

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук
(ИВМ РАН)

Отчет
**Алгоритм сжатия гидрофизических данных
на основе вейвлет-преобразования**

Косолапов И. А.

Москва, 2024

Содержание

1	Введение	3
2	Описание вейвлет-подхода	5
2.1	Кратномасштабный анализ	5
2.2	Преобразование Хаара	6
2.3	Построение вейвлетов Добеши	8
3	Дискретное вейвлет-преобразование	12
3.1	Дискретное вейвлет-преобразование одномерного сигнала	12
3.2	Дискретное вейвлет-преобразование двумерного сигнала	14
4	Результаты эксперимента	18
4.1	Преобразование Хаара	19
4.2	Преобразование Добеши	25
5	Вывод	30

1 Введение

В современных науках о земле сжатие данных играет ключевую роль в обработке и передаче огромных объемов информации, полученной из различных гидрофизических и геофизических исследований.

Спутниковые данные в геофизике представляют собой ценную информацию о состоянии Земли, ее поверхности, атмосферы, океанов и других природных явлениях. Однако объем этих данных может быть огромным из-за высокого разрешения изображений и множества параметров, которые могут быть зафиксированы спутниками. Для сжатия спутниковых данных используются различные методы, включая:

1. Методы сжатия без потерь: такие методы сохраняют все данные и не приводят к потере информации, а уменьшение размера данных достигается путем оптимального кодирования информации.
2. Методы сжатия с потерями: эти методы позволяют уменьшить объем данных за счет некоторой потери информации. В случае спутниковых данных это может быть незначительная потеря качества изображения или точности измерений.

Сжатие спутниковых данных позволяет уменьшить объем хранимой информации, ускорить передачу данных и улучшить эффективность исследований. Однако необходимо учитывать, что при сжатии данных всегда существует риск потери части информации, поэтому важно балансировать между степенью сжатия и сохранением качества данных для конкретных задач и требований исследования.

Геофизические данные содержат в себе скрытую информацию, которая зачастую имеет высокую скоррелированность. В этом заключается сходство такого вида данных с изображениями, для которых скоррелированность соседних пикселей и, следовательно, избыточность, являются типичными [1].

В последнее время исследования и разработка эффективных методов сжатия изображений с потерями продвинулись далеко вперед. При вейвлет-сжатии изображения части описываются с ссылкой на другие части того же изображения, тем самым используется избыточность кусочного самоподобия [2]. Вейвлеты с компактным носителем это функции, определенные над конечным интервалом и имеющие нулевое среднее значение. Идея вейвлет-преобразований заключается в том, чтобы аппроксимировать произвольную функцию $f(x)$ как линейную комбинацию базисных функций или вейвлетов. Такие базисные функции получены из одного вейвлета - прототипа, называемого материнским вейвлетом $\psi(x)$, с помощью задержек, масштабирования и переносов.

В этой работе исследовалась возможность применения методов сжатия изображений, таких как вейвлет-преобразование Хаара и вейвлеты Добеши-L, к данным о температуре в Черном море, полученным с помощью дистанционного зондирования. В данном отчете рассматривается применимость и эффективность работы алгоритма, а также исследуется влияние сжатия на качество хранимых данных. Для достижения этой цели были проанализированы результаты применения вейвлет-преобразований к

данным о температуре. Кроме того, было проведено сравнение полученных данных до и после применения сжатия для оценки изменений в качестве информации.

2 Описание вейвлет-подхода

2.1 Кратномасштабный анализ

Кратномасштабный анализ (КМА) - это процесс построения последовательности подпространств в L_2 , обладающих следующими свойствами.

- $\forall n \in \mathbb{Z}, V_n \subset V_{n+1}$
- Если $f(x) \in C^0(\mathbb{R})$ тогда $f(x) \in \overline{\text{span}}\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{Z} \text{ и } g \in V_n : \|f - g\|_2 < \varepsilon$$

- $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$
- Функция $f(x) \in V_0 \iff 2^{\frac{n}{2}} f(2^n x) \in V_n$
- Существует такая функция $\phi(x) \in L_2(\mathbb{R})$, называемая масштаббирующей функцией, такая что набор из переносов $\phi(x - n)$ образуют ортонормированный базис в $V_0 = \overline{\text{span}}\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Покажем каким образом осуществляется переход между подпространствами разных масштабов. Введем следующее обозначение: $\phi_{n,k}(x) = 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n x - k)$ Т.к. $V_0 \subset V_1$, то масштаббирующую функцию $\phi(x) = \phi_{0,0}(x) \in V_0$ можно записать в виде разложения по базису $\{\phi_{1,k}(x)\}$, где $\phi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \phi(2x - k)$. Получаем уравнение масштабирования

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k h(k) \phi(2x - k), \quad (1)$$

где $h(k) = \langle \phi(x), \phi_{1,k}(x) \rangle$ - коэффициенты разложения по базису.

Определим ортогональную проекцию произвольной функции $f \in L_2$ на V_n .

$$P_n f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{n,k} \rangle \phi_{n,k}$$

Также введем разность проекций на подпространства V_n и V_{n+1} , которую назовем уточнением V_n до V_{n+1}

$$Q_n f(x) = P_{n+1} f(x) - P_n f(x)$$

$$Q_n f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{n,k} \rangle \psi_{n,k}$$

$Q_n(\cdot)$ также является ортогональной проекцией и его область значения W_n ортогональна V_n . Имеем следующее

$$V_n = \{f \mid P_n f = f\}$$

$$W_n = \{f \mid Q_n f = f\}$$

$$V_n \oplus W_n = V_{n+1}$$

Так как $L_2(\mathbb{R})$ раскладывается в прямую сумму $\overline{\bigoplus_n V_n}$, в то же время

$$V_N = \underbrace{V_n \oplus W_n}_{V_{n+1}} \oplus W_{n+1} \dots \oplus W_N,$$

то мы получаем

$$L_2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n}. \quad (2)$$

Существует теорема [4], утверждающая, что для набора подпространств V_n из $L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих КМА, существует $\psi(x) \in W_0$ называемая **материнским вейвлетом**, что множество функций $\{\psi_{n,k} = 2^{\frac{n}{2}} \psi(2^n x - k)\}_k \subset W_n$ образует ортонормированный базис в пространстве W_n . Эти подпространства вейвлетов наследуют масштабирующее свойство $f(x) \in W_n \Leftrightarrow f(2x) \in W_{n+1}$. В силу (2) можем записать разложение

$$f(x) = \sum_n y_n = \sum_n \underbrace{\sum_k c_{n,k} \psi_{n,k}(x)}_{y_n \in W_n}.$$

Так как $W_0 \subset V_1$, то материнский вейвлет можно разложить по базису из $\phi_{1,k}(x)$, то есть получить масштабирующее уравнение на вейвлеты

$$\psi_{0,0}(x) = \psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2x - k), \quad (3)$$

где $g_k = \langle \psi_{0,0}(x), \phi_{1,k}(x) \rangle$ - коэффициенты разложения по базису пространства V_1 . Можно показать [3], что $g_k = (-1)^k h_{K-1-k}$, где K - произвольное число, одинаковое для всех n . Хотя и для построения КМА требование ограниченного носителя функции $\phi(x)$ не является необходимым, такого рода функции представляют особый интерес с практической точки зрения.

2.2 Преобразование Хаара

Вейвлет-преобразование Хаара является эффективным методом сжатия данных. Оно базируется на усреднении и разности значений элементов матрицы, для получения матрицы в разреженном виде или близком к разреженному, что позволяет осуществлять эффективное хранение данных дистанционного зондирования.

Вейвлеты Хаара можно получить, если рассмотреть масштабирующую функцию следующего вида

$$\phi = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1); \\ 0, & x \notin [0, 1). \end{cases}$$

Несложно найти $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Масштабирующее уравнение (1) примет вид $\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1)$, а коэффициенты для масштабирующего уравнения для вейвлетов (3) можно выбрать $g_0 = h_1$, $g_1 = -h_0$.

