- Производная - это просто. Это скорость роста, это скорость роста!
  - Саммари
- Одна история охуительней другой, конечно, но что с этим делать?
- Примеры решений
  - 1
  - 2
  - 3
  - 4
  - 5
  - 6
- Self-practice!
- To be continued


# Производная - это просто. Это скорость роста, это скорость роста!

Просто по приколу (*А может быть и нет ;)*)

Ну а теперь серьёзно.

Сначала будет бесячее стандартное определение, потому что, как я надеюсь, после дальнейших объяснений оно станет приятным и понятным.

Возьмём некоторую функцию $y = f(x)$

Пусть $x_0$ - начальное значение функции, $x_1$ - новое значение ($x_1 > x_0$). $\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента.

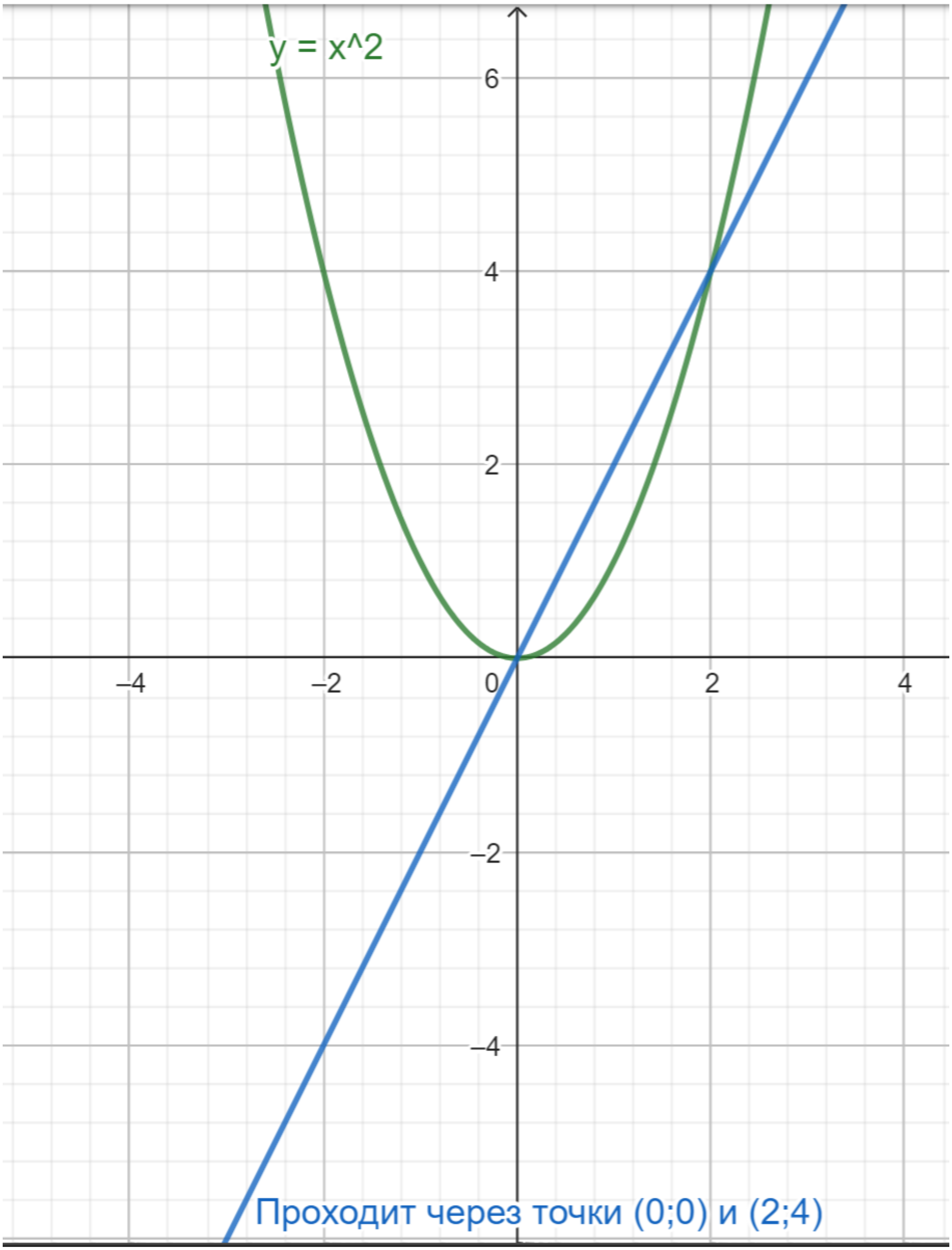
$y_0 = f(x_0)$. $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$. Тогда определим также $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение значения функции.

Теперь представим, что значения $x_0$ и $x_1$ очень-очень близки друг к другу. Тогда значение $\Delta x$ будет очень-очень близко к нулю. Значение выражения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в таком случае и будет называться производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ (*Либо $x_1$ - не забываем - они невероятно близки по значению*).

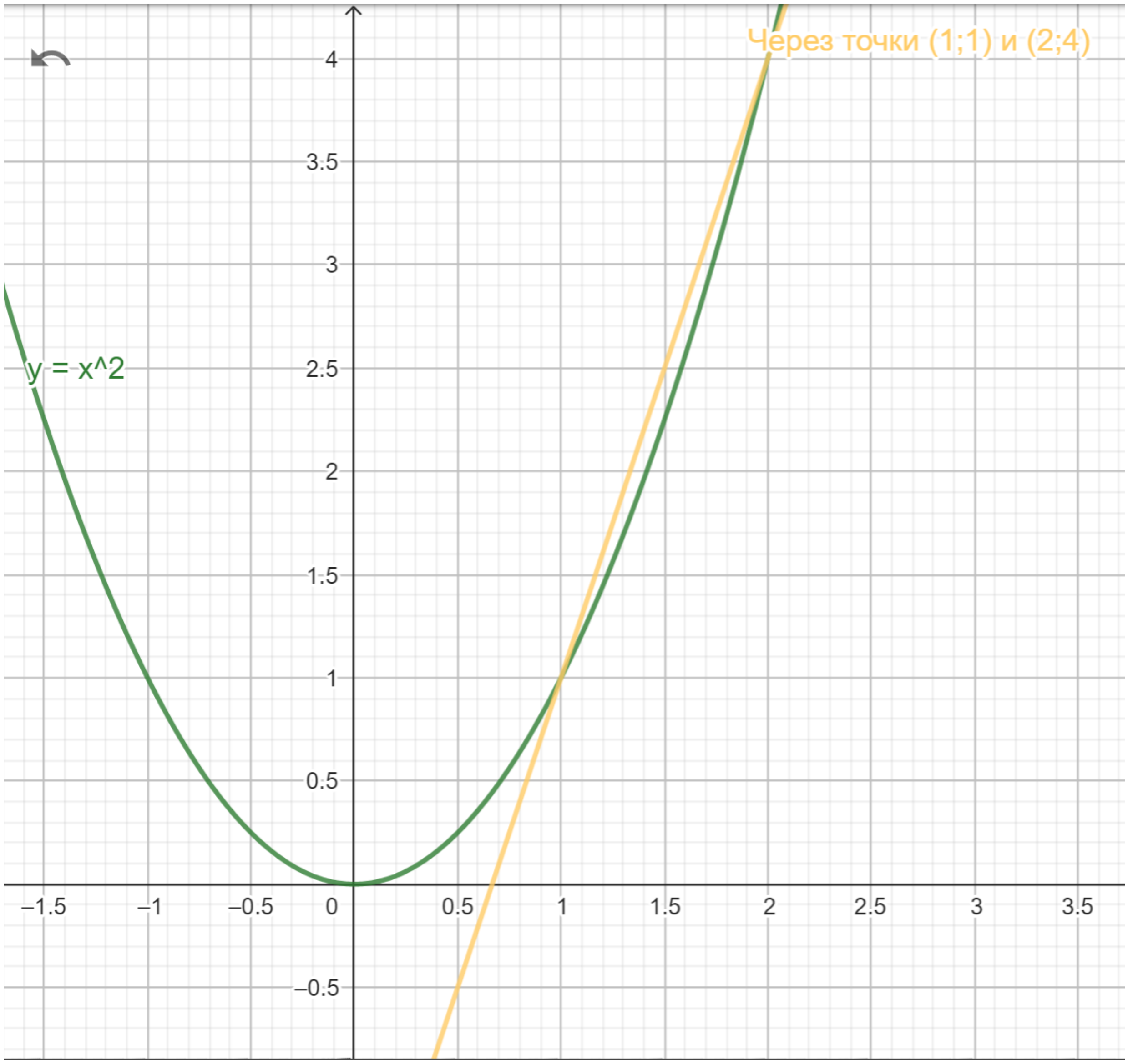
Как это будет выглядеть на практике:

