

**APPROXIMATION NUMERIQUE D'UNE FONCTION DE  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :**  
**INTERPOLATION POLYNOMIALE (PAR MORCEAUX)**

NDONG NGUEMA E.-P.

*Laboratoire de Mathématiques et Analyse des Systèmes*  
Ecole Polytechnique, B.P. 8390 Yaoundé (CAMEROUN)

1<sup>er</sup> juin 2018

●●● Cadre de travail.

*Une situation couramment rencontrée dans les applications numériques est la suivante :*

Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dont on n'a pas une expression générale du type « $y = f(x)$ ,  $\forall x$ », mais on dispose seulement des valeurs  $y_0, \dots, y_N$  que cette fonction prend en un certain nombre d'abscisses données  $a_0, \dots, a_N$ , i.e. les seules informations disponibles sur la fonction sont les  $N + 1$  couples de réels :

$$(a_0, y_0), \dots, (a_N, y_N) / \quad \forall i = 0(1)N, \quad y_i = f(a_i).$$

●●● Problématique générale du Chapitre.

Comment calculer, à partir des couples de réels  $(a_0, y_0), \dots, (a_N, y_N)$  ci-dessus, une **valeur approchée**, aussi satisfaisante que possible, de la valeur de la fonction  $f$  aux abscisses  $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a_0, \dots, a_N\}$ ?

C'est la problématique de l'**approximation numérique d'une fonction à partir d'une information partielle disponible sur la fonction**. Ici, l'information partielle disponible est constituée des **valeurs que la fonction prend en un certain nombre de points donnés de son domaine de définition**.

●●● Outil mathématique de base pour résoudre ce problème :

La résolution de la problématique ci-dessus posée s'appuiera essentiellement sur l'utilisation des **fonctions polynômes de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$** , particulièrement les **polynômes d'interpolation** calculés à partir des données disponibles sur la fonction d'intérêt, mais de manière appropriée, basée sur des critères qui seront identifiés aussi clairement que possible.

●●● Remarque :

Pour faciliter la lecture et l'utilisation pratique de ce document, les démonstrations (de résultats) les plus longues ont été renvoyées en Annexe, à la fin du document.

## I – Introduction et Généralités.

### 1°) Le problème : fonction connue seulement par ses valeurs en des points donnés.

Un problème couramment rencontré dans la pratique de la manipulation des données numériques est :

*Essayer d'approcher « au mieux » une fonction  $f$  sur tout ou partie de son domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  à partir de la connaissance d'une information partielle sur  $f$ .*

•→ Ce problème se présente, le plus souvent, sous l'un ou l'autre des 2 aspects suivants :

(a)  *$f$  est connue en un certain nombre de points  $a_0, \dots, a_N \in \mathcal{D}_f$ , et inconnue ailleurs sur  $\mathcal{D}_f$ .*

Autrement dit, on dispose de  $N + 1$  couples de réels :  $(a_0, y_0), \dots, (a_N, y_N) \in \mathcal{D}_f \times \mathbb{R}$ ,

dont on a l'information qu'ils vérifient :  $\forall i = 0(1)N, y_i = f(a_i)$ .

A partir de ces couples, on peut être intéressé, par exemple, à construire une fonction  $\tilde{f}$  qui approche « au mieux » la fonction inconnue  $f$  sur un intervalle donné  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ , et calculable en tout  $x \in [a, b]$ .

\*\*\* **Exemple D.e1 (Réponse physique partiellement observée en fonction d'une entrée)**

Les nombres réels  $y_0, \dots, y_N$  sont des mesures physiques d'une « variable réponse »  $y = f(x)$  pour les valeurs respectives  $a_0, \dots, a_N$  d'une « variable entrée »  $x$ , et on aimerait estimer  $y = f(x)$  pour d'autres valeurs possibles de  $x$  pour lesquelles on n'a pas la possibilité matérielle de « mesurer »  $y$ .

• **Illustration concrète** : une suite finie de mesures de température dans le temps en un milieu donné.

(b)  *$f$  est bien connue et, en particulier, calculable (soit « à la main », soit par calculatrice, soit par ordinateur) en tout  $x \in \mathcal{D}_f$ , mais :*

- *soit ce calcul numérique est fastidieux et lourd, parce qu'il prend trop de temps ;*
- *soit le fait de savoir calculer  $f$  est, en fait, de peu de secours pour certaines utilisations possibles, voire courantes de  $f$ , notamment celle d'intérêt dans un contexte donné.*

Dans ce cas de figure, il s'agit de déterminer, à partir de la connaissance (*analytique* ou *numérique*) de la fonction  $f$ , une fonction  $\tilde{f}$  « simple » (i.e. plus maniable que  $f$ , pour le travail à faire) et approchant  $f$  « au mieux » sur l'intervalle d'intérêt  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ .

\*\*\* **Exemple D.e2 (Calcul d'une intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  sans connaître une primitive de  $f$ )**

On construit alors une fonction  $\tilde{f}$ , facilement intégrable sur  $[a, b]$  et telle que  $\int_a^b \tilde{f} dx \approx \int_a^b f(x) dx$ .

Pour traiter ce 2<sup>ème</sup> cas de figure, le plus souvent, on choisit un certain nombre de points  $a_0, \dots, a_N \in \mathcal{D}_f$ , « suffisamment représentatifs » (selon le contexte...), et en lesquels on calcule les valeurs respectives de  $f$  :

$$y_0 = f(a_0), \dots, y_N = f(a_N).$$

On est alors ramené à la situation précédente de (a) pour déterminer  $\tilde{f}$ .

•→ En résumé, dans les 2 cas de figure (a) et (b) ci-dessus, on se retrouve dans le Cadre de travail et avec la Problématique générale à résoudre, tous les 2 tels que posés au tout début de ce Chapitre.  
C'est la configuration d'intérêt dans laquelle nous nous plaçons dans toute la suite de ce Chapitre.

### 2°) Les 2 angles concrets du problème de l'approximation numérique d'une fonction.

\*\*\* **Rappel des données de départ :**

$$N \in \mathbb{N} ;$$

$$a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R} / a_0, \dots, a_N \in \mathcal{D}_f ;$$

$$y_0, \dots, y_N \in \mathbb{R} / \forall i = 0(1)N, y_i = f(a_i).$$

A partir de ces données, le problème à résoudre se présente souvent sous l'un des 2 angles d'attaque ci-après, chaque angle déterminant aussi le résultat attendu du travail d'approximation numérique à faire.

**a) Angle 1 : Approximation (locale) de  $f$  en un point.**

On nous apporte une valeur numérique  $x_0 \in \mathcal{D}_f$ , et on nous demande de calculer, **à partir des données disponibles**, une valeur approchée  $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$  de la valeur (inconnue)  $y_0 = f(x_0)$  de la fonction  $f$  en  $x_0$ .

Dans cette situation :

- aux données précédentes, on a donc ajouté la donnée :  $x_0 \in \mathbb{R} / x_0 \in \mathcal{D}_f$  ;
- et le résultat attendu de nous est un  $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R} / \tilde{y}_0 \approx f(x_0)$ .

**b) Angle 2 : Approximation globale de  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$ .**

Ici, on nous apporte un intervalle  $[a, b]$  (à travers la donnée de ses 2 bornes  $a$  et  $b$ ) et on nous demande de construire, **à partir des données disponibles**, une fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifiant :

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \forall x \in [a, b], \varphi(x) \approx f(x), \text{ i.e. } \varphi \text{ donne une (bonne) valeur approchée de } f \text{ en tout } x \in [a, b] ; \\ \text{(ii)} \text{ la fonction } \varphi \text{ est « facile à manipuler » pour le travail à effectuer dans le contexte.} \end{array} \right.$

On a alors la définition :

**Définition-Propriété D.d1 (Fonction d'approximation globale de  $f$  sur  $[a, b]$ )**

Une fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifiant (i) est appelée **fonction d'approximation globale de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$** .

Ajouter l'exigence (ii) pour  $\varphi$  vient de la nécessité vitale que pour que  $\varphi$  ait un intérêt pratique, il faut que cette fonction soit aisément manipulable dans le contexte, selon le travail à faire. Une exigence minimum est que  $\varphi$  doit être facile à calculer en tout  $x \in [a, b]$  (au moins algorithmiquement).

Donc ici, :

- se sont ajoutés aux données de départ les 2 réels  $a, b / a < b$  et  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$  ;
- et le résultat attendu de nous est une fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant (i) et (ii).

En pratique, la fonction  $\varphi$  fournie comme résultat doit être donnée par :

- $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ une } \textbf{définition analytique} \text{ ou une expression du type } \ll \varphi(x) = \dots \gg, \forall x \in [a, b] ; \\ 2. \text{ une } \textbf{méthode numérique pratique (analytique d'abord, algorithmique ensuite)} \\ \text{permettant de calculer la valeur de } \varphi \text{ en tout } x \in [a, b]. \end{array} \right.$

**\*\*\* Interprétation graphique de l'approximation globale de  $f$  sur  $[a, b]$ .**

La connaissance des valeurs  $y_0, \dots, y_N$  que la fonction  $f$  prend aux abscisses données  $a_0, \dots, a_N \in \mathcal{D}_f$  est équivalente à savoir que  $\mathcal{C}_f$ , la courbe de  $f$ , passe par les  $N+1$  points du plan de coordonnées respectives  $(a_0, y_0), \dots, (a_N, y_N)$ . **Graphique illustratif : Cf. Cours en Salle.**

La problématique de l'approximation globale de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  revient alors aussi à construire une fonction  $\tilde{f}$  dont la courbe  $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$  passe par ces  $N+1$  points tout en essayant de suivre, du mieux possible, l'allure de courbe que semble suggérer globalement la disposition de ces points dans le plan.

**••• Remarque I.1 (A propos du calcul de  $\tilde{y}_0$ , approx. de  $y_0 = f(x_0)$  dans l'Angle 1)**

En pratique, comme on le verra, ce calcul se fait presque toujours en 2 temps :

- 1. Construction, à partir des données, de  $\tilde{f}$ , une **fonction d'approximation** de  $f$ , valable dans un voisinage du réel  $x_0$  (on ne précise pas « globale » ici car il n'y a pas d'intervalle spécifié) ;
- 2. Calcul de  $\tilde{y}_0 = \tilde{f}(x_0)$ , et on adopte le résultat de ce calcul comme valeur approchée de  $y_0 = f(x_0)$ .
- Par conséquent, l'Angle 1 et l'Angle 2 de notre problématique ne sont pas tout à fait disjoints.

**c) Exemple illustratif : mesures de température en un point de l'espace physique.**

On se place en un point  $M$  de l'espace physique qui est autour de nous. A tout instant  $t$  (mesuré à partir d'une **origine des temps**  $T_0 = 0$ , **bien identifiée**, et avec une **unité de temps clairement spécifiée**), il y a une température  $\theta$  (unique et mesurée en degrés Celsius) au point  $M$ . Par conséquent, mathématiquement, on peut dire qu'il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \theta = f(t)$ , mais où la fonction  $f$  est inconnue, i.e. on ne peut pas donner l'expression de  $f(t)$ ,  $\forall t$ .

Dans une expérience pour acquérir une idée sur l'évolution, au cours d'une journée donnée  $J_0$ , de la température  $\theta$ , au point  $M$ , en fonction du temps  $t$ , on relève la température en ce point, durant cette journée, à intervalles de temps de 30 mn, et ce de 6 h à 18 h. On a, ainsi, enregistré les relevés suivants :

mesure $n^\circ$	0	1	2	3	4	...	23	24
$t_i$	6 h 00 mn	6 h 30 mn	7 h 00 mn	7 h 30 mn	8 h 00 mn	...	17 h 30 mn	18 h 00 mn
$\theta_i$	19.2°C	21.1°C	24.6°C	25.2°C	26.3°C	...	17.4°C	16.8°C

$\Rightarrow$  On a les données :  $(t_0, \theta_0), \dots, (t_N, \theta_N) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , avec  $N = 24$ ,  
avec  $(t_0, \theta_0) = (6, 19.2)$ ,  $(t_1, \theta_1) = (6.5, 21.1)$ ,  $(t_2, \theta_2) = (7, 24.6)$ ,  $\dots$ ,  $(t_{24}, \theta_{24}) = (18, 16.8)$ .

A partir de ces données, on peut s'intéresser à vouloir savoir, le lendemain de la prise de ces relevés sur le terrain, par exemple :

- ① *Quelle était la température au point  $M$  à un instant particulier donné  $t$  de la journée  $J_0$ , par exemple à  $t = 11$  h 18 mn ?*

Pour répondre à cette question, il faut calculer, à partir des relevés de température, une valeur approchée  $\tilde{\theta}$ , aussi bonne que possible, de  $\theta = f(t)$ , la vraie valeur (*non observée*, et qu'on ne pourra plus jamais observer, de toutes les façons) de la température au point  $M$  à l'instant  $t$  de la journée  $J_0$ . Ceci est donc un cas particulier de l'Angle 1 de notre problématique d'intérêt.

- ② *Quelle a été l'allure globale de l'évolution de la température au point  $M$  durant la journée  $J_0$  ?*

Pour répondre à cette dernière question, il faut construire, à partir des relevés de température du tableau ci-dessus, une fonction  $\theta = \tilde{f}(t)$ , pour  $t \in [6 \text{ h}, 18 \text{ h}]$ , et telle que,  $\forall t \in [6 \text{ h}, 18 \text{ h}]$ ,  $\tilde{f}(t)$  est une bonne approximation de la température au point  $M$  à l'instant  $t$  de la journée  $J_0$ . On a, ainsi, un cas particulier de l'Angle 2 de notre problématique d'intérêt, car  $\tilde{f}$  devra être une *fonction d'approximation globale* de la vraie fonction inconnue  $f$  sur l'intervalle de temps  $[6 \text{ h}, 18 \text{ h}]$ .

▷ **Exercice D::I.1** (*Conversion « écriture horaire  $\longleftrightarrow$  écriture décimale »*)

Pour faire le travail requis en ① ci-dessus, on a besoin de préalablement convertir  $t = 11$  h 18 mn en écriture décimale. Cela donne quoi ?

\*\*\* **Exemple D.e3** (*Relevés de température : cas concret en milieu industriel*)

Diverses situations concrètes dans l'activité humaine peuvent produire une problématique de relevés de température dans le temps pouvant se formaliser de manière analogue à la situation décrite ci-dessus.

Par exemple, le point  $M$  peut représenter une salle d'une usine chimique dans laquelle un incident grave a été observé au cours de la journée  $J_0$ , à l'instant  $t = 11$  h 18 mn précisément. Le lendemain, un travail d'analyse s'avère nécessaire pour essayer de comprendre ce qui s'est passé la veille dans cette salle et déterminer ce qui a pu provoquer l'incident. Dans le cadre de cette analyse, un examen de la courbe de l'évolution de la température dans la salle au cours de la journée  $J_0$  peut être un important *outil d'aide au diagnostic* à élaborer pour retracer le film du déroulement des événements pendant cette journée fatidique. La raison en est que la température est un facteur pouvant influencer l'activation ou pas des réactions chimiques, et même sur leur déroulement dans le temps.

### 3°) Erreur d'approximation d'une fonction.

Comme on l'a vu ci-dessus, notre problématique ici consiste à essayer de calculer une approximation d'une fonction, soit en un point de son domaine de définition, soit sur un intervalle donné, calcul à effectuer à partir des données disponibles. Mais à une approximation est automatiquement associée une « erreur d'approximation ». Selon que cette erreur est plus ou moins grande, l'approximation sera de plus ou moins bonne qualité. Il est donc important, pour le problème qui nous concerne ici de l'approximation numérique d'une fonction, de définir comment mesurer l'erreur d'approximation correspondante. Seulement, pour le faire, nous sommes obligés de distinguer encore les Angles d'attaque 1 et 2 de ce problème mis en évidence dans la Section 2°) qui précède :

1. pour l'Angle 1, celui de l'approximation de la valeur d'une fonction  $f$  en un point  $x_0$  donné, on parle d'« erreur d'approximation locale » de  $f$  en  $x_0$  ;
2. pour l'Angle 2, celui de l'approximation globale d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  donné, on parle d'« erreur d'approximation globale » de  $f$  sur  $[a, b]$ .

