

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Физтех-школа прикладной математики и информатики  
Кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике

Выпускная квалификационная работа бакалавра

# Блочные методы типа бисопряжённых градиентов

**Автор:**

Студент 101а группы  
Козлов Николай Андреевич

**Научный руководитель:**

н.с.,к.ф.-м.н.  
Желтков Дмитрий Александрович



Москва 2025

**Аннотация**

Блочный BiCGStab и его друзья  
*Козлов Николай Андреевич*

Краткое описание задачи и основных результатов, мотивирующее  
прочитать весь текст.

**Abstract**

Block BiCGStab and his friends

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Крыловские методы решения систем уравнений</b>	<b>5</b>
2.1	Процедура Арнольди . . . . .	5
2.2	Симметричный алгоритм Ланцоша . . . . .	5
2.3	Метод сопряженных градиентов . . . . .	6
2.4	Процесс биортогонализации Ланцоша . . . . .	8
2.5	Метод бисопряженных градиентов . . . . .	9
2.6	Стабилизированный метод бисопряженных градиентов . . . . .	11
2.7	Блочный метод бисопряженных градиентов . . . . .	12
2.8	Блочный метод сопряженных градиентов . . . . .	13
2.9	Блочный стабилизированный метод бисопряженных градиентов . . . . .	14
2.9.1	Матричнозначные полиномы . . . . .	14
2.9.2	Алгоритм . . . . .	14
2.10	Блочный симметричный метод квазимиимальных невязок . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Улучшения блочного метода стабилизированных бисопряженных градиентов</b>	<b>17</b>
3.1	Реортогонализация для поддержания биортогональных соотношений . . . . .	17
3.2	Ортогонализация векторов направлений и проверочных невязок . . . . .	18
3.3	Выбор правых частей . . . . .	19
3.4	Алгоритм . . . . .	19
3.5	Проблемы . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Модификация блочного симметричного метода квазимиимальных невязок</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Численные эксперименты</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>28</b>

## 1 Введение

В ряде приложений возникают большие линейные системы с многими правыми частями. такую задачу можно записать в блочном виде:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^N \\ \left[ \begin{array}{c} \boxed{A} \end{array} \right]_{\overbrace{\hspace{1.5cm}}^N} \end{array}
 \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^s \\ \left[ \begin{array}{c} \boxed{x_1} \quad \dots \quad \boxed{x_s} \end{array} \right] \end{array}
 =
 \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^s \\ \left[ \begin{array}{c} \boxed{b_1} \quad \dots \quad \boxed{b_s} \end{array} \right] \end{array}$$

$$AX = B,$$

где  $A$  -  $N \times N$  невырожденная разреженная матрица системы;  $B$  -  $N \times s$  невырожденная матрица, столбцы - правые части;  $X$  -  $N \times s$  матрица, столбцы - решения для соответствующих правых частей. Также еще предполагаем, что  $s \ll N$ . Такие задачи можно решать прямыми методами, однако они не подходят для больших задач из-за кубической сложности. Так что естественным является использование блочных крыловских методов.

В преимущества блочных крыловских методов входят: высокая производительность на вычислительных системах за счет блочных операций, Более быстрая сходимость, по сравнению с неблочными методами [1]; в задачах со структурированными системами (например МКЭ) БКМ не разрушают структуру, в отличие от прямых методов. Чрезвычайно большие системы, которые не помещаются целиком в оперативную память можно решать с помощью блочных крыловских методов.

<Рассказ про блочные крыловские методы.>

Для наших целей мы хотим построить крыловские методы, отвечающие следующим требованиям: методы должны находить решения систем общего вида, то есть, которые не обязательно являются эрмитовыми; методы не должны требовать сохранения всего крыловского пространства, то есть должны давать короткие итерационные соотношения;

## 2 Крыловские методы решения систем уравнений

Ключевым объектом в рассматриваемом классе методов является пространство Крылова, определим его.

**Определение 2.1.** Пусть  $A$  - матрица порядка  $N$ ,  $v$  - вектор размерности  $N$ . Тогда линейная оболочка вида  $K_m(A, v) \equiv \{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}$  называется подпространством Крылова, где  $m$  - натуральное число.

Все рассматриваемые в дальнейшем методы являются проекционными. В таких методах приближенное решение ищется в крыловском пространстве при этом решение на подпространстве ищется, как правило, на основе некоторого проекционного соотношения (которое и задаёт метод).

### 2.1 Процедура Арнольди [2]

Процедура Арнольди - это алгоритм построения ортогонального базиса в крыловском подпространстве  $K_m$ . Алгоритм 1 представляет наиболее простую вариацию такого алгоритма в точной арифметике.

---

#### Алгоритм 1 Алгоритм Арнольди

---

```

1: Выберем  $v_1 = v/\|v\|_2$ , так что  $\|v_1\|_2 = 1$ 

2: for  $j = 1, 2, \dots, m$  do
3:   for  $i = 1, 2, \dots, j$  do
4:      $h_{ij} \leftarrow (Av_j, v_i)$ 
5:   end for
6:    $w_j \leftarrow Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i$ 
7:    $h_{j+1,j} \leftarrow \|w_j\|_2$ 
8:   if  $h_{j+1,j} = 0$  then
9:     Stop
10:  end if
11:   $v_{j+1} \leftarrow w_j/h_{j+1,j}$ 
12: end for

```

---

Алгоритм на каждом шаге ортогонализует  $Av_j$  ко всем предыдущим  $v_i$ , применяя процедуру Грама-Шмидта.

Результат работы алгоритма можно записать в матричном виде: обозначим  $V_m$  -  $N \times m$  матрицу со столбцами  $v_1, \dots, v_m$ ;  $\bar{H}_m$  -  $(m+1) \times (m)$  хессенбергова матрица с элементами  $h_{ij}$  из алгоритма 1;  $H_m$  -  $m \times m$  матрица, получающаяся из  $\bar{H}_m$  путем удаления последней строки. Тогда, процедура Арнольди влечет следующие соотношения:

$$AV_m = V_m H_m + w_m e_m^T \quad (1)$$

$$= V_{m+1} \bar{H}_m, \quad (2)$$

$$V_m^T AV_m = H_m \quad (3)$$

### 2.2 Симметричный алгоритм Ланцоша [2]

Симметричный алгоритм Ланцоша - это частный случай процедуры Арнольди, когда матрица  $A$  - симметричная, при таком условии хессенбергова матрица  $H_m$  становится симметричной тридиагональной  $T_m$ . Это позволяет получить короткие рекуррентные соотношения, приведённые в Алгоритме 2

---

**Алгоритм 2** Симметричный алгоритм Ланцоша

---

```

1: Выберем  $v_1 = v/\|v\|_2$ , так что  $\|v_1\|_2 = 1$ 
2:  $\beta_1 \leftarrow 0, v_0 \leftarrow 0$ 
3: for  $j = 1, 2, \dots, m$  do
4:    $w_j \leftarrow Av_j - \beta_j v_{j-1}$ 
5:    $\alpha_j \leftarrow (w_j, v_j)$ 
6:    $w_j \leftarrow w_j - \alpha_j v_j$ 
7:    $\beta_{j+1} \leftarrow \|w_j\|_2$ 
8:   if  $\beta_{j+1} = 0$  then
9:     Stop
10:  end if
11:   $v_{j+1} \leftarrow w_j/\beta_{j+1}$ 
12: end for

```

---

При этом матрица  $T_m$  имеет вид:

$$T_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{m-1} & \beta_m \\ & & & \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

### 2.3 Метод сопряженных градиентов [2]

Симметричный алгоритм Ланцоша можно использовать для итеративного решения систем линейных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей.

Пусть задано начальное приближение  $x_0$ , и векторы направлений из алгоритма Ланцоша  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . На  $m$ -ом шаге алгоритма приближенное решение ищется в аффинном пространстве  $x_0 + K_m$ , где  $K_m(A, r_0) \equiv \{r_0, Ar_0, A^2 r_0, \dots, A^{m-1} r_0\}$ ,  $r_0 = b - Ax_0$ . На невязки при этом налагается условие

$$b - Ax_m \perp K_m. \quad (5)$$

Если взять  $v_1 = r_0/\|r_0\|_2$  и обозначить  $\beta = \|r_0\|_2$ . Тогда  $V_m^T A V_m = T_m$  из (3), а также  $V_m^T r_0 = V_m^T (\beta v_1) = \beta e_1$ . Разложим приближенное решение на  $m$ -ом шаге по базису из векторов  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ :

$$x_m = x_0 + V_m y_m. \quad (6)$$

Это выражение эквивалентно равенству:

$$r_m = r_0 - A V_m y_m, \quad (7)$$

домножим слева на  $V_m^T$ :

$$V_m^T r_m = V_m^T r_0 - V_m^T A V_m y_m. \quad (8)$$

Из (5) следует, что  $V_m^T r_m = 0$ , учтём это в (8) и выразим  $y_m$ :

$$y_m = T_m^{-1} \beta e_1. \quad (9)$$

Получим выражение для  $r_m$ :

$$\begin{aligned}
 r_m &= b - A(x_0 + V_m y_m) \\
 &= r_0 - AV_m y_m \\
 &= \beta v_1 - (V_m T_m + t_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T) y_m \\
 &= V_m \underbrace{(\beta e_1 - T_m y_m)}_{=0} - t_{m+1,m} e_m^T y_m v_{m+1} \\
 r_m &= -t_{m+1,m} e_m^T y_m v_{m+1}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Из этого выражения следует, что  $r_m \parallel v_{m+1}$ , а значит, что невязки на каждом шаге ортогональны друг другу.

