ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 6, с. 828–842

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.653+519.644

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2023 г. А. В. Сетуха

Представлены интегральные формулы для аппроксимации поверхностных градиента (от скалярной функции, заданной на поверхности) и дивергенции (от касательного векторного поля, заданного на поверхности), являющиеся аналогами известных формул для производных функции на плоскости. Получены оценки погрешности аппроксимации этих величин. Также рассмотрен вопрос о последующей аппроксимации интегралов, дающих выражение для поверхностных градиента и дивергенции, квадратурными суммами по значениям исследуемой функции в узлах, выбираемых на ячейках неструктурированной сетки, аппроксимирующей поверхность.

DOI: 10.31857/S0374064123060122, EDN: FIJMZL

Введение. В математической физике представляет интерес задача дифференцирования функций, заданных на поверхности. Так для скалярной функции, заданной на поверхности, важной характеристикой является вектор поверхностного градиента, который характеризует скорость изменения функции вдоль поверхности и является величиной, инвариантной по отношению к способу параметризации поверхности. В частности, поверхностный градиент возникает в теории потенциала: здесь известно интегральное представление для градиента потенциала двойного слоя, причём скачок градиента такого потенциала на поверхности в точности равен поверхностному градиенту от плотности этого потенциала [1, с. 68]. Выражение полей скоростей через градиент потенциала двойного слоя используется в панельных и вихревых методах аэродинамики [2, с. 175].

В интегральных уравнениях электродинамики существует выражение для электрического и магнитного полей через поверхностные токи, которые представляют собой касательные векторные поля на поверхностях облучаемых тел. При этом имеются варианты записи интегральных представлений для электромагнитного поля, в которые входит поверхностная дивергенция от этих токов [3, с. 29 и уравнение (3.42а), с. 107].

Отметим работы [4, 5], в которых рассматривалось применение метода снесения граничного условия на серединную поверхность к краевым задачам аэродинамики и электродинамики. В [4] изучалось потенциальное обтекание крыла малой толщины, которое аппроксимировалось серединной поверхностью. При этом исходная форма крыла учитывалась постановкой специальных граничных условий. Задача сводилась к решению граничных интегральных уравнений на серединной поверхности, куда входил оператор поверхностного градиента. Аналогичный подход был применён в статье [5] к решению задачи рассеяния электромагнитной волны на теле малой толщины. В результате задача сводилась к системе граничных интегральных уравнений, записанных на серединной поверхности тела, в которую входил оператор поверхностной дивергенции от неизвестных поверхностных токов.

Таким образом, необходимость аппроксимации поверхностных производных возникает при численном решении прикладных задач как на этапе обработки результатов, когда нужно по найденным на поверхности неизвестным функциям найти какие-либо характеристики, так и на этапе решения граничных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих поверхностные производные. Здесь могут быть использованы формулы разностного типа. Такие формулы для поверхностного градиента записаны, например, в работе [6] (формулы (3.3)–(3.5) из [6] по сути есть формулы для скачка градиента потенциала двойного слоя, который равен поверхностному градиенту его плотности). В [5] были получены аналогичные формулы для поверхностной дивергенции. Однако в основе этих формул лежит гипотеза о том, что поверхностная сетка является регулярной, полученной при гладком отображении прямоугольника, разбитого на прямоугольные ячейки.

На неструктурированных сетках, в частности на широко используемых в современных методах моделирования треугольных сетках, для вычисления поверхностных производных необходимо применять другие подходы. В настоящей работе предлагается использовать для этих целей интегральные формулы, развитые в методе частиц для вычисления частных производных функций, определённых на плоскости [7], где частные производные функции представляются в виде интегрального оператора с ядром типа свёртки, причём это ядро мало вне круга малого радиуса, окружающего точку, в которой вычисляется производная. Поэтому применяемая идея проста. Если предположить, что наша поверхность есть плоскость, помещённая в пространство, то можно приближённо представить поверхностный градиент на этой плоскости (являющийся обычным двумерным градиентом) в виде интеграла по малой окрестности рассматриваемой точки. Если же работать на произвольной гладкой поверхности, то можно записать аналогичный интеграл по окрестности точки на поверхности, понимая, что он близок к интегралу по касательной плоскости. Собственно эта идея и реализована в настоящей работе путём получения строгих оценок для интегралов на поверхности и касательной плоскости.

1. Основные исходные формулы. Введём следующие обозначения. Пусть $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}^2_+$; $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ для $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$;

$$D^\alpha f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}},\quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$$

(считаем, что $D^\alpha f(x)=f(x)$ при $\alpha=(0,0)$); $\bar C^k(\mathbb{R}^2)$ – пространство функций класса $f\in C^k(\mathbb{R}^2)$, для которых ограничена норма

$$\|f\|_k=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^2_+\\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant k}}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|D^\alpha f(x)|$$

(пространство функций с непрерывными ограниченными производными до порядка k).

Пусть $f(x)\in\bar C^k(\mathbb{R}^2)$, $x=(x_1,x_2)$, $k\geqslant 1$. Тогда частные производные $\partial f/\partial x_i$, $i=1,2$, этой функции можно аппроксимировать формулой [7]

$$D_i^\varepsilon f(x)=\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{y\in\mathbb{R}^2}(f(y)-f(x))\eta_i\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy,\quad i=1,2, \tag{1}$$

где $\eta_i(x)$ – некоторая функция специального вида.

Относительно функций $\eta_i(x)$, $i=1,2$, делаются следующие предположения:

$$\eta_i\in L_1(\mathbb{R}^2),\quad \eta_i(-x)=-\eta_i(x),\quad x\in(\mathbb{R}^2). \tag{2}$$

Далее предположим, что для некоторого целого $p\geqslant 1$ выполнены условия:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}x^\alpha\eta_i(x)dx=\begin{cases}0, & |\alpha|\leqslant p,\quad \alpha\neq e_i,\\ -1, & \alpha\neq e_i,\end{cases}\qquad i=1,2,\quad e_1=(1,0),\quad e_2=(0,1), \tag{3}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}|x|^{p+1}\eta_i(x)\,dx\right|\leqslant M,\quad i=1,2. \tag{4}$$

Тогда найдётся константа A, зависящая от константы M из оценок (4), такая, что

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}-D_i^\varepsilon f(x)\right|\leqslant A\varepsilon^p\|f\|_{p+1}. \tag{5}$$

Для доказательства оценки (5) достаточно записать разложение в ряд Тейлора для функции f в окрестности точки x в виде

$$f(y)-f(x)=\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant p}\frac{1}{|\alpha|!}D^{\alpha}f(x)(y-x)^{\alpha}+r_p(x,y),$$

где остаточный член представляется как [8, с. 453]

$$r_p(x,y)=\sum_{|\alpha|=p+1}(y-x)^{\alpha}r_{p,\alpha}(x,y),\quad r_{p,\alpha}(x,y)=\frac{1}{p!}\int\limits_0^1(1-t)^pD^{\alpha}f(x+t(y-x))\,dt.$$

Тогда

$$D_i^{\varepsilon}f(x)=\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{y\in\mathbb{R}^2}(f(y)-f(x))\eta_i\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy=I_1+I_2,$$

$$I_1=\frac{1}{\varepsilon^3}D^{e_i}f(x)\int\limits_{y\in\mathbb{R}^2}(y-x)^{e_i}\eta_i\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy,\quad I_2=\frac{1}{\varepsilon^3}\sum_{|\alpha|=p+1}\int\limits_{y\in\mathbb{R}^2}(y-x)^{\alpha}r_{p,\alpha}(x,y)\eta_i\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy.$$