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Получили материнский вейвлет Хаара. Тогда система функций примет вид

$$\psi_{n,k}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & x \in \Delta_{2^k}^{n+1} \\ -2^{\frac{n}{2}}, & x \in \Delta_{2^{k+1}}^{n+1}, \text{ где } \Delta_k^n = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right), k, n \in \mathbb{Z}. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для дискретного преобразования Хаара введем равномерное разбиение отрезка $[0, 1)$ на 2^m узлов. Перенумеруем функции $\psi_{n,k} \rightarrow \psi_N$, где $N = 2^n + k$, $N = 0, \dots, 2^m - 1$. Положим, что функция $\psi_0 = 1$. Дискретным преобразованием вектора $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{2^m-1}]$ назовем вектор $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{2^m-1}]$, который находится по формуле

$$b_N = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} a_j \psi_N \left(\frac{j}{2^m} \right)$$

Или в векторном виде

$$\mathbf{b} = H\mathbf{a},$$

где H – матрица дискретного преобразования Хаара, имеющая следующий вид

$$H = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi_N \left(\frac{j}{2^m} \right) \right\}_{N,j=0}^{2^m-1},$$

Двумерное вейвлет-преобразование Хаара есть одномерное преобразование Хаара, примененное поочередно к строкам и столбцам матрицы данных

$$B = HAH^T, \tag{4}$$

где A – матрица исходных данных размерности $\mathbb{R}^{2^m \times 2^m}$.

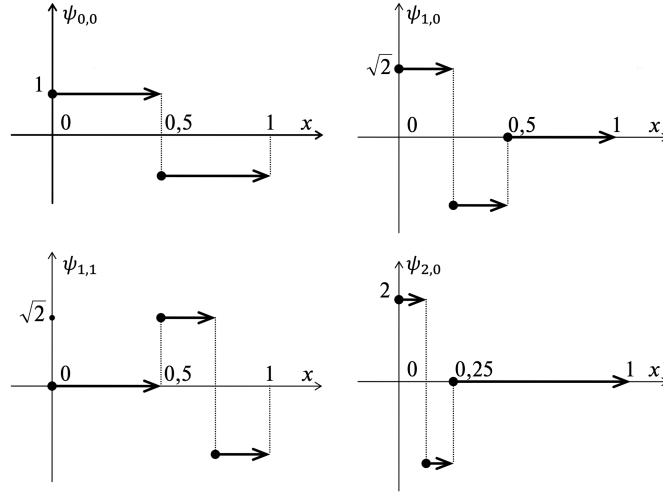


Рис. 1: Графики вейвлетов Хаара $\psi_{0,0}, \psi_{1,0}, \psi_{1,1}, \psi_{2,0}$.

Так как H – обратима и ортогональна, то обратное преобразование осуществляется по формуле

$$A = H^T B H, \quad (5)$$

причем сжатие будет происходить без потерь.

Сжатие с потерями осуществляется путем зануления элементов матрицы B , меньших, чем заданный порог ϵ .

2.3 Построение вейвлетов Добеши

Для построения ортогональных вейвлетов с компактным носителем мы рассмотрим уравнение масштабирования (1)

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \phi(2x - k)$$

и уравнение вейвлетов (3)

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \phi(2x - k).$$

В силу компактности носителя функции $\psi(x)$, порождающей КМА, эти суммы будут конечными

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} h_k \phi(2x - k) \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k h_{N-1-k} \phi(2x - k),$$

где $g_k = (-1)^k h_{N-1-k}$.

Одним из способов определить вейвлеты является задание свойств коэффициентов разложения $\{h_k\}$, присутствующих в масштабирующем уравнении. Утверждается в [3] (из анализа частотных характеристик зеркальных фильтров), что имеются 2 необходимых условия для коэффициентов, чтобы они удовлетворяли уравнениям масштабирования:

1. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}$.
2. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k = 0$.

Еще одно условие на коэффициенты следует из ортонормированности системы $\{\phi(x - k)\}_k$

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= \langle \phi(x), \phi(x - k) \rangle = 2 \int \sum_j h_j \phi(2x - j) \sum_m h_m \phi(2(x - k) - m) dx = \\ &= \sum_j h_j \sum_k h_k \int \phi(2x - j) \phi(2x - (2k + m)) d(2x) = \sum_j h_j \sum_m h_m \delta_{j, 2k+m} = \sum_j h_j h_{j-2k} \end{aligned}$$

Получаем условие

$$3. \forall k \in \mathbb{Z} \delta_{0,k} = \sum_j h_j h_{j-2k}$$

Введем дополнительное условие, налагаемое на коэффициенты $\{h_k\}$ - точная аппроксимация многочлена степени K при разложении по базису $\{\phi(x - k)\}$ пространства V_0 . Чем выше степень многочлена, тем точнее можно записать многочлен Тейлора в пространстве V_0 , а значит точнее аппроксимировать K раз дифференцируемую функцию $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ ее проекцией $f_0(x) \in V_0$.

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^K b_n x^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{0,k} \phi(x - k)$$

Так как мы налагаем такое условие, для произвольного набора $\{b_k\}$ справедливо, что $P_N(x) \in V_0$, $P_N(x) \perp \psi(x) \in W_0$. Отсюда следует требование

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \psi(x) dx = 0, \quad n = 0, \dots, N$$

Утверждается [3], что это условие эквивалентно

$$\sum_{k=0}^{K-1} k^n g_k = 0 \quad n = 0, \dots, N$$

где отрезок $[0, K - 1]$ - носитель масштабирующей функции $\phi(x)$. В свою очередь можно показать, что это выражение выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{K-1} k^n (-1)^k h_k = 0, \quad n = 0, \dots, N$$

Таким образом, получено дополнительное условие на коэффициенты $\{h_k\}_k$. Причем требование 2. есть частный случай этого условия.

Список требований на коэффициенты масштабирующих уравнений

1. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}.$
2. $\delta_{0,k} = \sum_j h_j h_{j-2k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
3. $\sum_{k=0}^{K-1} k^n (-1)^k h_k = 0, \quad n = 0, \dots, N$

Вейвлет Хаара - Добеши-1

Рассмотрим вейвлет Добеши-1, который удовлетворяет приведенным ранее 3 условиям на коэффициенты для масштабирующих уравнений. Оказывается полученный вейвлет совпадает с вейвлетом Хаара.

Если положить $K = 2$, то условия 1 и 2 примут вид

$$\begin{cases} h_0 + h_1 = \sqrt{2} \\ h_0^2 + h_1^2 = 0 \end{cases} \quad (D_1)$$

Очевидно, что решение $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Причем оно также удовлетворяет условию 3. с $n = 0$.

Вейвлет Добеши-2

Теперь положим $K = 4$. Из условий 1. и 2. получим 3 уравнения, а 4 получим из условия 3. при $n = 0$.

$$\begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1 \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0 \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \sqrt{2} \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 = 0 \end{cases} \quad (D_2)$$

Заменим 3 и 4 уравнение системы на их сумму и разность

$$\begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1 \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0 \\ h_0 + h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ h_1 + h_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Заметим, что $(h_0 + h_2)^2 + (h_1 + h_3)^2 = h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 2(h_0h_2 + h_1h_3)$, то есть первое уравнение является избыточным, отбросим его. Чтобы разрешить систему однозначно, нужно дополнить систему уравнением из условия 3. при $n = 1$:

$$\begin{cases} -1h_1 + 2h_2 - 3h_3 = 0 \\ h_0h_2 + h_1h_3 = 0 \\ h_0 + h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ h_1 + h_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

У данной системы имеется 2 зеркальных решения $h = [h_0, h_1, h_2, h_3]$

$$h = \left[\frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right]$$

$$h = \left[\frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right]$$

Добеши-2 называют функцию, порожденную первым набором решений. Можно увеличивать $K = 2L$ и построить другие вейвлеты Добеши-L.

3 Дискретное вейвлет-преобразование

3.1 Дискретное вейвлет-преобразование одномерного сигнала

Задача: построить вейвлет-преобразование для произвольной функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, т.е. найти коэффициенты обобщенного ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{n,k} \psi_{n,k}(x)$$

Оказывается, что можно не считать интегралы $c_{n,k} = \int f(x) \psi_{n,k}(x) dx$, если использовать в качестве исходного объекта элемент наилучшего приближения (ЭНП) $f_N(x) \in V_N$ вместо $f(x)$. Тогда имеется набор коэффициентов разложения по базису $V_N \{a_{N,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, задающий $f_N(x) = \sum_k a_{N,k} \phi_{N,k}(x)$. Так как $V_N = \bigoplus_{j=-\infty}^{N-1} W_j$, то

$$f_N(x) = \sum_{n=-\infty}^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{n,k} \psi_{n,k}(x) = \sum_{n=-\infty}^{N-1} y_n(x),$$

где $y_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{n,k} \psi_{n,k}(x) \in W_n$. Переформулируем задачу следующим образом: По заданному набору коэффициентов $\{a_{n,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ найти набор коэффициентов $\{c_{n,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Представим подпространство V_N в виде суммы

$$V_N = V_{N-1} \oplus W_{N-1} \Rightarrow f_N(x) = f_{N-1}(x) + y_{N-1}(x)$$

и разложим функции по соответствующим базисам.