Получим короткие итерационные соотношения для обновления приближенного решения  $x_m$ . LU-разложение матрицы  $T_m$ :

$$T_m = L_m U_m = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \lambda_2 & 1 & & & \\ & \lambda_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \lambda_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & \beta_2 & & & \\ & \eta_2 & \beta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \eta_{m-1} & \beta_m \\ & & & & \eta_m \end{pmatrix}$$

Введем обозначения

$$P_m \equiv V_m U_m^{-1}, \tag{11}$$

$$z_m \equiv L_m^{-1} \beta e_1, \tag{12}$$

тогда приближенное решение выражается как

$$x_m = x_0 + P_m z_m. \tag{13}$$

Используя равенство (11) получим формулу для обновления  $p_m$ -последнего столбца  $p_m$  матрицы  $P_m$

$$P_m U_m = V_m \tag{14}$$

$$p_m \eta_m + \beta_m p_{m-1} = v_m \tag{15}$$

$$p_m = \eta_m^{-1} (v_m - \beta_m p_{m-1}) \tag{16}$$

Выразим элементы из последней строчки матрицы  $T_m$  с помощью LU-разложения:

$$\alpha_m = \lambda_m \beta_m + \eta_m \implies \eta_m = \alpha_m - \lambda_m \beta_m$$

$$\beta_m = \lambda_m \eta_{m-1} \implies \lambda_m = \beta_m / \eta_{m-1}$$

В силу вида матрицы  $L_m$ :

$$\begin{aligned}
 z_m &= \begin{pmatrix} z_{m-1} \\ \zeta_m \end{pmatrix}, \\
 \zeta_m &= -\lambda_m \zeta_{m-1}.
 \end{aligned}$$

Как результат получаем формулу для обновления  $x_m$ :

$$x_m = x_{m-1} + \zeta_m p_m$$

Покажем, что столбцы  $P_m$  образуют А-ортогональную систему, т.е, что  $(Ap_i, p_j) = 0$ , для  $i \neq j$ . Для этого нужно показать, что  $P_m^T A P_m$  - диагональная матрица. Подставим определение  $P_m$  в это выражение:

$$P_m^T A P_m = U_m^{-T} V_m^T A V_m U_m^{-1} \quad (17)$$

$$= U_m^{-T} T_m U_m^{-1} \quad (18)$$

$$= U_m^{-T} L_m \quad (19)$$

$U_m^{-T} L_m$  - нижнетреугольная матрица, но она также является и симметричной, так как  $P_m^T A P_m$  - симметричная матрица. Таким образом,  $U_m^{-T} L_m$  - диагональная матрица.

Следствием этого является то, что обновлять приближенное решение можно исходя из поддержания свойств ортогональности невязок и А-ортогональности векторов направлений  $p_i$ . В последующий выкладках вектора  $p_j$  будут нумероваться с нуля, а не с единицы, как это было раньше. А также коэффициенты будут переименованы, чтобы соответствовать общепринятым обозначениям.

$$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j \implies r_{j+1} = r_j - \alpha_j A p_j$$

$$\alpha_j = (r_j, r_j) / (A p_j, r_j)$$

Из уравнения (16) после перенормировки  $p_i, i = 1, \dots, m$  следует, что

$$p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j p_j$$

$$\beta_j = -(r_{j+1}, A p_j) / (p_j, A p_j) = \frac{1}{\alpha_j} (r_{j+1}, (r_{j+1} - r_j)) / (A p_j, p_j) = (r_{j+1}, r_{j+1}) / (r_j, r_j)$$

Это выражение и А-ортогональность  $p_j$  в свою очередь можно использовать, чтобы преобразовать выражение для  $\alpha_j$ :

$$(A p_j, r_j) = (A p_j, p_j - \beta_{j-1} p_{j-1}) = (A p_j, p_j)$$

$$\alpha_j = (r_j, r_j) / (A p_j, p_j)$$

Теперь у нас есть всё, чтобы записать алгоритм.

---

### Алгоритм 3 Метод сопряженных градиентов

---

```

1:  $r_0 \leftarrow b - A x_0, p_0 \leftarrow r_0$ .
2: for  $j = 0, 1, \dots$  do
3:    $\alpha_j \leftarrow (r_j, r_j) / (A p_j, p_j)$ 
4:    $x_{j+1} \leftarrow x_j + \alpha_j p_j$ 
5:    $r_{j+1} \leftarrow r_j - \alpha_j A p_j$ 
6:    $\beta_j \leftarrow (r_{j+1}, r_{j+1}) / (r_j, r_j)$ 
7:    $p_{j+1} \leftarrow r_{j+1} + \beta_j p_j$ 
8: end for
```

---

Этот метод можно адаптировать и для систем общего вида, если домножить обе части уравнения  $Ax = b$  на  $A^T$ , и решать систему с симметричной положительно определенной матрицей  $A^T A$ , однако число обусловленности при этом возрастает в квадрат раз из-за чего данный вариант может давать плохие результаты.

## 2.4 Процесс биортогонализации Ланцоша [2]

Для несимметричных систем можно предъявить алгоритм похожий на симметричный алгоритм Ланцоша, но который будет строить не ортогональный базис в пространстве Крылова, а пару биортогональных базисов в пространствах  $K_m(A, v_1) =$



---

**Алгоритм 4** Процесс биортогонализации Ланцоша

---

```

1: Выберем  $v_1, w_1$  такие что  $(v_1, w_1) = 1$ .
2:  $\beta_1 = \delta_1 \equiv 0, w_0 = v_0 \equiv 0$ 
3: for  $j = 1, 2, \dots, m$  do
4:    $\alpha_j = (Av_j, w_j)$ 
5:    $\hat{v}_{j+1} = Av_j - \alpha_j v_j - \beta_j v_{j-1}$ 
6:    $\hat{w}_{j+1} = A^T w_j - \alpha_j w_j - \delta_j w_{j-1}$ 
7:    $\delta_{j+1} = |(\hat{v}_{j+1}, \hat{w}_{j+1})|^{1/2}$ 
8:   if  $\delta_{j+1} = 0$  then
9:     Stop
10:  end if
11:   $\beta_{j+1} = (\hat{v}_{j+1}, \hat{w}_{j+1})/\delta_{j+1}$ 
12:   $v_{j+1} = \hat{v}_{j+1}/\beta_{j+1}$ 
13:   $w_{j+1} = \hat{w}_{j+1}/\delta_{j+1}$ 
14: end for

```

---

$\text{span}\{v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1\}$  и  $K_m(A^T, v_1) = \text{span}\{v_1, A^T v_1, \dots, (A^T)^{m-1}v_1\}$ , то есть такую пару  $v_1, \dots, v_m$  и  $w_1, \dots, w_m$ , что  $(v_i, w_j) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ .

Введём обозначения:

$$T_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \delta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \delta_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{m-1} & \beta_m \\ & & & \delta_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$

$$W_m = [w_1 \quad \dots \quad w_m]$$

Тогда легко убедиться, что если на  $m$ -ом шаге не произошло аварийной остановки, то алгоритм порождает следующие матричные соотношения:

$$\begin{aligned} AV_m &= V_m T_m + \delta_{m+1} v_{m+1} e_m^T \\ A^T W_m &= W_m T_m^T + \beta_{m+1} w_{m+1} e_m^T \\ W_m^T AV_m &= T_m \end{aligned}$$

## 2.5 Метод бисопряженных градиентов [2]

Метод бисопряженных градиентов выводится из процесса биортогонализации Ланцоша аналогично тому, как метод сопряженных градиентов выводился из симметричного процесса Ланцоша. Приближенное решение на  $m$ -ом шаге будет искажаться как наилучшее приближение в пространстве  $x_0 + K_m$ , где  $K_m = \{v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1\}$ , так, чтобы невязка  $r_m$  была ортогональна пространству  $L_m = w_1, A^T w_1, \dots, (A^T)^{m-1}w_1$ . Так же, как и при выводе сопряженных градиентов возьмём  $v_1 = r_0/\|r_0\|_2$ , а вектор  $w_1$  можно взять произвольным, таким что  $(v_1, w_1) \neq 0$ , например,  $v_1$ . Алгоритм будет решать не только систему  $Ax = b$ , но и некоторую двойственную систему  $A^T x^* = b^*$  (причём  $b^* = b$ , если  $w_1 = v_1$ ). Производим LU-разложение для матрицы  $T_m$ , полученной в ходе процесса биортогонализации Ланцоша:

$$T_m = L_m U_m,$$

и вводим обозначения для векторов направлений  $p_i, p_i^*$ :

$$\begin{aligned} P_m &= V_m U_m^{-1} \\ P_m^* &= W_m L_m^{-T} \\ [p_1 \ \dots \ p_m] &= P_m \\ [p_1^* \ \dots \ p_m^*] &= P_m^* \end{aligned}$$