Сделав замену $z=(y-x)/\varepsilon,$ с учётом формул (2) имеем

$$I_1=-D^{e_i}f(x)\int\limits_{z\in\mathbb{R}^2}z_i\eta_i(z)\,dy=D^{e_i}f(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_i},$$

$$|I_2|=\left|\frac{1}{\varepsilon^3}\sum_{|\alpha|=p+1}\int\limits_{y\in\mathbb{R}^2}\varepsilon^{p+1}z^{\alpha}r_{p,\alpha}(x,y+\varepsilon z)\eta_i(z)\varepsilon^2dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^p\|f\|_{p+1}}{p!}\sum_{|\alpha|=p+1}\left|\int\limits_{y\in\mathbb{R}^2}z^{\alpha}\eta_i(z)dz\right|\leqslant\frac{2^{p+1}M}{p!}\varepsilon^p\|f\|_{p+1}.$$

В качестве функций $\eta_i(x)$ можно выбрать, например, следующие [7]:

$$\eta_i(x)=\frac{x_i}{\pi}e^{-|x|^2}\cdot\begin{cases}-2, & p=2,\\ (-6+2|x|^2), & p=4,\\ (-12+8|x|^2-|x|^4), & p=6,\\ (-20+20|x|^2-5|x|^4+0.5|x|^6), & p=8,\end{cases}\tag{6}$$

где p – порядок формулы (т.е. условия (3) и (4), а следовательно и оценка (5), выполнены с указанным значением параметра p).

2. Аппроксимация поверхностных производных. Пусть Σ – некоторая гладкая, измеримая, ориентированная поверхность класса $C^q,$ $q\geqslant2,$ замкнутая или нет, с краем $\partial\Sigma.$

Пусть $y\in\Sigma,$ $\vec{n}(y)$ – орт положительного вектора нормали к поверхности Σ в точке $y.$ Каждой точке $z\in\Sigma$ и действительному числу δ можно поставить в соответствие точку

$$y=y_{\delta}(z)=z+\delta\vec{n}(z).$$

Обозначим

$$\Omega(r,\Sigma)=\{y\in\mathbb{R}^3:y=y_{\delta}(z),\quad z\in\Sigma,\quad\delta\in[-r/2,r/2]\}.\tag{7}$$

Предположение 1. Существует число $r_0>0$ такое, что отображение между точками y множества $\Omega(r,\Sigma)$ и парами $(z,\delta)\in\Sigma\times[-r/2,r/2]$ при $r=r_0$ является взаимно-однозначным.

С геометрической точки зрения сделанное предположение означает, что любая точка y множества $\Omega(r,\Sigma)$ представляется в виде (7), где z есть ближайшая к точке y точка на поверхности Σ; прямая, проведённая через точки z и y, не имеет других пересечений с поверхностью Σ в окрестности точки z радиуса $r/2$.

Пусть $x\in\Sigma$, $\pi(x)$ – касательная плоскость к поверхности Σ в точке x. Обозначим через $\mathbf{C}(x,R)$, $x\in\Sigma$, $R>0$, цилиндр, состоящий из точек $y\in\mathbb{R}^3$ таких, что $|y^*-x|\leqslant R$ и $|y^*-y|\leqslant R$, где y^* – ортогональная проекция точки y на плоскость $\pi(x)$. ($\mathbf{C}(x,R)$ – цилиндр, в сечении которого круг радиуса R, параллельный касательной плоскости $\pi(x)$, высотой $2R$ и центром в точке x.) Обозначим $\Sigma(x,R)=\Sigma\bigcap\mathbf{C}(x,R)$.

В каждой точке $x\in\Sigma$ можно ввести декартову систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в точке $x=O$ и осью $O\xi_3$, сонаправленной с вектором $\vec{n}(x)$ (две другие оси лежат в касательной плоскости $\pi(x)$ произвольным образом и являются ортогональными). Такую систему координат назовём *специальной системой координат.*

Обозначим через $V(x,R)$ множество точек $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$ таких, что точка y^*, имеющая в специальной системе координаты $(\xi_1,\xi_2,0)$, является ортогональной проекцией некоторой точки $y\in\Sigma(x,R)$.

Пусть $x\in\mathbb{R}^n$ – некоторая точка, а $G\subset\mathbb{R}^n$ – некоторое множество. Через $\rho(x,G)$ будем обозначать расстояние от точки x до множества G.

Предположение 2. Существует такое $R_0>0$, что для любой точки $x\in\Sigma$ участок $\Sigma(x,R)$ поверхности Σ, где $0<R\leqslant R_0$, может быть представлен в введённой специальной системе координат уравнением $\xi_3=\psi(\xi)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, ψ – q раз непрерывно дифференцируемая функция на множестве $V(x,R)$, причём $V(x,R)=\{\xi\in\mathbb{R}^2:|\xi|\leqslant R\}$ при $R\leqslant\rho(x,\partial\Sigma)$ и $V(x,R)$ есть измеримое подмножество круга $\{\xi\in\mathbb{R}^2:|\xi|\leqslant R\}$ в ином случае. При этом функция ψ и все её частные производные вплоть до порядка q включительно на всём множестве $V(x,R)$ ограничены по модулю некоторой константой, не зависящей от выбранной точки x.

Заметим при этом, что для любой точки $z\in\Sigma$ с координатами в специальной системе координат $(\xi_1,\xi_2,\psi(\xi_1,\xi_2))$ справедливы условия

$$|\partial\psi/\partial\xi_i|\leqslant C|\xi|,\quad |\psi|\leqslant C|\xi|^2,\quad \xi=(\xi_1,\xi_2)\in V(x,R_0),\tag{8}$$

выполненные с некоторой константой C, зависящей только от выбора поверхности Σ.

Пусть f – функция класса $C^{p+1}(\Sigma)$, заданная на поверхности Σ, $p\in\mathbb{Z}_+$, $p+1\leqslant q$ (q – класс гладкости поверхности, $q\geqslant 2$). Для каждой точки $x\in\Sigma$ можно построить цилиндр $\mathbf{C}(x,R_0)$ и выделить участок $\Sigma(x,R)=\Sigma\bigcap\mathbf{C}(x,R)$. На этом участке можно ввести функцию

$$f'(\xi)=f(y(\xi)),\quad y(\xi)=(\xi_1,\xi_2,\psi(\xi_1,\xi_2))\in\Sigma,\quad \xi=(\xi_1,\xi_2)\in V(x,R_0).\tag{9}$$

Условие “f – функция класса $C^m(\Sigma)$” можно трактовать как условие того, что $f'(\xi)\in C^m(V(x,R_0))$ для любой точки $x\in\Sigma$. Для функции $f\in C^m(\Sigma)$, $m\leqslant q$, введём норму следующим образом. Для каждой точки $x\in\Sigma\backslash\partial\Sigma$ введём всевозможные специальные системы координат. Каждая такая система, в действительности полностью определяемая ортом $\vec{e}_1=\vec{e}_1(x)$, ортогональным вектору $\vec{n}(x)$, порождает функцию $f'(\xi)$ по формуле (9). Положим

$$\|f\|_m=\sup_{x,\vec{e}_1}\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha f'(0)|.$$

Далее рассмотрим оператор “поверхностный градиент” функции, заданной на поверхности. Этот оператор можно ввести следующим образом. Построим функцию f^*, являющуюся продолжением функции f на множество $\Omega(r,\Sigma)$ вида (7), по формуле

$$f^*(y)=f(x)\quad\text{при}\quad y=x+\delta\vec{n}(x),\quad x\in\Sigma.$$

Тогда определим поверхностный градиент как

$$\operatorname{Grad}f(x)=\operatorname{grad}f^*(x),\quad x\in\Sigma\backslash\partial\Sigma,\tag{10}$$

$\operatorname{grad}f^*$ – обычный градиент функции трёх переменных.