## a) Erreur d'approximation locale d'une fonction en un point.

**Définition D.d2 (Erreur d'approximation locale d'une fonction  $f$  en  $x_0 \in \mathcal{D}_f$ )**

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathcal{D}_f$ , et  $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$ .

Si on décide de prendre le réel  $\tilde{y}_0$  comme approximation (ou valeur approchée) de la vraie valeur  $y_0 = f(x_0)$  de la fonction  $f$  en  $x_0$ , l'erreur associée à cette approximation de  $y_0$  par  $\tilde{y}_0$  est :

$$\mathbf{E}_{x_0}(\tilde{y}_0 | f) = y_0 - \tilde{y}_0 = f(x_0) - \tilde{y}_0.$$

- Le nombre réel  $\mathbf{E}_{x_0}(\tilde{y}_0 | f)$  est appelé **erreur d'approximation locale de  $f$  en  $x_0$  par  $\tilde{y}_0$** .

## \*\*\* Remarques et interprétation pratique :

1. Si  $\mathbf{E}_{x_0}(\tilde{y}_0 | f) > 0$ , i.e.  $\tilde{y}_0 < f(x_0)$ , on dit que  $\tilde{y}_0$  est une **valeur approchée par défaut de  $f$  en  $x_0$** .
2. Si  $\mathbf{E}_{x_0}(\tilde{y}_0 | f) < 0$ , i.e.  $\tilde{y}_0 > f(x_0)$ , on dit que  $\tilde{y}_0$  est une **valeur approchée par excès de  $f$  en  $x_0$** .
3. Cependant, pour décider dans quelle mesure  $\tilde{y}_0$  est ou n'est pas une bonne approximation de la valeur de  $f$  en  $x_0$ , c'est l'**ordre de grandeur** du réel  $\mathbf{E}_{x_0}(\tilde{y}_0 | f)$  qui importe.
4. L'**ordre de grandeur** du réel  $\mathbf{E}_{x_0}(\tilde{y}_0 | f)$  est donné par sa valeur absolue  $|\mathbf{E}_{x_0}(\tilde{y}_0 | f)|$ .
5. Ainsi :
  - 5.1. plus  $|\mathbf{E}_{x_0}(\tilde{y}_0 | f)|$  est petite, plus  $\tilde{y}_0$  tend à être une **bonne approximation** du réel  $y_0 = f(x_0)$ ;
  - 5.2. plus  $|\mathbf{E}_{x_0}(\tilde{y}_0 | f)|$  est grande, plus  $\tilde{y}_0$  tend à être une **mauvaise approximation** du réel  $y_0 = f(x_0)$ .

## b) Erreur d'approximation globale d'une fonction sur un intervalle.

**Définition D.d3 (Erreur d'approximation globale d'une fonction  $f$  sur  $[a, b]$ )**

Soient  $f$  et  $\varphi$ , 2 fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_\varphi$ .

Lorsqu'on décide de prendre  $\varphi$  comme fonction d'approximation globale de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , une mesure de l'erreur associée à cette approximation est donnée par :

$$\mathbf{E}_{[a,b]}(\varphi | f) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| = \sup_{x \in [a,b]} |\mathbf{E}_x(\varphi(x) | f)|.$$

- $\mathbf{E}_{[a,b]}(\varphi | f)$  est appelée **erreur d'approximation globale de  $f$  par  $\varphi$  sur  $[a, b]$** .

## \*\*\* Remarques et interprétation pratique :

1.  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\varphi | f)$  est donc la **borne supérieure** (i.e. le **plus petit des majorants**) de la fonction  $|f - \varphi|$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .
2. Il peut arriver que l'on ait :  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\varphi | f) = +\infty$ .
3. Cependant, dans les situations rencontrées en pratique,  $f$  et  $\varphi$  sont, presque toujours, 2 **fonctions bornées** sur  $[a, b]$ , auquel cas il est garanti que  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\varphi | f)$  est un nombre réel  $\geq 0$ .
4. En règle générale,  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\varphi | f)$  représente la plus grande valeur de  $|\mathbf{E}_x(\varphi(x) | f)| = |f(x) - \varphi(x)|$  quand la variable  $x$  parcourt l'intervalle  $[a, b]$ , i.e. le **plus grand écart entre les valeurs des 2 fonctions  $f$  et  $\varphi$  en un point de  $[a, b]$** .
5. Par conséquent :
  - 5.1. plus  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\varphi | f)$  est petite, plus la fonction  $\varphi$  tend à donner une bonne approximation de la valeur de  $f$  **simultanément en tous les réels  $x \in [a, b]$** ;
  - 5.2. plus  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\varphi | f)$  est grande, plus la fonction  $\varphi$  tend à donner une mauvaise approximation de la valeur de  $f$  **en au moins un point  $x_0 \in [a, b]$** , et donc à ne pas être une bonne fonction d'approximation globale de  $f$  sur tout l'intervalle  $[a, b]$ .
6. En relation avec ce qui précède, il est aussi important de noter l'équivalence, vraie  $\forall \varepsilon > 0$  :

$$\mathbf{E}_{[a,b]}(\varphi | f) \leq \varepsilon \iff \forall x \in [a, b], |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon. \quad (\text{I.1})$$

Ceci découle de la définition même de la borne supérieure d'une fonction à valeurs réelles sur  $[a, b]$ .

**\*\*\* Interprétation graphique de l'erreur d'approximation globale de  $f$  par  $\varphi$  sur  $[a, b]$ .**

Cf. *Cours en Salle*.

**4°) Pourquoi utiliser les polynômes dans l'approximation des fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ?**

Pour résoudre la problématique posée dans ce Chapitre de l'approximation numérique d'une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  à partir d'une information partielle connue sur cette fonction, il faut bien s'appuyer sur un type de fonctions déjà connues. Les fonctions polynômes de  $\mathbb{R}$  vont jouer ce rôle ici. Mais pourquoi elles ?

On peut motiver ce choix sous 2 points de vue, un pratique et un théorique.

**a) Intérêt pratique des polynômes dans l'approximation des fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .**

Un point clé commun aux 2 angles de notre problématique ici, tels que décrits dans la Section 2°, est que l'approximation d'une fonction à partir des données disponibles, que ce soit en un point ou sur un intervalle, doit être facile à manipuler, et, en particulier, aisément calculable. Or, s'appuyer sur les polynômes pour obtenir une telle approximation permettra de récupérer les avantages pratiques de ceux-ci, à savoir :

- évaluation numérique aisée en tout point, par des algorithmes efficaces ;
- manipulation simple pour toutes les opérations de base sur les fonctions (addition, soustraction, produit, dérivation, intégration).

**b) Intérêt théorique des polynômes dans l'approximation des fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .**

L'évaluation numérique aisée et la manipulation simple des polynômes (soulignées ci-dessus) ne peuvent pas constituer des arguments suffisants pour motiver l'utilisation de ceux-ci comme outils de base pour calculer des approximations d'autres fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . En effet, avant d'être facile à manipuler, **la première qualité attendue d'une approximation, c'est qu'elle soit d'abord une bonne approximation de ce qu'elle est censée approcher**. Dans ces conditions, la question naturelle ici est alors :

*Pour une fonction de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , relativement arbitraire, qu'est-ce qui nous garantit qu'on a de bonnes chances de trouver un polynôme approchant  $f$  de manière satisfaisante dans la zone de  $\mathcal{D}_f$  qui nous intéresse ?*

Pour répondre positivement à cette question, on peut s'appuyer sur 2 théorèmes puissants de l'*Analyse mathématique*, un portant sur l'approximation locale d'une fonction dérivable au voisinage d'un nombre réel, et l'autre sur l'approximation globale d'une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ .

**\*\*\* Formule de Taylor-Young, d'ordre  $n$  centrée en un réel  $x_0$ , d'une fonction.**

Nous rappelons le résultat de base d'*Analyse Réelle I* suivant :

**\*\*\* Rappel n°1 (Formule de Taylor-Young d'ordre  $n$  centrée en  $x_0 \in \mathbb{R}$ )**

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $x_0 \in I$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

Si  $f$  est  $n$  fois dérivable dans  $I$ , alors on a, quand  $x \rightarrow x_0$  ( $x \in I$ ) :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n. \quad (\text{I.2})$$

- C'est la **formule de Taylor-Young d'ordre  $n$  de  $f$  centrée en  $x_0$** .

Rappelons que le polynôme  $P_{n,f,x_0}$  défini par,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$P_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

est appelé **polynôme de Taylor d'ordre  $n$  de  $f$  centré en  $x_0$** . La fonction  $R_{n,f,x_0} = f - P_{n,f,x_0}$  représente alors l'erreur commise lorsque l'on décide d'approcher la fonction  $f$  par  $P_{n,f,x_0}$ , et est appelée **reste de Taylor d'ordre  $n$  de  $f$  centré en  $x_0$** . La formule de Taylor-Young (I.2) dit que lorsque la variable  $x$  se rapproche de  $x_0$ , le reste  $R_{n,f,x_0}(x)$  tend vers 0, et plus vite que  $(x - x_0)^n$ , et donc devient de plus en plus négligeable (ceci étant d'autant plus vrai que  $n$  est grand, mais fixé). Cela entraîne que le polynôme  $P_{n,f,x_0}$  donne une approximation de plus en plus bonne de la fonction  $f$  plus on est proche de  $x_0$ .

**\*\*\* Théorème de Weierstrass.**

Un résultat fondamental de l'*Analyse mathématique* de niveau supérieur est le suivant :

**\*\*\* Complément 1 (Théorème de Weierstrass)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon, \text{ polynôme} \in \mathbb{R}[x] / \forall x \in [a, b], |f(x) - P_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon. \quad (\text{I.3})$$

Avec les notations introduites dans la Section 3°) b), notons les équivalences logiques :

$$(\text{I.3}) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon, \text{ polynôme} \in \mathbb{R}[x] / \forall x \in [a, b], |\mathbf{E}_x(P_\varepsilon(x) | f)| \leq \varepsilon; \quad (\text{I.4})$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon, \text{ polynôme} \in \mathbb{R}[x] / |\mathbf{E}_{[a,b]}(P_\varepsilon | f)| \leq \varepsilon. \quad (\text{I.5})$$

Ainsi, le Théorème de Weierstrass dit que si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe (au moins) un polynôme qui, en tout  $x \in [a, b]$ , donne une valeur approchée de la valeur de  $f$  en  $x$  avec une incertitude absolue  $\leq \varepsilon$ . Ceci étant vrai y compris pour  $\varepsilon > 0$  et aussi petit que souhaité, il s'ensuit qu'on peut approcher une fonction continue sur  $[a, b]$ , d'autant plus près qu'on le voudrait, par un polynôme approprié.

**\*\*\* Commentaire : A propos de la Formule de Taylor-Young et du Théorème de Weierstrass.**

Il est important de ne pas sur-interpréter l'utilité, dans notre cadre de recherche d'une approximation numérique concrète d'une fonction, de ces 2 importants résultats de l'*Analyse mathématique*. En effet, la formule de Taylor-Young d'ordre  $n$  de  $f$  centrée en  $x_0$  n'est utilisable pour donner une approximation de  $f$  au voisinage de  $x_0$  que si, en plus de la valeur  $f$  en  $x_0$ , on connaît aussi les valeurs des dérivées de  $f$  en  $x_0$  jusqu'à l'ordre  $n$ , ce qui n'est presque jamais le cas pour ces dernières. Quant au Théorème de Weierstrass, il n'existe pas, à ce jour, de méthode permettant d'obtenir concrètement le polynôme  $P_\varepsilon$  vérifiant (I.3). Et même s'il en existait une, son calcul ne pourrait pas se faire à partir de la seule connaissance des valeurs de la fonction  $f$  en des abscisses données, ce qui est, pourtant, notre cadre de travail ici.

Par conséquent, aucun de ces 2 résultats mathématiques ne peut nous aider directement à résoudre la problématique posée dans ce Chapitre. Cependant, leur utilité, relativement à cette problématique, est de mettre en évidence qu'envisager de s'appuyer sur des polynômes pour approcher numériquement des fonctions arbitraires de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une idée qui peut se justifier sur des bases théoriques solides.

## II – Utilisation du polynôme d'interpolation de Lagrange (p.i.L.) dans l'approximation numérique des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 1°) Introduction et motivation.

A partir d'ici, nous commençons l'étude des outils et méthodes sur lesquels on s'appuie pour résoudre concrètement la problématique de l'approximation numérique d'une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  à partir de la connaissance de ses valeurs en un certain nombre d'abscisses données. Mais par où démarrer ?

Eh bien, compte tenu de ce qui a été vu, au Chapitre précédent, à propos du polynôme d'interpolation de Lagrange (i.e. sa définition et comment le calculer), une suggestion « naturelle » vient à l'esprit :

*Lorsque l'information partielle disponible sur une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ce sont les valeurs  $y_0, \dots, y_n$  prises par  $f$  en des abscisses données  $x_0, \dots, x_n$ , une 1<sup>ère</sup> idée pour construire une fonction d'approximation  $\tilde{f}$  de  $f$  est de prendre :*

$$\tilde{f} = \text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f. \quad (\text{II.1})$$

La motivation derrière cette suggestion est d'ordre pratique : si on connaît les valeurs respectives  $y_0, \dots, y_n$  de  $f$  en des réels  $x_0, \dots, x_n$  donnés, alors on peut aisément trouver une expression générale du p.i.L.  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  en fonction de la variable  $x$ , et/ou calculer sa valeur en n'importe quel réel donné. Ceci grâce aux formules et méthodes vues au Chapitre précédent.

Cependant, comme il a déjà été dit plus haut, la calculabilité d'une approximation ne peut pas être l'unique critère pour apprécier son intérêt pratique. Bien plus important encore est la qualité de cette approximation par rapport à ce qu'elle est censée approcher. Ainsi, dans le cas présent, avec la suggestion ci-dessus, la question fondamentale qu'il faut immédiatement se poser est :

*Prendre (II.1) comme fonction d'approximation de  $f$  est-il valable ? Autrement dit : le p.i.L.  $\tilde{f} = \text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  a-t-il de bonnes chances de donner une approximation satisfaisante de la fonction  $f$  aux réels  $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ , ou, à défaut, sous quelles conditions peut-il le faire ?*

Avec la définition du p.i.L. donnée au Chapitre précédent, il y a, au moins, 2 idées intuitives qu'on peut avancer pour suggérer que  $\tilde{f} = \text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  a des chances d'être une bonne fonction d'approximation de  $f$  :

- **Intuition 1 :** Comme  $\tilde{f} = \text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  coïncide avec  $f$  aux  $n+1$  points d'interpolation  $x_0, \dots, x_n$ , alors il devrait y avoir de bonnes chances qu'aux réels  $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ , certes  $\tilde{f}$  et  $f$  ne coïncident pas forcément, mais prennent des valeurs plutôt proches entre elles.
- **Intuition 2 :** Plus l'entier  $n$  est grand, plus l'**Intuition 1** devrait être vérifiée, car le nombre  $n+1$  de points  $x_0, \dots, x_n$  en lesquels les 2 fonctions  $\tilde{f}$  et  $f$  coïncident devient élevé.

L'objet dans la suite de cette **Partie II** est de donner des éléments permettant d'évaluer dans quelle mesure ces 2 intuitions sont vraies ou pas.

## 2°) Etude de l'erreur d'interpolation de Lagrange.

### a) Notion d'erreur d'interpolation de Lagrange.

Les spéculations de la Section précédente posent en fait le problème du comportement de la fonction  $f - \text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$ . En tenant compte des Définitions D.d2 et D.d3 de l'erreur d'approximation locale ou globale d'une fonction, ceci amène à introduire :

#### Définition-Propriété D.d4 (Erreur d'interpolation de Lagrange)

1. La fonction  $R_n = f - \text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  est appelée **erreur d'interpolation de  $f$  par  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$** .
2. On parle aussi d'**erreur d'interpolation de Lagrange de  $f$  par  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$** .
3. Pour  $x \in \mathcal{D}_f$ , l'erreur d'approximation locale de  $f$  par  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  en  $x$ ,

$$R_n(x) = f(x) - (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(x) = \mathbf{E}_x((\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(x) | f),$$

est appelée **erreur d'interpolation (de Lagrange) locale de  $f$  par  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  en  $x$** .