Приближенное решение выражается также как и в методе сопряженных градиентов:

$$x_m = x_0 + P_m L_m^{-1}(\beta e_1).$$

И, аналогично методу сопряженных градиентов невязки окажутся сонаправлены векторам из базиса:

$$\begin{aligned} r_j &\parallel v_{j+1}, j = 1, \dots, m \\ r_j^* &\parallel v_{j+1}^*, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Отсюда следует, что эти наборы невязок биортогональны:

$$(r_j^*, r_i) = 0, \text{ при } 1 \leq i, j \leq m, i \neq j \quad (20)$$

Легко показать, что наборы векторов  $p_i^*, i = 1, \dots, m$  и  $p_i, i = 1, \dots, m$  - A-ортогональны:

$$(P_m^*)^T A P_m = L_m^{-1} W_m^T A V_m U_m^{-1} = L_m^{-1} T_m U_m^{-1} = I.$$

Благодаря полученным свойствам биортогональности невязок и A-биортогональности векторов направлений, аналогичным же образом можно получить короткие итерационные соотношения для получения новых векторов  $p_i, r_i, x_i$ , и записать окончательный алгоритм: К сожалению, данный метод на практике проявляет нерегулярное уменьше-

---

#### Алгоритм 5 Метод бисопряженных градиентов

---

```

1:  $r_0 \leftarrow b - Ax_0, r_0^*$  т.ч.  $(r_0^*, r_0) \neq 0$ , например  $r_0^* = r_0$ 
2:  $p_0 \leftarrow r_0, p_0^* = r_0^*$ 
3: for  $j = 0, 1, \dots$  do
4:    $\alpha_j \leftarrow (r_j^*, r_j) / (p_j^*, A p_j)$ 
5:    $x_{j+1} \leftarrow x_j + \alpha_j p_j$ 
6:    $r_{j+1} \leftarrow r_j - \alpha_j A p_j$ 
7:    $r_{j+1}^* \leftarrow r_j^* - \alpha_j A^T p_j^*$ 
8:    $\beta_j \leftarrow (r_{j+1}^*, r_{j+1}) / (r_j^*, r_j)$ 
9:    $p_{j+1} \leftarrow r_{j+1} + \beta_j p_j$ 
10:   $p_{j+1}^* \leftarrow r_{j+1}^* + \beta_j p_j^*$ 
11: end for
```

---

ние невязки и тратит вычислительные ресурсы на поиск решения двойственной задачи, которая нас не интересует. Для решения этих проблем был придуман метод стабилизированных бисопряженных градиентов.

## 2.6 Стабилизированный метод бисопряжённых градиентов [3]

Невязки, полученные при помощи метода бисопряжённых градиентов  $r_k$  и  $r_k^*$  лежат в пространствах Крылова  $K_{m+1}^r(A, r_0) = \{r_0, Ar_0, \dots, A^m r_0\}$  и  $K_{m+1}^l(A^T, r_0^*) = \{r_0^*, (A^T)r_0^*, \dots, (A^T)^m r_0^*\}$  соответственно, следовательно, их можно выразить с помощью многочлена от матрицы:

$$\begin{aligned} r_k &= \mathcal{R}_k(A)r_0 \\ r_k^* &= \mathcal{Q}_k(A^T)r_0^* \end{aligned}$$

Из вида итерационных соотношений легко видеть, что  $\mathcal{R}_k \equiv \mathcal{Q}_k$ , и  $\mathcal{R}_k(0) = 1$ .

Как было показано в предыдущем пункте, метод бисопряжённых градиентов работает за счёт поддержания ортогонализационных соотношений на невязки и вектора направлений. Преобразуем соотношение для невязок (20):

$$\begin{aligned} (r_j^*, r_i) &= 0 \\ (\mathcal{Q}_j(A^T)r_0^*, \mathcal{R}_i(A)r_0) &= (r_0^*, \mathcal{Q}_j(A)\mathcal{R}_i(A)r_0) = 0 \\ (r_0^*, \mathcal{Q}_j(A)\mathcal{R}_i(A)r_0) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Из этого же соотношения (20) следует, что  $r_j \perp K_j^l(A^T, r_0^*)$ , значит, выражение (21) верно для любого многочлена  $\mathcal{Q}_j$  порядка  $j$ . В частности рассмотрим

$$\mathcal{Q}_j(t) = (1 - \omega_0 t)(1 - \omega_1 t) \cdot \dots \cdot (1 - \omega_{j-1} t) \quad (22)$$

И будем выбирать  $\omega_j$  так, чтобы минимизировать норму  $r_i$ . Итерационные соотношения в методе бисопряжённых градиентов можно записать в полиномиальном виде:

$$\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i - t\alpha_i \mathcal{P}_i \quad (23)$$

$$\mathcal{P}_{i+1} = \mathcal{P}_i + \beta_i \mathcal{P}_i, \quad (24)$$

где аналогично невязкам  $r_i$  вектора направлений  $p_i$  были выражены через полином от матрицы системы как  $p_i = \mathcal{P}_i(A)r_0$ .

Опираясь на (21) введём обозначение для стабилизированных невязок:

$$r_i = \mathcal{Q}_i(A)\mathcal{R}_i(A)r_0 \quad (25)$$

Получим короткие итерационные соотношения для обновления стабилизированной невязки:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{i+1}(A)\mathcal{R}_{i+1}(A)r_0 &= (1 - \omega_i A)\mathcal{Q}_i(A)(\mathcal{R}_i(A) - \alpha_i \mathcal{P}_i(A))r_0 = \\ &= \{\mathcal{Q}_i(A)\mathcal{R}_i(A) - \alpha_i A\mathcal{Q}_i(A)\mathcal{P}_i(A)\}r_0 - \omega_i A\{\mathcal{Q}_i(A)\mathcal{R}_i(A) - \alpha_i A\mathcal{Q}_i(A)\mathcal{P}_i(A)\}r_0 \end{aligned}$$

Обозначим  $s_i = r_i - \alpha_i A p_i$ , тогда обновление стабилизированной невязки будет производиться по следующему соотношению:

$$r_{i+1} = s_i - \omega_i A s_i \quad (26)$$

Выберем  $\omega_i$  так, чтобы минимизировать норму невязки  $r_{i+1}$ :

$$\omega_i = \frac{(A s_i, s_i)}{(A s_i, A s_i)} \quad (27)$$

Аналогично введём обозначение для новых векторов направлений:

$$p_i = \mathcal{Q}_i(A)\mathcal{P}_i(A)r_0 \quad (28)$$

и получим рекуррентные соотношения для них:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{i+1}(A)\mathcal{P}_{i+1}(A)r_0 &= \mathcal{Q}_{i+1}(A)(\mathcal{R}_{i+1}(A) + \beta_i\mathcal{P}_i(A))r_0 \\ &= \mathcal{Q}_{i+1}(A)\mathcal{R}_{i+1}(A)r_0 + \beta_i\{\mathcal{Q}_i(A)\mathcal{P}_i(A)r_0 - \omega_i A\mathcal{Q}_i(A)\mathcal{P}_i(A)\}r_0 \\ p_{i+1} &= r_{i+1} + \beta_i(p_i - \omega_i A p_i)\end{aligned}\tag{29}$$

Теперь необходимо выразить коэффициенты  $\beta_i$ ,  $\alpha_i$  с помощью новых невязок и направлений.

$$\tilde{\rho}_{i+1} \equiv (r_0^*, r_{i+1}) = (r_0^*, \mathcal{Q}_{i+1}(A)\mathcal{R}_{i+1}(A)r_0) = (\mathcal{Q}_{i+1}(A^T)r_0^*, \mathcal{R}_{i+1}(A)r_0)$$

Как уже говорилось, для невязок, полученных при помощи метода бисопряжённых градиентов справедливо, что  $\mathcal{R}_j(A)r_0 \perp K_j^l(A^T, r_0^*)$ , следовательно от  $\mathcal{Q}_{i+1}(A^T)$  останется только  $(-1)^i \omega_0 \dots \omega_i (A^T)^i$ . В методе бисопряжённых градиентов  $\mathcal{Q}_i \equiv \mathcal{R}_i$ , следовательно,

$$\rho_{i+1} \equiv (\mathcal{R}_{i+1}(A^T)r_0^*, \mathcal{R}_{i+1}(A)r_0) = (-1)^i \alpha_0 \cdot \dots \cdot \alpha_i ((A^T)^i, \mathcal{R}_{i+1})$$

Таким образом, можно выразить  $\beta_i$  через новые невязки и направления:

$$\beta_i = \rho_{i+1}/\rho_i = (\alpha_i/\omega_i)(\tilde{\rho}_{i+1}/\tilde{\rho}_i) = \frac{(r_0^*, r_{i+1})}{(r_0^*, r_i)} \frac{\alpha_i}{\omega_i}\tag{30}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\alpha_i = \frac{(r_0^*, r_i)}{(r_0^*, A p_i)}\tag{31}$$

Наконец, можно записать окончательный вид алгоритма:

---

**Алгоритм 6** Стабилизированные бисопряжённые градиенты
 

---

- 1:  $r_0 \leftarrow b - Ax_0$ ,  $r_0^*$  т.ч.  $(r_0^*, r_0) \neq 0$ , например  $r_0^* = r_0$
  - 2:  $p_0 \leftarrow r_0$ ,  $p_0^* = r_0^*$
  - 3: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 4:    $v_k \leftarrow A p_k$
  - 5:    $\alpha_k \leftarrow (r_0^*, r_k)/(r_0^*, v_k)$
  - 6:    $s_k \leftarrow r_k - \alpha_k v_k$
  - 7:    $t_k \leftarrow A s_k$
  - 8:    $\omega_k = (t_k, s_k)/(t_k, t_k)$
  - 9:    $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_j p_j + \omega_k s_k$
  - 10:    $r_{k+1} \leftarrow r_k - \omega_k A t_k$
  - 11:    $\beta_k \leftarrow \frac{(r_0^*, r_{k+1})}{(r_0^*, r_k)} \frac{\alpha_k}{\omega_k}$
  - 12:    $p_{k+1} \leftarrow r_{k+1} + \beta_k(p_k - \omega_k v_k)$
  - 13: **end for**
- 