Учитывая, что $\partial f^*/\partial n = 0$ на поверхности Σ, легко увидеть, что вектор $\operatorname{Grad} f(x)$ определён тогда и только тогда, когда функция f дифференцируема в точке x, т.е. представляется в окрестности этой точки в виде

$$f(y) = f(x) + (\vec{A}, y - x) + o(|y - x|),$$

$y \in \Sigma \bigcap U(x)$, $U(x)$ – некоторая трёхмерная окрестность точки x, $o(r)$ – бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем r при $r \to 0$, $\vec{A}$ – некоторый вектор. При этом вектор $\vec{A}$ определён с точностью до слагаемого вида $\lambda \vec{n}(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и существует единственный вектор $\vec{A}$, удовлетворяющий условию $(\vec{A}, \vec{n}(x)) = 0$, который совпадает с вектором $\operatorname{Grad} f(x)$, определяемым формулой (10).

Теперь пусть $\vec{f}(x)$ – касательное векторное поле на поверхности, т.е. для каждой точки $x \in \Sigma$ значение $\vec{f}(x)$ есть трёхмерный вектор, удовлетворяющий условию $(\vec{f}(x), \vec{n}(x)) = 0$. Введём опять продолжение поля $\vec{f}(x)$ по формуле

$$\vec{f}^*(y) = \vec{f}(x) \quad \text{при} \quad y = x + \delta \vec{n}(x), \quad y \in \Omega(r, \Sigma),$$

и определим поверхностную дивергенцию векторного поля $\vec{f}(x)$:

$$\operatorname{Div} \vec{f}(x) = \operatorname{div} \vec{f}^*(x), \quad x \in \Sigma \backslash \partial\Sigma, \tag{11}$$

где div – обычная трёхмерная дивергенция.

Как показано в [9], определение по формуле (11) равносильно другому классическому определению

$$\operatorname{Div} \vec{f}(x) = \lim_{d(\sigma) \to 0} \frac{1}{\mu(\sigma)} \int\limits_{\partial\sigma} \vec{f}(y) \vec{\nu}(y)\, ds_y,$$

где σ – измеримая часть поверхности Σ с гладким краем $\partial\sigma$ такая, что $x \in \sigma$, $x \notin \partial\sigma$, $\mu(\sigma)$ – площадь поверхности σ, $d(\sigma)$ – диаметр поверхности σ, $\vec{\nu}(y)$ – вектор нормали к контуру $\partial\sigma$, лежащий в касательной плоскости к поверхности и направленный наружу от участка поверхности σ.

Введём в точке $x \in \Sigma \backslash \partial\Sigma$ специальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Тогда в окрестности точки $x \in \Sigma$ заданная на поверхности функция f (касательное векторное поле $\vec{f}$) порождает функцию $f'(\xi) = f(y(\xi))$ (векторное поле $\vec{f}'(\xi) = \vec{f}(y(\xi))$), где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $y(\xi)$ – точка на поверхности Σ с координатами в специальной системе $(\xi_1, \xi_2, \psi(\xi_1, \xi_2))$. При этом из равенств (10) и (11) следуют формулы

$$\operatorname{Grad} f(x) = \left(\frac{\partial f'}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f'}{\partial \xi_2}, 0 \right), \quad \operatorname{Div} \vec{f}(x) = \frac{\partial f'_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f'_2}{\partial \xi_2},$$

здесь f'_1, f'_2, f'_3 – координаты вектора $\vec{f}$ в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, производные берутся в точке $\xi = (0, 0)$.

Пусть $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, – орты осей специальной системы координат, $\vec{e}_3 = \vec{n}(x)$. Тогда

$$\operatorname{Grad} f(x) = L_1 f(x) \vec{e}_1 + L_2 f(x) \vec{e}_2, \quad \operatorname{Div} \vec{f}(x) = L_1 f_1(x) \vec{e}_1 + L_2 f_1(x) \vec{e}_2, \quad f_i = (\vec{f}, \vec{e}_i),$$

где

$$L_i f(x) = (\operatorname{Grad} f(x), \vec{e}_i) = \frac{\partial f'}{\partial \xi_i}(0), \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

О векторном поле $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, где $f_i \in C^m(\Sigma)$, $i = 1, 2, 3$, будем говорить, что $\vec{f} \in C^m(\Sigma)$. Определим его норму

$$\|\vec{f}\|_m = \sum_{i=1}^{3} \|f_i\|_m.$$

Перейдём к интегральной аппроксимации поверхностных операторов: градиент и дивергенция. Обратим внимание, что в формуле (6) функции η_i имеют вид

$$\eta_i(x) = x_i\eta(|x|), \quad i = 1, 2.$$

При этом условия (2)–(4) записываются в виде условий на функцию $\eta(r)$, $r \in [0, \infty)$:

$$r\eta \in L_1(R), \tag{13}$$

$$\int\limits_0^\infty r^{m+2}\eta(r)\,dr = \begin{cases} -1/\pi, & m = 1, \\ 0, & 3 \leqslant m \leqslant p, \end{cases} \tag{14}$$

$$\int\limits_0^\infty r^{p+1}|\eta(r)|\,dr \leqslant \infty. \tag{15}$$

Тогда в плоском случае для функции $f(x)$ и векторного поля $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, из (1) следуют формулы, аппроксимирующие градиент и дивергенцию:

$$\mathrm{grad}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{y\in\Sigma} (f(y) - f(x))\frac{x-y}{\varepsilon}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)dy, \tag{16}$$

$$\mathrm{div}_\varepsilon \vec{f}(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{y\in\Sigma} (\vec{f}(y) - \vec{f}(x))\frac{x-y}{\varepsilon}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)dy. \tag{17}$$

Теперь вернёмся к случаю, когда функция $f(x)$ и векторное поле $\vec{f}(x) = (f_1, f_2, f_3)$ заданы на поверхности, причём поле является касательным. По аналогии с формулами (16) и (17) запишем операторы, аппроксимирующие поверхностные градиент и дивергенцию, в виде

$$\mathrm{Grad}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\Pi_{\pi(x)}\left[\int\limits_{y\in\Sigma} (f(y) - f(x))\frac{x-y}{\varepsilon}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)dy\right], \tag{18}$$

$$\mathrm{Div}_\varepsilon \vec{f}(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{y\in\Sigma} (\Pi_{\pi(x)}[\vec{f}(y)] - \vec{f}(x))\frac{x-y}{\varepsilon}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)dy, \tag{19}$$

здесь $\Pi_{\pi(x)}\vec{a}$ – ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на плоскость $\pi(x)$, касательную к поверхности Σ в точке x, величина $x - y$ трактуется как вектор.

Далее получим оценку для погрешности аппроксимации величин $\mathrm{Grad}\, f(x)$ и $\mathrm{Div}\,\vec{f}(x)$ с применением формул (18), (19).

3. Погрешность интегральных формул. Предположим дополнительно, что функция $\eta(r)$ удовлетворяет оценкам

$$|\eta(r)| \leqslant \frac{C_m}{1 + r^m}, \quad \left|\frac{d\eta(r)}{dr}\right| \leqslant \frac{C_m}{1 + r^{m+1}} \tag{20}$$

для некоторого $m \geqslant 7$ с некоторой константой C_m. Заметим, что для функций вида (6) это условие выполнено при любом натуральном m.