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{N,m} \phi_{N,m}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{N-1,m} \phi_{N-1,m}(x) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{N-1,m} \psi_{N-1,m}(x) \quad (6)$$

Из масштабирующих уравнений можно легко получить следующие соотношения, они будут полезны и назовем их **соотношениями перехода между масштабами для базисов**.

$$\phi_{n-1,k}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{j-2k} \phi_{n,j}, \quad \psi_{n-1,k}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{j-2k} \phi_{n,j}. \quad (b)$$

Умножим скалярно (6) на $\phi_{n-1,k}(x)$ и пользуясь тем, что

$$\langle \phi_{n-1,k}, \phi_{n-1,k} \rangle = 1, \quad \langle \phi_{n-1,k}, \psi_{n-1,k} \rangle = 0$$

Вооружившись последними 2-мя соотношениями, преобразуем уравнение (6)

$$a_{n-1,k} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} \langle \phi_{n,m}, \phi_{n-1,k} \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} \langle \phi_{n,m}, \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{j-2k} \phi_{n,j} \rangle =$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{j-2k} \underbrace{\langle \phi_{n,m}, \phi_{n,j} \rangle}_{\text{Ортогональность}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} h_{m-2k}$$

В конечном счете, мы получили, что из правой части остается лишь 1 коэффициент (мы записали его слева), а справа разложили функцию из $n - 1$ масштаба по базису функций с большим масштабом и воспользовались ортогональностью масштабирующих функций. Аналогично, умножив скалярно выражение (6) на $\psi_{n-1,k}(x)$, получим подобный результат для коэффициентов $c_{n-1,k}$. Итоговые выражения

$$a_{n-1,k} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} h_{j-2k}, \quad c_{n-1,k} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} g_{j-2k}, \quad (1d)$$

Напомним, что коэффициенты h_k и g_k имеют вид

$$h_k = \langle \phi_{n,0}, \phi_{n+1,k} \rangle = \langle \phi_{0,0}, \phi_{1,k} \rangle, \quad g_k = \langle \psi_{n,0}, \phi_{n+1,k} \rangle = \langle \psi_{0,0}, \phi_{1,k} \rangle$$

Подводя итог, мы получили рекуррентную формулу для вычисления элементов наилучшего приближения соответствующему все более "грубому" подпространству КМА. Последние формулы носят дискретный характер и, если носитель функции порождающий КМА $\phi(x)$ конечен, то и суммы будут конечными.

Для некоторого $n = K < N$

$$f_N(x) = \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{K,k} \phi_{K,k}(x)}_{f_K(x) \in V_K} + \sum_{n=K}^{N-1} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{n,k} \psi_{n,k}(x)}_{y_n \in W_n} = f_K(x) + y_K(x) + y_{K+1}(x) + \dots + y_{N-1}(x).$$

Из того, что $V_N = \bigoplus_{n=-\infty}^{N-1} W_n$ следует сходимость последовательности частичных сумм $S_K(x) = \sum_{n=K}^{N-1} y_n(x)$, таким образом, всегда можно выбрать K так, чтобы

$$\|f_K\| = \|f_N(x) - S_K(x)\| < \epsilon,$$

т.е. можно отбросить f_K при достаточно большом K .

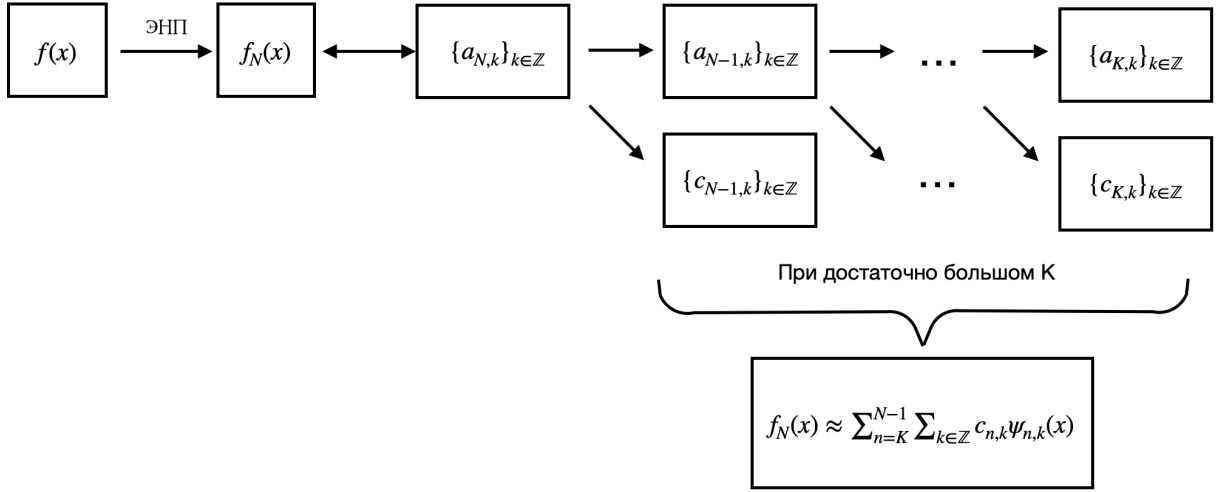


Рис. 2: Схема вычисления дискретного вейвлет-преобразования

3.2 Дискретное вейвлет-преобразование двумерного сигнала

Определим $V_n^2 = V_n \otimes V_n$, $V_n \subset L_2(\mathbb{R})$. Построим взаимнооднозначное соответствие между парами $f_{1,N}(x) \in V_N$, $f_{2,N}(x) \in V_N$ и элементом $f_N(x_1, x_2) \in V_N^2 \subset L_2(\mathbb{R}^2)$ по следующему правилу

$$(f_{1,N}, f_{2,N}) \longleftrightarrow f_N(x_1, x_2) = f_{1,N}(x_1) f_{2,N}(x_2)$$

Далее можем увидеть, что базисом в пространстве V_n^2 будет система функций

$$\{\phi_{n,k,l}(x_1, x_2) = \phi_{n,k}(x_1) \phi_{n,l}(x_2) = 2^n \phi(2^n x_1 - k) \phi(2^n x_2 - l)\}_{k,l \in \mathbb{Z}}$$

То есть существует представление

$$\begin{aligned} f_N(x_1, x_2) = f_{1,N}(x_1) f_{2,N}(x_2) &= \sum_k a_{N,k} \phi_{N,k}(x_1) \sum_l a_{N,l} \phi_{N,l}(x_2) = \\ &= \sum_k \sum_l a_{N,k,l} \phi_{N,k,l}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициенты $a_{N,k,l} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x_1, x_2) \phi_{N,k,l}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$. Далее пользуясь представлением $f_{1,N+1}(x_1) = f_{1,N}(x_1) + y_{1,N}(x_1)$, можем разложить $f_{N+1}(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} f_{N+1}(x_1, x_2) &= (f_{1,N}(x_1) + y_{1,N}(x_1)) (f_{2,N}(x_2) + y_{2,N}(x_2)) = \\ &= f_N(x_1, x_2) + y_N^V(x_1, x_2) + y_N^H(x_1, x_2) + y_N^D(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, получаем разложение подпространства V_{N+1}^2 в сумму четырех подпространств

$$V_{N+1}^2 = (V_N \oplus W_N) \otimes (V_N \oplus W_N) = V_N^2 \oplus W_N^H \oplus W_N^V \oplus W_N^D,$$

где подпространства двумерных вейвлетов $W_N^V = V_N \otimes W_N$, $W_N^H = W_N \otimes V_N$ и $W_N^D = W_N \otimes W_N$ порождаются тремя материнскими вейвлетами

$$\psi^V(x_1, x_2) = \phi(x_1)\psi(x_2), \quad \psi^H(x_1, x_2) = \psi(x_1)\phi(x_2), \quad \psi^D(x_1, x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2).$$

здесь верхние индексы $\cdot^V, \cdot^H, \cdot^D$ соответствуют "вертикальным", "горизонтальным" и "диагональным" признакам.