## 2.7 Блочный метод бисопряжённых градиентов [1]

Для решения линейных систем с многими правыми частям  $AX = B$ , где  $A$  - невырожденная  $N \times N$  матрица,  $B$  -  $N \times s$  блок (матрица) правых частей с полным рангом, блочный метод бисопряжённых градиентов строит 2 набора блоков направлений:  $\{P_0, \dots, P_k\}$  и  $\{\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_k\}$ , чьи столбцы своей линейной оболочкой порождают блочные пространства Крылова  $K_{k+1}^r(A, R_0) = \{R_0, AR_0, \dots, A^k R_0\}$ , где  $R_0 = B - AX_0$  и

$K_{k+1}^l(A^T, \tilde{R}_0) = \{\tilde{R}_0, A^T \tilde{R}_0, \dots, (A^T)^k \tilde{R}_0\}$ , где  $\tilde{R}_0$  - произвольная  $N \times s$  матрица (фигурные скобки обозначают линейную оболочку столбцов матриц в наборе), и два набора блоков невязок:  $\{R_0, \dots, R_k\}$  и  $\{\tilde{R}_0, \dots, \tilde{R}_k\}$  так, чтобы для них выполнялись блочные соотношения ортогональности:

$$\tilde{R}_i^T R_j = 0, \text{ для } i < j \quad (32)$$

$$\tilde{P}_i^T A P_j = 0, \text{ для } i < j \quad (33)$$

$$R_i^T \tilde{R}_j = 0, \text{ для } i < j \quad (34)$$

$$P_i^T A \tilde{P}_j = 0, \text{ для } i < j \quad (35)$$

$$(36)$$

И выглядит он следующим образом: алгоритм останавливается, если хотя бы одна из

---

**Алгоритм 7** Блочный метод бисопряжённых градиентов

---

$X_0$  -  $N \times s$  блок начальных приближений,  $R_0 = B - AX_0$

$\tilde{R}_0$  - произвольная  $N \times s$  матрица

$P_0 = R_0, \tilde{P}_0 = \tilde{R}_0$

**for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**

$\alpha_k \leftarrow (\tilde{P}_k^T A P_k)^{-1} \tilde{R}_k^T R_k$

$X_{k+1} \leftarrow X_k + P_k \alpha_k$

$R_{k+1} \leftarrow R_k - A P_k \alpha_k$

$\tilde{\alpha}_k = (P_k^T A^T \tilde{P}_k)^{-1} R_k^T \tilde{R}_k$

$\beta_k = (\tilde{R}_k^T R_k)^{-1} \tilde{R}_{k+1}^T R_{k+1}$

$\tilde{\beta}_k = (R_k^T \tilde{R}_k)^{-1} R_{k+1}^T \tilde{R}_{k+1}$

$P_{k+1} = R_{k+1} + P_k \beta_k$

$\tilde{P}_{k+1} = \tilde{R}_{k+1} + \tilde{P}_k \tilde{\beta}_k$

**end for**

---

матриц:  $\tilde{P}_k^T A P_k$  или  $\tilde{R}_k^T R_k$  становится вырожденной.

При  $s = 1$  приведенный метод эквивалентен бисопряженным градиентам.

## 2.8 Блочный метод сопряженных градиентов [1]

Если матрица  $A$  - симметричная и положительно определенная и  $\tilde{R}_0 = R_0$ , то блочный метод бисопряженных градиентов превращается в блочный метод сопряженных градиентов: Важным свойством этого алгоритма является то, что для него существует

---

**Алгоритм 8** Блочный метод сопряженных градиентов

---

$X_0$  -  $N \times s$  блок начальных приближений,  $R_0 = B - AX_0$

$P_0 = R_0$

**for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**

$\alpha_k \leftarrow (P_k^T A P_k)^{-1} R_k^T R_k$

$X_{k+1} \leftarrow X_k + P_k \alpha_k$

$R_{k+1} \leftarrow R_k - A P_k \alpha_k$

$\beta_k = (R_k^T R_k)^{-1} R_{k+1}^T R_{k+1}$

$P_{k+1} = R_{k+1} + P_k \beta_k$

**end for**

---

теорема сходимости:

**Теорема 2.1.** После  $k$  шагов блочного метода сопряженных градиентов, ошибка для  $i$ -ой правой части  $e_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_i^*$  ограничена как:

$$e_i^{(k)T} A e_i^{(k)} \leq \left( \frac{1 - \sqrt{\kappa^{-1}}}{1 + \sqrt{\kappa^{-1}}} \right)^{2k} c, \quad (37)$$

где  $\kappa = \lambda_N / \lambda_s$ ,  $c$  - некоторая константа.

Если решать линейную систему с многими правыми частями для каждой правой части в отдельности методом сопряженных градиентов, то скорость сходимости будем определяться числом обусловленности системы:  $\kappa = \lambda_N / \lambda_1$ . Если же решать блочным методом сопряженных градиентов, то скорость сходимости определяется не нижней границей спектра  $\lambda_1$ , а  $s$ -ой снизу компонентой  $\lambda_s$ , что может существенно повысить скорость сходимости.

## 2.9 Блочный стабилизированный метод бисопряженных градиентов [4]

Блочное обобщение стабилизированных бисопряженных градиентов производится при помощи матричнозначных полиномов. Так что следует рассмотреть их определение и некоторые свойства.

### 2.9.1 Матричнозначные полиномы

**Определение 2.2.** Матричнозначным полиномом  $\mathcal{P}$  порядка  $k$  называется полином вида:

$$\mathcal{P}(t) = \sum_{i=0}^k t^i \Omega_i,$$

где  $\Omega_i$  -  $s \times s$  матрица, а  $t$  - число.

**Определение 2.3** (Операции с матричнозначными полиномами).

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) \circ Y &= \sum_{i=0}^k A^i Y \Omega_i, \text{ где } Y - N \times s \text{ матрица} \\ (\mathcal{P}\Theta)(t) &= \sum_{i=0}^k t^i \Omega_i \Theta, \text{ где } \Theta - s \times s \text{ матрица} \end{aligned}$$

**Утверждение 2.1** (Свойства операций с матричнозначными полиномами).

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(A) \circ Y) \Theta &= (\mathcal{P}\Theta)(A) \circ Y \\ (\mathcal{P} + \mathcal{Q})(A) \circ Y &= \mathcal{P}(A) \circ Y + \mathcal{Q}(A) \circ Y \end{aligned}$$

### 2.9.2 Алгоритм

Пользуясь свойствами из утверждения 2.1, аналогично методу бисопряженных градиентов можно выразить блок невязок и блок направлений с помощью матричнозначного полинома от матрицы системы:

$$R_k = \mathcal{R}_k(A) \circ R_0 \quad (38)$$

$$P_k = \mathcal{P}_k(A) \circ R_0 \quad (39)$$

$$\mathcal{R}_{k+1}(t) = \mathcal{R}_k(t) - t \mathcal{P}(t) \alpha_k \quad (40)$$

$$\mathcal{P}_{k+1}(t) = \mathcal{R}_{k+1}(t) + \mathcal{P}(t) \beta_k \quad (41)$$

$$\mathcal{P}_0(t) = \mathcal{R}_0(t) = I_s \quad (42)$$

Для того, чтобы записать свойства ортогональности в терминах матричнозначных полиномов полезно ввести определения двух функционалов:

**Определение 2.4.**

$$C(\mathcal{P}) \equiv \tilde{R}_0^T(\mathcal{P}(A) \circ R_0) \quad (43)$$

$$C^{(1)}(\mathcal{P}) \equiv C(t\mathcal{P}) \quad (44)$$

Свойства ортогональности для блока невязок и блока направлений:

**Утверждение 2.2.**

$$C(\mathcal{R}_k \mathcal{T}_i) = 0, \text{ для } i < k \quad (45)$$

$$C^{(1)}(\mathcal{P}_k \mathcal{T}_i) = 0, \text{ для } i < k \quad (46)$$

*Доказательство.* Из свойства ортогональности для блочного метода бисопряжённых градиентов (32) следует, что

$$R_k \perp K_k(A^T, \tilde{R}_0),$$

следовательно, для  $i < k$

$$\tilde{R}_0^T A^i R_k = 0,$$

и воспользуемся определением полиномов  $\mathcal{R}_k$  (38):

$$\tilde{R}_0^T(A^i \mathcal{R}_k(A)) \circ R_0 = 0,$$

откуда сразу же следует первое утверждение, которое требовалось доказать. По рекуррентной формуле (40):

$$AP_k = (R_k - R_{k+1})\alpha_k^{-1}.$$

Применив это выражение, первое доказанное утверждение и определение (39), получаем для  $i < k$ :

$$C^{(1)}(t^i \mathcal{P}_k) = \tilde{R}_0^T(A^{i+1} \mathcal{P}_k(A) \circ R_0) = \tilde{R}_0^T A^{i+1} P_k = \tilde{R}_0^T A^i (R_k - R_{k+1})\alpha_k^{-1} = 0,$$

откуда сразу следует второе утверждение, которое требовалось доказать.  $\square$

Рассмотрим матричнозначные полиномы  $\mathcal{Q}_k$ , которые задаются рекуррентной формулой:

$$\mathcal{Q}_{k+1} = (1 - \omega_k t) \mathcal{Q}_k(t),$$

где  $\omega_k$  - скалярная матрица. И будем выбирать  $\omega_k$  такой, чтобы минимизировать норму Фробениуса блока стабилизированных невязок, для которых введём переобозначение  $R_k \equiv (\mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k(A)) \circ R_0$ , и для которых, аналогично стабилизированному методу бисопряжённых градиентов, справедлива рекуррентная формула:

$$R_{k+1} = S_k - \omega_k A S_k,$$

из которой следует, что  $\omega_k$  выражается как

$$\omega_k = \frac{\langle A S_k, S_k \rangle_F}{\langle A S_k, A S_k \rangle_F}.$$

Также введём переобозначение для стабилизированных направлений  $P_k \equiv (\mathcal{Q}_k \mathcal{P}_k(A)) \circ R_0$ .