Возьмём функцию $f(x) = x^2$

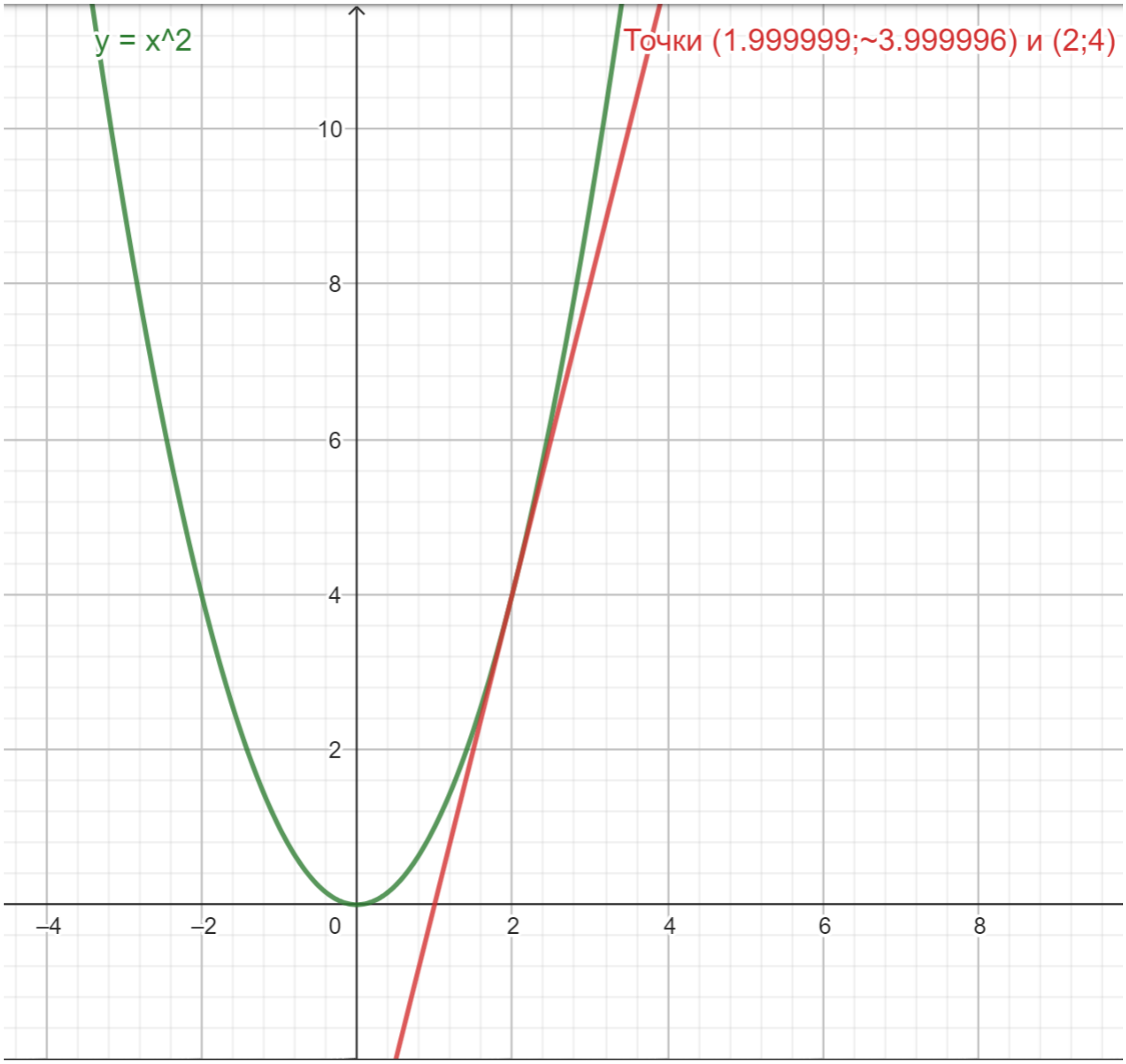
1. Весьма далёкие точки
   1. $x_0 = 0$
   2. $x_1 = 2$
   3. $y_0 = 0^2 = 0$
   4. $y_1 = 2^2 = 4$
   5. Изобразим на графике функцию $f(x)$ и прямую, проходящую через точки $(0; 0)$ и $(2; 4)$

6. 


2. Передвинем точку $x_0$ чуть ближе
    1. $x_1, y_1$ остаются неизменными, как и одна из точек для прямой
    2. $x_0 = 1$
    3. $y_1 = 1^2 = 1$
    4. Проведём новую прямую на графике взамен старой

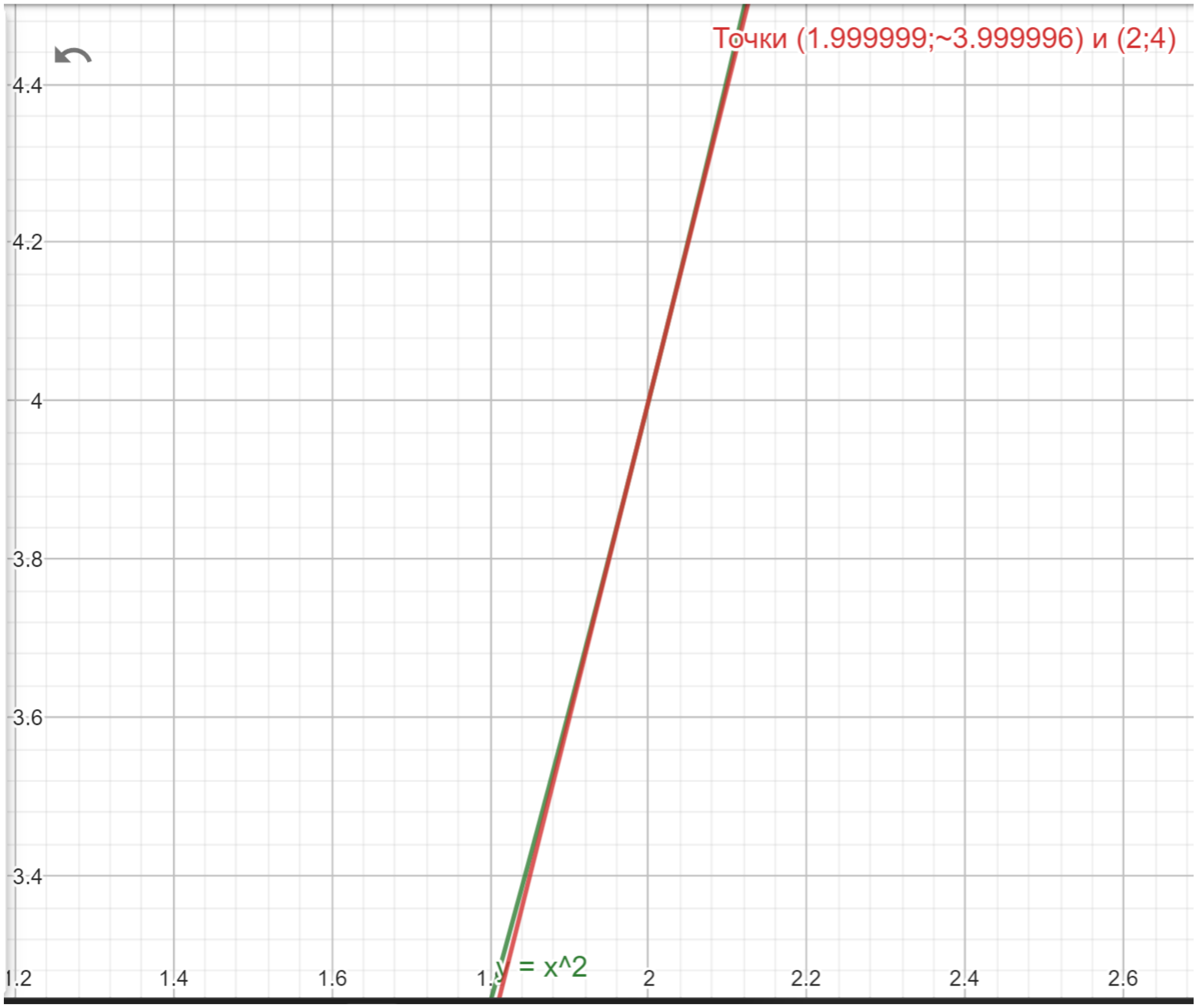
5. 