Подобно тому, как мы проецировали исходный одномерный сигнал $f(x)$ на подпространство V_N и представляли в виде набора коэффициентов разложения по базису $f_N(x) = \sum_k a_{N,k} \phi_{N,k}(x)$, для двумерного дискретного вейвлет-преобразования коэффициенты $\{a_{N,k,l}\}_{k,l}$ можно представить в виде матрицы. Выполнение одного уровня вейвлет-преобразования означает

$$\begin{aligned} f_N(x_1, x_2) &= f_{N-1}(x_1, x_2) + y_{N-1}^V(x_1, x_2) + y_{N-1}^H(x_1, x_2) + y_{N-1}^D(x_1, x_2) \\ \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} a_{N,k,l} \phi_{N,k,l}(x_1, x_2) &= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} a_{N-1,k,l} \phi_{N-1,k,l}(x_1, x_2) + \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{N-1,k,l}^V \psi_{N-1,k,l}^V(x_1, x_2) \\ &\quad + \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{N-1,k,l}^H \psi_{N-1,k,l}^H(x_1, x_2) + \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{N-1,k,l}^D \psi_{N-1,k,l}^D(x_1, x_2) \quad (9) \end{aligned}$$

Фактически, нужно получить правило перехода от матрицы $\{a_{N,k,l}\}_{k,l}$ к четырем матрицам $\{a_{N-1,k,l}\}_{k,l}$, $\{c_{N-1,k,l}^V\}_{k,l}$, $\{c_{N-1,k,l}^H\}_{k,l}$, $\{c_{N-1,k,l}^D\}_{k,l}$. Для того, чтобы получить разложение (9) функции, представленной в форме (7), запишем ее в следующем виде

$$f_N(x_1, x_2) = \sum_k \phi_{N,k}(x_1) \sum_l \underbrace{a_{N,k,l} \phi_{N,l}(x_2)}_{F_{N,k}(x_2) \in V_n}$$

Сделаем одномерное вейвлет-преобразование функции $F_{N,k}(x_2)$

$$F_{N,k}(x_2) = \sum_l A_{N-1,k,l} \phi_{N-1,l}(x_2) + \sum_l C_{N-1,k,l} \psi_{N-1,l}(x_2)$$

Воспользовавшись формулами для коэффициентов одномерного вейвлет-преобразования (1d), получим

$$A_{N-1,k,l} = \sum_m a_{N,k,m} h_{m-2l}, \quad C_{N-1,k,l} = \sum_m a_{N-1,k,m} g_{m-2l}.$$

Далее подставим полученные выражения в разложение функции (7)

$$\begin{aligned} f_N(x_1, x_2) &= \sum_k \phi_{N,k}(x_1) \left(\sum_l A_{N-1,k,l} \phi_{N-1,l}(x_2) + \sum_l C_{N-1,k,l} \psi_{N-1,l}(x_2) \right) = \\ &= \sum_l \phi_{N-1,l}(x_2) \underbrace{\sum_k A_{N-1,k,l} \phi_{N,k}(x_1)}_{G_1(x_1)} + \sum_l \psi_{N-1,l}(x_2) \underbrace{\sum_k C_{N-1,k,l} \phi_{N,k}(x_1)}_{G_2(x_1)} \end{aligned}$$

Сделаем одномерные вейвлет-преобразования для функций $G_1(x_1)$, $G_2(x_2)$

$$G_1(x_1) = \sum_k A_{N-1,k,l} \phi_{N,k}(x_1) = \sum_k a_{N-1,k,l} \phi_{N-1,k}(x_1) + \sum_k c_{N-1,k,l}^H \psi_{N-1,k}(x_1)$$

$$G_2(x_1) = \sum_k C_{N-1,k,l} \phi_{N,k}(x_1) = \sum_k c_{N-1,k,l}^V \phi_{N-1,k}(x_1) + \sum_k c_{N-1,k,l}^D \psi_{N-1,k}(x_1)$$

Далее, пользуясь соотношениями для перехода между масштабами для базисов (b), получаем следующие формулы

$$\boxed{\begin{aligned} a_{N-1,k,l} &= \sum_m A_{N-1,m,l} h_{m-2k}, & c_{N-1,k,l}^H &= \sum_m A_{N-1,m,l} g_{m-2k}, \\ c_{N-1,k,l}^V &= \sum_m C_{N-1,m,l} h_{m-2k}, & c_{N-1,k,l}^D &= \sum_m C_{N-1,m,l} g_{m-2k} \end{aligned}} \quad (2d)$$

Приведенную выше процедуру можно понимать следующим образом: сначала двумерный сигнал проходит высокочастотную и низкочастотную фильтрацию по строкам, после чего получаются 2 матрицы $\{A_{N-1,k,l}\}_{k,l}$, $\{C_{N-1,k,l}\}_{k,l}$ примерно вдвое меньшим количеством столбцов. Затем производится для каждой из полученных матриц ВЧ и НЧ фильтрация по столбцам и в итоге получаются 4 матрицы

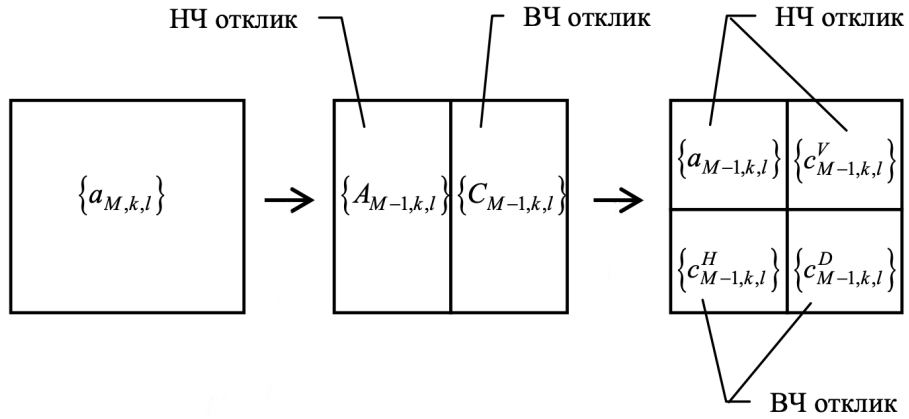


Рис. 3: ВЧ и НЧ фильтрация двумерного сигнала

Таким образом, мы описали одноуровневое вейвлет-преобразование, которое, очевидно, можно повторить для низкочастотной составляющей несколько раз, тем самым получая многоуровневое вейвлет-преобразование.

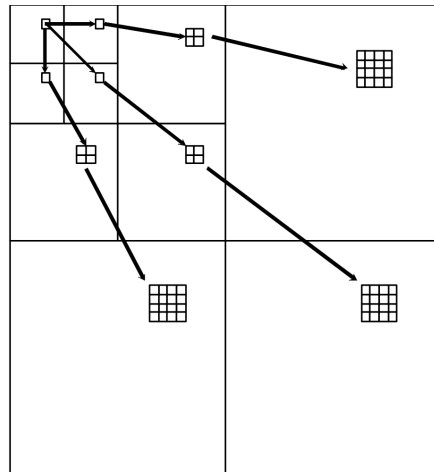


Рис. 4: Схема многоуровневого вейвлет-преобразования

4 Результаты эксперимента

Эксперименты проводились для данных о температуре поверхности Черного моря, полученных со спутников Aqua за 20.08.2018 (A1201809021105f), и Sentinel за 16.08.2018 и 20.08.2018 (S0201808160728f, S0201808200724f) пересчитанные на регулярную широтно-долготную сетку 800×1600 (800 отсчетов по широте с шагом 0.01° , 1600 отсчетов по долготе с шагом 0.01°).

Данные наблюдений со спутников представляют собой мгновенные снимки, которые могут охватывать только часть акватории. Более того, из-за наличия облаков или из-за низкого качества изображения, часть данных может отсутствовать или быть исключена на этапе обработки. Это означает, что значения в определенных узлах сетки могут быть неопределенными. Из-за отсутствия части данных и для обеспечения возможности использования алгоритмов сжатия данных, размерность данных была выбрана в виде $2^n \times 2^n$. Для проведения эксперимента были использованы подобласти размером 128×128 отсчетов, чтобы учесть ограничения связанные с отсутствием части данных и использованием определенных размерностей для обработки и сжатия информации.