Пусть $x \in \Sigma\backslash\partial\Sigma$. Равенства (18) и (19) в специальной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ принимают вид

$$\mathrm{Grad}_\varepsilon f(x) = (L_1^\varepsilon f(x), L_2^\varepsilon f(x), 0), \quad \mathrm{Div}_\varepsilon \vec{f}(x) = L_1^\varepsilon f_1(x) + L_2^\varepsilon f(x), \tag{21}$$

$$L_i^\varepsilon f(x) = -\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{y\in\Sigma} (f(y)-f(x))\frac{y_i}{\varepsilon}\eta(|y|/\varepsilon)\,d\sigma_y, \quad i=1,2, \tag{22}$$

(y_1, y_2, y_3) – координаты точки y в специальной системе координат, при этом $x=(0,0,0)$ в этой же системе.

Лемма. *Пусть Σ – гладкая поверхность класса C^q, $q\geqslant 2$; $f\in C^{p+1}(\Sigma)$, $p+1\leqslant q$; $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (13)–(15) и условию (20) с $m\geqslant 7$; $x\in\Sigma\backslash\partial\Sigma$; и пусть $L_i f(x)$ – операторы, определяемые формулой (12). Тогда найдётся константа C, зависящая только от поверхности Σ, функции η и параметра p, такая, что справедливо неравенство*

$$|L_i^\varepsilon f(x) - L_i f(x)| \leqslant C\left[\frac{\varepsilon^p\|f\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|f\|_1\frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|f\|_1\varepsilon^2\right], \tag{23}$$

где $R=\min\{R_0/2, \rho(x,\partial\Sigma)\}/2$, R_0 – константа из предположения 2, m – параметр из оценки (20).

Доказательство. Будем обозначать через C константы, зависящие только от поверхности Σ, функции η и параметра p, причём в различных оценках значение константы C, вообще говоря, различно.

Построим цилиндры $\mathbf{C}(x,R)$ и $\mathbf{C}(x,R_0)$, и пусть $\Sigma_1=\Sigma(x,R)\equiv\Sigma\bigcap\mathbf{C}(x,R)$, $\Sigma_2 = (\Sigma\bigcap\mathbf{C}(x,R_0))\backslash\Sigma_1$, $\Sigma_3=\Sigma\backslash(\Sigma_2\bigcup\Sigma_1)$.

Рассмотрим одну из величин $L_i^\varepsilon f(x)$, $i=1,2$. Представим её в виде

$$L_1^\varepsilon f(x) = I_1+I_2+I_3,$$

$$I_n = \int\limits_{y\in\Sigma_n} F(x,y,\varepsilon)\,d\sigma_y, \quad n=1,2,3, \quad F(x,y,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^3}(f(y)-f(x))\frac{y_i}{\varepsilon}\eta(|y|/\varepsilon).$$

Оценим интегралы I_2 и I_3. Заметим, что участок поверхности $\Sigma_2\subset(\mathbf{C}(x,R_0)\bigcap\Sigma)$ задаётся уравнением $\xi_3=\psi(\xi_1,\xi_2)$. Координаты точки $y\in\Sigma_2$ имеют вид $y=(\xi_1,\xi_2,\psi(\xi_1,\xi_2))$, причём $R\leqslant|\xi|\leqslant R_0$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)$. Учитывая неравенство $|f(y)-f(x)|\leqslant\|f\|_1|y|$ и оценки (8) и (20), имеем

$$|I_2| = \left|\int\limits_{y\in\Sigma_2}\frac{1}{\varepsilon^3}(f(y)-f(x))\frac{y_i}{\varepsilon}\eta(|y|/\varepsilon)\,d\sigma_y\right| \leqslant C\frac{\|f\|_1}{\varepsilon^4}\int\limits_{y\in\Sigma_2}\frac{|y|^2}{1+(|y|/\varepsilon)^m}\,d\sigma_y \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\|f\|_1}{\varepsilon^4}\int\limits_R^{R_0}\frac{r^3}{1+(r/\varepsilon)^m}\,dr \leqslant C\|f\|_1\int\limits_{R/\varepsilon}^{\infty}\frac{\rho^3}{1+\rho^m}\,d\rho.$$

Тогда

$$|I_2| \leqslant C\|f\|_1\frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-4}}. \tag{24}$$

Для интеграла I_3 ввиду оценки (20) и того, что при $y\in\Sigma_3$ выполнено неравенство $|y|\geqslant R_0$, где константа R_0 определяется только свойствами поверхности и не зависит от выбора точки x, получим неравенства

$$|I_3| \leqslant \frac{C\|f\|_0}{\varepsilon^3}\int\limits_{y\in\Sigma_3}\frac{\varepsilon^m}{\varepsilon^m+R_0^m}\,d\sigma_y \leqslant C\|f\|_0\varepsilon^{m-3}. \tag{25}$$

Перейдём к анализу интеграла I_1. Построим ещё один цилиндр $\mathbf{C}(x,2R)$ и выделим на поверхности Σ участок $\Sigma(x,2R)\equiv\Sigma\bigcap\mathbf{C}(x,2R)$. По предположению 2 участок $\Sigma(x,2R)$ задаётся уравнением $\xi_3=\psi(\xi_1,\xi_2)$. Введём функцию $f'(\xi)$ по формуле (9), $|\xi|\leqslant 2R$.

Далее построим функцию $\theta_R(r)$ такую, что $\theta_R \in C^\infty[0,\infty)$, $\theta_R(r) = 0$ при $r > 2R$, $\theta_R(r) = 1$ при $r < R$. Эту функцию можно построить в виде $\theta_R(r) = \theta(r/R)$, $\theta \in C^\infty[0,\infty)$, $\theta(r) = 0$ при $r > 2$, $\theta_R(r) = 1$ при $r < 1$. Тогда

$$\|\theta_R(r)\|_k \leqslant \frac{C(k)}{R^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \|\theta_R(r)\|_k = \sum_{i=0}^{k} \max_{r\in[0,\infty)} \left|\frac{d^i\theta_R(r)}{dr^i}\right|.$$

Далее рассмотрим функцию $f''(\xi) = f'(\xi)\theta_R|\xi|$, для которой

$$\|f''\|_k \leqslant \frac{C}{R^k}\|f\|_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant p+1. \tag{26}$$

Заметим, что

$$L_i f(x) = \frac{\partial f''(\xi)}{\partial \xi_i}$$

при $\xi = 0$, $i = 1, 2$, и в силу оценки (5) имеем

$$|L_i f(x) - D_i^\varepsilon f''(0)| \leqslant C\frac{\varepsilon^p \|f\|_{p+1}}{R^{p+1}}, \tag{27}$$

D_i^ε – интегральный оператор (1) на плоскости $O\xi_1\xi_2$, который запишем в виде

$$D_i^\varepsilon f''(0) = J \equiv -\frac{1}{\varepsilon^3} \int\limits_{\xi\in\mathbb{R}^2} (f''(\xi) - f''(0))\xi_i \eta(|\xi|/\varepsilon)\, d\xi.$$

Представим интеграл J как $J = J_1 + J_2$, где в J_1 указанный для J интеграл берётся по множеству $|\xi| \leqslant R$, а в J_2 – по множеству $|\xi| > R$. При этом

$$|J_2| \leqslant \frac{C\|f''\|_1}{\varepsilon^4} \int\limits_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^2\\ |\xi|\geqslant R}} |\xi|^2 |\eta(|\xi|/\varepsilon)|\, d\xi \leqslant \frac{C\|f''\|_1}{\varepsilon^4} \int\limits_R^\infty \frac{r^3}{1 + (r/\varepsilon)^m}\, dr = C\|f''\|_1 \int\limits_{R/\varepsilon}^\infty \frac{\rho^3}{1+\rho^m}\, d\rho,$$

откуда, с учётом оценки (26), получим

$$|J_2| \leqslant C\|f\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}}. \tag{28}$$