3. И, наконец, почти полное сближение:
    1. $x_1, y_1$ всё также неизменны
    2. $x_0 = 1.999999$
    3. $y_0 = 1.999999^2 = 3.999996000001$ (округлим до $3.999996$)
    4. Получаем следующую прямую



5.

6. В приближении

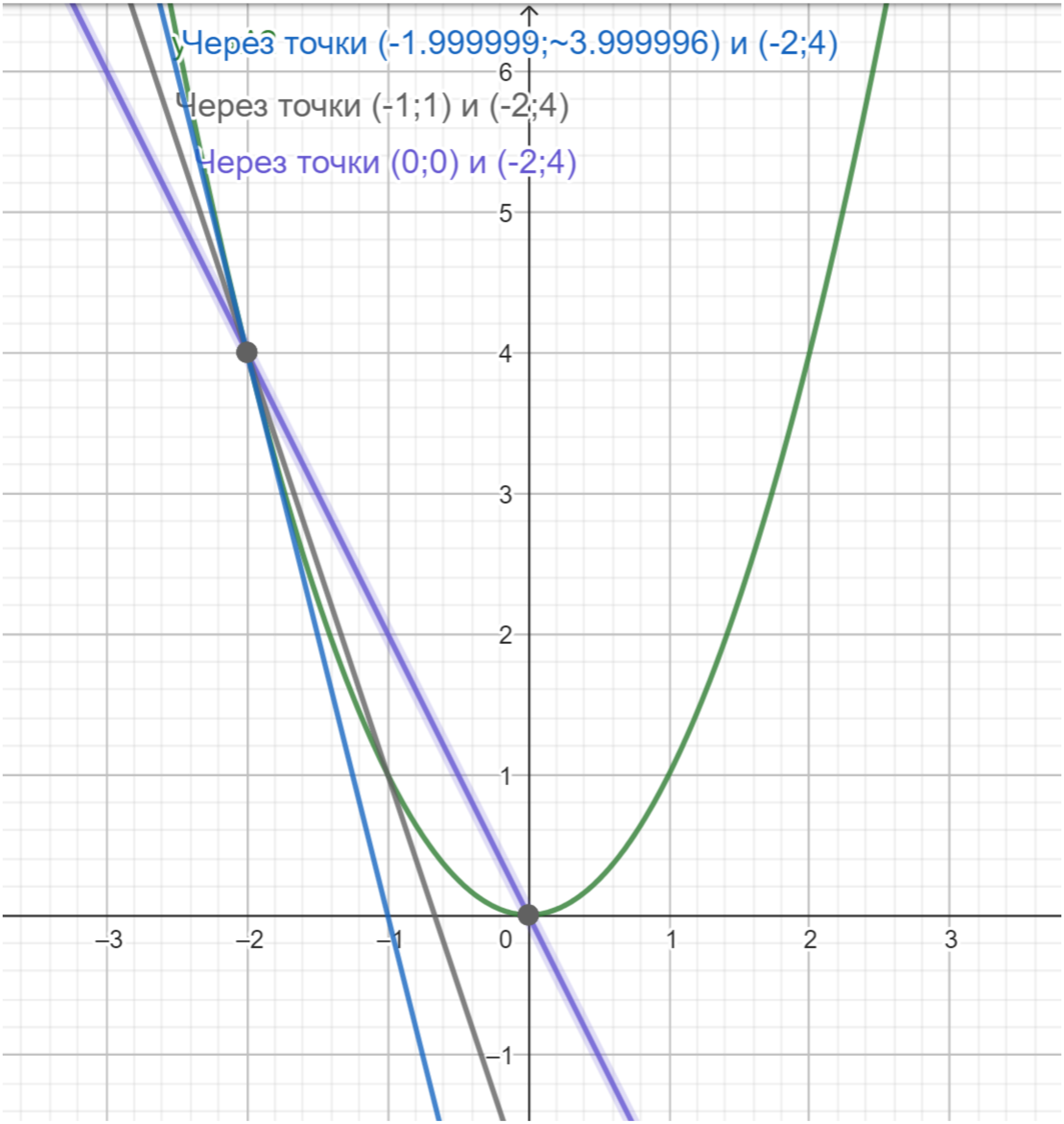
7. 


Уже здесь даже при большом увеличении создаётся ощущение, что точка всего одна, значит отсюда мы получаем касательную, то есть прямую (*Ваш кэп*). Уравнение прямой в общем виде записывается как $y = kx + b$. Изучая последний график, мы можем сказать, что для него $k = 4 = -b$. Также $k$ можно найти, вычислив тангенс наклона касательной относительно оси $Ox$ Главная же фишка заключается в том, что значение $k$ - это и будет значение нашей производной в точке касания.