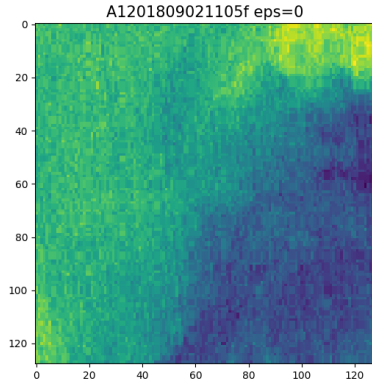
Для оценки качества сжатия данных температуры в различных участках Черного моря при различных значениях порога ϵ использовались два основных показателя:

1. **Относительная ошибка во Фробениусовой норме** (err_{fro}): Этот показатель измеряет отклонение между исходной матрицей A и восстановленной после сжатия матрицей A_ϵ . A_ϵ вычисляется следующим образом: применяется прямое вейвлет-преобразование матрицы A с последующей пороговой фильтрацией (занулением значений матрицы меньших, чем порог ϵ) и применяется обратное вейвлет-преобразование. Относительная ошибка вычисляется как отношение Фробениусовой нормы разности между A и A_ϵ к норме Фробениуса матрицы A . Чем меньше значение err_{fro} , тем ближе сжатая матрица к исходной, и тем лучше качество сжатия.
2. **Коэффициент сжатия** (cr): этот показатель определяется как отношение количества ненулевых элементов в исходной матрице A к количеству ненулевых элементов в преобразованной матрице B_ϵ после применения порога ϵ . Он показывает, насколько матрица была сжата после обработки. Чем выше значение коэффициента сжатия, тем более эффективным является метод сжатия.

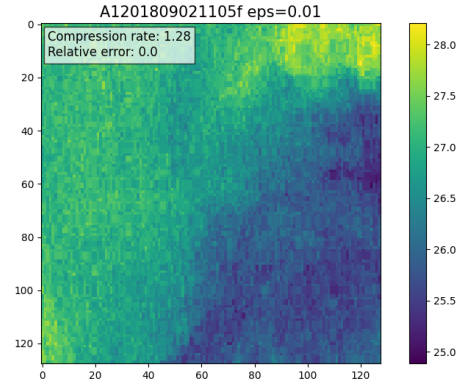
Используя эти два показателя при различных значениях порога ϵ , можно оценить, как изменяется качество сжатия данных температуры в участках Черного моря. Важно найти баланс между уровнем сжатия данных и сохранением информации для обеспечения точности и эффективности анализа данных.

4.1 Преобразование Хаара

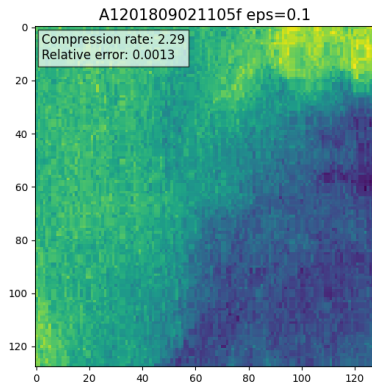
На рисунке 5 представлены данные о температуре поверхности моря со спутника Aqua из подобласти $[300, 428) \times [600, 728)$ полученные 20.08.2018 после сжатия на основе вейвлетов Хаара с последующей фильтрацией по порогу $\epsilon = 0.01, 0.1, 0.25, 0.5, 1$.



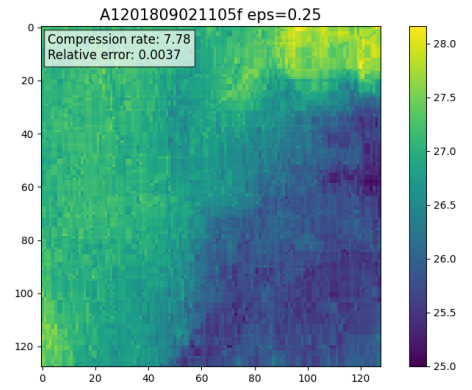
(a) $\epsilon = 0$; $cr = 0$; $err_{fro} = 0$.



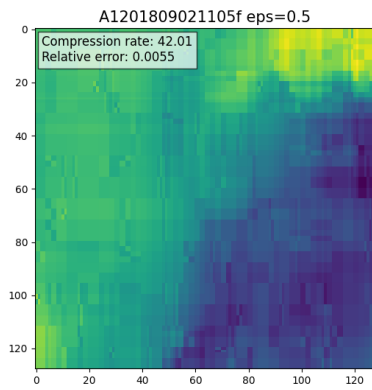
(b) $\epsilon = 0.01$; $cr = 1.28$; $err_{fro} = 0$.



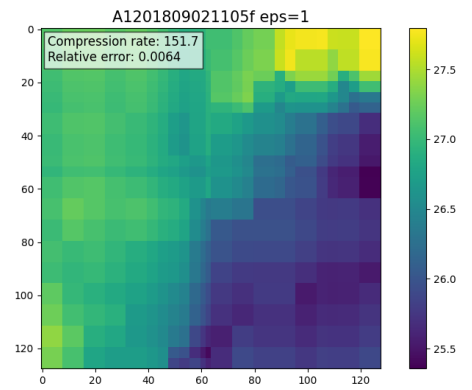
(c) $\epsilon = 0.1$; $cr = 2.29$; $err_{fro} = 0.0013$.



(d) $\epsilon = 0.25$; $cr = 7.78$; $err_{fro} = 0.0037$.



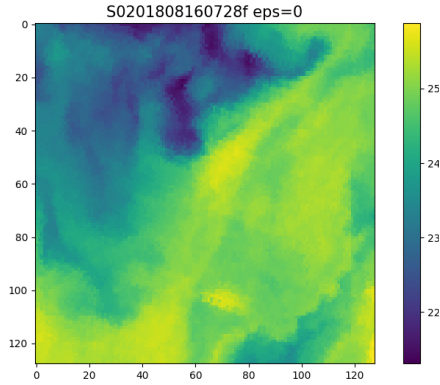
(e) $\epsilon = 0.5$; $cr = 42.01$; $err_{fro} = 0.0055$.



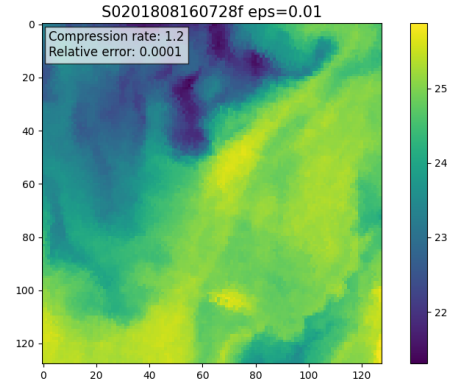
(f) $\epsilon = 1$; $cr = 151.70$; $err_{fro} = 0.0064$.

Рис. 5: Результаты сжатия данных, полученных со спутника Aqua 20.08.2018

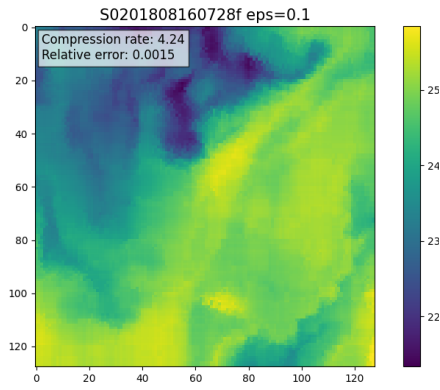
На рисунке 6 представлены данные о температуре поверхности моря со спутника Sentinel из подобласти $[280, 408) \times [1172, 1300)$ полученные 16.08.2018 после сжатия на основе вейвлетов Хаара с последующей фильтрацией по порогу $\epsilon = 0.01, 0.1, 0.25, 0.5, 1$. Коэффициент сжатия cr и относительная ошибка err_{fro} указаны под рисунками.



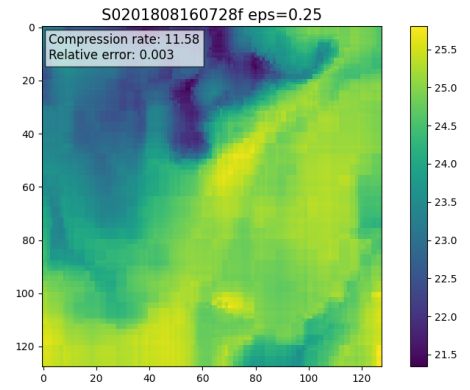
(a) $\epsilon = 0$; $cr = 0$; $err_{fro} = 0$.