Используя утверждение 2.2 и рекуррентное соотношение (40), найдём выражения для  $\alpha_k$ :

$$C(\mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k) = C^{(1)}(\mathcal{Q}_k \mathcal{P}_k) \alpha_k$$

Переводя в матричную запись, получаем линейную систему на  $\alpha_k$ :

$$(\tilde{R}_0^T A P_k) \alpha_k = \tilde{R}_0^T R_k$$

Аналогично, используем утверждение 2.2 и рекуррентное соотношение (41), чтобы получить линейную систему на матрицу коэффициентов  $\beta_k$ :

$$C^{(1)}(\mathcal{Q}_k \mathcal{R}_{k+1}) = -C^{(1)}(\mathcal{Q}_k \mathcal{P}_k) \beta_k,$$

в матричном виде это выражение имеет вид:

$$(\tilde{R}_0^T A P_k) \beta_k = -\tilde{R}_0^T A S_k$$

Итак, итоговый вид алгоритма:

---

**Алгоритм 9** Блочный стабилизированный метод бисопряжённых градиентов

---

- 1:  $X_0$  - блок начальных приближений,  $R_0 = B - A X_0$  - блок начальных невязок
  - 2:  $P_0 = R_0$
  - 3:  $\tilde{R}_0$  - произвольная  $N \times s$  матрица
  - 4: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 5:    $V_k = A P_k$
  - 6:    $\alpha_k = (\tilde{R}_0^T V_k)^{-1} (\tilde{R}_0^T R_k)$
  - 7:    $S_k = R_k - V_k \alpha_k$
  - 8:    $T_k = A S_k$
  - 9:    $\omega_k = \frac{\langle T_k, S_k \rangle_F}{\langle T_k, T_k \rangle_F}$
  - 10:    $X_{k+1} = X_k + P_k \alpha_k + \omega_k S_k$
  - 11:    $R_{k+1} = S_k - \omega_k T_k$
  - 12:    $\beta_k = (\tilde{R}_0^T V_k)^{-1} (-\tilde{R}_0^T T_k)$
  - 13:    $P_{k+1} = R_{k+1} + (P_k - \omega_k V_k) \beta_k$
  - 14: **end for**
- 

Однако этот метод, как будет показано в разделе 5, данный метод не сходится с большим количеством правых частей, и показывает слабое уменьшение числа итераций с увеличением размера блока в задаче электромагнитного рассеяния [5]. В разделе 3 будут представлены шаги для повышения устойчивости вычислений.

## 2.10 Блочный симметричный метод квазимиимальных невязок [6]



### 3 Улучшения блочного метода стабилизированных бисопряжённых градиентов

В данной главе предложены изменения, направленные на улучшение стабильности блочного метода бисопряжённых градиентов.

#### 3.1 Реортогонализация для поддержания биортогональных соотношений

Для построения базиса в крыловском пространстве и построения невязок алгоритм строится таким образом, чтобы поддерживать следующие соотношения ортогональности:

$$C(\mathbf{Q}_k \mathbf{R}_{k+1}) = 0, \quad (47)$$

$$C^{(1)}(\mathbf{Q}_k \mathbf{P}_k) = 0. \quad (48)$$

Для построения процедуры реортогонализации эти полиномиальные соотношения необходимо перевести в матричный вид. Используя полиномиальное соотношение для  $\mathbf{R}_{k+1}$ , получаем:

$$\mathbf{Q}_k \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k - t \mathbf{Q}_k \mathbf{P}_k \alpha_k \implies S_k = R_k - A P_k \alpha_k$$

Тогда выражение (47) можно представить в виде:

$$\tilde{R}_0^* S_k = 0. \quad (49)$$

В точной арифметике это соотношение выполняется строго, однако при вычислениях на компьютере соотношение (49) выполняется с какой-то погрешностью. Для существенного уменьшения этой погрешности можно произвести ортогонализацию еще раз, взяв  $S_k$  в качестве блока, к которому производится ортогонализация:

$$S_k^r = S_k - A P_k \alpha_k^r. \quad (50)$$

При этом мы стремимся поддерживать соотношение  $\tilde{R}_0^* S_k^r = 0$  с уточненным блоком  $S_k^r$ . Тогда, домножая обе части выражения (50) слева на  $\tilde{R}_0$ , получим уравнение для поправки  $\alpha_k^r$ :

$$(\tilde{R}_0^T A P_k) \alpha_k^r = \tilde{R}_0^T S_k.$$

Аналогичным образом рассмотрим (48). Используя полиномиальное соотношение для  $P_{k+1}$ , получаем следующее выражение:

$$t \mathbf{Q}_k \mathbf{P}_{k+1} = t \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_{k+1} + t \mathbf{Q}_k \mathbf{P}_k. \quad (51)$$

Введем обозначение  $W_k \equiv (t \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_{k+1})(A) \circ R_0$ . Тогда выражение (51) можно записать в матричном виде:

$$W_k = A S_k + A P_k \beta_k. \quad (52)$$

Тогда выражение (48) можно представить в виде:

$$\tilde{R}_0^* W_k = 0. \quad (53)$$

Аналогично получаем соотношения реортогонализации для (53):

$$W_k^r = W_k + A P_k \beta_k^r$$

Поправка  $\beta_k$  определяется уравнением:

$$(\tilde{R}_0^* A P_k) \beta_k^r = -\tilde{R}_0^* W_k$$

Следующим шагом получим формулу для вычисления  $P_{k+1}$  с учетом введенных обозначений

$$\begin{aligned} Q_{k+1}P_{k+1} &= Q_{k+1}(R_{k+1} + P_k\beta_k) = \\ &= Q_k R_{k+1} - \omega_k t Q_k R_{k+1} + (1 - \omega_k t) Q_k P_k \beta_k = \\ &= Q_k R_{k+1} - \omega_k t Q_k P_{k+1} + Q_k P_k \beta_k \end{aligned}$$

В матричном виде это выражение записывается как:

$$P_{k+1} = S_{k+1} + P_k \beta_k - \omega_k W_k$$

Для дополнительной минимизации нормы невязки поддерживается следующее соотношение:

$$\langle AS_k, R_{k+1} \rangle_F = 0$$

Для этого выражения также можно выписать процедуру реортогонализации:

$$\begin{aligned} R_{k+1}^r &= R_{k+1} - \omega_k^r T_k \\ \omega_k^r &= \frac{\langle R_{k+1}, T_k \rangle_F}{\langle T_{k+1}, T_k \rangle_F} \end{aligned}$$

### 3.2 Ортогонализация векторов направлений и проверочных невязок

В Алгоритме 10 приведён метод, предложенный в статье [4]. Красным отмечены все места где используется блок векторов направлений  $P_k$ . Легко видеть, что он везде входит в алгоритм вместе матрицей коэффициентов ( $\alpha_k$  и  $\beta_k$ ). Так что если сделать замену  $P_k \leftarrow P_k U$ , где  $U$  -  $s \times s$  матрица, то изменятся лишь сами матрицы коэффициентов, в то время как сами выражения в алгоритме останутся неизменными. Так что

---

#### Алгоритм 10 Блочные стабилизированные бисопряженные градиенты

---

```

 $X_0$  - начальное приближение
 $R_0 = B - AX_0$ 
 $P_0 = R_0$ 
 $\tilde{R}_0$  - произвольная  $N \times s$  матрица
for  $k = 0, 1, 2, \dots$  do
    решить  $\tilde{R}_0^T A P_k \alpha_k = \tilde{R}_0^T R_k$ 
     $S_k = R_k - A P_k \alpha_k$ 
     $T_k = AS_k$ 
     $\omega_k = \frac{\langle T_k, S_k \rangle_F}{\langle T_k, T_k \rangle_F}$ 
     $X_{k+1} = X_k + P_k \alpha_k + \omega_k S_k$ 
     $R_{k+1} = S_k - \omega_k T_k$ 
    решить  $\tilde{R}_0^T A P_k \beta_k = -\tilde{R}_0^T T_k$ 
     $P_{k+1} = R_{k+1} + P_k \beta_k - \omega_k A P_k \beta_k$ 
end for
    
```

---

можно попробовать подобрать такую  $U$ , чтобы вычисления стали более устойчивыми. Например, можно сделать  $QR$ -разложение матрицы  $P_k$ :

$$P_k = Q_{P_k} R_{P_k},$$

и в качестве  $U$  взять  $R_{P_k}^{-1}$ . Такой выбор  $U$  повлечет ортогонализацию  $P_k$ , что должно улучшить стабильность операций проектирования на вектора направлений.