Наконец, сравним интегралы I_1 и J_1. Переходя к интегрированию по параметру $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, интеграл I_1 представим в виде

$$I_1 = -\frac{1}{\varepsilon^3} \int\limits_{\xi:|\xi|\leqslant R} (f'(\xi) - f'(0))\frac{\xi_i}{\varepsilon}\eta(|y(\xi)|/\varepsilon) J(\xi)\, d\xi,$$

$$J(\xi) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}\right)^2}, \quad |y| = \sqrt{|\xi|^2 + |\psi(\xi)|^2}.$$

Из оценок (8) легко показать, что $|J(\xi) - 1| \leqslant C|\xi|^2$, $||y| - |\xi|| \leqslant C|\xi|^3$. Следовательно,

$$I_1 - J_1 = -\frac{1}{\varepsilon^3} \int\limits_{\xi:|\xi|\leqslant R} (f'(\xi) - f'(0))\frac{\xi_i}{\varepsilon}[\eta(|y(\xi)|/\varepsilon)J(\xi) - \eta(|\xi|/\varepsilon)]\, d\xi.$$

В силу оценок (20)

$$|\eta(|y(\xi)|/\varepsilon)-\eta(|\xi|/\varepsilon)|\leqslant C\frac{|\xi|^3}{\varepsilon}\frac{1}{1+(|\xi|/\varepsilon)^{m+1}},$$

тогда

$$|I_1-J_1|\leqslant\frac{C\|f\|_1}{\varepsilon^4}\int\limits_{\xi:|\xi|\leqslant R}|\xi|^2\left[\frac{|\xi|}{\varepsilon}\frac{|\xi|^2}{1+(|\xi|/\varepsilon)^{m+1}}+\frac{|\xi|^2}{1+(|\xi|/\varepsilon)^m}\right]d\xi=$$

$$=\frac{C\|f\|_1}{\varepsilon^4}\int\limits_0^R r^3\left[\frac{r}{\varepsilon}\frac{r^2}{1+(r/\varepsilon)^{m+1}}+\frac{r^2}{1+(r/\varepsilon)^m}\right]dr\leqslant C\|f\|_1\int\limits_0^\infty\rho^3\left[\rho\frac{\varepsilon^2\rho^2}{1+\rho^{m+1}}+\frac{\varepsilon^2\rho^2}{1+\rho^m}\right]d\rho,$$

$$|I_1-J_1|\leqslant C\|f\|_1\varepsilon^2\quad\text{при}\quad m\geqslant 7.\tag{29}$$

Из (24)–(29) получаем оценку (23). Лемма доказана.

Из леммы и формул (21), (22) следует

Теорема 1. *Пусть поверхность* Σ *и функция* $\eta(r)$ *удовлетворяют условиям леммы. Тогда:*

1) если $f\in C^{p+1}(\Sigma)$, *то*

$$|\mathrm{Grad}_\varepsilon f(x)-\mathrm{Grad}\,f(x)|\leqslant C\left[\frac{\varepsilon^p\|f\|_{p+1}}{R^{p+1}}+\|f\|_1\frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}}+\|f\|_1\varepsilon^2\right],\quad x\in\Sigma\backslash\partial\Sigma;$$

2) если $\vec f=(f_1(x),f_2(x),f_3(x))$ *– касательное векторное поле с компонентами* $f_i\in$ $\in C^{p+1}(\Sigma)$, $i=1,2,3$, *то*

$$|\mathrm{Div}_\varepsilon\vec f(x)-\mathrm{Div}\,\vec f(x)|\leqslant C\left[\frac{\varepsilon^p\|\|_{p+1}}{R^{p+1}}+\|\vec f\|_1\frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}}+\|\vec f\|_1\varepsilon^2\right],\quad x\in\Sigma\backslash\partial\Sigma.$$

Здесь, как и в лемме, $R=\min\{R_0,\rho(x,\partial\Sigma)\}/2$, R_0 *– константа из предположения 2,* m *– параметр из оценок (20),* C *– константа, зависящая только от поверхности* Σ, *функции* η *и параметра* p.

4. Дискретная аппроксимация интегральных операторов для поверхностных производных.

4.1. Аппроксимация по поверхностным ячейкам. Предположим, что система ячеек σ_j, $j=\overline{1,N}$, образует разбиение поверхности Σ. Это означает, что $\Sigma=\bigcup_{j=1}^N\sigma_j$, каждая ячейка σ_j есть измеримая часть поверхности Σ с площадью $\mu(\sigma_j)>0$ и при этом $\mu(\sigma_j\bigcap\sigma_k)=0$ при $k\neq j$.

Возьмём в каждой ячейке узел $y^j\in\sigma_j$, $j=\overline{1,N}$, и пусть h – диаметр разбиения ($h=$ $=\max\limits_{j=\overline{1,N},\,x,y\in\sigma_j}\sup|x-y|$).

Численно аппроксимируем поверхностные градиент и дивергенцию формулами

$$\mathrm{Grad}^h_\varepsilon f(x)=\frac{1}{\varepsilon^3}\Pi_{\pi(x)}\left[\sum_{j=1}^N(f(y^j)-f(x))\frac{x-y^j}{\varepsilon}\eta\left(\frac{|x-y^j|}{\varepsilon}\right)\mu(\sigma_j)\right],\tag{30}$$

$$\mathrm{Div}_\varepsilon\vec f(x)=\frac{1}{\varepsilon^3}\sum_{j=1}^N\left(\Pi_{\pi(x)}\vec f(y^j)-\vec f(x)\right)\frac{|x-y^j|}{\varepsilon}\eta\left(\frac{|x-y^j|}{\varepsilon}\right)\mu(\sigma_j).\tag{31}$$

Заметим, что мы не требуем, чтобы точка x, в которой осуществляется аппроксимация, была одним из узлов.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Считаем, что существует константа* $B > 0$ *такая, что* $h < R_0/3$ *и* $h \leqslant B\varepsilon$. *Тогда найдётся константа* C, *зависящая только от поверхности* Σ, *функции* η *и параметров* p *и* B, *такая, что*

$$|\mathrm{Grad}^h_\varepsilon f(x) - \mathrm{Grad}_\varepsilon f(x)| \leqslant C\left[\|f\|_0\varepsilon^m + \|f\|_1\frac{h}{\varepsilon}\right], \tag{32}$$

$$|\mathrm{Div}^h_\varepsilon \vec{f}(x) - \mathrm{Div}_\varepsilon \vec{f}(x)| \leqslant C\left[\|\vec{f}\|_0\varepsilon^m + \|\vec{f}\|_1\frac{h}{\varepsilon}\right], \tag{33}$$

где в формуле (32) $f \in C^1(\Sigma)$ *– функция на поверхности, в формуле (33)* $\vec{f} \in C^1(\Sigma)$ *– касательное векторное поле на поверхности,* m *– параметр из оценок (20).*

Доказательство. Построим специальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в точке $x = O$ и осью $O\xi_3$, сонаправленной с вектором $\vec{n}(x)$. Интегралы $L^\varepsilon_i f(x)$, $x \in \Sigma^{in}$, определяемые формулой (22), аппроксимируем интегральной суммой

$$L^{\varepsilon,h}_i f(x) = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\varepsilon^3}(f(y^j) - f(x))\eta_i\left(\frac{x - y^j}{\varepsilon}\right)\mu(\sigma_j). \tag{34}$$

Выделим цилиндр $\mathbf{C}(x, R_0)$, R_0 – константа из предположения 2. Для каждой точки $y^j \in \mathbf{C}(x, R_0)$ построим её проекцию $\tilde{y}^j$ на плоскость $O\xi_1\xi_2$.