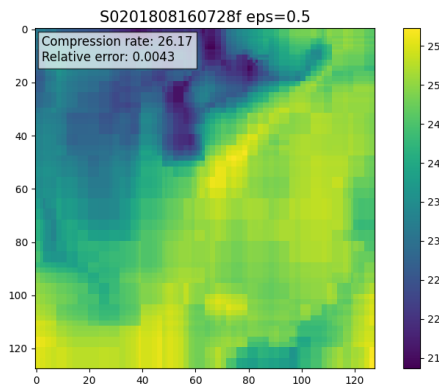
(b) $\epsilon = 0.01$; $cr = 1.20$; $err_{fro} = 0.0001$.



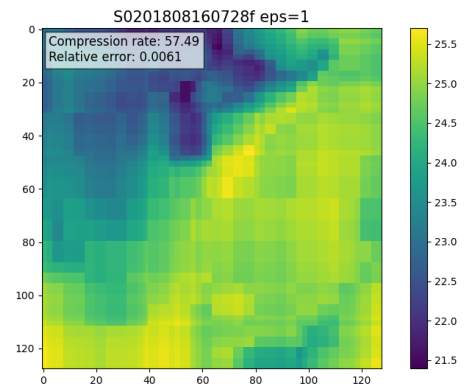
(c) $\epsilon = 0.1$; $cr = 4.24$; $err_{fro} = 0.0015$.



(d) $\epsilon = 0.25$; $cr = 11.58$; $err_{fro} = 0.003$.



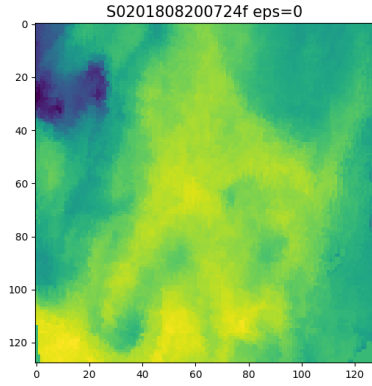
(e) $\epsilon = 0.5$; $cr = 26.17$; $err_{fro} = 0.0043$.



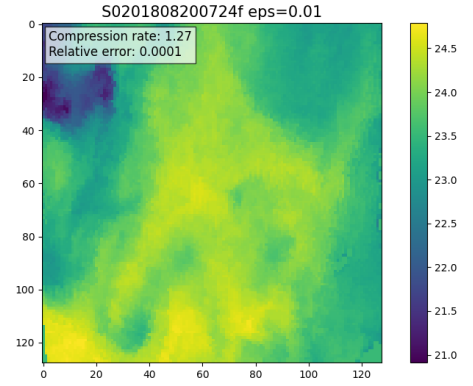
(f) $\epsilon = 1$; $cr = 57.49$; $err_{fro} = 0.0061$.

Рис. 6: Результаты сжатия данных, полученных со спутника Sentinel 16.08.2018

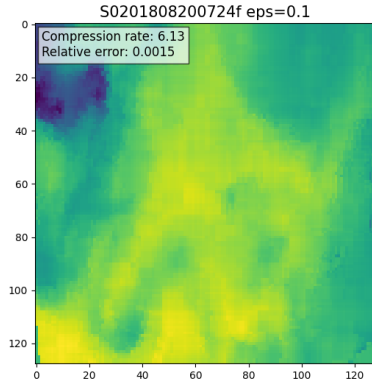
На рисунке 7 представлены данные о температуре поверхности моря со спутника Sentinel из подобласти $[222, 350) \times [846 : 974)$ полученные 20.08.2018 после сжатия на основе вейвлетов Хаара с последующей фильтрацией по порогу $\epsilon = 0.01, 0.1, 0.25, 0.5, 1$. Коэффициент сжатия cr и относительная ошибка err_{fro} указаны под рисунками.



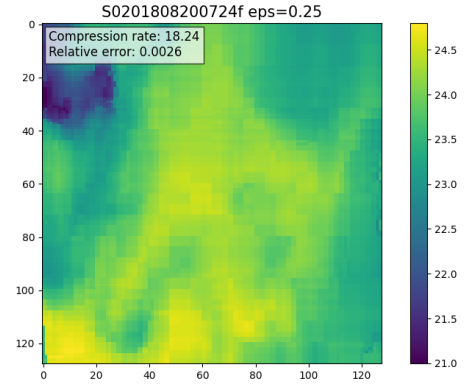
(a) $\epsilon = 0$; $cr = 0$; $err_{fro} = 0$.



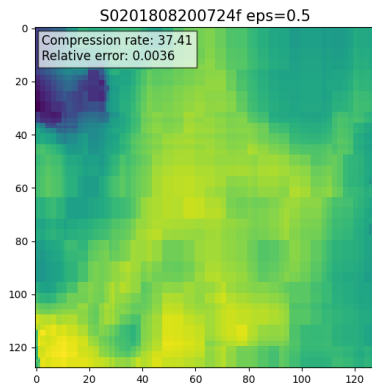
(b) $\epsilon = 0.01$; $cr = 1.27$; $err_{fro} = 0.0001$.



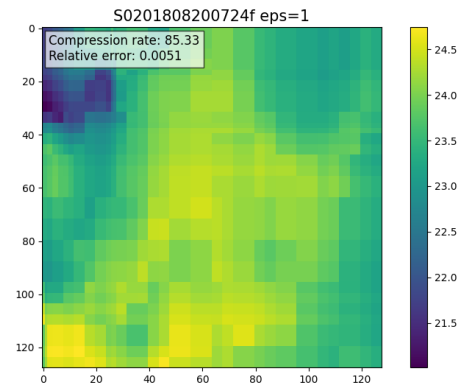
(c) $\epsilon = 0.1$; $cr = 6.13$; $err_{fro} = 0.0015$.



(d) $\epsilon = 0.25$; $cr = 18.24$; $err_{fro} = 0.0026$.



(e) $\epsilon = 0.5$; $cr = 37.41$; $err_{fro} = 0.0036$.



(f) $\epsilon = 1$; $cr = 85.33$; $err_{fro} = 0.0051$.

Рис. 7: Результаты сжатия данных, полученных со спутника Sentinel 20.08.2018

4.2 Преобразование Добеши

На рисунке 8 изображены зависимости относительной ошибки и коэффициента сжатия для различных вейвлетов Добеши. Из графиков видно, что для данных, полученных со спутника Sentinel, вейвлет Добеши-2 показал лучшее отношение ошибки к коэффициенту сжатия, в то время как для данных со спутника Aqua наилучшим оказался вейвлет Добеши-1 или вейвлет Хаара.

Из рисунка 9 можно сделать вывод, что вейвлет Добеши-2 демонстрирует более высокую эффективность сжатия по сравнению с вейвлетом Добеши-1 только при низких значениях коэффициента сжатия, не превышающих порядка 10-12. Это означает, что при относительно небольшом уровне сжатия (меньше 10-12) вейвлет Добеши-2 показывает более высокое качество сжатия данных температуры.

Однако, при дальнейшем увеличении коэффициента сжатия, вейвлет Добеши-1 или вейвлет Хаара начинают демонстрировать лучший результат сжатия в терминах относительной ошибки. Это означает, что при более высоких уровнях сжатия (после превышения порога 10-12) вейвлет Хаара становится более предпочтительным для сохранения качества данных температуры. На рисунках 9 и 10 приведены результаты сжатия полей температур с помощью вейвлетов Добеши-2.