И действительно, мы знаем, что $(x^2)' = 2x$, тогда как именно в точке с $x = 2$ мы получаем $k = 4$

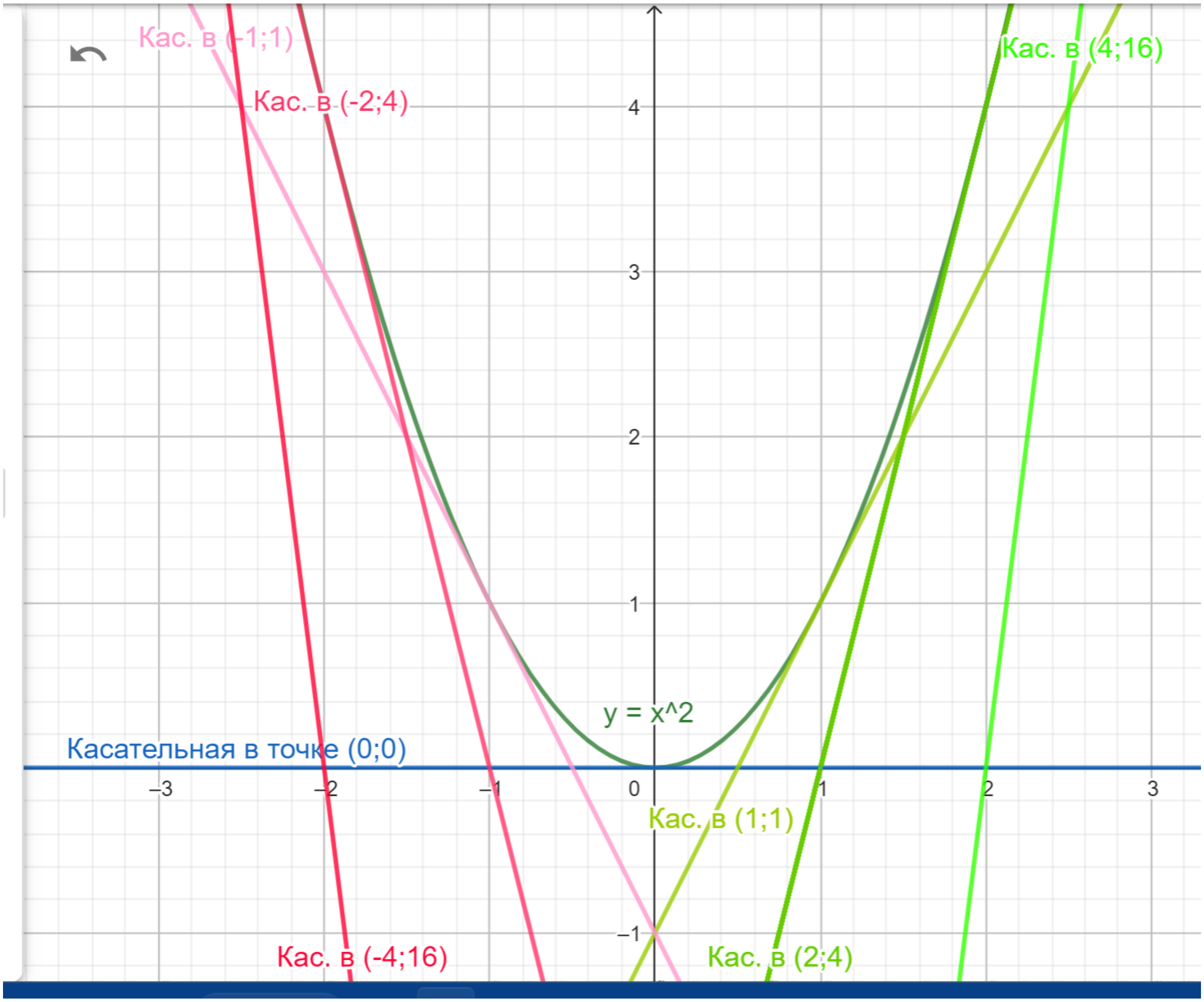
Если взять сближение к абсолютно любой другой точке графика $y = x^2$, мы увидим, что всё те же правила будут справедливы.

Для того, чтобы убедиться в этом, будем таким же образом, как и раньше, сближаться теперь к $x = -2$, выстраивая касательную:

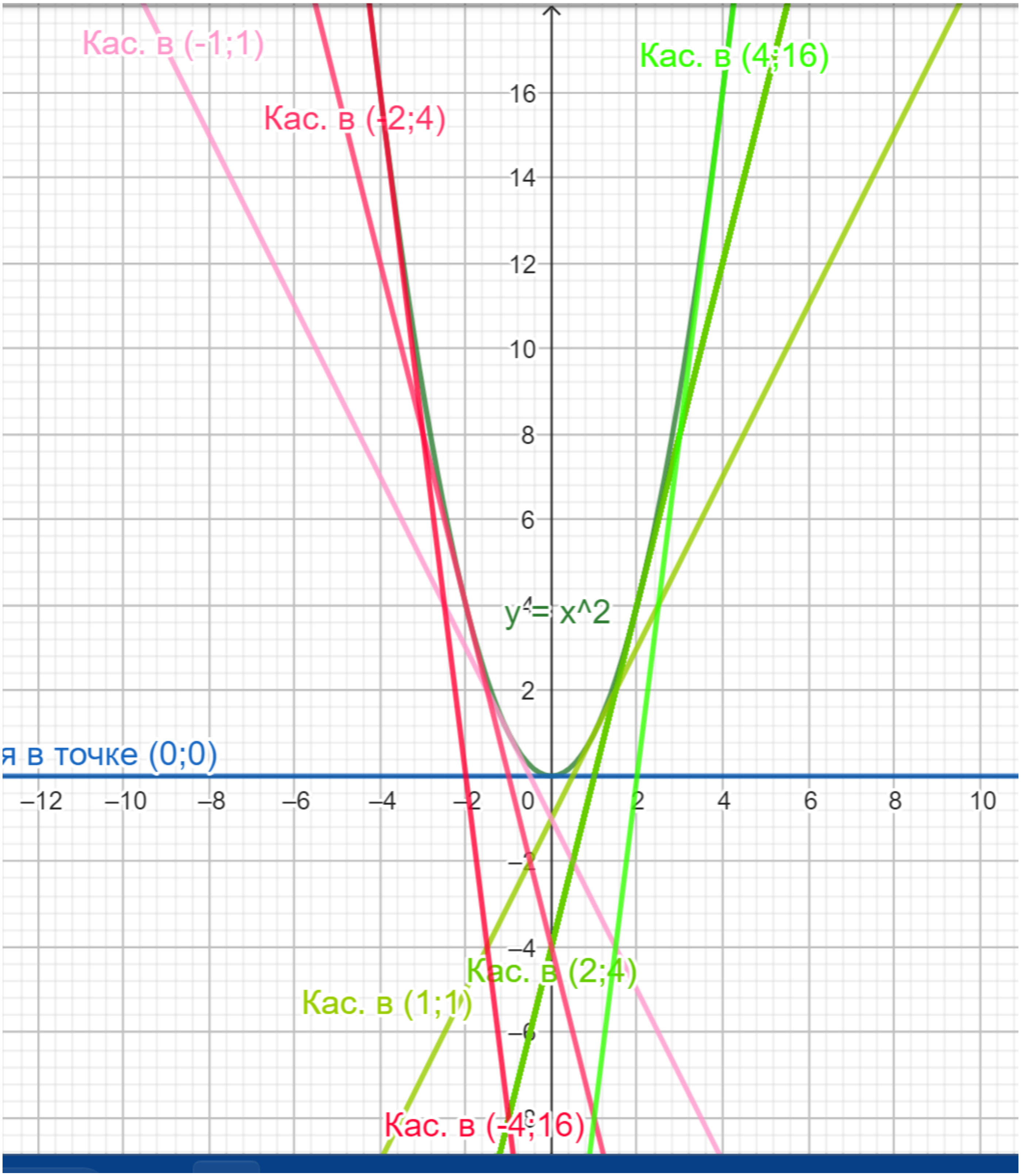



Посчитаем теперь $k$ для прямой касательной (синяя прямая), используя тангенс: $k = tg(Ox \wedge Blue) = \frac{4}{-1} = \frac{-4}{1} = -4$ (в первом варианте смотрели слева от графика прямой, во втором - справа). Если подставим значение $-2$ в производную, то получим то же $-4$

Уже без нескольких сближений изображу также касательные к графику $f(x) = x^2$ в точках $-4, -1, 0, 1, 4$:



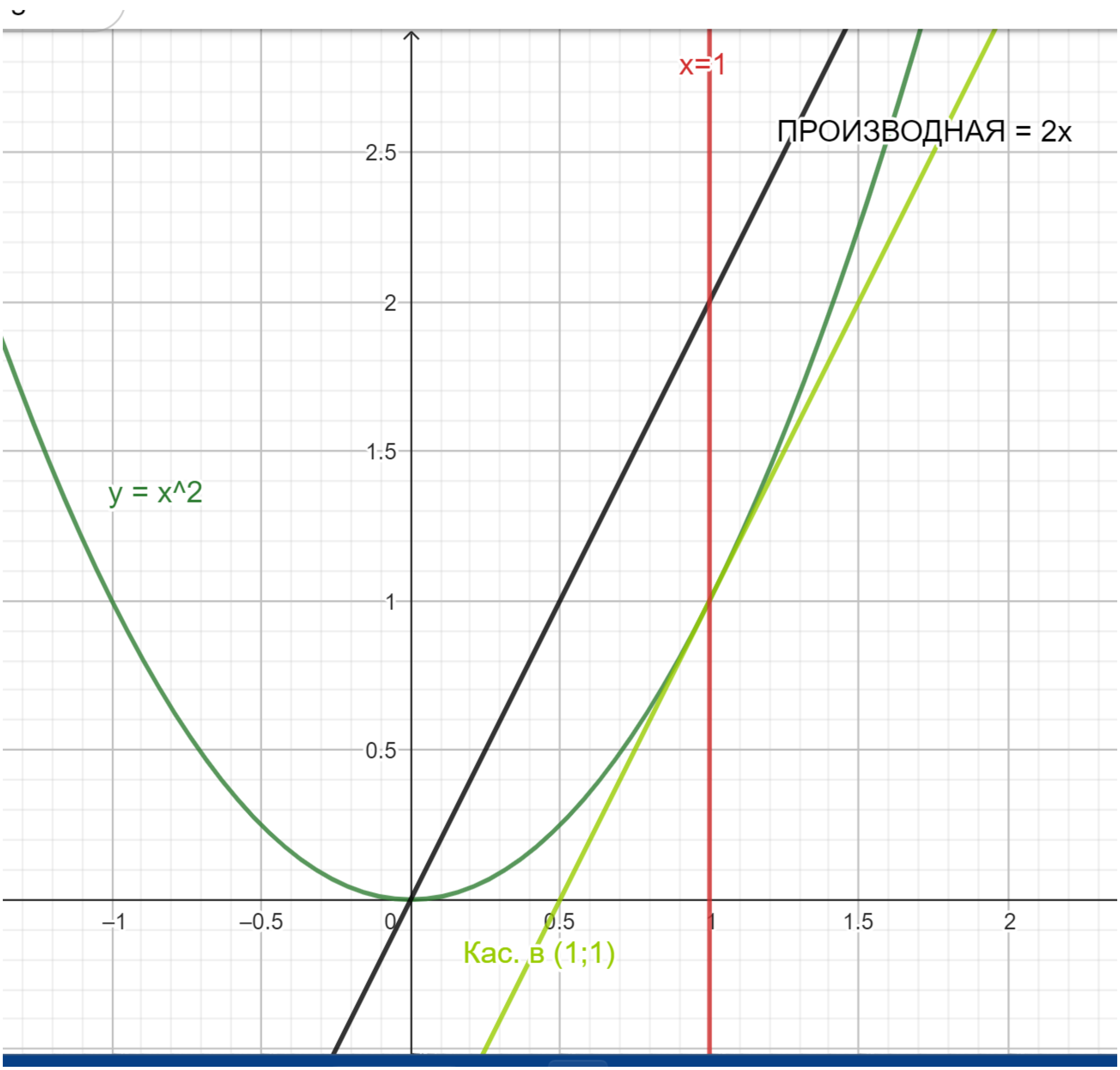
Кас. в (-1;1)
Кас. в (-2;4)
Кас. в (4;16)
y = x^2
Касательная в точке (0;0)
Кас. в (1;1)
Кас. в (-4;16)
Кас. в (2;4)
4
3
2
1
0
–1
–3
–2
–1
1
2
3