Разобьем поверхность Σ на три части Σ_0, Σ_1, Σ_2 следующим образом: Σ_0 – объединение тех ячеек σ_j, для которых $|\tilde{y}^j - x| \leqslant 2h$; Σ_1 – объединение тех ячеек σ_j, для которых $2h < |\tilde{y}^j - x| \leqslant R_0 - h$; Σ_2 – оставшаяся часть поверхности Σ. Это разделение поверхности произведено так, что выполнены условия:

$$y \in C(x, 3h) \ \text{ при } \ y \in \Sigma_0;$$

$$y \in C(x, R_0) \ \text{ и } \ y \notin C(x, h) \ \text{ при } \ y \in \Sigma_1;$$

$$|x - y| > R_0/3 \ \text{ при } \ y \in \Sigma_2.$$

Величину $L^\varepsilon_i f(x)$ представим в виде

$$L^\varepsilon_i f(x) = I_0 + I_1 + I_2, \quad I_k = \int\limits_{\Sigma_k}\varphi(y)\,d\sigma, \quad k = 1, 2, 3, \quad \varphi(y) = \frac{1}{\varepsilon^3}(f(y) - f(x))\eta_i\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right).$$

Аналогично

$$L^{\varepsilon,h}_i f(x) = I^h_0 + I^h_1 + I^h_2, \quad I^h_k = \sum_{j:y^j\in\Sigma_k}\varphi(y^j)\mu(\sigma_j).$$

При этом с учётом (20) сразу можем записать

$$|I_2| \leqslant C\|f\|_0\varepsilon^m, \quad |I^h_2| \leqslant C\|f\|_0\varepsilon^m, \quad |I_0| \leqslant C\|f\|_1\frac{h^3}{\varepsilon^3}, \quad |I^h_0| \leqslant C\|f\|_1\frac{h^3}{\varepsilon^3}. \tag{35}$$

Оценим разность

$$I^h_1 - I_1 = \sum_{j:\sigma_j\subset\Sigma_1}\int\limits_{\sigma_j}(\varphi(y^j) - \varphi(y))\,d\sigma.$$

Заметим, что

$$\varphi(y^j) - \varphi(y) = \frac{1}{\varepsilon^3}(f(y^j) - f(y))\eta_i\left(\frac{x - y^j}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon^3}(f(y) - f(x))\left(\eta_i\left(\frac{x - y^j}{\varepsilon}\right) - \eta_i\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$|\varphi(y^j)-\varphi(y)|\leqslant\frac{C\|f\|_1h}{\varepsilon^3}\frac{1}{1+(|y-x|/\varepsilon)^m}\left(1+\frac{|y-x|}{\varepsilon}\right).$$

Тогда

$$|I_1^h-I_1|\leqslant\frac{C\|f\|_1h}{\varepsilon^3}\int\limits_{\xi:h<|\xi|<R_0}\frac{1}{1+(|\xi|/\varepsilon)^m}\left(1+\frac{|\xi|}{\varepsilon}\right)d\sigma\leqslant\frac{C\|f\|_1h}{\varepsilon}. \tag{36}$$

Из оценок (35) и (36) с учётом формул (21) и (22) следует утверждение теоремы.

4.2. Аппроксимация по треугольным ячейкам. Теперь рассмотрим случай аппроксимации поверхностных производных на основании триангуляции поверхности. Пусть $\tilde\Sigma = \bigcup_{j=1}^N\sigma_j$, где σ_j – треугольники, построенные так, что у каждого треугольника σ_j все вершины лежат на поверхности и при этом все треугольники вместе образуют разбиение поверхности $\tilde\Sigma$. Пусть h – диаметр этого разбиения. Возьмём в каждой ячейке узел $y^j\in\sigma_j$, $j=\overline{1,N}$.

Сделаем следующие предположения относительно свойств триангуляции.

Предположение 3. Для любой точки $x\in\Sigma$ такой, что $\rho(x,\partial\Sigma)\geqslant h$, построим касательную плоскость $\pi(x)$, цилиндр $\mathbf{C}(x,R)$, $R=\min\{R_0,\rho(x,\Sigma)\}$ и участок поверхности $\Sigma(x,R)=\Sigma\bigcap C(x,R)$. Далее выделим участок $\tilde\Sigma(x,R)$ поверхности $\tilde\Sigma$, состоящий из всех тех и только тех ячеек, все три вершины которых лежат на участке $\Sigma(x,R)$. Должно выполняться условие, что проекция участка $\tilde\Sigma(x,R)$ на касательную плоскость $\pi(x)$ содержит круг с центром в точке x радиуса $R-h$, лежащий на этой плоскости.

Смысл предположения 1 состоит с том, что приближённая поверхность $\tilde\Sigma$ аппроксимирует всю поверхность Σ без "дыр" и больших отступов от края.

Предположение 4. Существует константа C_n такая, что для любой ячейки σ_j с вершинами A_j^1, A_j^2, A_j^3 вектор $\vec n_j$ (орт вектора нормали к этой ячейке) подчинён оценке

$$|\vec n(A_j^k)-\vec n_j|\leqslant C_nh,\quad k=1,2,3.$$

Это условие не позволит при вычислении интегралов проявиться эффекту "сапога Шварца". С другой стороны, как показано в работе [10], предположение 4 выполнено, если при сгущении треугольной сетки поставить ограничение на минимальный угол в треугольниках.

Если диаметр разбиения достаточно мал, то для каждой узловой точки y^j, $j=\overline{1,N}$, можно построить точку $z^j\in\Sigma$, которая является ближайшей к точке y^j точкой поверхности, причём $y^j=z^j+\delta\vec n(z^j)$ – это следует из предположения 1. Теперь если f – функция, заданная на поверхности, то определим эту функцию в точке y^j значением $f(z^j)$. При этом найдётся константа C, определяемая поверхностью Σ, такая, что $|y^j-z^j|\leqslant h^2$. Это легко показать, построив специальную систему координат с центром в точке z^j. Тогда из предположения 2 следует, что все вершины ячейки σ_j, а значит и все её точки, отстоят от касательной плоскости, проведённой в точке z^j, на расстояние не более величины порядка h^2.

Будем аппроксимировать поверхностные градиент и дивергенцию формулами (30) и (31), полагая, что $f(y^j)=f(z^j)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Считаем, что существует константа $B>0$ такая, что $h<R_0/3$ и $h\leqslant B\varepsilon$. Пусть $x\in\Sigma$, $\rho(x,\partial\Sigma)\geqslant h$. Тогда найдётся константа C, зависящая только от поверхности Σ, функции η и параметров p, m, B, C_n (из предположения 4), такая, что:*

1) выполнены оценки

$$|\mathrm{Grad}_\varepsilon^h f(x)-\mathrm{Grad}\,f(x)|\leqslant C\left[\frac{\varepsilon^p\|f\|_{p+1}}{R^{p+1}}+\|f\|_1\frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}}+\|f\|_1\frac{h}{\varepsilon}\right], \tag{37}$$

$$|\mathrm{Div}_\varepsilon^h\vec f(x)-\mathrm{Div}\vec f(x)|\leqslant C\left[\frac{\varepsilon^p\|\vec f\|_{p+1}}{R^{p+1}}+\|\vec f\|_1\frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}}+\|\vec f\|_1\frac{h}{\varepsilon}\right], \tag{38}$$

где в формуле (37) $f \in C^{p+1}(\Sigma)$ *– функция на поверхности, в формуле (38)* $\vec{f} \in C^{p+1}(\Sigma)$ *– касательное векторное поле на поверхности,* $p \geqslant 0$;

2) если y^j *есть центры ячеек* σ_j *(точки пересечения медиан), то*

$$|\mathrm{Grad}_\varepsilon^h f(x) - \mathrm{Grad}\, f(x)| \leqslant C\left[\frac{\varepsilon^p\|f\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|f\|_1\frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|f\|_2\frac{h^2}{\varepsilon^2}\right],$$

$$|\mathrm{Div}_\varepsilon^h \vec{f}(x) - \mathrm{Div}\vec{f}(x)| \leqslant C\left[\frac{\varepsilon^p\|\vec{f}\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|\vec{f}\|_1\frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|\vec{f}\|_2\frac{h^2}{\varepsilon^2}\right],$$

где $f \in C^{p+1}(\Sigma)$ *– функция на поверхности,* $\vec{f} \in C^{p+1}(\Sigma)$ *– касательное векторное поле на поверхности,* $p \geqslant 1$.