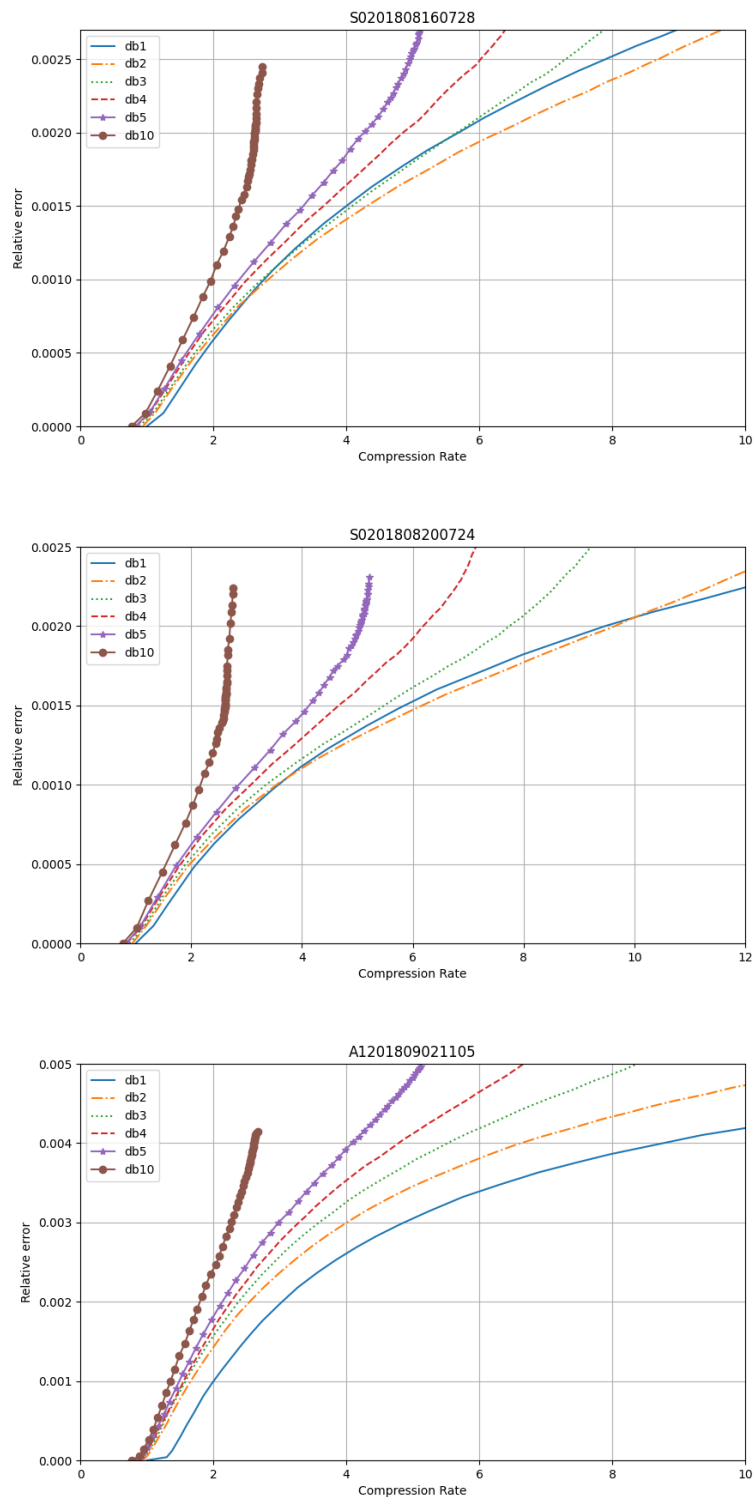
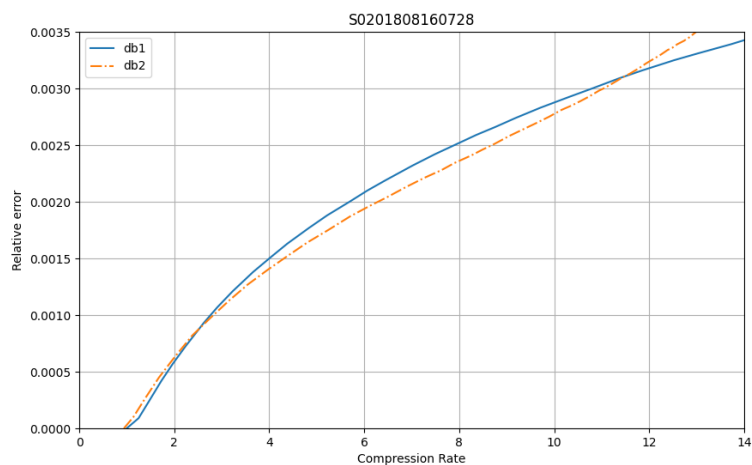
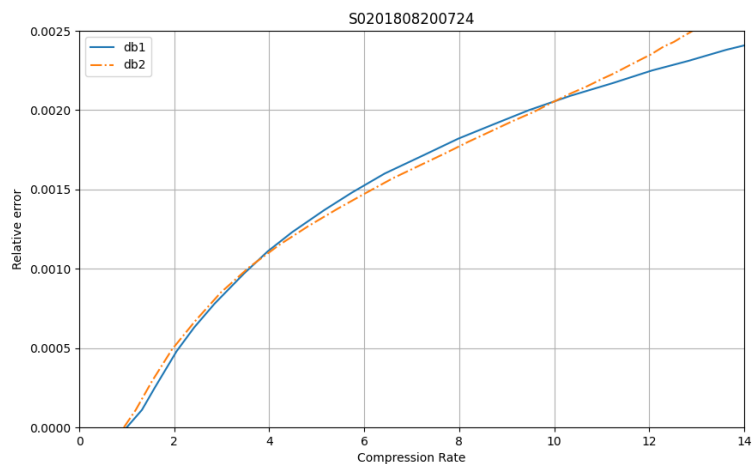


Рис. 8: Графики зависимости коэффициента сжатия и относительной ошибки для семейства вейвлетов Добеши (db1 - вейвлет Хаара). Данные полученные со спутников Sentinel 16.08.2018 (верхний), 20.08.2018 (центральный) и Aqua 20.08.2018 (нижний). Легенда: db1 - синяя сплошная линия; db2 - оранжевая штрихпунктирная линия; db3 - зеленая пунктирная линия; db4 - красная штриховая линия; db5 - фиолетовая *-линия; db10 - коричневая о-линия.



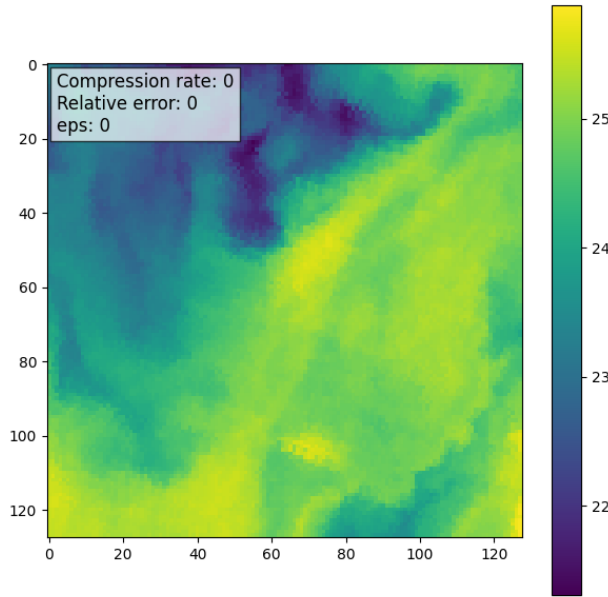
(a) Данные полученные со спутника Sentinel за 16.08.2018.



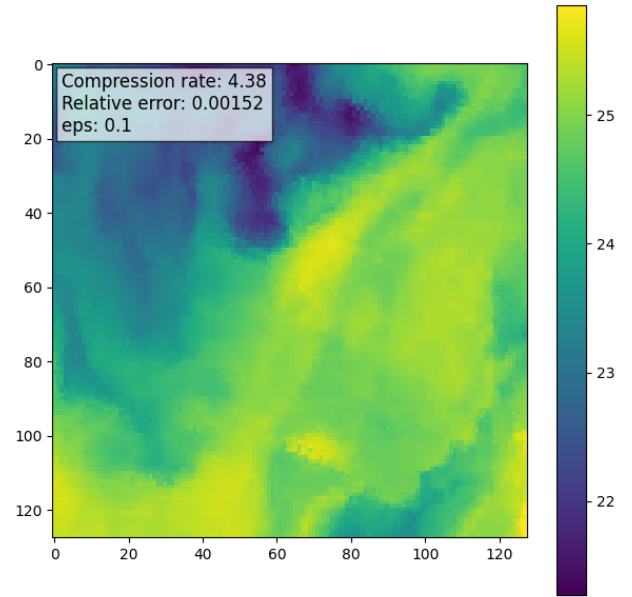
(b) Данные полученные со спутника Sentinel за 20.08.2018.

Рис. 9: Графики зависимости коэффициента сжатия и относительной ошибки для вейвлетов Добеши-1 и Добеши-2. Данные полученные со спутника Sentinel 16.08.2018 (a) и 20.08.2018 (b). Легенда: db1 - синяя сплошная линия; db2 - оранжевая штрихпунктирная линия.