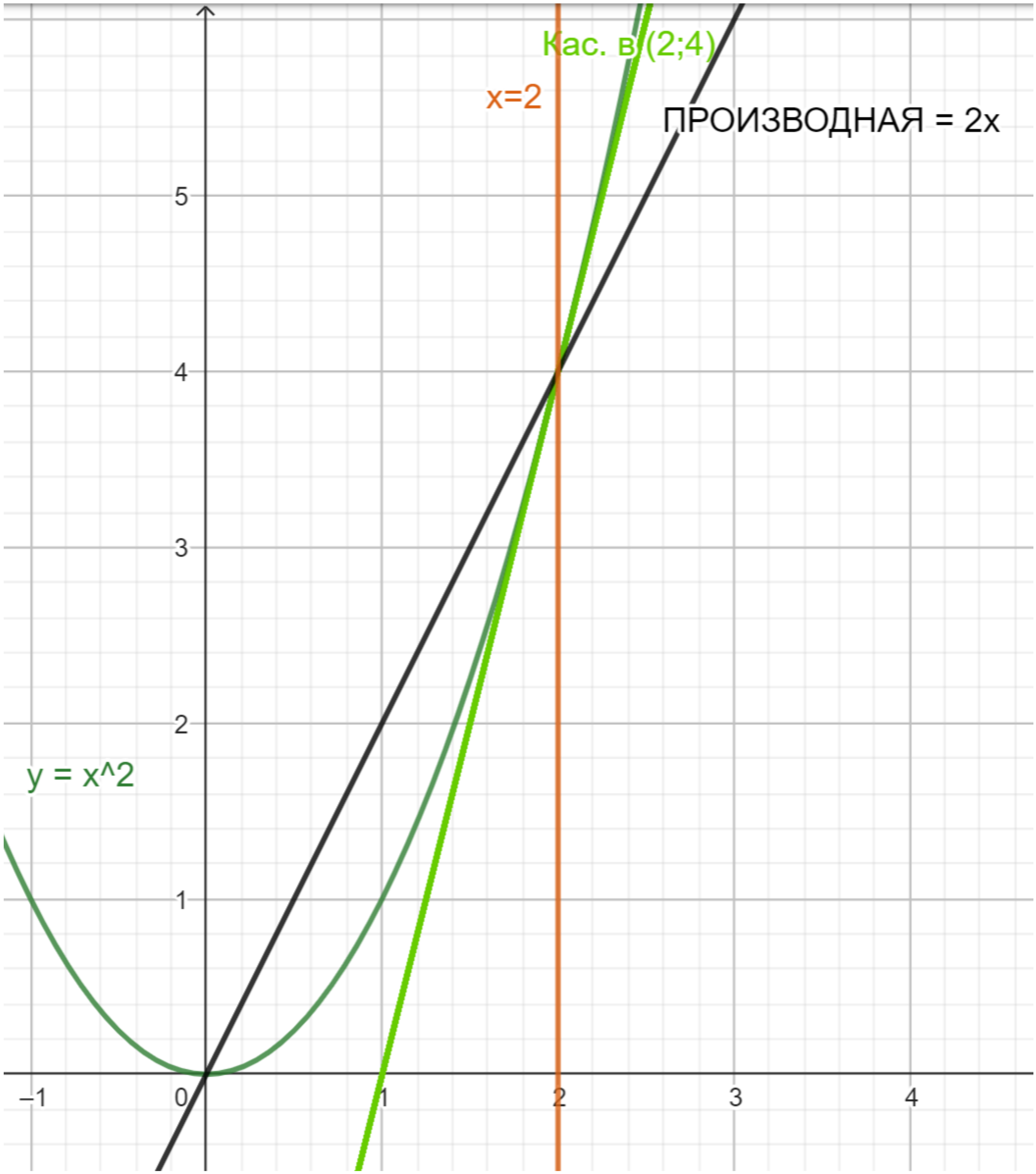

## Саммари

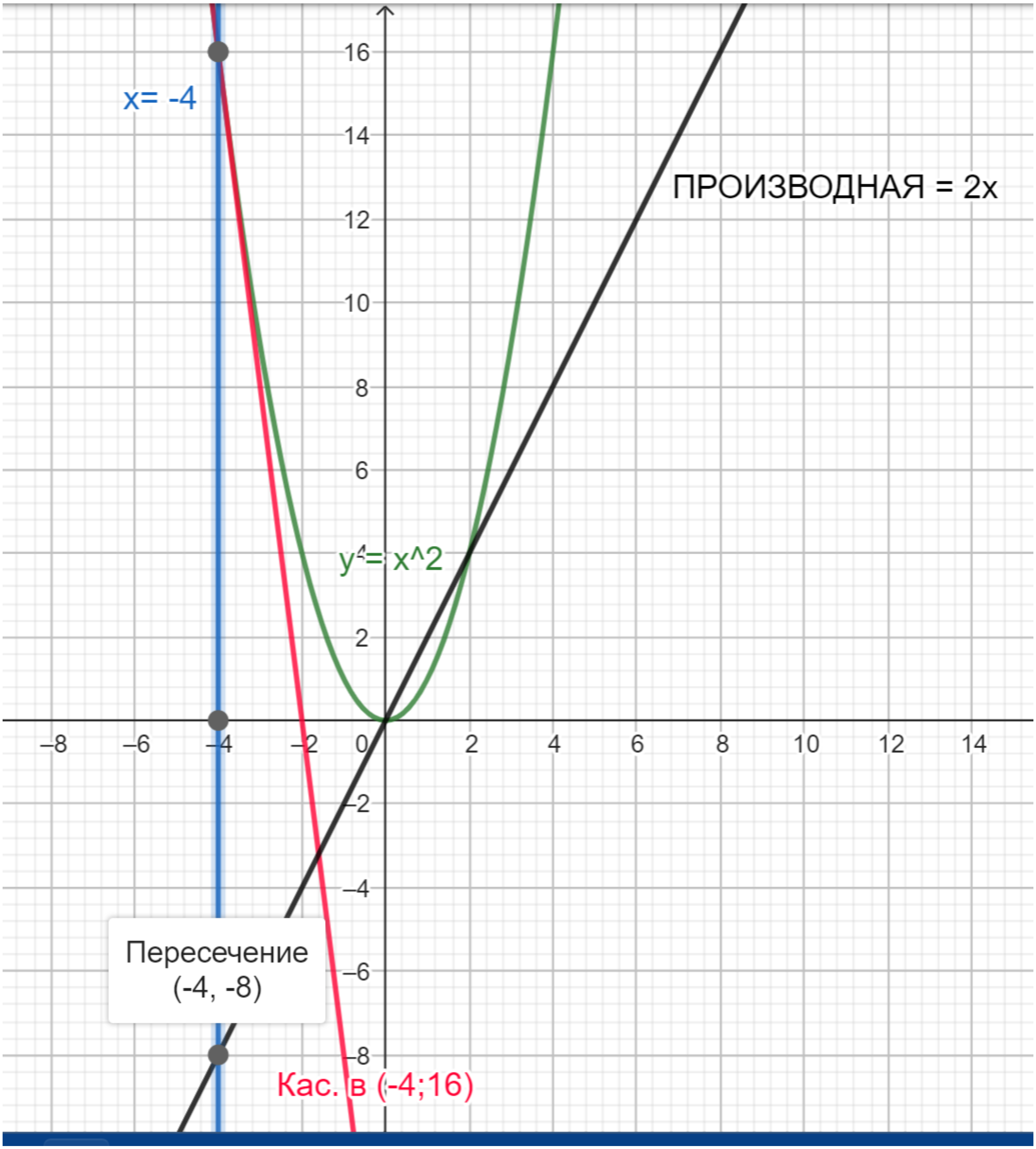
Здесь достаточно явно будет наблюдаться следующее свойство касательных к графику функции: чем больше множитель $k$ по модулю, тем более вертикальной будет задаваемая прямая. А если этой прямой будет касательная к графику функции, то более вертикальной она будет тогда, когда между сближаемыми точками происходит более сильное изменение значения функции. Отсюда мы получаем, чем быстрее убывает или растёт функция в некоторой точке, тем меньше или больше будет в этой точке $k$ для касательной, **а значит, тем меньше или больше будет значение производной.** Таким образом, перефразируя определение из начала этого лонгрида, производная для $f(x)$ - это такая $f'(x)$, что её значение в конкретной точке будет отражать, насколько сильно изменяется функция $f(x)$ при сдвиге от этой точки. **Если ещё упростить, то значения производной показывают скорость роста исходной функции, из которой мы взяли производную**.

И действительно, изобразим на том же графике $f'(x) = (x^2)' = 2x$, возьмём некоторые из касательных и сопоставим их со значениями производной с $x$ точки касания:




Значение производной в точке $x = 1$ будет $2$ - точно такое же, как $k$ касательной. Далее для демонстрации ещё несколько примеров, без отдельных пояснений: надеюсь, к этому моменту понятно, как считать $k$ и значение производной.


Кас. в (2;4)
x=2
ПРОИЗВОДНАЯ = 2x
y = x^2
5
4
3
2
1
0
−1
1
2
3
4



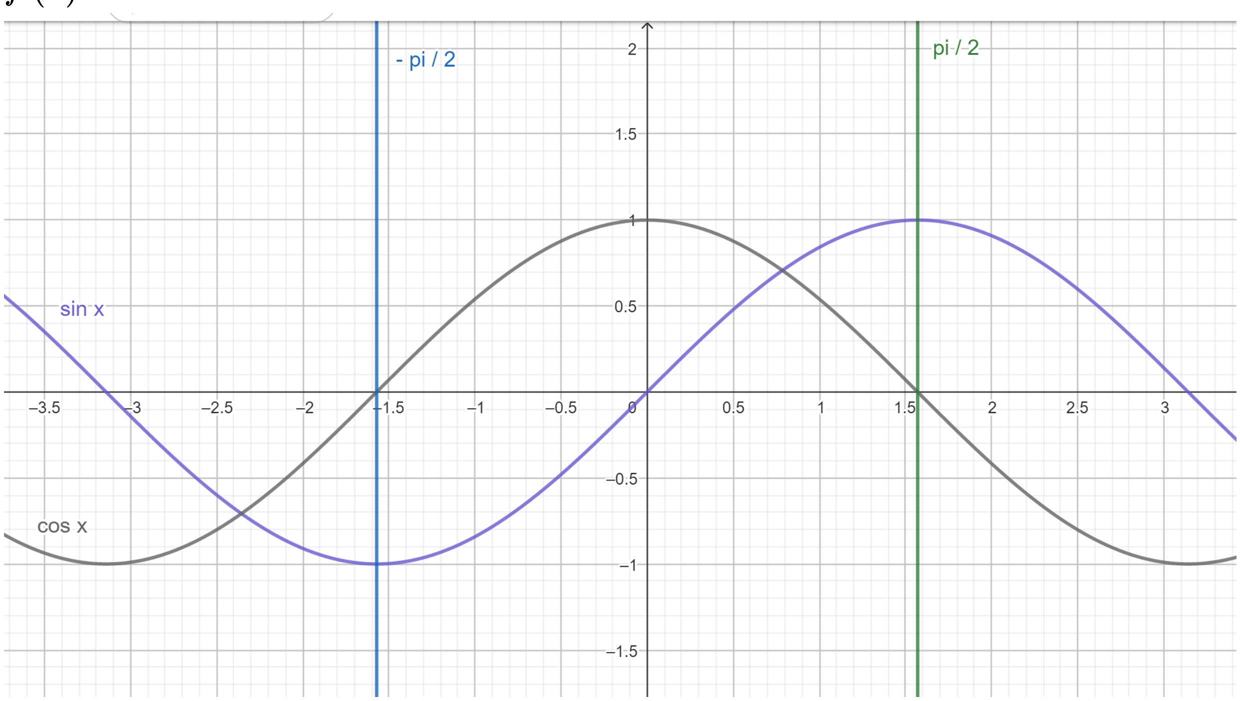

## Одна история охуительней другой, конечно, но что с этим делать?

Практический смысл заключается в конце этого абзаца. Если значение производной показывает нам скорость роста, то мы легко можем проанализировать 2 аспекта функции.