4. Pour  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ , l'erreur d'approximation globale de  $f$  par  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  sur  $[a, b]$ ,

$$\mathbf{E}_{[a, b]}(\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f | f) = \sup_{x \in [a, b]} |R_n(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f(x)|,$$

est appelée **erreur d'interpolation (de Lagrange) globale de  $f$  par  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  sur  $[a, b]$** .

### b) Préliminaire : Notation $\text{conv}(u_1, \dots, u_n)$ .

Pour  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ , on note  $\text{conv}(u_1, \dots, u_n)$ , le **plus petit intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant tous les réels  $u_1, \dots, u_n$**  («plus petit intervalle» au sens de la longueur d'un intervalle). Noter alors que :

#### Proposition D.II-2.1 (Intervalle de $\mathbb{R}$ contenant l'intervalle $\text{conv}(u_1, \dots, u_n)$ )

Pour  $I$ , intervalle de  $\mathbb{R}$ , on a l'équivalence :  $u_1, \dots, u_n \in I \iff \text{conv}(u_1, \dots, u_n) \subset I$ .

#### ▷ Exercice [D::II.1] (Bornes de l'intervalle $\text{conv}(u_1, \dots, u_n)$ ?)

On a :  $\text{conv}(u_1, \dots, u_n) = [c, d]$ , avec  $c, d \in \mathbb{R}$ .

- 1°) Dans un contexte particulier, on aura des réels donnés  $u_1, \dots, u_n$  avec des valeurs particulières, et il faudra en déduire  $c$  et  $d$ . Mais à quoi sont égaux  $c$  et  $d$ , en général (en fonction de  $u_1, \dots, u_n$ ) ?
- 2°) En déduire une démonstration de la Proposition D.II-2.1.

### c) Théorème fondamental sur l'erreur d'interpolation de Lagrange.

D'après sa démonstration (voir Annexe), ce Théorème résulte d'une utilisation répétée du très connu **Théorème de Rolle** vu en *Analyse Réelle I*.

#### Théorème D.II-2.2 (Théorème sur l'erreur d'interpolation de Lagrange)

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$  et  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ , 2 à 2 distincts.

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$ , alors,  $\forall x \in [a, b]$ , on a :

$$\exists c_x \in \text{conv}(x, x_0, \dots, x_n) / f(x) - (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \cdot \pi_n(x), \quad (\text{II.2})$$

où  $\pi_n$  est le polynôme de  $\mathbb{R}_{n+1}[x]$  défini par :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\pi_n(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$ .



\*\*\* **Commentaire : Interprétation et limites de (II.2).**

D'après la Définition D.d2, on a l'équivalence :

$$f(x) - (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \cdot \pi_n(x) \iff \mathbf{E}_x((\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(x) | f) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \cdot \pi_n(x). \quad (\text{II.3})$$

Ainsi, (II.2) donne une expression exacte de l'erreur d'interpolation de Lagrange de la fonction  $f$  par le  $p.i.L.$   $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  en un réel  $x \in [a, b]$ , expression valable sous les hypothèses du Théorème D.II-2.2.

Pourtant, en pratique, il ne faut pas s'illusionner sur le degré d'intérêt de cette expression exacte de l'erreur d'interpolation  $\mathbf{E}_x((\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(x) | f)$ . En effet, cette expression dépend d'un réel inconnu  $c_x$  dont on sait seulement qu'il appartient à l'intervalle  $I_x = \text{conv}(x, x_0, \dots, x_n)$ . Par conséquent, **cette expression de l'erreur est inutilisable en pratique**. Son principal intérêt est qu'elle va nous permettre, ci-après, de déduire une majoration de l'erreur plus exploitable car elle ne contiendra plus l'inconnue  $c_x$ . A partir de la majoration obtenue, on pourra tirer des conséquences pratiques importantes en vue de la résolution de notre problématique d'intérêt.

••• **Remarque II.1 (A propos de la majoration d'une erreur numérique)**

Ci-après, on s'intéressera au problème fondamental de la majoration de l'erreur d'interpolation de Lagrange. Mais avant, il est utile de faire une précision importante en matière de vocabulaire ici.

En effet, l'expression « **majoration d'une erreur numérique** » sous-entend toujours, en réalité, la **majoration de la valeur absolue de cette erreur**, i.e. de l'**incertitude** correspondante. Quand l'erreur est  $\geq 0$ , cela ne fait aucune différence. Mais quand l'erreur est  $< 0$ , seule la majoration de sa valeur absolue a un intérêt pratique pour pouvoir apprécier si elle est grande ou petite. D'où l'intérêt de majorer plutôt la valeur absolue de l'erreur pour couvrir tous les cas.

d) **Majoration de l'erreur d'interpolation de Lagrange.**

Le résultat suivant sur l'erreur d'interpolation de Lagrange est plus intéressant, en pratique, que le précédent, mais dont il est une conséquence immédiate.

**Corollaire D.II-2.3 (Majoration de l'erreur d'interpolation de Lagrange)**

Dans les conditions, les notations et l'hypothèse du Théorème D.II-2.2, on a :

**1. Majoration de l'erreur locale d'interpolation de Lagrange.**

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\pi_n(x)|, \quad (\text{II.4})$$

$$\text{où on a posé : } M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \in \mathbb{R}_+.$$

**2. Majoration (optimale) de l'erreur globale d'interpolation de Lagrange.**

$$\mathbf{E}_{[a, b]}(\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f | f) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot K_n, \quad (\text{II.5})$$

$$\text{avec } K_n = \sup_{x \in [a, b]} |\pi_n(x)| \in \mathbb{R}_+.$$

▷ **Exercice D::II.2 (Démonstration du Corollaire D.II-2.3)**

Dans les conditions, les notations et l'hypothèse du Théorème D.II-2.2, démontrer successivement (II.4) et (II.5). En cours de route, on démontrera clairement que  $M_{n+1}$  et  $K_n$  sont 2 réels et  $\geq 0$ .

e) **Conséquences pratiques de la majoration de l'erreur d'interpolation de Lagrange.**

Restons dans les conditions du Théorème D.II-2.2. Fixons alors un nombre réel  $t_0 \in [a, b]$ .

\*\*\* **Question :**

Quand pourra-t-on espérer que le nombre réel  $\tilde{y} = (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(t_0)$  soit une bonne approximation de la vraie valeur de la fonction  $f$  en  $x = t_0$ , i.e. du nombre réel  $y = f(t_0)$  ?

**\*\*\* Réponse :**

Avec le réel  $t_0 \in [a, b]$  fixé, posons :  $h = \max_{0 \leq i \leq n} |t_0 - x_i| = \max \{ |t_0 - x_0|, \dots, |t_0 - x_n| \}$ .

Comme, par définition,  $\pi_n(t_0) = (t_0 - x_0) \cdots (t_0 - x_n)$ , alors  $|\pi_n(t_0)| = |t_0 - x_0| \times \cdots \times |t_0 - x_n|$  ;

$$\Rightarrow |\pi_n(t_0)| \leq \underbrace{h \times \cdots \times h}_{n+1 \text{ fois}} \Rightarrow |\pi_n(t_0)| \leq h^{n+1}. \quad (\text{II.6a})$$

Appliquons alors (II.4) du Corollaire D.II-2.3 au point  $x = t_0 \in [a, b]$ . Il vient, compte tenu de (II.6a) :

$$0 \leq |f(t_0) - (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(t_0)| \leq C_{n+1} \cdot h^{n+1}, \quad \text{avec } C_{n+1} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{II.6b})$$

Mais on sait que :  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 > 0 \Rightarrow h^{n+1} \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ . (II.6c)

D'autre part,  $C_{n+1}$  est un réel ne dépendant que de la fonction  $f$ , l'entier  $n$  et les réels  $a, b$ , tous fixés ici. De ce fait,  $C_{n+1}$  ne dépend pas de  $t_0, x_0, \dots, x_n$ , et donc pas de  $h$ . Il s'ensuit que quand  $h$  bouge, le réel  $C_{n+1}$  va rester constant. Par conséquent,

$$(\text{II.6c}) \Rightarrow C_{n+1} \cdot h^{n+1} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0. \quad (\text{II.6d})$$

Mais (II.6b) et (II.6d)  $\Rightarrow |f(t_0) - (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(t_0)| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ , ce qui équivaut à :

$$f(t_0) - (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(t_0) \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0. \quad (\text{II.6e})$$

Par ailleurs,  $t_0$  fixé  $\in [a, b] \subset \mathcal{D}_f \Rightarrow y = f(t_0)$  constante fixée  $\in \mathbb{R}$  ; (II.6f)

$$(\text{II.6e}) \text{ et } (\text{II.6f}) \Rightarrow (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(t_0) \rightarrow f(t_0) \text{ quand } h \rightarrow 0. \quad (\text{II.6g})$$

Or, le réel  $h$  est le maximum de  $|t_0 - x_0|, \dots, |t_0 - x_n|$ ,  $n+1$  quantités  $\geq 0$ , avec l'entier  $n$  fixé.

D'où :  $(h \rightarrow 0) \iff \forall i = 0(1)n, |t_0 - x_i| \rightarrow 0 \iff \forall i = 0(1)n, t_0 - x_i \rightarrow 0$ . Soit donc :

$$(h \rightarrow 0) \iff \forall i = 0(1)n, x_i \rightarrow t_0 \iff x_0, \dots, x_n \rightarrow t_0. \quad (\text{II.6h})$$

Finalement (II.6g) et (II.6h) impliquent que :  $\boxed{(\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(t_0) \rightarrow f(t_0) \text{ quand } x_0, \dots, x_n \rightarrow t_0}$ .

En pratique, ce dernier résultat signifie que :

*Plus les points d'interpolation  $x_0, \dots, x_n$  sont pris proches du réel  $t_0$ , plus  $\tilde{y} = (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(t_0)$  sera une bonne valeur approchée de  $y = f(t_0)$ .*

**••• Remarque II.2 (Points d'interpolation « éloignés » de  $t_0$ )**

Par contre, lorsque les points d'interpolation  $x_0, \dots, x_n$  (ou certains d'entre eux) sont pris relativement éloignés du réel  $t_0$ , on ne peut rien dire, *a priori*, de la qualité de l'approximation de la valeur exacte  $y = f(t_0)$  par la valeur approchée  $\tilde{y} = (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(t_0)$ . Selon les cas, cette approximation peut être bonne ou mauvaise, voire catastrophiquement mauvaise.

De l'analyse qui précède, on tire donc la recommandation suivante en vue de la résolution de notre problématique :

**\*\*\* Utilisation d'un p.i.L. dans l'approximation d'une fonction : Recommandation 1.**

*Quand on veut approcher la valeur d'une fonction  $f$ , en un point  $t_0$ , par celle d'un p.i.L.  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  en  $t_0$ , il faut essayer de prendre les  $n+1$  points d'interpolation  $x_0, \dots, x_n$  aussi proches de  $t_0$  que les données disponibles sur  $f$  le permettent.*

**3°) Comportement du polynôme d'interpolation de Lagrange quand  $n \rightarrow +\infty$ .**

L'Intuition 2 énoncée à la fin de la Section 1°) motive la question pratique suivante au sujet du p.i.L. :

*Un p.i.L.  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$  est-il d'autant plus susceptible de donner une bonne approximation de la vraie valeur de la fonction  $f$  en un  $x \in \mathcal{D}_f$  que le nombre  $n+1$  de points d'interpolation utilisés est grand ?*

De manière mathématique plus formelle, cela revient à se poser la question :

*Est-ce que  $(\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(x) \rightarrow f(x)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et ce  $\forall x \in [a, b]$ , avec  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$  ?*

L'étude de cette question est assez élaborée, et requiert des outils d'Analyse mathématique de niveau supérieur. Néanmoins, on peut en résumer la réponse en 2 points :

1. Pour certaines fonctions  $f$  et certains intervalles  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ , la réponse est : OUI.

▷ **Exercice D::II.3** (Convergence de  $(pL_{x_0, \dots, x_n} f)(x)$  vers  $f(x) = e^x$  quand  $n \rightarrow +\infty$ )

Pour  $f(x) = e^x$ , fixons un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , et supposons que tous les points d'interpolation considérés ci-après sont dans  $[a, b]$ .

1°) Utiliser alors le Corollaire D.II-2.3 pour montrer qu'il existe 2 constantes réelles  $C, \lambda \geq 0$ , indépendantes de l'entier  $n$ , telles que :

$$E_{[a, b]}(pL_{x_0, \dots, x_n} f | f) \leq C \cdot \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2°) Utiliser un argument de série numérique pour en déduire que :  $pL_{x_0, \dots, x_n} f \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{C.U.}} f$  sur  $[a, b]$ .

3°) Identifier d'autres fonctions pour lesquelles le même raisonnement s'applique.

2. Pour certaines fonctions  $f$ , certains intervalles  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ , et certains choix de points d'interpolation, la réponse est : NON. Et même grossièrement NON !!!

Pour ces fonctions, on observe que pour certains choix des points d'interpolation, au delà d'un certain rang, plus  $n$  est grand, plus la qualité de l'approximation de  $f$  par  $\tilde{f} = pL_{x_0, \dots, x_n} f$  devient mauvaise, voire catastrophique au voisinage de certains points de l'intervalle  $[a, b]$ .

\*\*\* Conséquence :

Dans une situation concrète où les seules informations disponibles sur la fonction  $f$  sont ses valeurs en un certain nombre fini d'abscisses connues, on n'aura généralement pas les moyens de savoir dans lequel des 2 cas de figure possibles ci-dessus cette fonction se trouve. Dans ces conditions, la sagesse populaire énonce que « Dans le doute, abstiens toi ». Il faut donc éviter de se retrouver dans le cas de figure n°2 ci-dessus avec  $n$  grand. D'où notre 2<sup>ème</sup> recommandation pratique en vue de la résolution de notre problématique d'intérêt :

\*\*\* Utilisation d'un p.i.L. dans l'approximation d'une fonction : **Recommandation 2.**

En pratique, et sauf étude spécifique (analytique ou numérique) garantissant que c'est faisable dans la situation particulière où on se trouve, éviter d'approcher une fonction par un polynôme d'interpolation utilisant un grand nombre de points d'interpolation.

\*\*\* A titre purement indicatif, on peut suggérer :  $n \leq 7$ , i.e. pas plus de 8 points d'interpolation.

Mais s'adapter selon le contexte et ce que permettent les données (Cf. ci-après).

### III – Approximation numérique des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : ce qu'on peut faire, en pratique.

1°) *Introduction et rappels.*

On revient au cadre de travail fixé et à la problématique posée au début de ce Chapitre, à savoir l'approximation numérique d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  à partir de la seule connaissance de ses valeurs en un certain nombre d'abscisses données dans son domaine de définition. Les solutions suggérées vont l'être selon les 2 angles d'attaque de la problématique mis en évidence dans la Section I-2°) : approximation de  $f$  en un point  $t_0 \in \mathcal{D}_f$  et approximation de  $f$  sur tout un intervalle  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ . Cependant, pour l'angle 2, il s'avère pertinent de le séparer en 2 cas : intervalle  $[a, b]$  «petit» et intervalle  $[a, b]$  «grand».

\*\*\* Rappel des données de départ :

$$N \in \mathbb{N} ;$$

$$a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R} / a_0, \dots, a_N \in \mathcal{D}_f ;$$

$$y_0, \dots, y_N \in \mathbb{R} / \forall i = 0(1)N.$$

2°) Cas 1 : *Calcul d'une valeur approchée  $\tilde{y}$  de  $f$  en un réel  $t_0 \in \mathcal{D}_f$ .*

Soit donnée une valeur particulière  $x = t_0 \in \mathcal{D}_f$ . Le plus souvent,  $t_0 \notin \{a_0, \dots, a_N\}$ , évidemment...

\*\*\* Objectif :

A partir des données disponibles sur  $f$ , on veut calculer  $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ , une valeur approchée satisfaisante du nombre réel  $y = f(t_0)$ , la vraie valeur (inconnue) de la fonction  $f$  en  $x = t_0$ .