Доказательство. Будем обозначать через C константы, зависящие только от поверхности Σ, функции η и параметров k, m, B и C_n, причём в различных оценках значение константы C, вообще говоря, различно. Также будем предполагать, что $h^2 \ll h$ (т.е. если некоторая величина не превосходит h^2, то считаем, что эта величина меньше h).

Опять построим специальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Пусть $\pi = O\xi_1\xi_2$ – касательная плоскость к поверхности Σ в точке x.

Интегралы $L_i^\varepsilon f(x)$, $x \in \Sigma^{in}$, определяемые формулой (22), аппроксимируем интегральной суммой (34).

Разобьём поверхность $\tilde\Sigma$ на четыре части по положению лежащих на них узлов: $\tilde\Sigma_0$ – объединение ячеек σ_j таких, что $y^j \in C(x, 2h)$; $\tilde\Sigma_1$ – объединение ячеек σ_j таких, что $y^j \in C(x, R-h)$ и при этом $\sigma_j \notin \tilde\Sigma_0$; $\tilde\Sigma_2$ – объединение ячеек σ_j таких, что $y^j \in C(x, R_0 - h)$ и при этом $\sigma_j \notin \tilde\Sigma_0$, $\sigma_j \notin \tilde\Sigma_1$; $\tilde\Sigma_4$ – оставшаяся часть поверхности $\tilde\Sigma$ (случай $\tilde\Sigma_k = \varnothing$ для некоторых k возможен).

Если $\sigma_j \in \tilde\Sigma_k$, $k \leqslant 2$, то построим: ячейку $\sigma_j^0 \subset \pi$ – проекцию ячейки σ_j на плоскость π; точки $\tilde y^j \in \pi$ и $\tilde z^j \in \pi$ – проекции на плоскость π точек $y^j \in \tilde\Sigma$ и $z^j \in \Sigma$ соответственно; а также ячейку $\sigma_j^* \subset \Sigma$ такую, что её проекция на плоскость π есть ячейка $\sigma_j^0 \subset \pi$. При этом

$$|\tilde z^j - \tilde y^j| \leqslant Ch^2.$$

Также разобьем плоскость π на части Σ_k^0, $k = \overline{0,3}$ (Σ_k^0 – проекция поверхности $\tilde\Sigma_k$ на плоскость π для $k = 1, 2, 3$), Σ_4^0 – оставшаяся часть плоскости π.

Рассмотрим разности $L_i f(x) - L_i^{\varepsilon,h} f(x)$, $i = 1, 2$, представив их в виде

$$L_i f(x) - L_i^{\varepsilon,h} f(x) = (L_i f(x) - D_i^\varepsilon f''(0)) + (D_i^\varepsilon f''(0) - L_i^{\varepsilon,h}(x)).$$

Для первой разности в правой части последнего выражения из оценки (5) и леммы имеем

$$|L_i f(x) - D_i^\varepsilon f''(0)| \leqslant C\left[\frac{\varepsilon^p\|f\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|f\|_1\frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|f\|_1\varepsilon^2\right].$$

Далее оценим разности $D_i^\varepsilon f''(0) - L_i^{\varepsilon,h}(x)$. Представим величины $D_i^\varepsilon f''(0)$ и $L_i^{\varepsilon,h} f(x)$ в виде

$$D_i^\varepsilon f''(0) = I_0 + I_1 + I_2 + I_3, \quad I_k = -\int\limits_{\xi \in \Sigma_k^0} \varphi(\xi)\, d\xi, \quad \varphi(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^3}(f''(\xi) - f''(0))\eta_i(\xi/\varepsilon),$$

$$L_i^{\varepsilon,h} f(x) = J_0 + J_1 + J_2 + J_3, \quad J_k = -\sum_{j:\sigma_j \subset \tilde\Sigma_k} \varphi_j \mu(\sigma_j), \quad \varphi_j = \frac{1}{\varepsilon^3}(f(z^j) - f(x))\eta_i\left(\frac{y^j - x}{\varepsilon}\right).$$

Оценим интегралы I_2, I_3, J_2, J_3 по аналогии с рассуждениями в сформулированной лемме. При $\xi \in \Sigma_3^0 \bigcup \Sigma_4^0$ имеем

$$|\varphi(\xi)| \leqslant C\frac{\|f''\|_1}{\varepsilon^3}|\xi|\left|\frac{\xi}{\varepsilon}\right|\frac{1}{1+|\xi/\varepsilon|^m}, \quad |\xi| > \max\{R-h, h\},$$

причём $\|f''\|_1 \leqslant \|f\|_1/R$. Тогда

$$|I_2+I_3| \leqslant C\frac{\|f\|_1}{R}\int\limits_{R/\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{1+\rho^{m-3}}\,d\rho \leqslant C\frac{\|f\|_1\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}}.$$

Можно показать, что

$$|\varphi_j| \leqslant C\frac{\|f\|_1}{\varepsilon^3}|y_0^j - x|\left|\frac{y_0^j - x}{\varepsilon}\right|\frac{1}{1+|(y_0^j-x)/\varepsilon|^m} \text{ при } \sigma_j \in \tilde\Sigma_2, \quad |\varphi_j| \leqslant C\|f\|_0\varepsilon^{m-3} \text{ при } \sigma_j \in \tilde\Sigma_3.$$

Следовательно,

$$|J_2| \leqslant C\|f\|_1\int\limits_{R/\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{1+\rho^{m-3}}\,d\rho \leqslant C\frac{\|f\|_1\varepsilon^{m-4}}{R^{m-4}}, \quad |J_3| \leqslant C\|f\|_0\varepsilon^{m-3}.$$

Также сразу видно, что $|I_0| \leqslant C\|f\|_0 h^2$, $|J_0| \leqslant C\|f\|_0 h^2$.

Пусть

$$\varphi_j^0 = -\frac{1}{\varepsilon^3}(f'(\xi^j) - f'(0))\eta_i(\xi^j/\varepsilon),$$

где $\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j)$ – первые две координаты точки y^j в специальной системе координат. Обозначим $\xi_\varepsilon^j = \xi^j/\varepsilon$, $\xi_\varepsilon = \xi/\varepsilon$.