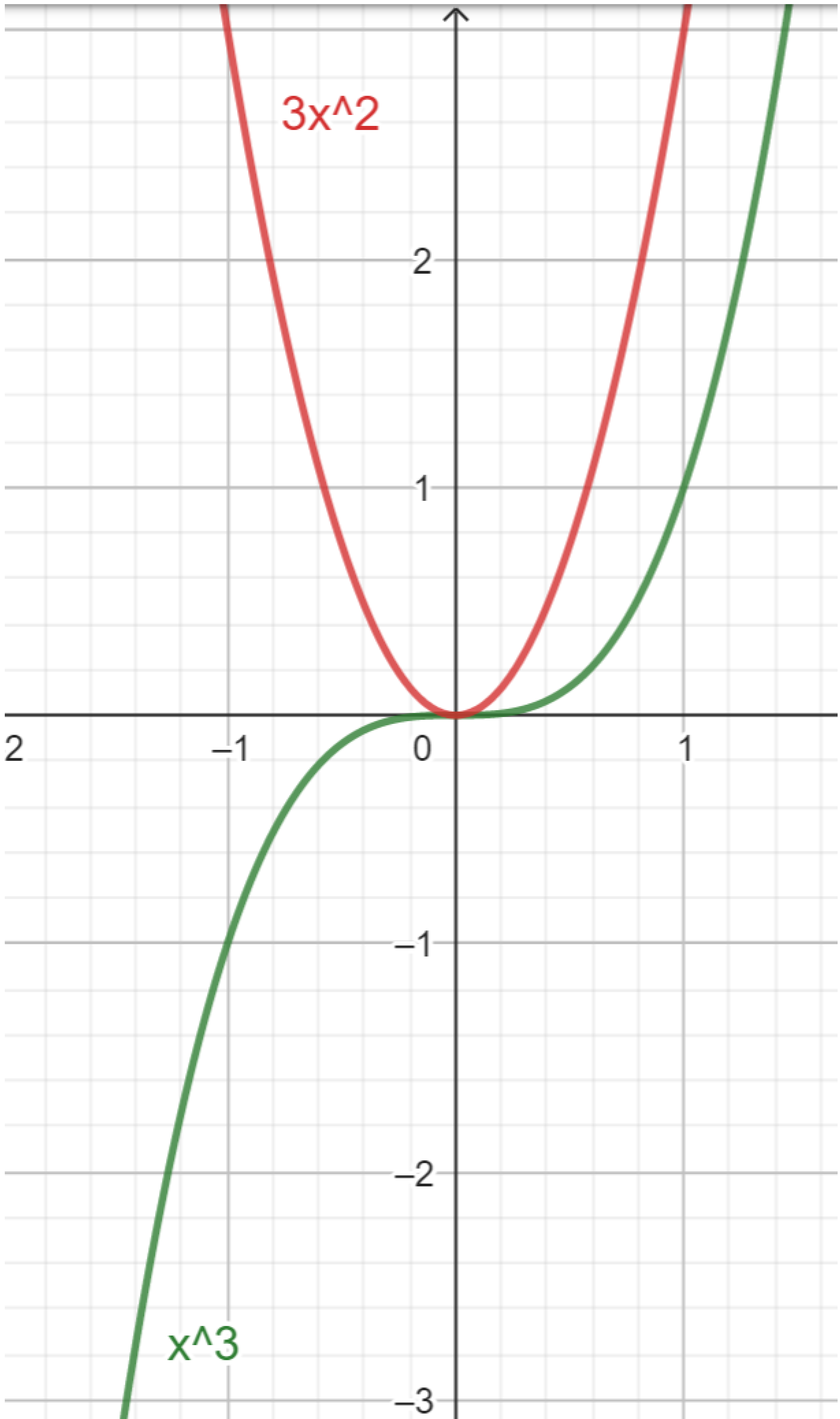
Первый - направление функции при движении вправо от выбранного икса. Если значение отрицательное, значит исходная функция убывает, если положительное - возрастает.

Второй - точки экстремума функции. Если производная в некоторой точке (*назовём её* $x_0$ *принимает значение* $0$), а по бокам от этой точки значения по знаку различны, то мы можем утверждать, что в этой точке находится экстремум. Если слева производная была отрицательной, а справа - положительной, значит слева от $x_0$ исходная функция убывала, а справа - начнёт возрастать. Из этого по логике следует, что в точке $x_0$ находится минимум исходной функции (или один из минимумов). Точно по такой же логике выводится и метод поиска максимумов: слева от пересечения с $Ox$ производная положительная, а справа - отрицательная.

Проверим это на нескольких примерах:

- $f(x) = \sin x$
  - $f'(x) = \cos x$
  - 

  - В точке $x = \pi/2$ наша производная в виде косинуса принимает значение 0. Слева положительная, справа - отрицательная, значит при $x = \pi/2$ наша исходная функция синус даст максимальное значение. И действительно, $\sin(\pi/2) = 1$
  - В точке $x = -\pi/2$ производная слева будет отрицательной, а справа - положительной. Значит при $x = -\pi/2$ мы получим минимальное значение, что и подтверждается проверкой: $\sin(-\pi/2) = -1$
- $f(x) = x^3$
  - $f'(x) = 3x^2$


3x^2
x^3
2
1
0
–1
–2
–3
2
–1
1

- Хотя у производная при $x = 0$ и принимает значение $0$, слева и справа от этой точки значение производной положительные, так что мы можем сказать лишь о том, что в точке $(0, 0)$ исходная функция растёт медленнее всех других точек, но минимума и максимума тут не будет
- Более сложные интересные примеры рассмотрим на конкретных заданиях

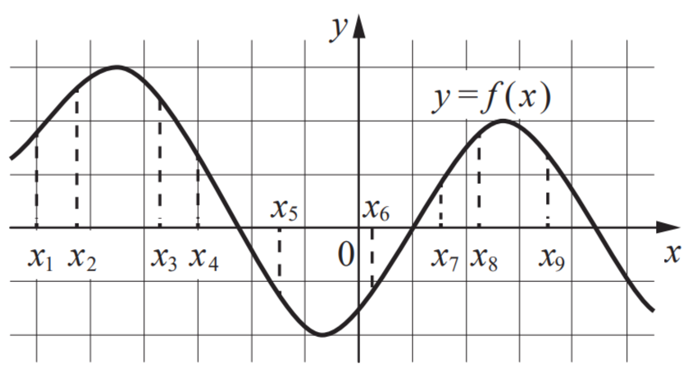
> Отступление: данная выше характеристика производных также позволяет работать с практическими данными. Если мы знаем функцию, которая от времени говорит нам пройденный путь, то, взяв от неё производную, получим функцию, показывающую нам скорость перемещения. Вспоминаем, что ускорение - это *чуть неловко проговаривает* скорость изменения скорости и понимаем, что производной от функции скорости будет функция ускорения. Если наша функция показывает состояние бюджета, то производная будет показывать доход и т.п.

