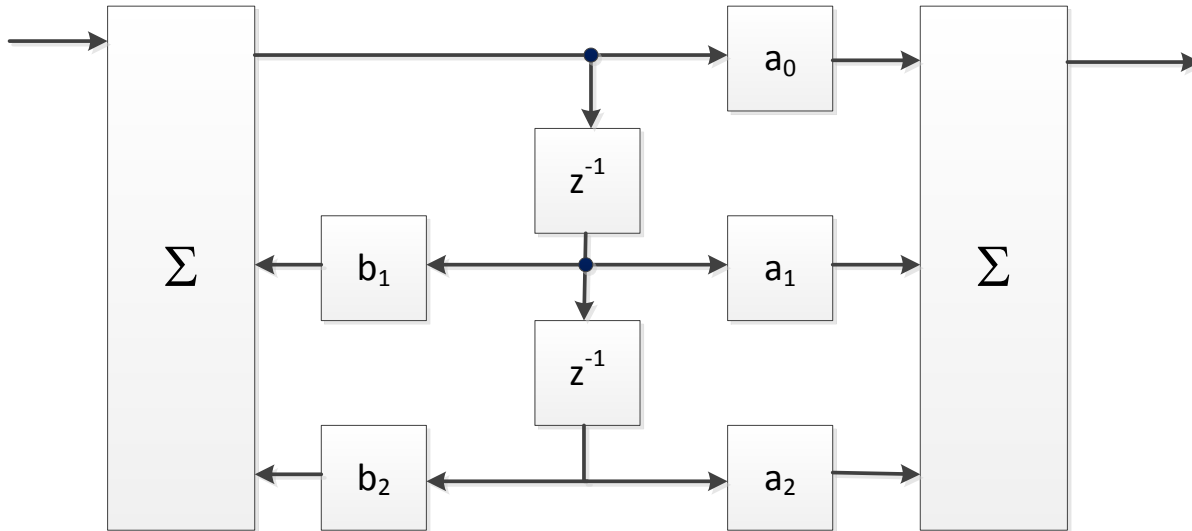


Рис.6. Каноническая структурная схема рекурсивного фильтра второго порядка

Системная функция:

$$H(z) = a_0 \frac{z^2 + \frac{a_1}{a_0}z + a_2/a_0}{z^2 - b_1z - b_2} \quad (17)$$

Нули системной функции определяются выражением (13), два полюса – формулой

$$z_{p1,2} = b_1 \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} \quad (18)$$

Рассмотрим случай $a_1 = a_2 = 0$, когда нули передаточной функции имеются только в точке $z = 0$. При $b_2 < 0$ и, кроме того, $|b_2| > b_1^2/4$ полюса z_{p1}, z_{p2} – комплексно-сопряженные числа, в этом случае

$$b_1 = 2\text{Re}(z_{p1,2}); \quad b_2 = -|z_{p1,2}|^2$$

Представив $z_{p1,2}$ в форме

$$z_{p1,2} = |z_{p1,2}|e^{\pm i\omega_p \Delta t} = \rho e^{\pm i\phi_p}, \quad (19)$$

где ρ и ϕ_p – радиус и азимут полюса, получим частотную характеристику в виде:

$$|H(i\omega \Delta t)| = 1/\sqrt{1 + 2\rho^2 \cos 2\omega \Delta t + \rho^4}. \quad (20)$$

С приближением ρ к 1 фильтр приближается к резонатору с весьма высокой добротностью, причем азимут полюса соответствует резонансной частоте. При $\rho \geq 1$ теряется устойчивость фильтра.

Фильтр с передаточной функцией общего вида ($a_{1,2} \neq 0$) можно рассматривать как последовательное соединение фильтра резонансного типа и трансверсального фильтра второго порядка. Такое сочетание можно использовать для выравнивания частотной характеристики в полосе прозрачности фильтра.

5. Описание лабораторной работы

Написать программы:

- ❖ трансверсального фильтра второго порядка
- ❖ рекурсивного фильтра первого порядка
- ❖ рекурсивного цифрового фильтра второго порядка
- ❖ нарисовать картину расположения нулей и полюсов на комплексной плоскости для всех вариантов, показать окружность единичного радиуса
- ❖ нарисовать амплитудно-частотную и импульсные характеристики фильтров

Менять коэффициенты фильтров в соответствии с планом исследований, изложенном в следующем разделе.

6. Исследование фильтров

Исследование характеристик трансверсального фильтра

- 1) Установите значение $a_2 = a_0 \left(\frac{a_2}{a_0} = 1 \right)$. Изменяя значение $\frac{a_1}{a_0}$ в пределах от -2 до 2 , наблюдайте изменение характеристик фильтра.
- ❖ Обратите внимание, как изменяется положение нулей на комплексной плоскости и как это положение связано с нулем амплитудно-частотной характеристики.
- ❖ При каких значениях $\frac{a_2}{a_0}$ фильтр будет фильтром верхних частот, а при каких – фильтром нижних частот?
- ❖ Какова длительность импульсной характеристики?
- ❖ Чем отличаются импульсные характеристики ФНЧ и ФВЧ?
- 2) Зарисуйте качественно несколько частотных, импульсных характеристик и положение нулей и полюсов системной функции.
- 3) Постройте график зависимости нуля частотной характеристики от a_1

Исследование характеристик рекурсивного фильтра первого порядка

- ❖ Изменяя значение b_1 от 0 до 1 , обратите внимание на изменение положения полюса передаточной функции, и как при этом изменяется полоса пропускания фильтра. Как связана ширина полосы пропускания фильтра и скорость затухания импульсной характеристики?
- ❖ Установите отрицательное значение коэффициента $-1 \leq b_1 \leq 0$. Как изменилась импульсная и частотная характеристика? Какой фильтр (ФНЧ или ФВЧ) при этом получен?
- ❖ Установите $b_1 > 1$. Какой вид имеет импульсная характеристика? С каким явлением это связано?
- 1) Зарисуйте качественно несколько частотных, импульсных характеристик и положение нулей и полюсов системной функции.
- 2) Постройте графики зависимости ширины полосы пропускания и постоянной времени фильтра от b_1 .