Рассмотрим разность

$$\varphi_j\mu(\sigma_j) - \varphi_j^0\mu(\sigma_j^0) = \frac{1}{\varepsilon^3}(f(z^j) - f(x))\eta_i\left(\frac{y^j - x}{\varepsilon}\right)\mu(\sigma_j) - \frac{1}{\varepsilon^3}(f'(\xi^j) - f'(0))\eta_i(\xi_\varepsilon^j)\mu(\sigma_j^0).$$

При $\sigma_j \in \tilde\Sigma_1$, $|\xi_j| > h$ имеем оценки

$$|\mu(\sigma_j) - \mu(\sigma_j^0)| \leqslant C|\xi^j|^2\mu(\sigma_j^0), \quad |f(z^j) - f'(\xi^j)| \leqslant C\|f\|_1 h^2,$$

$$\left|\eta_i\left(\frac{y^j - x}{\varepsilon}\right)\right| + |\eta_i(|\xi_\varepsilon^j|)| \leqslant |\xi_\varepsilon^j|\frac{C}{1+|\xi_\varepsilon^j|^m},$$

$$\left|\eta_i\left(\frac{y^j - x}{\varepsilon}\right) - \eta_i(|\xi_\varepsilon^j|)\right| \leqslant C|\xi^j|^2|\xi_\varepsilon^j|^2\frac{1}{1+|\xi_\varepsilon^j|^{m+1}}.$$

Тогда

$$|\varphi_j\mu(\sigma_j) - \varphi_j^0\mu(\sigma_j^0)| \leqslant \frac{C}{\varepsilon^3}\left(\frac{\|f\|_1 h^2 + \|f\|_1|\xi^j|^3}{1+|\xi_\varepsilon^j|^m}|\xi_\varepsilon^j| + \|f\|_1|\xi_\varepsilon^j|^2|\xi^j|^3\frac{1}{1+|\xi_\varepsilon^j|^{m+1}}\right)\mu(\sigma_j^0).$$

Значит,

$$J_1 = J_1' + \Delta J_1, \quad \Delta J_1 = -\sum_{j:\sigma_j\subset\tilde\Sigma_1}(\varphi_j\mu(\sigma_j) - \varphi_j^0\mu(\sigma_j^0)),$$

$$|\Delta J_1| \leqslant \sum_{j:\sigma_j\subset\tilde\Sigma_1} C\|f\|_1 \int\limits_{\xi\in\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{h^2}{\varepsilon^3}+|\xi_\varepsilon|^4\right)\frac{1}{1+|\xi_\varepsilon|^m}+|\xi_\varepsilon|^5\frac{1}{1+|\xi_\varepsilon|^{m+1}}\right]d\xi \leqslant C\|f\|_1\left[\frac{h^2}{\varepsilon}+\varepsilon^2\right].$$

Величина J_1' есть интегральная сумма для интеграла $I_1,$ и мы можем записать

$$I_1-J_1'=-\sum_{j:\sigma_j\in\Sigma_j^0}\int\limits_{\sigma_j}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^j))\,d\sigma.$$

Если точки y^j выбирались на ячейках произвольным образом, то при $\xi^j\in\sigma_j^0$ имеем

$$|\varphi(\xi)-\varphi(\xi^j)|\leqslant Ch\|\varphi\|_{1,\sigma_j},\quad \|\varphi\|_{1,\sigma_j}=\sup_{\xi\in\sigma_j^0}\max_{|\alpha|=1}|D^\alpha\varphi(\xi)|,$$

причём

$$\|\varphi\|_{1,\sigma_j}\leqslant C(1+|\xi_\varepsilon|+|\xi_\varepsilon|^2)\frac{\|f\|_1}{1+|\xi_\varepsilon|^m}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$|I_1-J_1'|\leqslant C\|f\|_1\frac{h}{\varepsilon^3}\sum_{\xi\in\mathbb{R}^2}\int\limits_{\sigma_j}(1+|\xi_\varepsilon|+|\xi_\varepsilon|^2)\frac{1}{1+|\xi_\varepsilon|^m}\,d\xi\leqslant C\|f\|_1\frac{h}{\varepsilon}.$$

Если y^j – центры треугольников $\sigma_j,$ то ξ^j – центры треугольников $\sigma_j^0.$ Тогда при $\xi_j\in\sigma_j$ имеем

$$\varphi(\xi)-\varphi(\xi^j)=(\operatorname{grad}\varphi(\xi^j),\xi-\xi_j)+\alpha(\xi,\xi_j),$$

где $|\alpha(\xi,\xi_j)|\leqslant Ch^2\|\varphi\|_{2,j},$ $\|\varphi\|_{1,\sigma_j}=\sup\limits_{\xi\in\sigma_j^0}\max\limits_{|\alpha|=2}|D^\alpha\varphi(\xi)|,$ причём

$$\|\varphi\|_{1,\sigma_j}\leqslant C\frac{1}{\varepsilon}(1+|\xi_\varepsilon^j|+|\xi_\varepsilon^j|^2)\frac{\|f\|_2}{1+|\xi_\varepsilon^j|^m}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\sigma_j}(\xi-\xi^j)\,d\sigma=0\quad\text{и}\quad\int\limits_{\sigma_j}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^j))\,d\sigma\leqslant Ch^2\|\varphi\|_{2,j}\mu(\sigma_j),$$

то имеем

$$|I_1-J_1'|\leqslant C\|f\|_2\frac{h^2}{\varepsilon^4}\sum_{\xi\in\mathbb{R}^2}\int\limits_{\sigma_j}(1+|\xi_\varepsilon|+|\xi_\varepsilon|^2)\frac{1}{1+|\xi_\varepsilon|^m}\,d\sigma\leqslant C\|f\|_2\frac{h^2}{\varepsilon^2}.$$

Собрав все оценки, получим утверждение теоремы.

Заключение. Получены формулы для аппроксимации поверхностных градиента и дивергенции с применением интегральных операторов (теорема 1). Обратим внимание, что для точек, удалённых от края, и в случае, когда поверхность и функция достаточно гладкие, мы имеем аппроксимацию порядка $\varepsilon^2,$ где ε – параметр, интерпретируемый как характерный радиус области сосредоточения ядра интегрального оператора. Здесь есть отличие от плоского случая, где указанный порядок аппроксимации может быть высоким (оценка (5)). Причина такого отличия состоит в том, что в предложенных формулах точность аппроксимации определяется в том числе и погрешностью, возникающей из-за отклонения поверхности от касательной плоскости. Формулы более высокого порядка точности, по-видимому, могут быть получены с учётом кривизны поверхности.

Также заметим, что при аппроксимации интегральных операторов дискретными суммами дополнительная погрешность имеет порядок h/ε для произвольного выбора узлов и h^2/ε^2 в случае триангуляции поверхности и выборе узлов в центрах ячеек (см. теоремы 2 и 3). Отметим, что в статье [7] для плоского случая приводится оценка, в которой дополнительная погрешность при дискретизации может определяться величиной h^m/ε^m, параметр m определяется видом ядра аппроксимации и гладкостью функции и может принимать большие значения. Однако такие оценки справедливы при регулярном расположении узлов. В данной же работе ставилась цель получить оценки для случая произвольного неструктурированного разбиения поверхности или её триангуляции достаточно общего вида (отметим, что при этом мы не требовали свойства конформности от поверхностной сетки).

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
2. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
3. *Volakis J.L., Sertel K.* Integral Equation Methods for Electromagnetics. Raleigh, 2012.
4. *Писарев И.В., Сетуха А.В.* Снесение граничного условия на срединную поверхность при численном решении краевой задачи линейной теории крыла // Вычислит. методы и программирование. 2014. Т. 15. Вып. 1. С. 109–120.
5. *Setukha A., Fetisov S.* The method of relocation of boundary condition for the problem of electromagnetic wave scattering by perfectly conducting thin objects // J. of Comput. Phys. 2018. V. 373. P. 631–647.
6. *Гутников В.А., Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О моделировании зданий и сооружений методом дискретных вихревых рамок // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 78–92.
7. *Eldredge J.D., Leonard A., Colonius T.* A general deterministic treatment of derivatives in particle methods // J. of Comput. Phys. 2002. V. 180. P. 686–709.
8. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 1. М., 1997.
9. *Захаров Е.В., Рыжаков Г.В., Сетуха А.В.* Численное решение трёхмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеальнопроводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1253–1263.
10. *Рыжаков Г.В., Сетуха А.В.* О сходимости численной схемы типа метода вихревых рамок на замкнутой поверхности с аппроксимацией формы поверхности // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1327–1336.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт вычислительной математики
имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.
После доработки 23.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.