Nous présentons 2 approches différentes pour essayer d'atteindre cet objectif, basées toutes les 2 sur l'utilisation du *p.i.L.* pour un choix des points d'interpolation parmi les abscisses  $a_0, \dots, a_N$  (en lesquelles la valeur de la fonction  $f$  est connue), mais se distinguant par la manière de choisir les dits points d'interpolation et, surtout, la *façon de décider du nombre de ceux-ci*. Ce dernier aspect fait que nous qualifierons la 1<sup>ère</sup> approche de «statique» et l'autre de «dynamique».

#### a) Approche 1 : Statique.

Pour calculer une valeur approchée  $\tilde{y}$  de  $y = f(t_0)$ , on suit la démarche suivante :

##### Début

1. Fixer un entier naturel  $n$  «petit», par exemple  $1 \leq n \leq 7$ .
2. Repérer, parmi les réels  $a_0, \dots, a_N$ , les  $n + 1$  réels  $x_0, \dots, x_n$  les plus proches de  $x = t_0$ .
3. Calculer alors la valeur, en  $x = t_0$ , du *p.i.L.*  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$ , ce qui va donner  $\tilde{y} = (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(t_0)$ , par exemple par l'*algorithme d'Aitken*.
4. Renvoyer le nombre réel  $\tilde{y}$  comme valeur approchée de  $y = f(t_0)$ .

##### STOP

#### ••• Remarque III.1 (A propos de l'approche statique d'approximation de $f$ en $x = t_0$ )

L'approche statique qui vient d'être décrite est, de très loin, la plus utilisée dans ce contexte, car de mise en œuvre très simple (comme on a pu le constater).

Cependant, sur un plan théorique, à cause de sa manière arbitraire de fixer le nombre de points d'interpolation, elle est, *a priori*, moins crédible que la suivante.

#### b) Approche 2 : Dynamique.

Ici, on ne fixe pas l'entier  $n$  (et donc le nombre  $n + 1$  de points d'interpolation) d'avance. On va plutôt prendre les points d'interpolation  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , successivement, parmi les réels  $a_0, \dots, a_N$  par ordre de *proximité décroissante* (i.e. d'*éloignement croissant*) à  $x = t_0$  sur l'axe réel, c'est-à-dire comme suit :

$$\begin{aligned} x_0 &= a_{i_0}, & \text{point le plus proche de } x = t_0 & \text{ dans } \{a_0, \dots, a_N\}; \\ x_1 &= a_{i_1}, & \text{point le plus proche de } x = t_0 & \text{ dans } \{a_0, \dots, a_N\} \setminus \{x_0\}; \\ x_2 &= a_{i_2}, & \text{point le plus proche de } x = t_0 & \text{ dans } \{a_0, \dots, a_N\} \setminus \{x_0, x_1\}; \\ x_3 &= a_{i_3}, & \text{point le plus proche de } x = t_0 & \text{ dans } \{a_0, \dots, a_N\} \setminus \{x_0, x_1, x_2\}; \\ \dots & \dots & \text{etc.} & \end{aligned}$$

Parallèlement, après le choix de chaque nouveau point d'interpolation  $x_i$ , on calcule la valeur, en  $x = t_0$ , de  $\text{pL}_{x_0, \dots, x_i} f$ , le *p.i.L.* utilisant les  $i + 1$  réels  $x_0, \dots, x_i$  comme points d'interpolation, i.e. on calcule la valeur du nombre réel :  $\tilde{y}_{01\dots i} = (\text{pL}_{x_0, \dots, x_i} f)(t_0)$ .

L'ensemble du processus peut se schématiser de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \{a_0, \dots, a_N\} & \longrightarrow & \{a_0, \dots, a_N\} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \{a_0, \dots, a_N\} \setminus \{x_0, x_1\} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ x_0 & & x_1 & & x_2 & & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \tilde{y}_0 = (\text{pL}_{x_0} f)(t) & \longrightarrow & \tilde{y}_{01} = (\text{pL}_{x_0 x_1} f)(t_0) & \longrightarrow & \tilde{y}_{012} = (\text{pL}_{x_0 x_1 x_2} f)(t_0) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On itère ces calculs :

- soit jusqu'à un rang  $n / \left| \tilde{y}_{01\dots n} - \tilde{y}_{01\dots (n-1)} \right| \leq \varepsilon \cdot \left| \tilde{y}_{01\dots n} \right|$ ,  
avec  $\varepsilon$  réel  $> 0$ , fixé petit  $\in ]0, 1[$ , par exemple  $\varepsilon = 10^{-2}$ ;

on prend alors, comme valeur approchée finale de  $y = f(t_0)$ , le réel  $\tilde{y} = \tilde{y}_{01\dots n}$  ;

- soit tant qu'on observe une convergence des valeurs des réels  $\tilde{y}_{01\dots i}$  vers une certaine valeur-limite, auquel cas, on prend, comme valeur approchée finale de  $y = f(t_0)$ , le réel  $\tilde{y} = \tilde{y}_{01\dots (n-1)}$ , avec  $n$  le rang où la rupture de convergence aura été observée.

#### ••• Remarque III.2 (Calcul des valeurs $\tilde{y}_0, \tilde{y}_{01}, \dots$ , dans l'approche dynamique)

Le calcul de ces valeurs successives se fait le plus efficacement par l'*algorithme d'Aitken*.

**3°) Cas 2 : Approximation globale de  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  «petit».**

Lorsque l'on doit approcher  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  «petit», i.e. de longueur  $b - a$  «petite» (ou jugée telle ...), il n'est pas déraisonnable d'envisager de le faire par un p.i.L. globalement sur tout  $[a, b]$ . Ainsi, avec les données disponibles, on peut opérer de la manière suivante :

**Début**

1. Fixer un entier naturel  $n$  petit, par exemple  $1 \leq n \leq 7$ .
2. Repérer, parmi  $a_0, \dots, a_N$ , les  $n + 1$  réels  $x_0, \dots, x_n$  les plus «proches» de l'intervalle  $[a, b]$ .
3. Prendre, pour fonction d'approximation globale de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  :  $\tilde{f} = \text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f$ .
4. Définir une **formule** ou une **méthode analytique** donnant  $\tilde{f}(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .
5. Traduite ensuite cette formule ou méthode analytique en un **algorithme** permettant de calculer (efficacement) la valeur de  $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ , pour un réel  $x \in [a, b]$ , arbitrairement donné.

**STOP****••• Remarque III.3 (A propos de l'intervalle  $[a, b]$  «petit»)**

En situation concrète, décider si l'intervalle  $[a, b]$  est «petit» ou pas relève davantage de considérations pratiques de l'utilisateur (**c'est-à-dire de vous**) que d'autre chose. On ne peut pas énoncer de règle systématique à suivre à cet égard. Il en sera de même dans le **Cas 3** qui suivra quand on parlera de «petits sous-intervalles».

D'autre part, si l'intervalle  $[a, b]$  est contenu dans un autre,  $[A, B]$ , plus grand et sur lequel on a besoin de construire une fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  de  $f$ , alors il vaut mieux d'abord le faire (selon les modalités décrites dans le **Cas 3** ci-après), puis utiliser aussi  $\tilde{f}$  comme fonction d'approximation globale de  $f$  sur  $[a, b]$ , ce qu'elle sera effectivement.

**4°) Cas 3 : Approximation globale de  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  «grand».**

Pour qualifier l'intervalle  $[a, b]$  ici, par convenance, nous disons «grand». Mais, en fait, il serait plus précis de dire «non petit».

**a) Préliminaires : rappel et complément.**

La notion de «subdivision d'un intervalle  $[a, b]$ » a été introduite en *Analyse Réelle II* pour construire la notion d'intégrale d'une fonction sur  $[a, b]$ . Parce que cette notion de subdivision sera le point de départ dans ce qui va suivre à propos de l'approximation globale d'une fonction sur un «grand» intervalle  $[a, b]$ , nous en rappelons la définition ci-après, ainsi que les autres termes du vocabulaire qui va avec.

**\*\*\* Rappel n°2 (Subdivision d'un intervalle  $[a, b]$  et terminologie associée)**

1. Une **subdivision** de  $[a, b]$  est toute suite finie et strictement croissante  $\sigma = (c_0, \dots, c_q)$  d'éléments de cet intervalle, commençant par la borne inférieure  $a$  et se terminant par la borne supérieure  $b$ . **NOTATION** :  $\sigma = (a = c_0 < c_1 < \dots < c_q = b)$ .
2. Les  $q + 1$  réels  $c_0, \dots, c_q$  sont les **nœuds** de la subdivision  $\sigma$ .
3. Les  $q - 1$  réels  $c_1, \dots, c_{q-1}$  sont les **nœuds intérieurs** de  $\sigma$ .
4. L'ensemble des nœuds est appelé **support de  $\sigma$** . **NOTATION** :  $\text{Supp}(\sigma) = \{c_0, \dots, c_q\}$ .
5. Les  $q$  intervalles  $]a, c_1[$ ,  $]c_1, c_2[$ ,  $\dots$ ,  $]c_{q-1}, b[$  sont les  **$\sigma$ -sous-intervalles ouverts** de  $[a, b]$ .
6. Les  $q$  intervalles  $[a, c_1]$ ,  $[c_1, c_2]$ ,  $\dots$ ,  $[c_{q-1}, b]$  sont les  **$\sigma$ -sous-intervalles fermés** de  $[a, b]$ .
7. Les **pas** successifs de  $\sigma$  sont les  $q$  réels  $h_0, \dots, h_{q-1} > 0$  définis par :  $\forall k, h_k = c_{k+1} - c_k$ .  
Ce sont les longueurs des  $q$   $\sigma$ -sous-intervalles fermés (resp. ouverts) de  $[a, b]$ .
8. Le **diamètre** de la subdivision est la longueur du plus grand des  $\sigma$ -sous-intervalles fermés de  $[a, b]$ , i.e. le nombre réel  $> 0$  :  $\Delta_\sigma = \max_{0 \leq k \leq q-1} h_k$ .
9. L'entier  $q$  est appelé **taille de la subdivision  $\sigma$**  : c'est le nombre de sous-intervalles fermés en lesquels  $\sigma$  divise l'intervalle  $[a, b]$ .

Toujours dans le cadre de la construction de l'intégrale en *Analyse Réelle II*, a été introduite la notion de «fonction définie par morceaux sur  $[a, b]$ ». Lorsque l'intervalle  $[a, b]$  est «grand», toutes les fonctions d'approximation globale considérées sur  $[a, b]$  sont de ce type, mais du sous-type très particulier ci-après.

**Définition-Propriété D.d5 (Fonction polynômiale par morceaux sur  $[a, b]$ )**

Soit  $\varphi$ , une fonction de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Elle est dite **polynômiale par morceaux sur  $[a, b]$**  lorsqu'elle est donnée sous la forme :

$$\varphi(x) = \begin{cases} P_0(x) & \text{si } x \in ]a, c_1[, \\ P_1(x) & \text{si } x \in ]c_1, c_2[, \\ \vdots & \vdots \\ P_{q-1}(x) & \text{si } x \in ]c_{q-1}, b[, \end{cases}$$

où : –  $\sigma = (a = c_0 < c_1 < \dots < c_q = b)$  est une subdivision de  $[a, b]$  ;

–  $P_0, \dots, P_{q-1}$  sont des fonctions polynômes de  $\mathbb{R}$ .

- 1.1. Peu important les valeurs de  $\varphi$  aux nœuds  $a, c_1, \dots, c_{q-1}, b$  de la subdivision  $\sigma$  : elles ne jouent aucun rôle dans cette définition et peuvent être données séparément ou pas.
- 1.2. Ainsi, certaines bornes (gauches et/ou droites) des intervalles  $]c_k, c_{k+1}[$  peuvent éventuellement être fermées ci-dessus.
- 1.3. On dit aussi que  $\varphi$  est une **fonction polynômiale par morceaux sur  $[a, b]$  s'appuyant sur la subdivision  $\sigma = (a = c_0 < c_1 < \dots < c_q = b)$** , et ce à travers les polynômes  $P_0, \dots, P_{q-1}$ .
- 1.4. L'idée de «polynômiale par morceaux sur  $[a, b]$ » vient de ce que la fonction  $\varphi$  est définie par un polynôme différent d'un sous-intervalle ouvert  $]c_k, c_{k+1}[$  à un autre.
- 1.5. Bien noter cependant que  $\varphi$  n'est pas, elle même, un polynôme sur  $[a, b]$ , en général.
2. Une fonction polynômiale par morceaux sur  $[a, b]$  est un **cas particulier de fonction définie par morceaux sur  $[a, b]$** . Elles conservent donc les autres termes de vocabulaire associés à ce type de fonction. Ainsi :
- 2.1. Les  $q$  couples  $(P_0; ]a, c_1[), (P_1; ]c_1, c_2[), \dots, (P_{q-1}; ]c_{q-1}, b[)$  sont les «**morceaux**» de  $\varphi$ .
- 2.2. Les nœuds  $a, c_1, \dots, c_{q-1}, b$  de la subdiv.  $\sigma$  sont aussi appelés **nœuds de la fonction  $\varphi$** .
- 2.3. Les nœuds internes  $c_1, \dots, c_{q-1}$  de  $\sigma$  sont appelés **points de raccord** de la fonction  $\varphi$ .

**b) Approximation globale de  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  «grand» : Principe d'action.**

Lorsque l'on doit approcher  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  «grand», i.e. de longueur  $b - a$  «non petite» (ou jugée telle ...), il est déconseillé d'essayer de le faire par un p.i.L. globalement sur tout  $[a, b]$ . Il faut plutôt envisager une «stratégie du diviser pour mieux régner», en procédant selon les grandes lignes suivantes :

**Début**

- Découper l'intervalle  $[a, b]$  en une réunion de «petits» sous-intervalles  $[c_k, c_{k+1}]$  par une subdivision de points de  $[a, b]$  :  $\sigma = (a = c_0 < c_1 < \dots < c_q = b)$ , avec  $\forall k = 0(1)q - 1, c_{k+1} - c_k = h_k$  «petit».
- Fixer un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , petit, puis définir  $q$  polynômes  $p_0, \dots, p_{q-1} \in \mathbb{R}_n[x]$  tels que :
 
$$\begin{cases} \forall k = 0(1)q - 1, \text{ le polynôme } p_k \text{ peut être vu comme une fonction d'approximation} \\ \text{globale de } f \text{ sur le sous-intervalle } [c_k, c_{k+1}]. \end{cases}$$
- Construire une fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  de  $f$  sur  $[a, b]$  en procédant comme suit :
 

sur chaque sous-intervalle  $[c_k, c_{k+1}]$ , poser :  $\forall x \in [c_k, c_{k+1}], \tilde{f}(x) = p_k(x)$ ,

ceci étant donc fait pour chacune des  $q$  valeurs de l'indice  $k = 0(1)q - 1$ .
- Définir une **méthode analytique** permettant de calculer  $\tilde{f}(x), \forall x \in [a, b]$ .
- Traduire ensuite cette méthode analytique en un **algorithme** calculant (efficacement) la valeur de  $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ , pour un réel  $x \in [a, b]$ , arbitrairement donné.

**STOP**

••• **Remarque/Commentaire n°1 (A propos des méthodes pour construire  $\tilde{f}$ )**

Il existe différentes méthodes pour construire une fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  de  $f$  sur  $[a, b]$  selon les grandes lignes listées ci-dessus. On présentera les plus usuelles dans la **Partie IV** à suivre. Mais, en règle générale, les méthodes dans cette catégorie se différencient entre elles :

1. d'une part, par leur choix des nœuds internes de la subdivision  $\sigma$  (i.e. les réels  $c_1, \dots, c_{q-1}$ ), généralement à partir des données disponibles (et sachant que  $c_0 = a$  et  $c_q = b$ );
2. et, d'autre part :
  - 2.1. le choix de l'entier  $n$ , le degré maximum possible pour les  $q$  polynômes  $p_0, \dots, p_{q-1}$  représentant  $\tilde{f}$ , respectivement, dans chacun des sous-intervalles  $[c_k, c_{k+1}]$ ;
  - 2.2. la manière de définir chacun des ces  $q$  polynômes à partir des données.