Исследование характеристик рекурсивного фильтра второго порядка

- 1) Установите значения коэффициентов $a_1 = a_2 = 0$, $b_2 = -0,9$. Изменяя b_1 от 2 до -2 , наблюдайте изменение частотной характеристики. Как согласуется угловое положение полюса системной функции с резонансной частотой фильтра?

Как соответствует период колебаний импульсной характеристики резонансной частоте фильтра?

- 2) Зарисуйте качественно несколько частотных, импульсных характеристик и положение нулей и полюсов системной функции. Постройте график зависимости резонансной частоты от b_1 .
- 3) Установите $b_1 = 0$, изменяя b_2 от 0,2 до 0,95 отметьте, как изменяется добротность резонансного фильтра и связь с добротностью постоянной времени фильтра.
- 4) Зарисуйте качественно несколько частотных, импульсных характеристик и положение нулей и полюсов системной функции. Постройте графики зависимости ширины полосы пропускания и постоянной времени фильтра от b_2 .
- 5) Получите АЧХ фильтра при трех вариантах коэффициентов, приведенных в таблице. Первый вариант дает АЧХ левой части фильтра, второй вариант – АЧХ правой части фильтра, третий вариант соответствует каскадному соединению этих фильтров. Зарисуйте частотные характеристики. Убедитесь, что его АЧХ равна произведению АЧХ двух первых вариантов.

	a_1/a_0	a_2/a_0	b_1	b_2
Вариант 1	0	0	0,218	-0,437
Вариант 2	-2	1	0	0
Вариант 3	-2	1	0,218	-0,437

7. Контрольные вопросы

1. Что такое цифровой фильтр?
2. Свойство линейности цифрового фильтра
3. Передаточная или системная функция цифрового фильтра
4. Импульсная характеристика цифрового фильтра
5. Критерий устойчивости цифрового фильтра

8. Литература

1. И. С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Сов. Радио, 1977
2. С. И. Баскаков. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1988
3. Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1985

Приложение 1. Применение метода z-преобразования для анализа дискретных сигналов и цепей

При математическом описании дискретных последовательностей большую роль играет функция $e^{p\Delta t}$, $p = \sigma + i\omega$ – комплексная переменная, Δt – шаг дискретизации, связанный с частотой дискретизации $f_d \geq 2f_B$ отношением $\Delta t = \frac{1}{f_d}$. f_B – максимальная частота в спектре сигнала, при фиксированной частоте дискретизации, не учитывающей динамические свойства сигнала, она совпадает с частотой Найквиста (частотой свертки).

Изображения по Лапласу временных процессов и передаточные функции цепей, в которые входит функция $e^{p\Delta t}$, являются трансцендентными функциями p , что существенно затрудняет анализ. Его можно упростить при переходе к новой переменной:

$$z = e^{p\Delta t}; \quad p = \frac{1}{\Delta t} \ln z.$$

При этом трансцендентные функции от p преобразуются в рациональные функции переменной z .

Преобразование плоскости $p = \sigma + i\omega$ в плоскость $z = x + iy$ можно выполнить с помощью преобразований координат точек (σ_1, ω_1) точки p_1 на плоскости p с координатами (x_1, y_1) , соответствующим точке z_1 на плоскости z .

$$z_1 = x_1 + iy_1 = e^{(\sigma_1 + i\omega_1)\Delta t}; \quad x_1 = e^{\sigma_1\Delta t} \cos \omega_1\Delta t; \quad y_1 = e^{\sigma_1\Delta t} \sin \omega_1\Delta t;$$

В полярных координатах на плоскости z

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\sigma_1\Delta t}; \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \omega_1\Delta t + m2\pi,$$

где m – любое целое число.

На рис. представлены отображения некоторых характерных точек и областей из p -плоскости на z -плоскость. Так, точка $p = 0$ переходит в точку $z = 1$ на вещественной оси z -плоскости. При движении точки p -плоскости вдоль оси $i\omega$ (т. е. при $\sigma = 0$) соответствующая ей точка z -плоскости описывает окружность единичного радиуса. Один полный оборот радиуса-вектора соответствует изменению частоты ω в интервале $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1 + 2\pi/\Delta t$.

При движении точки p_1 вдоль оси $i\omega$ в пределах от $-i\omega$ до $i\omega$ точка z_1 описывает бесконечно большое число окружностей. Таким образом, взаимно однозначное отображение p на z существует только для полосы p -плоскости между $\pm i\pi/\Delta t$. Внутри этой полосы левая полуплоскость отображается внутрь единичного круга. Все параллельные полосы такой же ширины соответствуют этому же кругу. Правая полуплоскость p преобразуется во всю z -плоскость, исключая единичный круг.