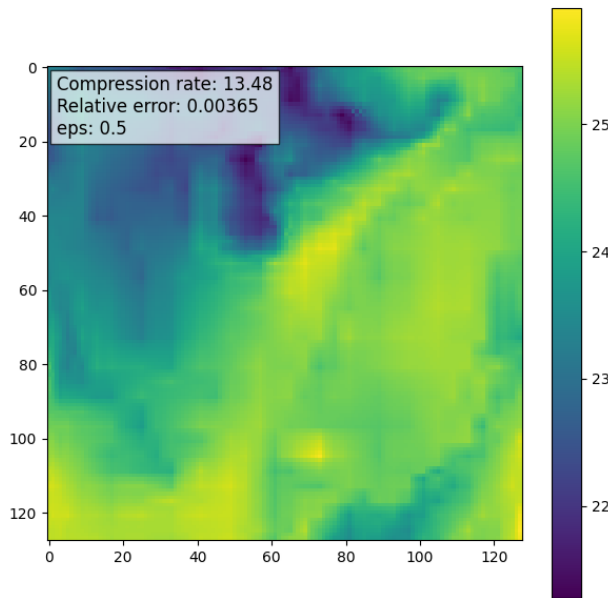
S0201808160728 db2



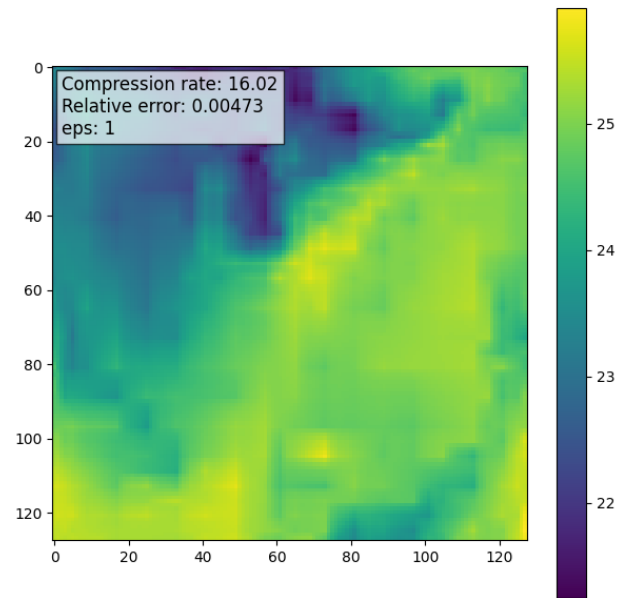
(a) $\epsilon = 0, cr = 0, err_{fro} = 0$.



(b) $\epsilon = 0.1, cr = 4.38, err_{fro} = 0.0015$.



(c) $\epsilon = 0.5, cr = 13.48, err_{fro} = 0.0036$.



(d) $\epsilon = 1, cr = 16.02, err_{fro} = 0.0047$.

Рис. 10: Результаты сжатия данных полученных со спутника Sentinel 16.08.2018 с помощью вейвлетов Добеши-2

S0201808200724 db2

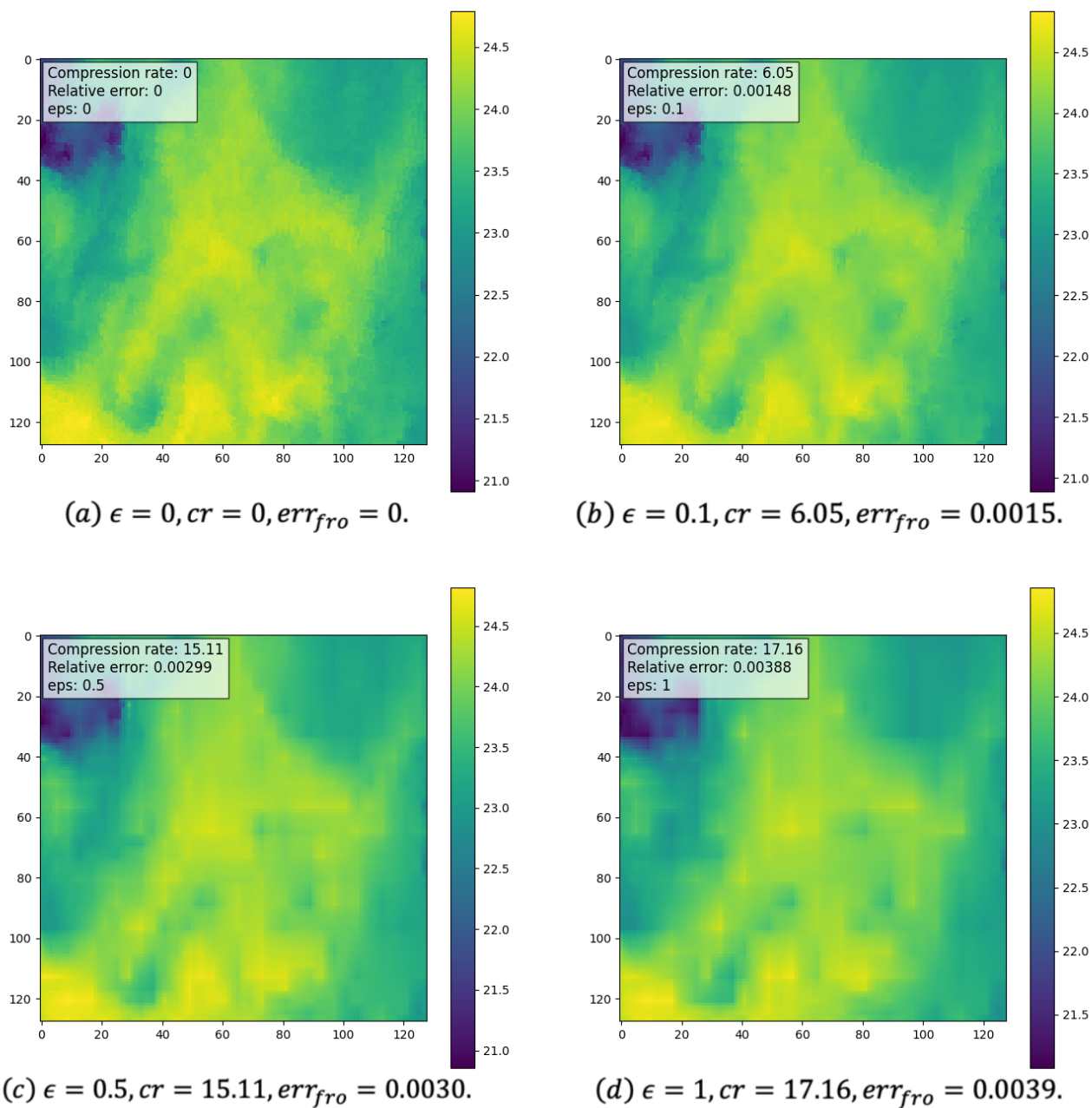


Рис. 11: Результаты сжатия данных полученных со спутника Sentinel 20.08.2018 с помощью вейвлетов Добеши-2

5 Вывод

Исследование сжатия гидрофизических данных с использованием дискретного вейвлет-преобразования позволило установить, что данный алгоритм предоставляет значительное снижение объема данных при сохранении относительно низкого уровня ошибки по норме Фробениуса. Это делает его привлекательным инструментом для сжатия больших объемов информации, что особенно важно в области гео- и гидрофизики, где данные могут быть огромными и требовать значительных ресурсов для хранения и обработки.

При изучении зависимости качества сжатия различных вейвлетов Добеши для данных со спутника Aqua было обнаружено, что наиболее эффективным вейвлетом оказался вейвлет Хаара. Однако, при анализе данных со спутника Sentinel было выявлено, что выбор оптимального вейвлета зависит от уровня требуемого сжатия данных. При относительно низких уровнях сжатия (меньше 10-12) рекомендуется использовать вейвлет Добеши-2, так как он демонстрирует более высокую эффективность. Однако, при более высоких уровнях сжатия другие вейвлеты, такие как Добеши-1 или Хаара, могут оказаться более эффективными.

Таким образом, несмотря на высокую эффективность алгоритма сжатия на основе вейвлет-преобразования, важно учитывать индивидуальные особенности данных и возможные ограничения при последующем анализе. Для достижения оптимальных результатов необходимо учитывать возможные компромиссы между объемом данных и качеством информации. Это подчеркивает важность выбора оптимального метода сжатия в зависимости от конкретных требований и особенностей данных.

Литература

- [1] Nelson, M., 1996. The Data Compression Book, 2nd Edn., Publication.
- [2] The Modified 2D-Haar Wavelet Transformation in Image Compression 1P. Raviraj and 2M.Y. Sanavullah
- [3] Умняшкин С. В. Основы теории цифровой обработки сигналов. – 2016.
- [4] Daubechies I. Ten lectures on wavelets. – Society for industrial and applied mathematics, 1992.