En règle générale, les polynômes  $p_0, \dots, p_{q-1}$  sont presque toujours construits de telle sorte que  $\tilde{f}$  interpole la fonction  $f$  en chacun des nombres réels  $a_0, \dots, a_N$  en lesquels la valeur de  $f$  est connue.

c) **Etude de la continuité et la dérivabilité d'une fonction polynômiale par morceaux.**

Au bilan final, la fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$ , construite ci-dessus, sera donc une fonction polynômiale par morceaux sur  $[a, b]$ , au sens de la Définition-Propriété D.d5. Or, dans une situation concrète, l'utilisateur est souvent intéressé à ce que cette fonction possède les propriétés fonctionnelles sympathiques usuelles attendues d'une fonction de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , du genre *continuité* ou *dérivabilité*. Mais comment étudie-t-on ce genre de propriétés pour une fonction polynômiale par morceaux ?

La réponse est apportée par les 3 résultats qui suivent.

**Théorème D.III-4.1 (Continuité d'une fonction polynômiale par morceaux : C.N.S.)**

Pour la fonction polynômiale par morceaux  $\varphi$  de la Définition-Propriété D.d5, les 3 assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$  ;
2. les propriétés suivantes sont vraies :
 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{2.1. } P_0(a) = \varphi(a) ; \\ \text{2.2. } P_{q-1}(b) = \varphi(b) ; \\ \text{2.3. } \forall k = 1(1)q-1, P_{k-1}(c_k) = P_k(c_k) = \varphi(c_k) ; \end{array} \right.$$
3.  $\varphi$  vérifie :  $\forall k = 0(1)q-1, \varphi(x) = P_k(x)$  sur le **sous-intervalle fermé**  $[c_k, c_{k+1}]$ .

••• **Remarque III.4 (Continuité d'une fonction polynômiale par morceaux)**

Ainsi, pour démontrer qu'une fonction polynômiale par morceaux  $\varphi$  comme celle de la Définition-Propriété D.d5 est continue sur  $[a, b]$ , il suffit de vérifier, que les propriétés **2.1.**, **2.2.**, **2.3.** du Théorème D.III-4.1 sont satisfaites. Et il suffit qu'au moins une de ces 3 propriétés soit prise en défaut pour conclure que  $\varphi$  n'est pas continue sur  $[a, b]$ .

Mais pour les fonctions d'approximation globale polynômiale par morceaux les plus usuelles (Cf. **Partie IV**, la vérification de l'assertion **3.** du Théorème D.III-4.1 est souvent immédiate, ce qui permet d'établir rapidement leur continuité sur  $[a, b]$ .

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction polynômiale par morceaux, on utilise le :

**Théorème D.III-4.2 (Dérivabilité d'une fonction polynômiale par morceaux : C.N.S.)**

Pour la fonction polynômiale par morceaux  $\varphi$  de la Définition-Propriété D.d5, les 3 assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\varphi$  est dérivable sur  $[a, b]$  ;
2.  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  ;
3. les propriétés suivantes sont vraies :
 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{3.1. } \varphi \text{ est continue sur } [a, b] ; \\ \text{3.2. } \forall k = 1(1)q-1, P'_{k-1}(c_k) = P'_k(c_k). \end{array} \right.$$

••• **Remarque III.5 (Dérivabilité d'une fonction polynômiale par morceaux)**

Ainsi, pour démontrer qu'une fonction polynômiale par morceaux  $\varphi$  comme celle de la Définition-Propriété D.d5 est dérivable (et de classe  $C^1$ ) sur  $[a, b]$ , il faut, et il suffit de vérifier que les propriétés 3.1. et 3.2. du Théorème D.III-4.2 sont satisfaites. Et il suffit qu'au moins une de ces 2 propriétés soit prise en défaut pour conclure que  $\varphi$  n'est pas dérivable sur  $[a, b]$ . Or, pour vérifier 3.1., on vérifie 2.1., 2.2. et 2.3. du Théorème D.III-4.1.

Le Théorème D.III-4.2 se généralise aisément par récurrence aux dérivabilités d'ordre supérieur comme suit :

**Corollaire D.III-4.3 ( $r$ -Dérivabilité d'une fonction polynômiale par morceaux : C.N.S.)**

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ , fixé. Pour la fonction polynômiale par morceaux  $\varphi$  de la Définition-Propriété D.d5, les 3 assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\varphi$  est  $r$  fois dérivable sur  $[a, b]$  ;
2.  $\varphi$  est de classe  $C^r$  sur  $[a, b]$  ;
3. les propriétés suivantes sont vraies :
 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{3.1. } \varphi \text{ est continue sur } [a, b] ; \\ \text{3.2. } \forall k = 1(1)q-1, P'_{k-1}(c_k) = P'_k(c_k), P''_{k-1}(c_k) = P''_k(c_k), \dots, P^{(r)}_{k-1}(c_k) = P^{(r)}_k(c_k). \end{array} \right.$$

**d) Comment calculer la valeur en un point d'une fonction polynômiale par morceaux ?**

Face à une fonction polynômiale par morceaux  $\varphi$  comme celle de la Définition-Propriété D.d5, pour calculer sa valeur en un réel  $x_0 \in [a, b]$  donné (et concevoir un algorithme faisant ce travail), il faut tenir compte de ce que l'expression de  $\varphi(x_0)$  varie selon le « morceau » de  $\varphi$  dans lequel se trouve  $x_0$ . De plus, lorsque  $\varphi$  n'est pas continue sur  $[a, b]$ , il faut traiter différemment  $x_0$  selon que  $x_0$  est un nœud de la subdivision  $\sigma$  ou pas.

Pour notre part ici, on se place dans la situation la plus courante en pratique, celle où  $\varphi$  est continue sur l'intervalle  $[a, b]$ . Dans ce cas, pour le calcul de la valeur de  $\varphi(x_0)$ , il faut procéder en 2 temps :

**1. Localisation du « morceau » de  $\varphi$  contenant  $x_0$ .**

Il s'agit de déterminer l'indice  $k \in [0(1)q-1] / x \in [c_k, c_{k+1}]$ .

**2. Calcul effectif de la valeur de  $\varphi$  en  $x_0$ .**

Ayant obtenu l'indice  $k$  ci-dessus, on sait qu'alors  $\varphi(x_0) = P_k(x_0)$ .

Il suffit donc d'utiliser (ou de mettre en place) un algorithme approprié calculant efficacement la valeur du polynôme  $P_k$  en  $x = x_0$ , à partir des données disponibles et selon l'expression donnée de  $P_k$ .

## IV – Interpolation polynômiale par morceaux

**\*\*\* Cadre de travail.**

On se place ici dans le cas de figure le plus courant pour l'approximation globale d'une fonction  $f$  sur un intervalle donné  $[a, b]$ . Il s'agit de la situation où on dispose des valeurs  $y_0, \dots, y_N \in \mathbb{R}$  en  $N+1$  réels donnés  $a_0, \dots, a_N$  vérifiant :  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ ,

i.e.  $a_0, \dots, a_N$  sont les nœuds d'une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ .

**\*\*\* Objectif.**

Construire une fonction  $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $\tilde{f}$  soit une fonction d'approximation globale de  $f$  sur  $[a, b]$ , et aussi bonne que possible. Cette fonction  $\tilde{f}$  sera polynômiale par morceaux sur  $[a, b]$  et devra être définie et se calculer à partir des données disponibles, à savoir :

- $N \in \mathbb{N}^*$  ;
- $a, b / a < b$  et  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$  ;
- $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R} / a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$  ;
- $y_0, \dots, y_N \in \mathbb{R} / \forall i = 0(1)N, y_i = f(a_i)$ .



D'autre part, une exigence minimale sera que  $\tilde{f}$  interpole  $f$  en chacune des abscisses  $a_0, \dots, a_N$  puisque la valeur de  $f$  est connue en ces points. Etant déjà polynômiale par morceaux sur  $[a, b]$ , on dira alors que  $\tilde{f}$  est une **fonction d'interpolation polynômiale par morceaux** de  $f$  sur  $[a, b]$ . Il est alors utile de rappeler que pour définir une fonction  $\tilde{f}$  polynômiale par morceaux sur  $[a, b]$ , il est nécessaire de préciser :

1. la subdivision de points  $\sigma = (a = c_0 < c_1 < \dots < c_q = b)$  de l'intervalle  $[a, b]$  sur laquelle  $\tilde{f}$  s'appuie ;
2. le polynôme  $p_k$  auquel  $\tilde{f}$  est égale entre les nœuds  $c_k$  et  $c_{k+1}$ , ceci  $\forall k = 0(1)q - 1$ .

On examine, ci-après, les méthodes usuelles pour construire une telle  $\tilde{f}$  à partir des données ci-dessus.

### 1°) **Approximation de $f$ sur $[a, b]$ par interpolation affine par morceaux.**

C'est la méthode d'interpolation polynômiale par morceaux la plus simple (et la plus intuitive). Mais elle n'est pas la plus pertinente, pour les raisons listées plus loin. Néanmoins, il est utile de commencer par elle. En effet, sa simplicité a l'avantage de permettre d'illustrer, sur elle, les différents outils et aspects qu'on pourra adapter pour construire et étudier toutes les autres méthodes d'interpolation polynômiale par morceaux.

#### a) **Construction analytique de la fonction d'approximation affine par morceaux.**

Ici, on construit une fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  de  $f$  sur  $[a, b]$  de la manière suivante :

1. On prend, comme subdivision d'appui, celle des  $a_i$  eux mêmes, i.e.  $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b)$ , et donc, dans les notations de la Définition-Propriété D.d5 :  $q = N$  et  $c_i = a_i$ ,  $\forall i = 0(1)N$ .
2. On définit alors  $\tilde{f}$  sur  $[a, b]$  en procédant par morceaux comme suit :

$$\forall i = 0(1)N - 1, \text{ on pose, } \forall x \in [a_i, a_{i+1}] : \tilde{f}(x) = P_i(x) = (\text{pL}_{a_i, a_{i+1}} f)(x),$$

$$\text{i.e. } P_i = \text{pL}_{x_0 x_1} f, \text{ avec } x_0 = a_i \text{ et } x_1 = a_{i+1}.$$

Ainsi, dans cette méthode d'interpolation polynômiale par morceaux, on approche  $f$  sur chaque sous-intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  de la manière la plus simple qui soit : par le p.i.L. de  $f$  basé sur toutes les informations disponibles sur  $f$  dans  $[a_i, a_{i+1}]$ , à savoir la connaissance des valeurs de  $f$  aux 2 nœuds  $a_i$  et  $a_{i+1}$ .

#### \*\*\* Justification analytique de la terminologie « affine par morceaux ».

Etant un p.i.L. basé sur 2 points d'interpolation, chaque  $P_i$  est un polynôme de degré  $\leq 1$ , donc une **fonction affine** : c'est l'unique fonction affine qui prend les mêmes valeurs que  $f$  en  $x_0 = a_i$  et  $x_1 = a_{i+1}$ . Ainsi, sur chaque sous-intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$ , la fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  coïncide avec une fonction affine. D'où la notion de « fonction d'approximation affine par morceaux ». Mais comme, de plus,  $\tilde{f}$  interpole  $f$  en chacune des abscisses  $a_0, \dots, a_N$ , on parle aussi de « fonction d'interpolation affine par morceaux ».

#### b) **Construction graphique de la fonction d'approximation affine par morceaux.**

Sur chaque sous-intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$ , comme  $\tilde{f}$  coïncide avec une fonction affine, alors sa courbe entre les abscisses  $x = a_i$  et  $x = a_{i+1}$  est un segment de droite affine.

#### \*\*\* Justification graphique de la terminologie « affine par morceaux ».

$$\text{Plus précisément, posons : } M_i = \begin{pmatrix} a_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad \forall i = 0(1)N,$$

i.e.  $M_i$  est le point du plan d'abscisse  $x = a_i$  et d'ordonnée  $y = y_i = f(a_i)$ .

Alors,  $\forall i = 0(1)N - 1$ , la courbe de la fonction  $\tilde{f}$  sur le sous-intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  est le segment de droite affine d'extrémités les 2 points  $M_i$  et  $M_{i+1}$ . Ainsi, au bilan global, la courbe de  $\tilde{f}$  sur  $[a, b]$  est un enchaînement de segments de droite affine, i.e. une ligne brisée. Ceci justifie aussi pourquoi on parle d'« approximation affine par morceaux ». **Graphique illustratif : Cf. Cours en Salle.**

#### c) **Propriétés de la fonction d'approximation affine par morceaux.**

En tant que fonction de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f}$  a un certain nombre de propriétés. Certaines de celles ci peuvent être vues comme positives pour une fonction d'approximation globale, et d'autres plutôt comme négatives. Dans cet ordre d'idées, nous adopterons les conventions suivantes pour lister ces propriétés :

$$\begin{cases} \oplus & \text{pour une } \textbf{propriété positive} \text{ de } \tilde{f}, \\ \ominus & \text{pour une } \textbf{propriété négative} \text{ de } \tilde{f}. \end{cases}$$

Ainsi, on a :

**P1**  $\oplus$  La fonction  $\tilde{f}$  est continue sur  $[a, b]$ .

▷ **Exercice** D::IV.1

Démontrer cette propriété comme application du Théorème D.III-4.1.

**P2**  $\ominus$  La fonction  $\tilde{f}$  n'est pas dérivable sur  $[a, b]$ , en général.

▷ **Exercice** D::IV.2

Comme application du Théorème D.III-4.2 :

1°) Démontrer cette propriété.

2°) Identifier le seul cas de figure (dans les données) où  $\tilde{f}$  est dérivable sur  $[a, b]$ .

**P3**  $\ominus$   $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ , la courbe de  $\tilde{f}$  sur  $[a, b]$  est « laide ».

▷ **Exercice** D::IV.3

Justifier cette assertion mathématiquement peu orthodoxe...

**d) Qualité de l'approximation de  $f$  par  $\tilde{f}$  sur  $[a, b]$  ?**

Comme il a déjà été abondamment souligné précédemment dans ce Chapitre, l'intérêt premier attendu d'une fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  d'une fonction  $f$  sur  $[a, b]$  s'évalue à travers la qualité de l'approximation de  $f$  par  $\tilde{f}$  en tous les  $x \in [a, b]$ . Qu'en est-il alors quand  $\tilde{f}$  est la fonction d'approximation affine par morceaux ci-dessus construite ? Eh bien, malgré les propriétés négatives non négligeables signalées ci-dessus pour  $\tilde{f}$ , et contrairement à ce que suggérerait une certaine intuition (notamment au vu de l'allure de la courbe de  $\tilde{f}$  sur  $[a, b]$ ), on peut néanmoins dire que :

**P4**  $\oplus$  La fonction  $\tilde{f}$  donne, en général, une assez bonne approximation de  $f$  sur  $[a, b]$ .

Cette dernière assertion découle de la notion ci-après (qui étend, aux fonctions définies par morceaux, une notion bien connue sur les suites de fonctions numériques).

**Définition-Propriété D.d6 (C.U. d'une fonction définie par morceaux sur  $[a, b]$ )**

Soient  $g$  et  $\varphi$ , 2 fonctions de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $\varphi$  définie par morceaux sur  $[a, b]$  en s'appuyant sur une subdivision  $\sigma$ , où la définition de  $\varphi$  varie si  $\sigma$  varie (i.e. le nombre et/ou la position de ses nœuds intérieurs varient).

1. On dit que  $\varphi$  **converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$**  lorsque :

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0 \text{ quand } \Delta_\sigma \rightarrow 0.$$

• **NOTATION** :  $\tilde{f} \xrightarrow{\text{C.U.}} f$  sur  $[a, b]$  quand  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$ .

2. Avec la définition de la limite, ceci est équivalent à n'importe laquelle des 2 assertions suivantes :

**2.1.**  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon / \Delta_\sigma \leq \delta_\varepsilon \implies \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon ;$

**2.2.**  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 / \Delta_\sigma \leq \delta_\varepsilon \implies \forall x \in [a, b], |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$

Les 2 résultats qui suivent vont montrer comment la notion ci-dessus définie s'applique à la fonction d'approximation affine par morceaux, et l'interprétation pratique qui s'en déduit pour mesurer la qualité de son approximation d'une fonction sur  $[a, b]$ .

