

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Блочные методы типа бисопряжённых градиентов

Автор:

Студент 101а группы
Козлов Николай Андреевич

Научный руководитель:

н.с.,к.ф.-м.н.
Желтков Дмитрий Александрович



Москва 2025

Аннотация

Блочный BiCGStab и его друзья
Козлов Николай Андреевич

Краткое описание задачи и основных результатов, мотивирующее
прочитать весь текст.

Abstract

Block BiCGStab and his friends

Содержание

1	Введение	4
2	Обзор существующих решений	5
2.1	Метод сопряженных градиентов	5
2.2	Метод бисопряженных градиентов	5
2.3	Метод стабилизированных бисопряженных градиентов	5
2.4	Метод блочных сопряженных градиентов	5
2.5	Метод блочных бисопряженных градиентов	5
2.6	Метод блочных стабилизированных бисопряженных градиентов	5
2.6.1	Матричнозначные полиномы	5
2.6.2	Алгоритм	5
3	Исследование и построение решения задачи	6
3.1	Реортогонализация для поддержания биортогональных соотношений . . .	6
3.2	Ортогонализация векторов направлений и проверочных невязок	6
3.3	Выбор правых частей	6
3.4	Проблемы	6
4	Численные эксперименты	7
5	Заключение	8

1 Введение

В ряде приложений возникают большие линейные системы с многими правыми частями. такую задачу можно записать в блочном виде:

$$AX = B,$$

где A - $N \times N$ невырожденная разреженная матрица системы; B - $N \times s$ невырожденная матрица, столбцы - правые части; X - $N \times s$ матрица, столбцы - решения для соответствующих правых частей. Также еще предполагаем, что $s \ll N$. Такие задачи можно решать прямыми методами, однако они не подходят для больших задач из-за кубической асимптотики. Так что естественным является использование блочных крыловских методов.

В преимущества блочных крыловских методов входят: высокая производительность на вычислительных системах за счет блочных операций, Более быстрая сходимость, по сравнению с неблочными методами [DIANNE O'LEARY]; в задачах со структурированными системами (например МКЭ) БКМ не разрушают структуру, в отличие от прямых методов. Чрезвычайно большие системы, которые не помещаются целиком в оперативную память можно решать с помощью блочных крыловских методов.

<Рассказ про блочные крыловские методы.>

Для наших целей мы хотим построить крыловские методы, отвечающие следующим требованиям: методы должны находить решения систем общего вида, то есть, которые не обязательно являются эрмитовыми; методы не должны требовать сохранения всего крыловского пространства, то есть должны давать короткие итерационные соотношения; методы должны поддерживать оптимальный размер блока.

2 Обзор существующих решений

Здесь надо рассмотреть все существующие решения поставленной задачи, но не просто пересказать, в чем там дело, а оценить степень их соответствия тем ограничениям, которые были сформулированы в постановке задачи.

2.1 Метод сопряженных градиентов

[YOUSEF SAAD ITERATIVE METHODS FOR SPARSE LINEAR SYSTEMS SECOND EDITION]

2.2 Метод бисопряженных градиентов

[YOUSEF SAAD ITERATIVE METHODS FOR SPARSE LINEAR SYSTEMS SECOND EDITION]

2.3 Метод стабилизированных бисопряженных градиентов

[VAN DER VORST BI-CGSTAB: A FAST AND SMOOTHLY CONVEGRING VARIANT OF BI-CG FOR THE SOLUTION OF NONSYMMETRIC LINEAR SYSTEMS]

2.4 Метод блочных сопряженных градиентов

[DIANNE P. O'LEARY THE BLOCK CONJUGATE GRADIENT ALGORYTHM AND RELATED METHODS]

2.5 Метод блочных бисопряженных градиентов

[DIANNE P. O'LEARY THE BLOCK CONJUGATE GRADIENT ALGORYTHM AND RELATED METHODS]

2.6 Метод блочных стабилизированных бисопряженных градиентов

[GUENNOUNI A BLOCK VERSION OF BCGSTAB FOR LINEAR SYSTEMS WITH MULTIPLE RIGHT-HAND SIDES]

2.6.1 Матричнозначные полиномы

Проблемы со сходимостью метода из [GUENNOUNI], демонстрация в 4 главе, решение проблемы в 3 главе.

2.6.2 Алгоритм

3 Исследование и построение решения задачи

3.1 Реортогонализация для поддержания биортогональных соотношений

$$\alpha, \beta, \omega$$

3.2 Ортогонализация векторов направлений и проверочных невязок

$$P_k = Q_P R_P$$

$$\tilde{R}_0$$

3.3 Выбор правых частей

график с сингулярными числами
gqr

3.4 Проблемы

Нескалярная омега
возможные брейкдауны [GUENNOUNI]
Все равно мало правых частей

4 Численные эксперименты

4 правые части, мы сходимся, они нет, считаем в одинарной точности

15 правых частей, уменьшения числа итераций, считаем в двойной точности

более 30 правых частей, демонстрация отсутствия взрыва невязки

5 Заключение

Результаты

Нерешенные проблемы редукции блока

Список литературы

- [1] *Mott-Smith, H.* The theory of collectors in gaseous discharges / *H. Mott-Smith, I. Langmuir* // *Phys. Rev.* — 1926. — Vol. 28.
- [2] *Морз, Р.* Бесстолкновительный PIC-метод / *Р. Морз* // Вычислительные методы в физике плазмы / Ed. by Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. — М.: Мир, 1974.
- [3] *Киселёв, А. А.* Численное моделирование захвата ионов бесстолкновительной плазмы электрическим полем поглощающей сферы / *А. А. Киселёв, Долгонос М. С., Красовский В. Л.* // Девятая ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе». — 2014.