Как указано в алгоритме 10,  $\tilde{R}_0$  - произвольная матрица, обычно ее выбирают равной  $R_0$ . Аналогично для улучшения стабильности предлагается сделать  $QR$ -разложение матрицы  $R_0$ :

$$R_0 = Q_R R_R,$$

и сделать замену  $\tilde{R}_0 \rightarrow Q_R$ .

### 3.3 Выбор правых частей

Алгоритм перестает сходиться, если блок невязок становится почти вырожденным, поэтому предлагается на этапе инициализации алгоритма сделать  $RRQR$ -разложение блока правых частей, рассмотреть получившуюся перестановку, и выбрать несколько правых частей с номерами, соответствующим первым номерам в перестановке. Благодаря такому выбору рассматривается более линейно-независимый набор столбцов, что положительно сказывается на сходимости.

### 3.4 Алгоритм

---

**Алгоритм 11** Регуляризованный блочный метод стабилизированных бисопряженных градиентов

---

$X_0$  - начальное приближение;  
 $R_0 = B - AX_0$ ;  
 $P_0 = R_0$ ;  
 $R_0 = \tilde{Q}\tilde{U}$  -  $QR$ -разложение  $R_0$ ;  
 $\tilde{R}_0 = \tilde{U}$ ;  
**for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**  
     $P_k = QU$  -  $QR$ -разложение  $P_k$ ;  
     $P_k \rightarrow P_k U^{-1}$ ;  
     $V_k = AP_k$ ;  
    решить  $(\tilde{R}_0^* V_k) \hat{\alpha}_k = \tilde{R}_0^* R_k$ ;  
     $\hat{S}_k = R_k - V_k \hat{\alpha}_k$ ;  
    решить  $(\tilde{R}_0^* V_k) \alpha_k = \tilde{R}_0^* \hat{S}_k$ ;  
     $S_k = \hat{S}_k - V_k \alpha_k$ ;  
     $T_k = AS_k$ ;  
     $\hat{\omega}_k = \langle S_k, T_k \rangle_F / \langle T_k, T_k \rangle_F$ ;  
     $\hat{R}_{k+1} = S_k - \hat{\omega}_k T_k$ ;  
     $\omega_k = \langle \hat{R}_{k+1}, T_k \rangle_F / \langle T_k, T_k \rangle_F$ ;  
     $R_{k+1} = \hat{R}_{k+1} - \omega_k T_k$ ;  
     $X_{k+1} = X_k + P_k(\hat{\alpha}_k + \alpha_k) + (\hat{\omega}_k + \omega_k) S_k$ ;  
    решить  $(\tilde{R}_0^* V_k) \hat{\beta}_k = -\tilde{R}_0^* T_k$ ;  
     $\hat{W}_k = T_k + V_k \hat{\beta}_k$ ;  
    решить  $(\tilde{R}_0^* V_k) \beta_k = -\tilde{R}_0^* \hat{W}_k$ ;  
     $W_k = \hat{W}_k + V_k \beta_k$ ;  
     $P_{k+1} = S_k + P_k(\beta_k + \hat{\beta}_k) - (\hat{\omega}_k + \omega_k) W_k$ ;  
**end for**

---

### 3.5 Проблемы

В данном алгоритме возможны аварийные остановки, в случаях, когда матрица  $\tilde{R}_0^* AP_k$  становится вырожденной. В такой ситуации авторы [4] предлагают провести рестарт с другой  $\tilde{R}_0$ .

Но главным недостатком алгоритма [4] является выбор  $\omega$  в виде скалярной матрицы, из-за этого чем больше размер блока мы берем для расчета, тем меньше по модулю становится  $\omega$ , что в свою очередь ведет к стагнации алгоритма. Наша модификация алгоритма также страдает от этой проблемы. Была надежда, что получится обобщить метод на случай, когда  $\omega_k$  - произвольная  $s \times s$  матрица, но в ходе исследования выяснилось, что это невозможно из-за некоммутативности матричнозначных полиномов, которая не позволяет получить короткие итерационные формулы.

## 4 Модификация блочного симметричного метода квазимиимальных невязок

Один из ключевых элементов блочного симметричного метода квазимиимальных невязок [6] является процесс Грамма-Шмидта с квазискалярным произведением. Далее будет представлена модификация этого алгоритма, использующая настоящее QR-разложение. Благодаря этому невязка на шаге алгоритма окажется ближе к настоящей невязке. Немаловажно и то, что квази-QR в некотором роде эквивалентно  $LL^T$  разложению матрицы  $V^T V$ , причём это разложение выполняется без выбора ведущего элемента. В отличие от разложения Холецкого, для которого из-за положительной определенности матрицы следует, что все ведущие миноры положительно определены и обусловлены не хуже, чем вся матрица, и поэтому для него выбор ведущего элемента не так существен, здесь это является проблемой, поэтому важно модифицировать алгоритм, не использующим квази-QR-разложение. В дополнение ко всему вышесказанному, при этом становится возможным использование устойчивых реализаций QR-разложения и применение их библиотечных реализаций.

Блочный симметричный процесс Ланцоша приводит к следующему матричному соотношению:

$$A \begin{bmatrix} V_1 & \dots & V_k & V_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & \dots & V_k & V_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \delta_2 & \\ & \beta_3 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \alpha_{k-1} & \delta_{k-1} \\ & & & \beta_k & \alpha_k \\ & & & & \beta_{k+1} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

где  $\delta_{i-1} = \beta_i^T$  в версии из статьи [6], в нашей модификации же получится другой вид для этой матрицы коэффициентов. Из (54) для  $k$ -го блока следует:

$$AV_k = V_{k-1}\delta_{k-1} + V_k\alpha_k + V_{k+1}\beta_{k+1} \quad (55)$$

При построении базиса в блочном крыловском пространстве, требуется выполнение следующего свойства:

$$V_i^T V_j = 0, i \neq j \quad (56)$$

Домножая слева выражение (55) на  $V_{k-1}^T$  и используя соотношение (56) получаем системы линейных уравнений на матрицу  $\delta_{k-1}$ :

$$V_{k-1}^T V_{k-1} \delta_{k-1} = V_{k-1}^T AV_k. \quad (57)$$

Сделав замену в (55) вида  $k \rightarrow k-1$  и учтя выражение (57) выразим  $\delta_{k-1}$  через  $\beta_k$ :

$$V_{k-1}^T V_{k-1} \delta_{k-1} = \beta_k^T V_k^T V_k.$$

Введем обозначение  $\gamma_k = V_k^T V_k$ .

Тогда окончательный вид для  $\delta_{k-1}$ :

$$\delta_{k-1} = \gamma_{k-1}^{-1} \beta_k^T \gamma_k. \quad (58)$$

Аналогично  $\delta_{k-1}$  из (55) получим системы линейных уравнений на  $\alpha_k$ :

$$\gamma_k \alpha_k = V_k^T AV_k.$$

И воспользовавшись свойством (56) преобразуем выражение для  $\alpha_k$ :

$$\alpha_k = \gamma_k^{-1} V_k^T (AV_k - V_{k-1} \delta_{k-1}). \quad (59)$$

Выбор  $\beta_{k+1}$  является произвольным и определяется целями исследователя, в предлагаемой модификации  $\beta_{k+1}$  выбрано таким, чтобы выполнялось соотношение  $V_{k+1}^* V_{k+1} = I$ , где  $I$  - единичная  $s \times s$  матрица. Этого можно достичь с помощью QR-разложения:

$$V_{k+1}, \beta_{k+1} \xleftarrow{QR} AV_k - V_{k-1} \delta_{k-1} - V_k \alpha_k. \quad (60)$$

Этот выбор обладает рядом преимуществ:

1. получение QR-разложения в сравнении с квази-QR-разложением является более устойчивой операцией,
2. на первой итерации алгоритм ведёт себя как обобщённый метод минимальных невязок, что обеспечивает на первой итерации достижение точного минимума невязки в построенном к этому моменту пространстве Крылова, что в свою очередь предотвращает большие скачки невязки на первых итерациях, как это наблюдается в алгоритме из статьи [6].

Однако с этими изменениями метод все еще не сходится в задаче электромагнитного рассеяния [5] в одинарной точности, поэтому необходимо получить более устойчивые формулы для рекуррентных соотношений.

