E.N.S.P. .... *Niveau II 2015-16 / Semestre 2* ....ND/NG

***** U.E. MAT 227 « *Analyse Numérique* » *****

*** Test n°1 *(3H 00mn)* ***

NB : 1. ***Le correcteur appréciera le soin apporté à la rédaction et à la présentation du devoir.***

2. TOUS DOCUMENTS INTERDITS.

3. CALCULATRICES AUTORISEES, SAUF LES PROGRAMMABLES.

4. SOYEZ CLAIR ET PRECIS DANS LES REPONSES, mais CONCIS.

5. ***L'objectif ici ne doit pas être de chercher à traiter à tout prix toute l'épreuve, mais, plutôt, d'en couvrir une part significative de manière convaincante.***

**** *EXERCICE 1* (5 POINTS) ****

1°) Qu'appelle-t-on « erreurs de données » en *Analyse Numérique* ?

2°) Qu'est-ce qui peut causer ce type d'erreurs dans un problème d'*Analyse Numérique* ?

3°) Dans un problème d'*Analyse Numérique*, les erreurs de données sont aussi appellées « erreurs initiales ». C'est parce qu'il y a également des « erreurs finales ». De quelles erreurs s'agit-il ?

4°) Comment appelle-t-on les problèmes d'*Analyse Numérique* dans lesquels de *petites erreurs* sur les données peuvent entraîner de *grandes erreurs* sur les résultats ?

**** *EXERCICE 2* (5 POINTS) ****

1°) Rappeler la définition de $\mathrm{pL}_{-1,0,1,2}\, f$.

2°) Exprimer $\mathrm{pL}_{-1,0,1,2}\, f$ en fonction de $\mathrm{pL}_{1,-1,0}\, f$ et $\mathrm{pL}_{2,0,-1}\, f$.

N.B. *En vous justifiant brièvement, mais sans chercher à calculer aucun de ces 3 polynômes.*

3°) Calculer $\mathrm{pL}_{-1,0,1,2}\, f$ *sous forme de Newton* pour les données : $f(-1) = 3,\ f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(2) = 2$.

N.B. *Garder les points d'interpolation dans l'ordre donné.*

**** *PROBLEME* (14 POINTS) ****

Dans ce qui suit, a et b sont 2 réels donnés, avec $a < b$, et f est une fonction de $[a, b] \longrightarrow \mathrm{IR}$.
Par ailleurs, on suppose que $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, i.e. f est 2 fois dérivable sur $[a, b]$ et f'' est continue sur $[a, b]$.

....

$\boxed{\mathrm{I}}$ - On suppose donnés ici, en plus, 4 autres réels $y_a,\ y_b,\ d_a,\ d_b \ /\ y_a = f(a),\ y_b = f(b),\ d_a = f''(a),\ d_b = f''(b)$.
On considère alors un polynôme P de degré $\leqslant 3$, interpolant f en a et b, et tel que P'' interpole f'' en a et b.

L'objectif dans ce $\boxed{\mathrm{I}}$ est de montrer qu'un tel polynôme P existe et est unique, et de trouver une expression permettant de le calculer à partir des données $a,\ b,\ y_a,\ y_b,\ d_a,\ d_b$.

N.B. 1. *Ci-après, il sera pertinent d'adopter la notation* $h = b - a$ *partout où* $b - a$ *apparaîtra.*

N.B. 2. *Pour les algorithmes à écrire ci-après, faire l'analyse mathématique préalable au brouillon.*

1°) On suppose ici que P existe.

a) P est-il le *polynôme d'interpolation de Lagrange* de f relativement aux 2 points a et b ? Pourquoi ?

b) Montrer que P'' est le *polynôme d'interpolation de Lagrange* de f'' relativement aux 2 points a et b.

c) En déduire P'' comme combinaison linéaire des 2 polynômes 1 et $x - a$ (et en utilisant les données).

d) *Sans calculs*, expliquer pourquoi on est sûr d'avance qu'il existe 4 constantes réelles $c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ (*qu'on ne cherchera pas à déterminer ici*) telles que P s'écrive sur IR :

$$P(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - a) + c_2 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + c_3 \cdot \frac{(x-a)^3}{6}. \qquad (\boldsymbol{P.1})$$

N.B. *Dans la suite de cette question* 1°)*, l'objectif est de calculer* $c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ *en fonction des données* $y_a,\ y_b,\ d_a,\ d_b$ *et de la longueur* $h = b - a$ *de l'intervalle* $[a, b]$.

e) Trouver la valeur de c_0.
f) En combinant (***P.1***) et le **c)** ci-dessus, trouver les expressions de c_2 et c_3.
g) En déduire l'expression de c_1 (*en la simplifiant au maximum*).

2°) Déduire (*rapidement !*), de ce qui précède, l'*existence* et l'*unicité* du polynôme P.

3°) **a)** Ecrire un algorithme qui calcule *efficacement* c_0, c_1, c_2, c_3, partant des données a, b, y_a, y_b, d_a, d_b.
b) Quel est le *coût numérique* de cet algorithme ?

4°) On suppose ici avoir déjà obtenu les valeurs de c_0, c_1, c_2, c_3 (par exemple par l'algorithme précédent).
a) Ecrire le *schéma de Hörner* du polynôme P écrit sous la forme (***P.1***).
b) En déduire un algorithme qui calcule *efficacement* la valeur de P en un réel x donné.
c) Quel est le *coût numérique* de cet algorithme ?