**Théorème D.IV-1.1 (Majoration de l'erreur globale de l'approx. affine par morceaux)**

Dans l'approximation affine par morceaux, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$ , alors :

$$\exists K, \text{ constante } \geq 0 / \mathbf{E}_{[a, b]}(\tilde{f} | f) \leq K \cdot \Delta_\sigma^2, \quad (\text{IV.1})$$

avec  $\Delta_\sigma = \max_{0 \leq i \leq N-1} h_i$ , où  $h_i = a_{i+1} - a_i$  est la longueur du sous-intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$ .

**Preuve** Supposons que  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ . Par définition,  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|$ .

Or,  $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b) \implies [a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{N-1}, a_N]$ . Il s'ensuit :  
 $\mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f) = \max_{0 \leq i \leq N-1} \sup_{x \in [a_i, a_{i+1}]} |f(x) - \tilde{f}(x)|$ , i.e.  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f) = \max_{0 \leq i \leq N-1} \mathbf{E}_{[a_i, a_{i+1}]}(\tilde{f}|f)$ . (IV.2a)

Soit alors un indice  $i \in [0(1)N-1]$ . Par définition de  $\tilde{f}$ , on sait que :  $\tilde{f} = P_i = \text{pL}_{a_i, a_{i+1}} f$  sur  $[a_i, a_{i+1}]$ ,

$$\mathbf{E}_{[a_i, a_{i+1}]}(\tilde{f}|f) = \mathbf{E}_{[a_i, a_{i+1}]}(\text{pL}_{a_i, a_{i+1}} f|f). \quad (\text{IV.2b})$$

Par ailleurs, le *p.i.L.*  $\text{pL}_{a_i, a_{i+1}} f$  a  $2 = n + 1$  points d'interpolation ( $x_0 = a_i$  et  $x_0 = a_{i+1}$ ), d'où  $n = 1$ . Or,  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$  et  $[a_i, a_{i+1}] \subset [a, b] \implies f \in \mathcal{C}^2([a_i, a_{i+1}]) = \mathcal{C}^{n+1}([a_i, a_{i+1}])$ ,

$$\implies \text{par le Corollaire D.II-2.3, } \mathbf{E}_{[a_i, a_{i+1}]}(\text{pL}_{a_i, a_{i+1}} f|f) \leq \frac{M_{2,i}}{2!} \cdot C_1, \quad (\text{IV.2c})$$

avec  $M_{2,i} = \sup_{x \in [a_i, a_{i+1}]} |f''(x)| \in \mathbb{R}_+$  et  $C_1 = \sup_{x \in [a_i, a_{i+1}]} |\pi_{1,i}(x)| \in \mathbb{R}_+$ , où  $\pi_{1,i}(x) = (x - a_i)(x - a_{i+1})$ .

Or, en étudiant la fonction  $\pi_{1,i}$  jusqu'au tableau de variation, on trouve que :

$$C_1 = \left| \pi_{1,i}\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \right| = \frac{(a_{i+1} - a_i)^2}{4} = \frac{h_i^2}{4} \implies C_1 \leq \frac{\Delta_\sigma^2}{4}. \quad (\text{IV.2d})$$

D'autre part,  $[a_i, a_{i+1}] \subset [a, b] \implies M_{2,i} = \sup_{x \in [a_i, a_{i+1}]} |f''(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)| = M_2$ . (IV.2e)

Maintenant, (IV.2c), (IV.2d) et (IV.2e)  $\implies \mathbf{E}_{[a_i, a_{i+1}]}(\text{pL}_{a_i, a_{i+1}} f|f) \leq \frac{M_2}{8} \cdot \Delta_\sigma^2$ ,

ce qui, avec (IV.2a) et (IV.2b), entraîne que :  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f) \leq K \cdot \Delta_\sigma^2$ , en prenant  $K = M_2/8$ . **Cqfd**

Avec la Définition-Propriété D.d6, le Théorème précédent entraîne immédiatement la propriété remarquable suivante de la méthode d'approximation affine par morceaux sur un intervalle  $[a, b]$  :

**Corollaire D.IV-1.2 (Convergence uniforme de l'approximation affine par morceaux)**

Dans l'approximation affine par morceaux, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$ , alors :

$$\tilde{f} \xrightarrow{\text{C.U.}} f \text{ sur } [a, b] \text{ quand } \Delta_\sigma \rightarrow 0.$$

**Preuve** Supposons que  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ . Alors, d'après le Théorème D.IV-1.1,

$$\exists K, \text{ constante } \geq 0 / \mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f) \leq K \cdot \Delta_\sigma^2. \quad (\text{IV.3a})$$

Or,  $K$  constante  $\implies K \cdot \Delta_\sigma^2 \rightarrow 0$  quand  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$ . Comme, de plus,  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f) \geq 0$ , alors :

$$(\text{IV.3a}) \implies \mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f) \rightarrow 0 \text{ quand } \Delta_\sigma \rightarrow 0, \text{ i.e. } \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| \rightarrow 0 \text{ quand } \Delta_\sigma \rightarrow 0,$$

$$\implies \tilde{f} \xrightarrow{\text{C.U.}} f \text{ sur } [a, b]. \quad \text{Cqfd}$$

**\*\*\* Interprétation pratique de la C.U. de l'approximation affine par morceaux sur  $[a, b]$ .**

Pour effectuer cette interprétation, on a d'abord besoin de 2 points préliminaires :

• **Préliminaire 1 : Signification pratique du fait que  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$ .**

Pour comprendre ce que signifie en pratique le fait que  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$ , il faut partir de la définition de  $\Delta_\sigma$  (le diamètre de la subdivision  $\sigma$ ) que nous rappelons :

$$\Delta_\sigma = \max_{0 \leq i \leq N-1} h_i, \text{ où } h_i = a_{i+1} - a_i \text{ est la longueur du sous-intervalle } [a_i, a_{i+1}].$$

Ainsi,  $\Delta_\sigma$  est la longueur du plus grand des sous-intervalles  $[a_i, a_{i+1}]$  découpé par la subdivision  $\sigma$  dans l'intervalle  $[a, b]$ . Par conséquent, on a :  $\Delta_\sigma \rightarrow 0 \iff$  toutes les longueurs  $h_i \rightarrow 0$ ,  $\forall i = 0(1)N-1$ . Autrement dit : en pratique,  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$  signifie que **tous** les sous-intervalles  $[a_i, a_{i+1}]$  deviennent (*simultanément*) de plus en plus petits.

• **Préliminaire 2 : Rappel de la signification pratique de la convergence uniforme.**

Ici aussi, on part de la Définition-Propriété D.d6, et on adapte ce qui est déjà connu en la matière pour la convergence uniforme dans le cas des suites de fonctions numériques. En effet, cette définition dit que :  $\tilde{f} \xrightarrow{\text{C.U.}} f$  sur  $[a, b]$  quand  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$  signifie que  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  telle que dès que le diamètre  $\Delta_\sigma \leq \delta_\varepsilon$ , on est sûr que  $\forall x \in [a, b]$ ,  $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon$ , i.e. la fonction  $\tilde{f}$  donne une approximation de la valeur de  $f$  avec une incertitude absolue  $\leq \varepsilon$ , et ce **simultanément** en tous les réels  $x \in [a, b]$ .

Ce qui est important en pratique avec ce genre de résultat (*a priori* théorique) est que ce qui vient d'être énoncé ci-dessus reste vrai aussi petit qu'on puisse fixer un  $\varepsilon > 0$  (pour illustration, prendre  $\varepsilon = 10^{-10}$ ). Ainsi,  $\ll \tilde{f} \xrightarrow{\text{C.U.}} f$  sur  $[a, b]$  quand  $\Delta_\sigma \rightarrow 0 \gg$  signifie, en pratique, que plus  $\Delta_\sigma$  est petit, plus  $\tilde{f}$  donnera une bonne approximation de la valeur de  $f$  **simultanément** en tous les  $x \in [a, b]$ .

Ceci a l'**interprétation graphique** suivante : plus  $\Delta_\sigma$  est petit, plus  $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ , la courbe de la fonction  $\tilde{f}$  sur l'intervalle  $[a, b]$  tend à aller se superposer sur  $\mathcal{C}_f$ , la courbe de  $f$ . Et, de fait, la résolution de l'œil humain étant limitée, en dessous d'une certaine valeur de  $\Delta_\sigma$ , nous aurons l'impression (fausse) que ces 2 courbes sont parfaitement identiques «à vue d'œil», car nos yeux ne seront plus en mesure de pouvoir les distinguer. Sur le plan graphique, on aura alors l'illusion d'une approximation parfaite de  $f$  par  $\tilde{f}$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

• **Application : Qualité de l'approximation affine par morceaux sur  $[a, b]$ .**

De ce qui précède, on déduit que  $\tilde{f} \xrightarrow{\text{C.U.}} f$  sur  $[a, b]$  quand  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$  signifie, en pratique, que :

1. plus les sous-intervalles  $[a_i, a_{i+1}]$  sont tous petits, plus la fonction d'approximation affine par morceaux  $\tilde{f}$  va donner une bonne approximation de la vraie fonction  $f$  simultanément en tous les réels  $x \in [a, b]$ , l'erreur globale d'approximation sur  $[a, b]$  s'approchant de 0.
2. **Interprétation graphique** : dans le même temps, la courbe  $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$  tend à vouloir aller se superposer sur la vraie courbe  $\mathcal{C}_f$  sur  $[a, b]$ .

\*\*\* **Commentaire : Vitesse de convergence de l'approximation affine par morceaux.**

D'où sort donc la propriété **P4** énoncée plus haut pour  $\tilde{f}$ , la fonction d'approximation affine par morceaux de  $f$  sur  $[a, b]$ ? Elle est liée à la notion de **vitesse de convergence** d'une fonction d'approximation globale par morceaux sur  $[a, b]$ .

En effet, ci-dessus, il a été dit que  $\tilde{f}$  se rapproche de  $f$  simultanément en tous les réels  $x \in [a, b]$  quand le diamètre  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$ . Mais à quelle vitesse s'effectue cette convergence? La réponse est apportée par le (IV.1) du Théorème D.IV-1.1. En effet, sous l'hypothèse de ce Théorème, on a :

$$(IV.1) \implies \mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f) = O(\Delta_\sigma^2). \quad (IV.4)$$

Rappelons alors que, d'après nos connaissances d'*Analyse Réelle*, on sait que :

$$\Delta_\sigma \rightarrow 0 \implies \Delta_\sigma^2 \rightarrow 0 \implies O(\Delta_\sigma^2) \rightarrow 0. \quad (IV.5)$$

Ainsi, (IV.4) a comme conséquence que  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f)$  (l'erreur globale d'approximation de  $f$  par  $\tilde{f}$ ) tend vers 0 quand le diamètre  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$ , et ceci à la vitesse d'un  $O(\Delta_\sigma^2)$ , i.e. au moins aussi vite que  $\Delta_\sigma^2$ . Or, quand  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$ , on a, comme rappelé par (IV.5) :  $\Delta_\sigma^2 \rightarrow 0$  aussi, mais **2 fois plus vite que**  $\Delta_\sigma$  (ce nombre 2 étant l'exposant de  $\Delta_\sigma$  dans  $\Delta_\sigma^2$ ). Donc l'erreur  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f) \rightarrow 0$  quand  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$ , mais au moins 2 fois plus vite que  $\Delta_\sigma$  lui-même. Ceci est une vitesse de convergence appréciable pour  $\tilde{f}$  vers  $f$ .

Les méthodes que nous présenteront plus loin ont une vitesse de convergence typiquement plus rapide (avec  $\mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}|f) \rightarrow 0$  quand  $\Delta_\sigma \rightarrow 0$ , mais au moins 3 ou 4 fois plus vite que  $\Delta_\sigma$ ), et donc fournissent, généralement, une bien meilleure qualité d'approximation. Raison pour laquelle nous avons parlé d'une «assez bonne qualité d'approximation», en général, de  $f$  par  $\tilde{f}$  dans l'approximation affine par morceaux.

e) **Calcul concret de la fonction d'approximation affine par morceaux en un point.**

On considère  $\tilde{f}$ , la fonction d'approximation affine par morceaux de  $f$  sur  $[a, b]$  utilisant les valeurs connues de  $f$  sur la subdivision de points de  $[a, b]$  :  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ .

\*\*\* **Problème concret : Comment calculer effectivement la fonction  $\tilde{f}$  en un point  $x \in [a, b]$  ?**

Soit  $x \in [a, b]$ . Pour calculer la valeur réelle  $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$  (à fournir comme approximation de  $y = f(x)$ ), on applique, dans ce cas particulier, le plan d'action, décrit en **III-4°) d)**, pour calculer la valeur en un point d'une fonction polynômiale par morceaux. Compte tenu de la définition de  $\tilde{f}$  ici et des données disponibles, on procède donc comme suit :

1. Localiser  $x$  dans  $[a, b]$  entre les points de raccord de la fonction polynômiale par morceaux  $\tilde{f}$ ,  
i.e. trouver l'indice  $i = 0(1)N - 1$  tel que  $x \in [a_i, a_{i+1}]$ .
2. Ayant obtenu la valeur de l'indice  $i$ , on sait alors que, par définition de la fonction  $\tilde{f}$ , on a :

$$x \in [a_i, a_{i+1}] \implies \tilde{y} = \tilde{f}(x) = (\text{pL}_{a_i, a_{i+1}} f)(x).$$

D'où, par la **forme de Newton** du *p.i.L.*  $\text{pL}_{a_i, a_{i+1}} f : \tilde{y} = f(a_i) + f[a_i, a_{i+1}](x - a_i)$ ,

avec  $f[a_i, a_{i+1}] = \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$ .  $\implies$  On peut calculer  $\tilde{y}$  par :  $\tilde{y} = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}(x - a_i)$ .

▷ **Exo-T.P. D::IV.4** (*Calcul de l'approx. affine par morceaux en un point*)

Ecrire une fonction algorithmique (dans MATLAB, par exemple) qui prend, en paramètres entrants, les 3 réels  $x$ ,  $a$  et  $b$ ; le vecteur des abscisses  $a_i$ ,  $i = 0(1)N$ ; le vecteur des images  $y_i$ ,  $i = 0(1)N$ ; et renvoie, en résultat, le réel  $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$  calculé par l'approximation affine par morceaux sur  $[a, b]$ .

## 2°) Approximation de $f$ sur $[a, b]$ par interpolation parabolique par morceaux.

Pour éliminer l'aspect peu esthétique de la courbe de la fonction d'approximation  $\tilde{f}$  de  $f$  dans l'interpolation affine par morceaux, aspect dû aux segments de droite, on peut plutôt définir  $\tilde{f}$  en procédant par morceaux de la manière suivante :

1. On prend, comme *points de raccord* de  $\tilde{f}$ , les nœuds intérieurs de  $\sigma$  de rang pair :  $c_i = a_{2i}$ ,  
 $\implies [c_0, c_1] = [a_0, a_2]$ ,  $[c_1, c_2] = [a_2, a_4]$ ,  $[c_2, c_3] = [a_4, a_6]$ ,  $\dots$ ,  $[c_i, c_{i+1}] = [a_{2i}, a_{2i+2}]$ ,  $\dots$

2. Sur chaque  $[c_i, c_{i+1}] = [a_{2i}, a_{2i+2}]$ , on définit  $\tilde{f}$  par :  $\forall x \in [a_{2i}, a_{2i+2}], \tilde{f}(x) = (\text{pL}_{a_{2i}, a_{2i+1}, a_{2i+2}} f)(x)$ .

**L'étude détaillée de cette fonction d'approximation de  $f$  sur  $[a, b]$  est l'objet de l'Exercice C4 de la fiche de TD.** En particulier :

1. Il faudra y justifier pourquoi l'adjectif «parabolique» dans son appellation.
2. On y démontrera que cette fonction  $\tilde{f}$  est continue sur  $[a, b]$ .
3. Il faudra analyser le problème évident posé par le cas où la taille  $N$  de la subdivision  $\sigma$  est un **entier impair**, et suggérer une solution concrète crédible pour y remédier.

Cependant, pas plus que l'approximation affine par morceaux, cette  $\tilde{f}$  n'est dérivable sur  $[a, b]$ . En effet, elle sera, en général, non dérivable aux points de raccord  $c_i = a_{2i} \in ]a, b[$ .