Благодаря этим свойствам выполняется большинством из ЕГЭшных заданий, некоторые из которых сейчас разберём.

# Примеры решений

## 1

**7** На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1$, $x_2$, ... $x_9$.



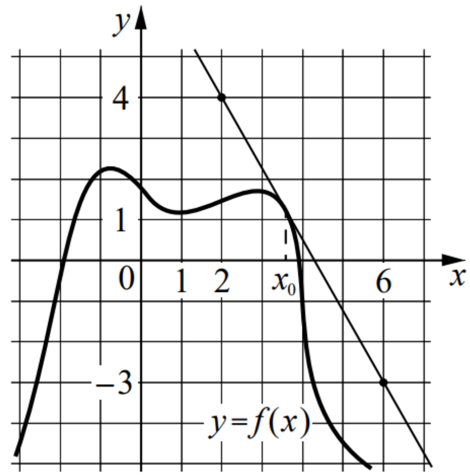

Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

Производная будет отрицательна в точке $x_0$, когда $k$ касательной, проведённой через точку графика с абсциссой $x_0$ будет отрицательным, то есть касательная будет убывающей, то есть убывать будет и сама исходная функция. Таким образом, нам надо взять все точки, расположенные на убывающих участках графика. Ими будут $x_3, x_4, x_5, x_9$ - всего **4 точки**. Это число мы и запишем в ответ.

---

## 2

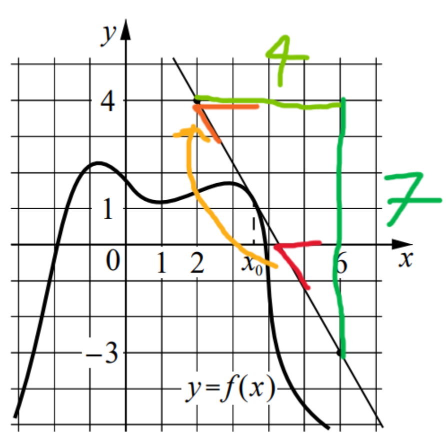
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




Снова вспоминаем о том, что значение производной в заданной точке - это $k$ касательной к графику функции в этой точке. $k$ в свою очередь можно вычислить 2 способами:

1. найти опорные точки (в которых касательная чётко проходит через целые значения в сетке координат) и решить систему уравнений с неизвестными $k, b$
    1. Возьмём точки `(2, 4)` и `(6, -3)`
    2. Получаем систему
        1. $2k + b = 4$
        2. $6k + b = -3$
    3. Вычитаем из первого второе и получаем $-4k = 7 \Rightarrow k = 7/-4 = -1.75$
2. Вычислить тангенс угла наклона касательной, опираясь всё на те же опорные точки
    1. Углом наклона касательной считается острый угол между касательной и осью $Ox$ (*на скрине ниже это красный угол*), мы этот угол параллельно переносим до одной из наших опорных точек, если в этом есть необходимость (*перенесённый угол обозначен оранжевым*)
    2. Берём третью точку так, чтобы из неё и двух опорных получился прямоугольный треугольник
    3. Считаем длины его катетов

    На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.

    4.
    5. И вычисляем тангенс по определению
    6. 7/4 = 1,75

7. Далее надо учесть, что угол у нас располагается в IV четверти (*либо просто обратить внимание, что касательная у нас убывает, а значит и $k$ должен быть отрицательным*), тогда мы можем смело записывать ответ - $-1.75$

По описанию может возникнуть ощущение, что первый способ проще, но лично я почти всегда пользовался вторым. В общем, решать тебе. Очень важно тут помнить про знак, особенно во втором способе

---

## 3

**Тип 7 № 561221**

Прямая $y = -3x + 2$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x + 3$. Найдите абсциссу точки касания.

Показать решение

Основная функция - $f(x) = x^2 + 7x + 3$

Какая-то прямая, параллельная касательной к графику этой функции - $p_1(x) = -3x + 2$

Что мы знаем о параметрах прямой? $b$ определяет сдвиг по игрикам, $k$ - наклон, значит интересующая нас касательная, параллельная к заданной прямой, будет иметь такой же $k = -3$, который, в то же время, является значением производной графика функции в точке касания. Значит нам нужно найти производную $f'(x) = 2x + 7$ и вычислить, при каком $x$ у неё будет значение $-3$:

- $2x + 7 = -3$
- $2x = -10$
- $x = -5$
- **PROFIT**

---

## 4

**Тип 7 № 119979**

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Показать решение

Вспоминаем о том, что производная функции пути - это скорость. Значит нам просто нужно найти производную этой функции, подставить значение $2$ и найти корни:

- $v(t) = x'(t) = t^2 - 6t - 5$
- $t^2 - 6t - 5 = 2$
- $t^2 - 6t - 7 = 0$
  - $t_1 + t_2 = 6$
  - $t_1 t_2 = -7$
- $\Rightarrow$
  - $t_1 = -1$
  - $t_2 = 7$
- Время не может быть отрицательным, так что в качестве ответа записываем единственный оставшийся корень - $7$

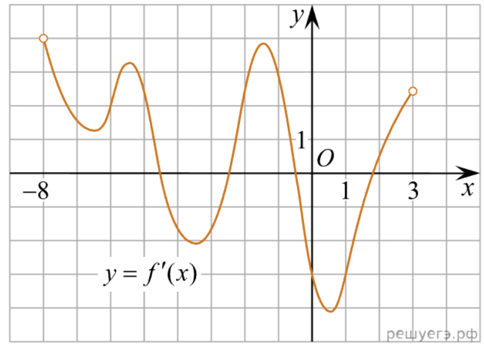
---

## 5

**Тип 7 № 8299**

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Спрятать решение




Исходная функция возрастает, когда производная, положительная, значит нас интересуют те целые $x$, при которых график производной будет выше оси $Ox$. Также учтём, что крайние точки интервала в сам интервал не входят. Суммируем точки и получаем: $-7-6-5-2-1+2=-19$

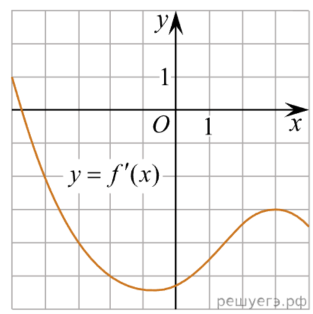
---

6

**Тип 7 № 515187**

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите наименьшую абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 4x$ или совпадает с ней.

Спрятать решение




За похожей формулировкой скрывается уже похожий формат задач. Касательная к графику функции будет параллельна прямой $y = 6 - 4x$ или совпадать с ней в случае, когда $k$ касательной равен $k$ прямой, то есть равен $-4$, а значит минус четырём должно быть равно значение производной. На координатной плоскости проводим через значение $y = -4$ прямую, параллельную $Ox$ и видим, что такое значение принимает в двух точках. По условию нас интересует меньшее из значений абсциссы, а имы будет $-3$

---

# Self-practice!

---

В этот раз не буду делать скрины, а просто прикреплю ссылки на РешуЕГЭ. Так можно будет и сразу проверить решения, и если что найти похожие задания при необходимости:

- https://ege.sdamgia.ru/problem?id=9063
- https://ege.sdamgia.ru/problem?id=510064
- https://ege.sdamgia.ru/problem?id=124215
- https://ege.sdamgia.ru/problem?id=8045
- https://ege.sdamgia.ru/problem?id=624108

# To be continued

---

$\int$ ;)