Для этого можно производить квази-реортогонализацию для поддержания соотношения (56). Поправка к  $V_{k+1}$ :

$$V_{k+1} = V_{k-1} \tilde{\delta}_{k-1} + V_k \tilde{\alpha}_k + \tilde{V}_{k+1} \tilde{\beta}_{k+1}, \quad (61)$$

где  $\tilde{V}_{k+1}$  - более точно вычисленный блок  $V_{k+1}$ . Используя (56), получим формулы для поправок:

$$\tilde{\delta}_{k-1} = \gamma_{k-1}^{-1} V_{k-1}^T V_{k+1} \quad (62)$$

$$\tilde{\alpha}_k = \gamma_k^{-1} V_k^T V_{k+1} \quad (63)$$

$$\tilde{V}_{k+1} \tilde{\beta}_{k+1} \xleftarrow{QR} V_{k+1} - V_{k-1} \tilde{\delta}_{k-1} - V_k \tilde{\alpha}_k \quad (64)$$

Подставим (61) в (55):

$$AV_k = V_{k-1}(\delta_{k-1} + \tilde{\delta}_{k-1} \beta_{k+1}) + V_k(\alpha_k + \tilde{\alpha}_k \beta_{k+1}) + \tilde{V}_{k+1} \beta_{k+1} \tilde{\beta}_{k+1} \quad (65)$$

Таким образом, матрицы коэффициентов после реортогонализации имеют вид:

$$\delta_{k-1}^r = \delta_{k-1} + \tilde{\delta}_{k-1} \beta_{k+1} \quad (66)$$

$$\alpha_k^r = \alpha_k + \tilde{\alpha}_k \beta_{k+1} \quad (67)$$

$$\beta_{k+1}^r = \beta_{k+1} \tilde{\beta}_{k+1} \quad (68)$$

Также предлагается перед рассмотренной квази-реортогонализацией провести реортогонализацию для QR-разложения (60) стандартным образом:

$$V_{k+1}, \beta_{k+1} \xleftarrow{QR} AV_k - V_{k-1} \delta_{k-1} - V_k \alpha_k \quad (69)$$

$$V_{k+1}^r, \tilde{\beta}_{k+1} \xleftarrow{QR} V_{k+1} \quad (70)$$

$$\beta_{k+1}^r = \tilde{\beta}_{k+1} \beta_{k+1}. \quad (71)$$

Окончательный вид алгоритма, красным отмечена процедура реортогонализации:

---

**Алгоритм 12** Модифицированный блочный симметричный метод квазимиимальных невязок
 

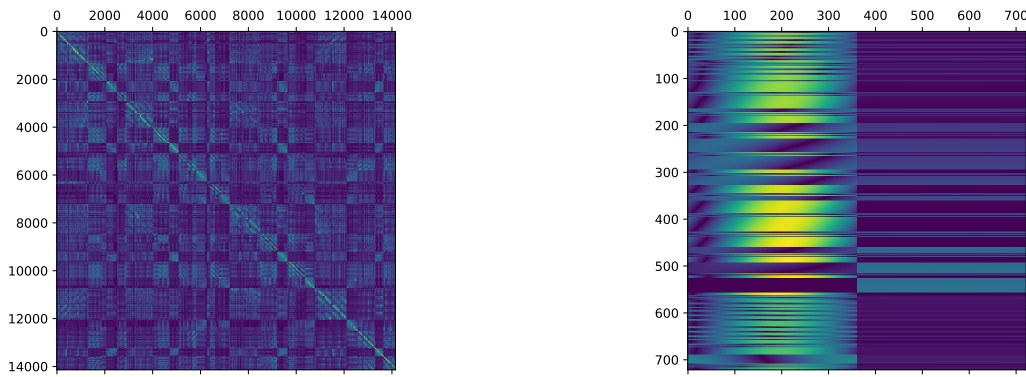
---

$V_0 = P_0 = P_{-1} = 0_{N \times s}$ ,  $N$  - размер матрицы  $A$ ,  $s$  - количество правых частей.  
 $c_0 = b_{-1} = b_0 = 0_{s \times s}$   
 $a_0 = d_{-1} = d_0 = I_{s \times s}$   
 $R_0 = B - AX_0$   
 $V_1, \beta_1 \xleftarrow{QR} R_0$   
 $\gamma_0 = I_{s \times s}$   
 $\gamma_1 = V_1^T V_1$   
 $\tilde{\tau}_1 = \beta_1$   
**for**  $k = 1, \dots$  **do**  
      $\delta_{k-1} = \gamma_{k-1}^{-1} \beta_k^T \gamma_k$   
      $\tilde{V}_{k+1} = AV_k - V_{k-1} \delta_{k-1}$   
      $\alpha_k = \gamma_k^{-1} V_k^T \tilde{V}_{k+1}$   
      $\tilde{V}_{k+1} = \tilde{V}_{k+1} - V_k \alpha_k$   
      $V_{k+1}, \beta_{k+1} \xleftarrow{QR} \tilde{V}_{k+1}$   
      $V_{k+1}, \tilde{\beta}_{k+1} \xleftarrow{QR} V_{k+1}$   
      $\beta_{k+1} \leftarrow \beta_{k+1} \beta_{k+1}$   
      $\tilde{\alpha}_k = \gamma_k^{-1} V_k^T V_{k+1}$   
      $\alpha_k \leftarrow \alpha_k + \tilde{\alpha}_k \beta_{k+1}$   
      $V_{k+1} \leftarrow V_{k+1} - V_k \tilde{\alpha}_k$   
      $\tilde{\delta}_{k-1} = \gamma_{k-1}^{-1} V_{k-1}^T V_{k+1}$   
      $\delta_{k-1} \leftarrow \delta_{k-1} + \tilde{\delta}_{k-1} \beta_{k+1}$   
      $V_{k+1} \leftarrow V_{k+1} - V_{k-1} \tilde{\delta}_{k-1}$   
      $V_{k+1}, \tilde{\beta}_{k+1} \xleftarrow{QR} V_{k+1}$   
      $\beta_{k+1} \leftarrow \tilde{\beta}_{k+1} \beta_{k+1}$   
      $\gamma_{k+1} = V_{k+1}^T V_{k+1}$   
      $\theta_k = b_{k-2} \delta_{k-1}$   
      $\eta_k = a_{k-1} d_{k-2} \delta_{k-1} + b_{k-1} \alpha_k$   
      $\zeta_k = c_{k-1} d_{k-2} \delta_{k-1} + d_{k-1} \alpha_k$   
      $Q_k, \begin{bmatrix} \zeta_k \\ 0_{s \times s} \end{bmatrix} \xleftarrow{QR} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}_k \\ \omega_{k+1} \beta_{k+1} \end{bmatrix}$   
      $\begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix} \leftarrow Q_k^*$   
      $V_k = (V_k - P_{k-1} \eta_k - P_{k-2} \theta_k) \zeta_k^{-1}$   
      $\tau_k = a_k \tilde{\tau}_k$   
      $X_k = X_{k-1} + P_k \tau_k$   
      $\tilde{\tau}_{k+1} = c_k \tilde{\tau}_k$   
**end for**

---

## 5 Численные эксперименты

Тесты производились на интересующей нас задаче – линейной системе с многими правыми частями, возникающей при решении задачи электромагнитного рассеяния методом интегральных уравнений [5]. Порядок системы – 14144, количество правых частей – 722. Каждая правая часть соответствует разным углам падения, а также первая половина правых частей отличается от второй типом поляризации. При этом матрица системы является комплексной и симметричной.



(a) Матрица системы в логарифмическом масштабе (отображены модули элементов матрицы).

(b) первые 722 строки блока правых частей в логарифмическом масштабе (отображены модули элементов матрицы).

Рис. 1

На рис.1 представлен вид матрицы системы и первые 722 строки блока правых частей. Из-за разных поляризаций первая половина правых частей сильно отличается от второй половины, и если применять блочные крыловские алгоритмы к блоку правых частей, содержащему правые части из первой и второй половины одновременно, то алгоритмы могут очень плохо себя показывать в таком сценарии.

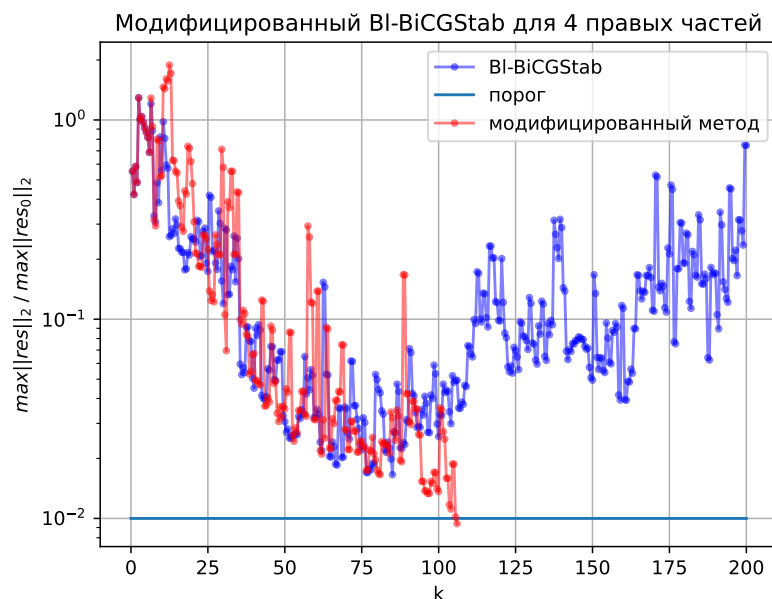


Рис. 2



Первый тест демонстрирует, что метод из статьи [4] не достигает требуемой точности, в то время как версия с улучшениями, описанными в главе 3, сходится. Эксперимент проводился в одинарной точности для четырех правых частей с номерами: 0, 90, 180, 270. Его результаты представлены на рис.2