▷ **Exo-T.P. D::IV.5** (*Calcul de l'approx. parabolique par morceaux en un point*)

Ecrire une fonction algorithmique (dans MATLAB, par exemple) qui prend, en paramètres entrants, les 3 réels  $x$ ,  $a$  et  $b$ ; le vecteur des abscisses  $a_i$ ,  $i = 0(1)N$ ; le vecteur des images  $y_i$ ,  $i = 0(1)N$ ; et renvoie, en résultat, le réel  $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$  calculé par l'approximation parabolique par morceaux sur  $[a, b]$ .

## 3°) Approximation de $f$ sur $[a, b]$ par interpolation spline cubique : Motivation.

On a pu constater que les 2 fonctions d'approximation globale construites en 1°) et 2°) ci-dessus partagent en commun le fait de ne pas être dérivables sur  $[a, b]$ . Cela produit un effet inesthétique sur les courbes de ces 2 fonctions. De plus, cette absence de dérivabilité de  $\tilde{f}$  est peu souhaitable si on a l'information, d'avance, que la vraie fonction  $f$  qu'on cherche à approcher sur  $[a, b]$  est, elle-même, dérivable sur cet intervalle.

Cependant, pouvait-on espérer mieux? En effet, on peut se demander : ce défaut des 2 fonctions  $\tilde{f}$  à la sortie n'était-il pas prévisible, vues les données disponibles sur  $f$  à partir desquelles ces 2 fonctions d'approximation globale ont été construites, notamment l'absence d'informations sur les valeurs de la dérivée  $f'$  de  $f$  aux points  $a_0, \dots, a_N$  en lesquelles les valeurs de  $f$  sont connues? Ces suspicions amènent alors à s'intéresser, plus généralement, à la problématique suivante :

Avec les mêmes informations disponibles sur la fonction  $f$  que celles de cette **Partie IV**, à savoir la donnée de ses valeurs  $y_0, \dots, y_N \in \mathbb{R}$  aux  $N+1$  nœuds  $a_0, \dots, a_N$  d'une subdivision  $\sigma$  connue de  $[a, b]$ , est-il possible de construire une fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  de  $f$  sur  $[a, b]$  vérifiant :

1.  $\tilde{f}$  interpole  $f$  aux points  $a_0, \dots, a_N$  ;
2.  $\tilde{f}$  est dérivable sur  $[a, b]$  ;
3.  $\tilde{f}$  donne une bonne approximation de  $f$  sur tout  $[a, b]$  ;
4. et la dérivée  $\tilde{f}'$  donne aussi une bonne approximation de la dérivée  $f'$  sur tout  $[a, b]$  ?

Heureusement, et contrairement à l'intuition suggérée par les suspicions précédentes, la réponse à cette question est un **OUI retentissant** ! Mieux : la fonction  $\tilde{f}$  obtenue est 2 fois dérivable, et même de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$ . En fait, cette fonction d'approximation globale de  $f$  sur  $[a, b]$  n'a pratiquement que des propriétés positives, i.e. rien que des  $\oplus$ . A cause de son importance pour les applications concrètes, nous décalons sa construction dans la **Partie V** à suivre. En effet, bien qu'il s'agisse d'une méthode d'approximation globale de  $f$  sur  $[a, b]$  qui procède aussi par interpolation polynômiale par morceaux, son principe de construction est totalement différent des 2 précédentes méthodes. En effet, pour obtenir les bonnes propriétés annoncées pour  $\tilde{f}$ , on ne s'appuie plus uniquement sur les polynômes d'interpolation de Lagrange.

## V – Approximation d'une fonction par interpolation spline cubique et « belles » courbes d'approximation.

### 1°) Fonction d'interpolation spline cubique : Introduction.

#### a) Objectif et définition.

Ci-après, nous allons construire une fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  de  $f$  sur  $[a, b]$  vérifiant :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{(C.1)} \text{ Il existe une famille de } N \text{ polynômes } P_0, \dots, P_{N-1} \in \mathbb{R}_3[x] \text{ tels que :} \\ \quad \forall i = 0(1)N-1, \tilde{f} \text{ est définie sur } [a_i, a_{i+1}] \text{ par : } \forall x \in [a_i, a_{i+1}], \tilde{f}(x) = P_i(x) ; \\ \text{(C.2)} \tilde{f} \text{ interpole } f \text{ aux points } a_0, \dots, a_N ; \\ \text{(C.3)} \tilde{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [a, b] ; \\ \text{(C.4)} \tilde{f}''(a) = 0 \text{ et } \tilde{f}''(b) = 0. \end{array} \right.$$

• **N.B.** Pour construire  $\tilde{f}$ , les données restent les mêmes que dans la **Partie IV**.

#### Définition D.d7 (Fonction d'interpolation spline cubique)

Une fonction  $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les 3 conditions (C.1), (C.2) et (C.3) est appelée **fonction d'interpolation spline cubique de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$** , s'appuyant sur la subdivision de points  $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b)$ .

#### ••• Remarque V.1 (A propos de la condition (C.4) imposée à $\tilde{f}$ )

Imposer d'avance à  $\tilde{f}_S$  de satisfaire aussi la condition (C.4) peut paraître, à première vue, surprenant pour une fonction ayant pour ambition d'être une fonction d'approximation globale de  $f$  sur  $[a, b]$ .

L'utilité de la condition (C.4) sera justifiée dans le cours de la construction de la fonction  $\tilde{f}$ .

#### Définition D.d8 (Fonction d'interpolation spline cubique naturelle $\tilde{f}_S$ )

Une fonction  $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les 4 conditions (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4) est appelée **fonction d'interpolation spline cubique naturelle de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$** , s'appuyant sur la subdivision de points  $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b)$ . • **NOTATION** :  $\tilde{f} = \tilde{f}_S$ .

#### b) Résultats préliminaires.

La construction de la fonction d'interpolation spline cubique que nous présentons ci-après sera déduite des 2 résultats préliminaires suivants sur les polynômes, et dont la démonstration a été décomposée pour

faire l'objet du Problème du Test n°1 2015-16 (dont les *Éléments sur la correction* sont disponibles).

**Lemme D-ℓ1 (Préliminaire 1 pour la fonction d'interpolation spline cubique)**

Si  $a$  et  $b$  sont 2 réels distincts, alors, pour tout quadruplet de réels  $(y_a, y_b, d_a, d_b)$ , on a :

1.  $\exists ! P \in \mathbb{R}_3[x]$  vérifiant :  $P(a) = y_a$ ,  $P(b) = y_b$ ,  $P''(a) = d_a$  et  $P''(b) = d_b$ .
2. Une expression de  $P$  sur  $\mathbb{R}$  est :  $P(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - a) + c_2 \cdot \frac{(x - a)^2}{2} + c_3 \cdot \frac{(x - a)^3}{6}$ ,  
avec, en posant  $h = b - a$  :

$$c_0 = y_a, \quad c_1 = \frac{y_b - y_a}{h} - (2d_a + d_b) \cdot \frac{h}{6}, \quad c_2 = d_a, \quad c_3 = \frac{d_b - d_a}{h}.$$

3. De plus, le polynôme  $P$  vérifie :  $P'(a) = c_1$  et  $P'(b) = \frac{y_b - y_a}{h} + (d_a + 2d_b) \cdot \frac{h}{6}$ .

Comme on pourra le constater plus loin, toute la construction de la fonction d'interpolation spline cubique sera déduite du résultat fondamental suivant qui est une conséquence immédiate du Lemme précédent.

**Théorème D.V-1.1 (Préliminaire 2 pour la fonction d'interpolation spline cubique)**

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $a < b$ ), et  $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b)$ , où  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Alors, pour toute famille de  $N + 1$  réels  $d_0, \dots, d_N$ , on a :

1. Il existe une unique famille de  $N$  polynômes  $P_0, \dots, P_{N-1} \in \mathbb{R}_3[x]$  vérifiant :

$$\forall i = 0(1)N - 1, \quad \begin{cases} \text{1.1. } P_i \text{ interpole } f \text{ en } a_i \text{ et } a_{i+1}; \\ \text{1.2. } P_i''(a_i) = d_i \text{ et } P_i''(a_{i+1}) = d_{i+1}. \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

2.  $\forall i = 0(1)N - 1$ , une expression du polynôme  $P_i$  sur  $\mathbb{R}$  est :

$$P_i(x) = c_{0,i} + c_{1,i} \cdot (x - a_i) + c_{2,i} \cdot \frac{(x - a_i)^2}{2} + c_{3,i} \cdot \frac{(x - a_i)^3}{6}, \quad (\text{V.2})$$

avec, en posant  $y_i = f(a_i)$  et  $h_i = a_{i+1} - a_i$  :

$$c_{0,i} = y_i, \quad c_{1,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - (2d_i + d_{i+1}) \cdot \frac{h_i}{6}, \quad c_{2,i} = d_i, \quad c_{3,i} = \frac{d_{i+1} - d_i}{h_i}. \quad (\text{V.3})$$

3. De plus, chaque  $P_i$  vérifie :

$$P_i'(a_i) = c_{1,i} \text{ et } P_i'(a_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + (d_i + 2d_{i+1}) \cdot \frac{h_i}{6}. \quad (\text{V.4})$$

**2°) Fonction d'interpolation spline cubique  $\tilde{f} = \tilde{f}_S$  : Construction.**

**a) Construction de  $\tilde{f} = \tilde{f}_S$  : Principe d'action.**

Comme annoncé ci-dessus, on veut construire ici une fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  de  $f$  sur  $[a, b]$  vérifiant les 4 conditions (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4). Mais par où commencer ?

Eh bien, on va s'appuyer, essentiellement, sur le Théorème D.V-1.1 énoncé ci-dessus. Pour cela, pour  $N + 1$  réels  $d_0, \dots, d_N$  fixés (initialement arbitraires, mais à choisir de manière appropriée dans la suite), considérons les  $N$  polynômes  $P_0, \dots, P_{N-1} \in \mathbb{R}_3[x]$  dont ce Théorème nous garantit l'existence et l'unicité. Définissons alors une fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  de  $f$  sur  $[a, b]$ , par morceaux comme suit :

$$\forall i = 0(1)N - 1, \quad \tilde{f} \text{ est définie sur } [a_i, a_{i+1}] \text{ par : } \forall x \in [a_i, a_{i+1}], \quad \tilde{f}(x) = P_i(x). \quad (\text{V.5})$$

Le principe selon lequel nous allons agir dans la construction de  $\tilde{f}_S$  va consister à :

1. trouver les conditions à satisfaire par les  $N + 1$  réels  $d_0, \dots, d_N$  pour que la fonction  $\tilde{f}$  définie par (V.5) satisfasse effectivement (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4) comme visé ;
2. voir, ensuite, comment s'appuyer sur ces conditions pour calculer les valeurs appropriées de  $d_0, \dots, d_N$ .

C'est en utilisant les valeurs ainsi obtenues des réels  $d_0, \dots, d_N$  dans les expressions des polynômes  $P_0, \dots, P_{N-1}$  du Théorème D.V-1.1 qu'on définira notre fonction d'interpolation spline cubique  $\tilde{f}_S$  sur  $[a, b]$ , en posant :

$$\tilde{f}_S = \tilde{f} \text{ donnée sur } [a, b] \text{ par (V.5).}$$

**b) Construction de  $\tilde{f} = \tilde{f}_S$  : Analyse de base.**

Examinons dans quelle mesure la fonction  $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par (V.5), peut vérifier ou pas les 3 conditions (C.1), (C.2) et (C.3) :

• **Cas de la condition (C.1).**

La fonction  $\tilde{f}$ , définie par (V.5), vérifie automatiquement (C.1), car  $P_0, \dots, P_{N-1}$  sont les  $N$  polynômes de  $\mathbb{R}_3[x]$  dont l'existence et l'unicité sont garanties par le Théorème D.V-1.1, une fois que les  $N+1$  réels  $d_0, \dots, d_N$  sont fixés comme cela a été fait ici.

• **Cas de la condition (C.2).**

La fonction  $\tilde{f}$  vérifie (C.2), par combinaison de (V.5) avec le 1.1 de (V.1) dans le Théorème D.V-1.1.

• **Cas de la condition (C.3).**

Etant définie par (V.5), la fonction  $\tilde{f}$  est donc **polynômiale par morceaux** sur  $[a, b]$ , s'appuyant sur la subdivision  $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b)$ . Pour voir dans quelle mesure  $\tilde{f}$  peut vérifier (C.3), on va utiliser le Corollaire D.III-4.3, avec la valeur  $r = 2$ . D'après ce dernier, on a l'équivalence logique :

$$(C.3) \iff \begin{cases} (C.3.0) \ \tilde{f} \text{ est continue sur } [a, b]; \\ (C.3.1) \ \forall i = 1(1)N-1, \ P'_{i-1}(a_i) = P'_i(a_i); \\ (C.3.2) \ \forall i = 1(1)N-1, \ P''_{i-1}(a_i) = P''_i(a_i). \end{cases}$$

Ainsi, la fonction  $\tilde{f}$  vérifie (C.3) *si, et seulement si*, elle vérifie (C.3.0), (C.3.1) et (C.3.2). Or,

- grâce au Théorème D.III-4.1, on a : (V.5) et  $P_0, \dots, P_{N-1}$  polynômes  $\implies \tilde{f}$  continue sur  $[a, b]$ ;
- par le Théorème D.V-1.1, on sait que :  $\forall i = 0(1)N-1, \ P''_i(a_i) = d_i$  et  $P''_i(a_{i+1}) = d_{i+1}$ ;  
 $\implies \forall i = 1(1)N-1, \ P''_{i-1}(a_i) = P''_i(a_i)$

Par conséquent, telle que définie par (V.5), la fonction  $\tilde{f}$  vérifie déjà (C.3.0) et (C.3.2).

En définitive donc, la seule propriété requise qui n'est pas automatiquement vérifiée par  $\tilde{f}$  pour satisfaire (C.3) est (C.3.1). Le Lemme suivant synthétise alors l'ensemble des observations précédentes relativement à la possibilité pour  $\tilde{f}$  de vérifier (C.1), (C.2) et (C.3) :

**Lemme D-ℓ2 (Fonction d'interpolation spline cubique et condition (C.3.1))**

Pour la fonction  $\tilde{f}$ , définie sur  $[a, b]$  par (V.5), où  $P_0, \dots, P_{N-1}$  sont les  $N$  polynômes du Théorème D.V-1.1, les 2 assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\tilde{f}$  vérifie (C.1), (C.2) et (C.3).
2. Les polynômes  $P_0, \dots, P_{N-1}$  vérifient : (C.3.1)  $\forall i = 1(1)N-1, \ P'_{i-1}(a_i) = P'_i(a_i)$ .

**c) Construction de  $\tilde{f} = \tilde{f}_S$  : Traduction de la condition (C.3.1) en termes des réels  $d_0, \dots, d_N$ .**

L'analyse de la sous-section précédente a montré que la fonction  $\tilde{f}$ , donnée sur  $[a, b]$  par p(V.5), va satisfaire (C.1), (C.2) et (C.3) *si, et seulement si*, les polynômes  $P_0, \dots, P_{N-1}$  vérifient (C.3.1). Nous allons alors essayer de traduire ici la condition (C.3.1) en termes plus concrets. Pour cela, rappelons que, par le Théorème D.V-1.1, les polynômes  $P_0, \dots, P_{N-1}$  sont définis à partir de la fixation initiale de  $N+1$  réels  $d_0, \dots, d_N$ , jusqu'ici arbitraires. On doit donc pouvoir traduire (C.3.1) en termes des réels  $d_0, \dots, d_N$ .