5°) En réalité, dans la plupart des situations de terrain, il est très rare qu'on dispose des valeurs, en des points donnés, de la dérivée seconde de la fonction d'intérêt f. Ainsi, au lieu des valeurs exactes $d_a = f''(a)$ et $d_b = f''(b)$, on aura plutôt, plus probablement, 2 approximations respectives $\widetilde{d}_a$ et $\widetilde{d}_b$. On est alors obligé de remplacer, dans la définition du polynôme P, la partie « P'' interpole f'' en a et b » par l'hypothèse :

$$P''(a) = \widetilde{d}_a \quad \text{et} \quad P''(b) = \widetilde{d}_b\,. \qquad (\boldsymbol{P.2})$$

Mais, en examinant les réponses aux questions **1°)** et **2°)** ci-dessus, expliquer pourquoi (et *rapidement !*) même avec cette modification, le polynôme P va toujours exister et être unique, puis donner son expression dans ce cas (*sans calculs*).

....

$\boxed{\textbf{II}}$ **-** On suppose ici qu'on a une subdivision de $N+2$ points $a_0, \cdots, a_{N+1}$ de l'intervalle $[a, b]$, avec :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N < a_{N+1} = b, \quad \text{avec,} \quad \forall\, i = 0\,(1)\,N, \;\; a_{i+1} - a_i \;=\; h_i,$$

et tels qu'on connaît toutes les valeurs $y_i = f(a_i)$ et $d_i = f''(a_i)$, $\forall\, i = 0\,(1)\,N+1$.

On considère alors $N+1$ polynômes $P_0, \cdots, P_N$ vérifiant : $\forall\, i = 0\,(1)\,N$, le polynôme P_i est de degré $\leqslant 3$, interpole f en a_i et a_{i+1}, et est tel que P_i'' interpole f'' en ces 2 mêmes points.

1°) Utiliser les résultats du $\boxed{\textbf{I}}$ pour :
a) Montrer (*rapidement !*) que la famille de polynômes $(P_0, \cdots, P_N)$ existe et est unique.
b) Donner une expression de chaque polynôme P_i, pour $i \in [\,0\,(1)\,N\,]$, en fonction de 4 coefficients $c_{0:\,i}$, $c_{1:\,i}$, $c_{2:\,i}$, $c_{3:\,i}$ à préciser en fonction des données y_i, y_{i+1}, d_i, d_{i+1} et de h_i.

• • • L'***intérêt de tout ceci*** est, en fait, d'essayer de construire une fonction $\varphi : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathrm{IR}$, vérifiant :

(C.1) φ interpole f aux $N+2$ points $a_0, \cdots, a_{N+1}$ (les *nœuds* de la subdivision considérée de $[\,a, b\,]$) ;

(C.2) φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\,a, b\,]$;

(C.3) $\forall\, i \in [\,0\,(1)\,N\,]$, φ est définie sur le sous-intervalle $[\,a_i, a_{i+1}\,]$ par : $\forall\, x \in [\,a_i, a_{i+1}\,]$, $\varphi(x) \;=\; P_i(x)$.

La ***difficulté pratique*** dans la construction d'une telle fonction φ est qu'en réalité, les valeurs des nombres $d_0 = f''(a_0), \cdots, d_{N+1} = f''(a_{N+1})$ ne sont presque jamais connues. Ce qu'on fait, pour contourner cette difficulté, c'est que dans les expressions des polynômes P_i trouvées en **1°)b)**, on remplace ces valeurs par des approximations $\widetilde{d}_0, \cdots, \widetilde{d}_{N+1}$, approximations à trouver pour que les conditions **(C.1)**, **(C.2)** et **(C.3)** soient satisfaites. On montre ainsi (et on admettra ici) que c'est le cas si, et seulement si, on a (ayant remplacé chaque d_j par $\widetilde{d}_j$) :

$$\forall\, i = 1\,(1)\,N, \quad P_{i-1}'(a_i) \;=\; P_i'(a_i). \qquad (\boldsymbol{P.3})$$

2°) Pour un indice $i \in [\,1\,(1)\,N\,]$, arbitrairement fixé, montrer que l'égalité $P_{i-1}'(a_i) \;=\; P_i'(a_i)$ est équivalente à ***une équation linéaire*** qu'on écrira, et dont on précisera les inconnues, et on montrera bien que ses coefficients et son 2$^{\text{nd}}$ membre (ou membre droit) sont facilement calculables à partir des données.

N.B. ***Ecrire l'équation linéaire de telle sorte qu'aucune division n'apparaisse au*** 1$^{\text{er}}$ ***membre (ou membre gauche).***

3°) En déduire que si on ajoute la double contrainte :

$$\widetilde{d}_0 \;=\; \widetilde{d}_{N+1} \;=\; 0, \qquad (\boldsymbol{P.4})$$

alors (***P.3***) est équivalent à un système (S) de N équations linéaires à N inconnues (à préciser).

4°) **a)** Mettre (S) sous forme matricielle $\mathbf{A.w} = \mathbf{c}$, avec $\mathbf{A}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{c}$ à préciser.
b) Signaler toute propriété remarquable de la matrice $\mathbf{A}$.

5°) Quelle(s) difficulté(s) aurait posé le système linéaire (S) si on n'avait pas imposé la contrainte (***P.4***) ?

.... ***FIN*** ....