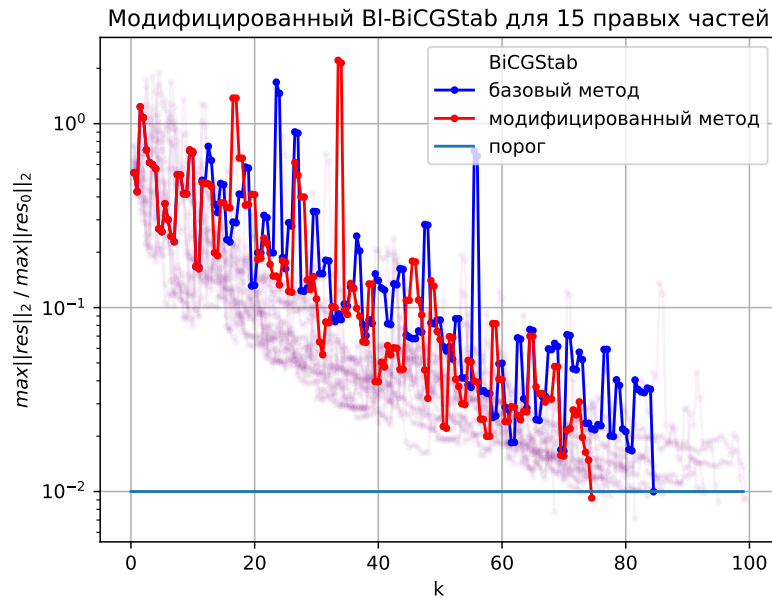


Рис. 3

Второй тест демонстрирует, что улучшения, описанные в главе 3 позволяют получить выгоду по количеству умножений матрицы системы на вектор, по сравнению с решением систем с каждой правой частью в отдельности. Эксперимент проводился в двойной точности с 15 правыми частями, выбранными с помощью RRQR. Его результаты представлены на рис.3. По оси абсцисс - количество итераций, по оси ординат - относительная максимальная невязка в блоке. Фиолетовым изображено падение невязки при решении задачи с каждой правой частью в отдельности, синим - метод из статьи [4], красным - метод с улучшениями из главы 3. Для решения этой задачи стабилизированными бисопряженными градиентами было потрачено 2525 матрично-векторных умножений (МВУ), для решения методом из статьи [4] - 2535, модифицированный метод сошелся за 2235 МВУ, таким образом выгода составил 12% по сравнению с неблочной версией.

Однако количество итераций даже при всех предложенных улучшениях все равно велико, так что было принято решение рассмотреть алгоритм на основе метода квази-минимальных невязок, описанный в главе 4.

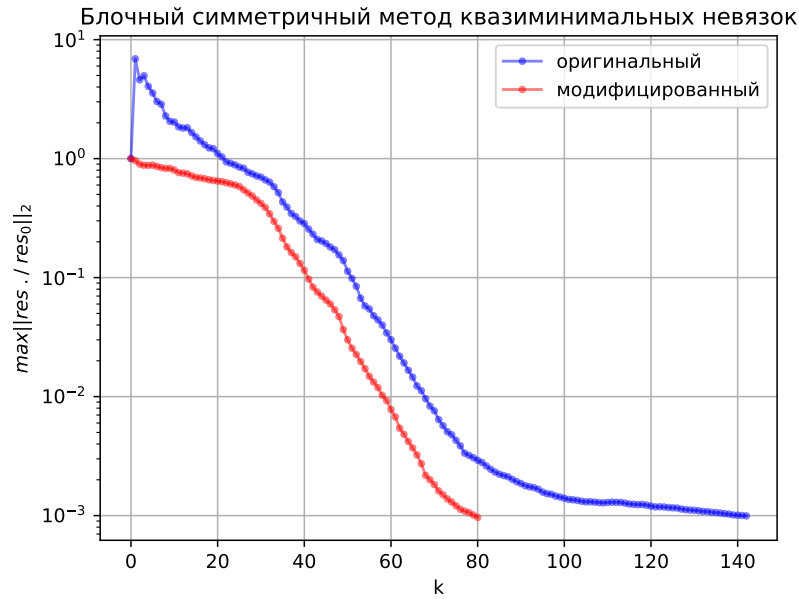


Рис. 4

На рис.4 показано уменьшение максимальной относительной невязки в блоке в зависимости от числа итераций, синяя кривая соответствует алгоритму из статьи [6], красная - модифицированному алгоритму из главы 4. Эксперимент производился в двойной точности с 45 правыми частями, остановка происходила при достижении порога  $10^{-3}$  для демонстрации различия в сходимости двух методов. Примечательным моментом является скачок на первой итерации для метода из статьи [6], которого нет в модифицированной версии по причинам, освещенным в конце главы 4.

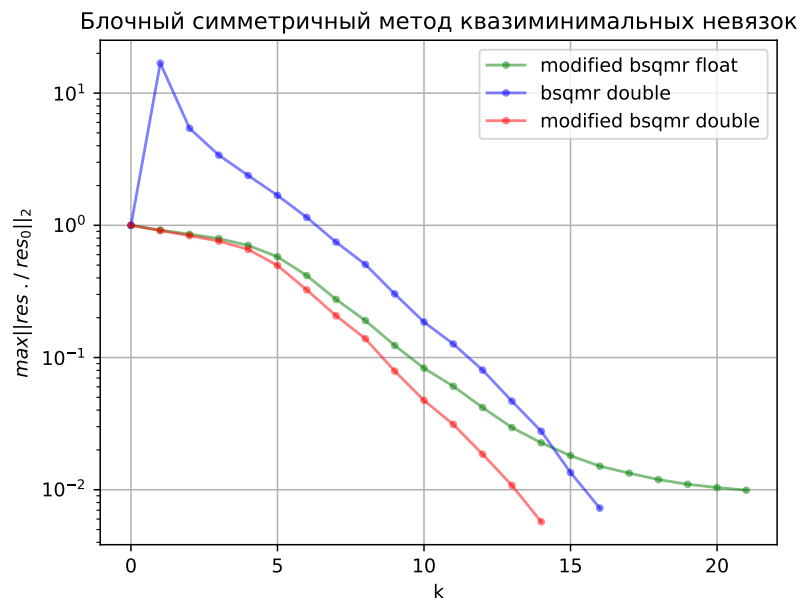


Рис. 5

На рис.5 представлены результаты расчета со всеми 722 правыми частями одновременно. Синий график представляет алгоритм из статьи [6], красный и зеленый графики - его модификацию из главы 4. Причем расчёты для синей и красной кривых выполнены

в арифметике с двойной точностью, а для зелёной - с одинарной. Немодифицированный алгоритм в одинарной точности уже на первых итерациях показывает сильную расходимость, поэтому эти расчёты не включены на график.

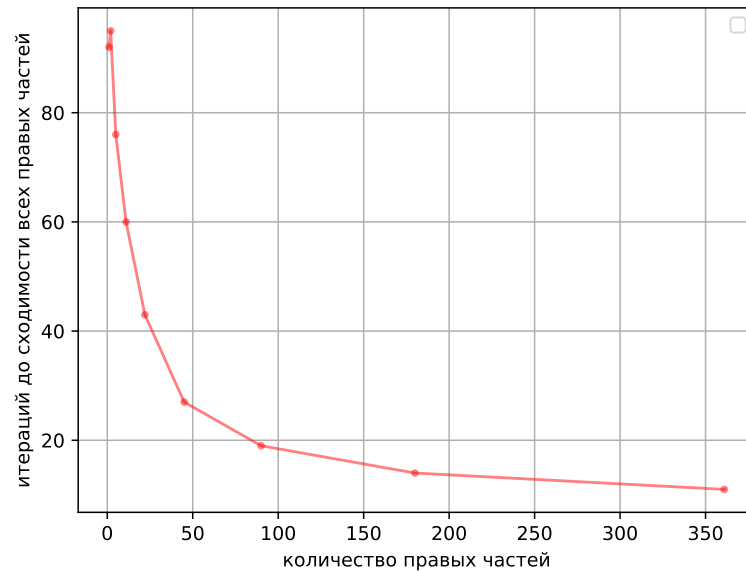


Рис. 6: Количество итераций модифицированного блочного симметричного метода квазимиимальных невязок в зависимости от количества задействованных правых частей

На рис.6 изображена зависимость количества итераций блочного симметричного метода квазимиимальных невязок в зависимости от количества задействованных правых частей для первых 361 правой части в задаче электромагнитного рассеяния [5]. Видно, что количество итераций уменьшается с увеличением размера блока, следовательно, уменьшается и размер задействованного для решения крыловского пространства.

## 6 Заключение

Результаты

Нерешенные проблемы редукции блока

## Список литературы

- [1] *O’Leary, Dianne P.* The block conjugate gradient algorithm and related methods / Dianne P. O’Leary // *Linear Algebra and its Applications*. — 1980. — Vol. 29. — Pp. 293–322. — Special Volume Dedicated to Alson S. Householder. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379580902475>.
- [2] *Saad, Yousef.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems / Yousef Saad. — 2nd edition. — Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [3] *van der Vorst, H. A.* Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems / H. A. van der Vorst // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. — 1992. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 631–644. <https://doi.org/10.1137/0913035>.
- [4] *el Guennouni A., Jbilou K. Sadok H.* A block version of BiCGSTAB for linear systems with multiple right-hand sides. / Jbilou K. Sadok H. el Guennouni, A. // *ETNA. Electronic Transactions on Numerical Analysis [electronic only]*. — 2003. — Vol. 16. — Pp. 129–142. <http://eudml.org/doc/124803>.
- [5] *Stavtsev, S. L.* Application of Mosaic-Skeleton Approximations for Solving EFIE / S. L. Stavtsev, E. E. Tyrtysnikov // Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS) 2009 Proceedings. — PIERS Proceedings. — Moscow, Russia: The Electromagnetics Academy, 2009. — Abstracts published in PIERS 2009 Moscow (ISBN 978-1-934142-09-7). <https://piers.org/proceedings/piers2009proc.html>.
- [6] *Boyse, William E.* A Block QMR Method for Computing Multiple Simultaneous Solutions to Complex Symmetric Systems / William E. Boyse, Andrew A. Seidl // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 1996. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 263–274. <https://doi.org/10.1137/0917019>.