Ainsi, soit un indice  $i \in [1(1)N-1]$ . Par (V.3) et (V.4) du Théorème D.V-1.1, on a :

$$P'_i(a_i) = c_{1,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - (2d_i + d_{i+1}) \cdot \frac{h_i}{6} \quad \text{et} \quad P'_i(a_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + (d_i + 2d_{i+1}) \cdot \frac{h_i}{6}. \quad (V.6)$$

En faisant une translation d'indice de  $i$  à  $i-1$  dans l'expression de  $P'_i(a_{i+1})$ , il vient :

$$P'_{i-1}(a_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6} d_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} d_i. \quad (V.7)$$

Ainsi, (V.6) et (V.7) entraînent que :

$$\begin{aligned} P'_{i-1}(a_i) = P'_i(a_i) &\iff \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6} d_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} d_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3} d_i - \frac{h_i}{6} d_{i+1}, \\ &\iff h_{i-1} \cdot d_{i-1} + 2\lambda_i \cdot d_i + h_i \cdot d_{i+1} = 6 \cdot (\beta_i - \beta_{i-1}), \end{aligned}$$

où on a posé  $\lambda_i = h_{i-1} + h_i$  et  $\beta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$ . On arrive au résultat remarquable suivant :



**Proposition D.V-2.2 (Traduction de (C.3.1) en termes des réels  $d_0, \dots, d_N$  : système  $(S_1)$ )**

1. La condition (C.3.1) est équivalente à :

$$\forall i = 1(1)N-1, \quad h_{i-1} \cdot d_{i-1} + 2\lambda_i \cdot d_i + h_i \cdot d_{i+1} = 6 \cdot (\beta_i - \beta_{i-1}), \quad (\text{V.8})$$

$$\text{avec : } \forall i = 1(1)N-1, \quad \lambda_i = h_{i-1} + h_i, \quad \text{et} \quad \forall i = 0(1)N-1, \quad \beta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}.$$

2. En faisant successivement  $i = 1, i = 2, i = 3, \dots, i = N-2$  et  $i = N-1$  dans (V.8), on voit ainsi que (C.3.1) est équivalente à un système  $(S_1)$  de  $N-1$  équations linéaires à  $N+1$  inconnues que sont :  $d_0, \dots, d_N$ .

3. On constate que dans l'équation linéaire n<sup>o</sup> $i$  du système  $(S_1)$  :

- les **coefficients non nuls des inconnues** sont :  $h_{i-1}$  ou  $2\lambda_i$  ou  $h_i$ , facilement calculables à partir des données  $a_0, \dots, a_N$ , car  $h_{i-1} = a_i - a_{i-1}$ ,  $\lambda_i = a_{i+1} - a_{i-1}$  et  $h_i = a_{i+1} - a_i$  ;
- le **2<sup>nd</sup> membre ou (membre droit)** est :  $6 \cdot (\beta_i - \beta_{i-1})$ , facilement calculable à partir des données  $a_0, \dots, a_N$  et  $y_0, \dots, y_N$ .

**d) Construction de  $\tilde{f} = \tilde{f}_S$  : Entrée en jeu de la condition (C.4).**

Il résulte, de la conjonction des Lemme D-ℓ2 et Proposition D.V-2.2, que la fonction  $\tilde{f}$ , définie sur  $[a, b]$  par (V.5), vérifie (C.1), (C.2) et (C.3) si, et seulement si on choisit, dès le départ, les  $N+1$  réels  $d_0, \dots, d_N$  dans le Théorème D.V-1.1 de telle sorte qu'ils satisfassent le système linéaire  $(S_1)$  de la Proposition D.V-2.2. On se dit alors que, pour construire la fonction d'approximation globale  $\tilde{f}$  de  $f$  sur  $[a, b]$ , le plus simple est de commencer par résoudre  $(S_1)$  pour trouver les bonnes valeurs requises de  $d_0, \dots, d_N$ . Une fois qu'on aura ces valeurs, on pourra les injecter dans les formules (V.2) -(V.3) donnant les expressions des polynômes  $P_0, \dots, P_{N-1}$  permettant de définir  $\tilde{f}$  par morceaux sur  $[a, b]$  grâce à (V.5). Seulement, pour espérer pouvoir résoudre  $(S_1)$ , des précisions techniques indispensables sont à faire :

1. Le système linéaire  $(S_1)$  admet-il effectivement un *vecteur-solution*  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}$  dans  $\mathbb{R}^{N+1}$  ?
2. Si oui, ce vecteur-solution de  $(S_1)$  dans  $\mathbb{R}^{N+1}$  est-il unique ?

Par rapport à ces 2 dernières préoccupations, constatons alors qu'une particularité frappante du système linéaire  $(S_1)$  est qu'il comporte plus d'inconnues (soit  $N+1$ ) que d'équations (soit  $N-1$ ). Un tel système linéaire est dit **sous-déterminé**. Or, nos connaissances d'*Algèbre Linéaire* nous renseigne qu'il n'y a que 2 possibilités pour un tel système linéaire : soit il n'a pas de vecteur-solution, soit il en a une infinité. Ainsi, un système linéaire sous-déterminé n'admet jamais un vecteur-solution unique. C'est donc le cas pour  $(S_1)$ , ce qui est très embêtant pour nous ici, car cela signifie qu'il n'existe pas de valeurs uniques des inconnues  $d_0, \dots, d_N$  qui soient solutions de  $(S_1)$ . Compte tenu de l'analyse des sous-sections précédentes, il s'ensuit qu'il n'y a pas de fonction unique  $\tilde{f}$  sur  $[a, b]$  vérifiant les conditions (C.1), (C.2) et (C.3).

C'est pour contourner cette dernière difficulté qu'on ajoute la condition (C.4) aux 3 premières imposées à  $\tilde{f}$ . En effet, avec (C.4), il vient, dans le Théorème D.V-1.1 :

$$\tilde{f}''(a) = 0 \iff P_0''(a) = 0 \iff d_0 = 0, \quad \text{et} \quad \tilde{f}''(b) = 0 \iff P_0''(b) = 0 \iff d_N = 0.$$

Ceci élimine les 2 inconnues  $d_0$  et  $d_N$  du système linéaire  $(S_1)$ , ce qui le transforme en le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lll} 2\lambda_1 \cdot d_1 + h_1 \cdot d_2 & = & 6 \cdot (\beta_1 - \beta_0) \\ h_1 \cdot d_1 + 2\lambda_2 \cdot d_2 + h_2 \cdot d_3 & = & 6 \cdot (\beta_2 - \beta_1) \\ h_2 \cdot d_2 + 2\lambda_3 \cdot d_3 + h_3 \cdot d_4 & = & 6 \cdot (\beta_3 - \beta_2) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N-3} \cdot d_{N-3} + 2\lambda_{N-2} \cdot d_{N-2} + h_{N-2} \cdot d_{N-1} & = & 6 \cdot (\beta_{N-2} - \beta_{N-3}) \\ h_{N-2} \cdot d_{N-2} + 2\lambda_{N-1} \cdot d_{N-1} & = & 6 \cdot (\beta_{N-1} - \beta_{N-2}) \end{array} \right.$$

lequel consiste en  $N-1$  équations linéaires à  $N-1$  inconnues (que sont  $d_1, \dots, d_{N-1}$ ). D'où :

**Théorème D.V-2.3 (Système linéaire (S) traduisant (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4))**

Pour la fonction  $\tilde{f}$ , définie sur  $[a, b]$  par (V.5), où  $P_0, \dots, P_{N-1}$  sont les  $N$  polynômes du Théorème D.V-1.1, les 2 assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\tilde{f}$  vérifie (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4).
2. Les  $N + 1$  réels  $d_0, \dots, d_N$  du Théorème D.V-1.1 vérifient :

2.1.  $d_0 = d_N = 0$ ;

2.2. les  $N - 1$  réels  $d_1, \dots, d_{N-1}$  satisfont le système linéaire (S), avec :

$$\forall i = 1(1)N - 1, \lambda_i = h_{i-1} + h_i, \text{ et } \forall i = 0(1)N - 1, \beta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}.$$

**e) Forme matricielle du système linéaire (S) et conséquences.**

D'après le Théorème qui précède, la détermination d'une fonction  $\tilde{f}$  vérifiant (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4) se ramène à devoir résoudre le système linéaire (S) identifié ci-dessus, ceci pour trouver les valeurs appropriées des  $N - 1$  réels  $d_1, \dots, d_{N-1}$  requis (sachant que  $d_0 = d_N = 0$ ) pour pouvoir définir  $\tilde{f}$  par morceaux sur  $[a, b]$  à travers (V.5). Or, les 2 mêmes préoccupations énoncées précédemment pour  $(S_1)$  se posent pour (S), i.e. existence et unicité d'un vecteur-solution dans  $\mathbb{R}^{N-1}$ ? Mais l'intérêt du passage de  $(S_1)$  à (S) réside justement dans le fait qu'il se trouve que pour (S), la réponse à ces 2 préoccupations est positive. Cependant, cela ne découle pas seulement du fait que le système linéaire (S) a autant d'équations que d'inconnues. Pour le voir, il faut plutôt d'abord mettre (S) sous forme matricielle :

$$(S) \iff \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{v}, \quad (\text{V.9})$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{N-1}(\mathbb{R})$  et  $\tilde{\mathbf{d}}, \mathbf{v}$  sont les 2 vecteurs de  $\mathbb{R}^{N-1}$  donnés par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & h_1 & & & \\ h_1 & 2\lambda_2 & h_2 & & \\ & h_2 & 2\lambda_3 & h_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & h_{N-3} & 2\lambda_{N-2} & h_{N-2} \\ & & & & h_{N-2} & 2\lambda_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = 6 \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 - \beta_0 \\ \beta_2 - \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-2} - \beta_{N-3} \\ \beta_{N-1} - \beta_{N-2} \end{pmatrix}.$$

Une fois la matrice  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{N-1}(\mathbb{R})$  du système linéaire (S) identifiée, un résultat classique (et fondamental) d'Algèbre Linéaire nous renseigne que (S) admet un unique vecteur-solution  $\tilde{\mathbf{d}}$  dans  $\mathbb{R}^{N-1}$  si, et seulement si, la matrice carrée  $\mathbf{A}$  est inversible. L'intérêt de la présente situation est que c'est, effectivement, le cas :

**Théorème D.V-2.4 (Inversibilité de la matrice A du système linéaire (S))**

1.  $\mathbf{A}$ , la matrice du système linéaire (S), est inversible dans  $\mathcal{M}_{N-1}(\mathbb{R})$ .
2. De ce fait, (S) admet un unique vecteur-solution  $\tilde{\mathbf{d}}$  dans  $\mathbb{R}^{N-1}$ .

L'inversibilité de la matrice carrée  $\mathbf{A}$  peut se déduire de ce qu'elle possède la propriété remarquable suivante :

**Définition-Propriété D.d9 (Matrice carrée à diagonale strictement dominante)**

Soit  $\mathbf{A}$ , une matrice carrée réelle d'ordre  $n$ , de coefficients  $a_{i,j}$ ,  $i, j = 1(1)n$ .

1.  $\mathbf{A}$  est dite à diagonale strictement dominante en abrégé : DSD) lorsqu'elle vérifie :

$$\forall i \in [1(1)n], \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,$$

i.e. sur chaque ligne de la matrice  $\mathbf{A}$ , la valeur absolue du coefficient diagonal est strictement plus grande que la somme des valeurs absolues des autres coefficients sur la même ligne.

2. Une matrice réelle carrée à diagonale strictement dominante est inversible.

▷ **Exercice D::V.1** (*Inversibilité de la matrice du système (S)*)

Montrer que, dans le système linéaire (S), la matrice **A** est à diagonale strictement dominante.

Etant DSD, la matrice **A** du système (S) est inversible dans  $\mathcal{M}_{N-1}(\mathbb{R})$ . De ce fait, (S) est un **système de Cramer** dans  $\mathbb{R}^{N-1}$ , et admet, donc, un unique vecteur solution  $\tilde{\mathbf{d}}$  dans  $\mathbb{R}^{N-1}$ . Les  $N-1$  réels  $d_1, \dots, d_{N-1}$  étant les coordonnées du vecteur  $\tilde{\mathbf{d}}$ , ils existent donc tous et sont uniques. On obtient alors leurs valeurs respectives en résolvant le système linéaire (S) par une méthode numérique appropriée et adaptée, pour être efficace, à la **structure très particulière de sa matrice A**. Justement, traiter l'Exercice :

▷ **Exercice D::V.2** (*Propriétés de la matrice du système (S)*)

En dehors d'être à diagonale strictement dominante, quelle(s) autre(s) propriété(s) remarquable(s) possède la matrice **A** du système linéaire (S) ?

f) Construction de  $\tilde{f} = \tilde{f}_S$  : Conclusion.

De l'analyse effectuée des sous-sections a) à e) ci-dessus de la présente section 2°) de la **Partie V**, et compt tenu de la Définition D.d8 d'une fonction d'interpolation spline cubique naturelle, on tire le résultat remarquable suivant :

**Théorème D.V-2.5 (Fonction d'interpolation spline cubique naturelle : Exist. et unic.)**

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b)$ , une subdivision de  $[a, b]$ .

1. Il existe une unique fonction d'interpolation spline cubique naturelle  $\tilde{f}_S$  de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  et s'appuyant sur la subdivision de points  $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b)$ .
2. La fonction  $\tilde{f} = \tilde{f}_S$  est définie par morceaux sur  $[a, b]$  par (V.5), où  $P_0, \dots, P_{N-1}$  sont les  $N$  polynômes du Théorème D.V-1.1 dans lequel on a pris  $d_0 = d_N = 0$ , et comme valeurs des  $N-1$  réels  $d_1, \dots, d_{N-1}$ , les solutions uniques du système linéaire (S) du Théorème D.V-2.3.

Ce Théorème permet de définir une nouvelle méthode d'approximation globale d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  à base de ses valeurs connues aux points d'une subdivision donnée de cet intervalle :

**Définition D.d10 (Méthode d'approximation par interpolation spline cubique)**

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b)$ , une subdivision de  $[a, b]$ .

On appelle **méthode d'approximation par interpolation spline cubique de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  et s'appuyant sur la subdivision  $\sigma$** , la méthode qui consiste à prendre, comme fonction d'approximation globale de  $f$  sur  $[a, b]$ , la fonction d'interpolation spline cubique naturelle  $\tilde{f}_S$  de  $f$  sur  $[a, b]$  et s'appuyant sur  $\sigma$  (Cf. Théorème D.V-2.5).

La suite de cette **Partie V** va consister à examiner :

1. comment calculer effectivement la fonction d'interpolation spline cubique naturelle  $\tilde{f}_S$  (ce qui sera déduit directement de la manière dont elle a été construite ci-dessus) ;
2. les propriétés de cette méthode d'approximation globale d'une fonction sur un intervalle  $[a, b]$ .

3°) Calcul de la fonction d'interpolation spline cubique naturelle  $\tilde{f}_S$  : Mode opératoire.

## \*\*\* Rappel du problème et ses données.

On veut construire la fonction d'approximation globale  $\tilde{f}_S$  de  $f$  sur  $[a, b]$  vérifiant (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4), et ce à partir des données :

1. les abscisses  $a_0, \dots, a_N (\in \mathbb{R}) / a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$  ;
2. leurs images  $y_0, \dots, y_N (\in \mathbb{R})$  par  $f$ , i.e.  $\forall i = 0(1)N, y_i = f(a_i)$ .

\*\*\* Grandes lignes du calcul de la fonction  $\tilde{f}_S$  sur  $[a, b]$ .

Les étapes à suivre se déduisent de la construction de  $\tilde{f}_S$  effectuée dans la Section 2°) qui précède.

- **Etape 1 : Calcul des longueurs  $h_i$  des sous-intervalles  $[a_i, a_{i+1}]$ ,  $\forall i = 0(1)N-1$ .**

Un examen attentif de la construction de la fonction  $\tilde{f}_S$  dans la Section 2°) met rapidement en évidence que ces longueurs  $h_i = a_{i+1} - a_i$  interviennent à tous les niveaux. Or, elles ne font pas partie des données de notre problème. Par conséquent, il faut calculer, dès le début, les réels  $h_i$  (pour  $i = 0(1)N - 1$ ), à partir de ces données, pour stocker leurs valeurs pour toute utilisation future requise dans les étapes suivantes.

• **Etape 2 : Calcul de la matrice  $\mathbf{A}$  du système linéaire  $(S)$ .**

On n'a besoin de calculer que les coefficients non nuls de cette matrice, lesquels (du point de vue algorithmique) forment ce qu'on appelle sa *partie utile*. Ceci nécessite de calculer, préalablement, les réels intermédiaires  $\lambda_i$  ( $i = 1(1)N - 1$ ) du Théorème D.V-2.3. Ayant les valeurs de ces derniers, et avec celles des  $h_i$  calculées précédemment, on peut déduire celles des coefficients non nuls de  $\mathbf{A}$ .

▷ **Exo-T.P. [D::V.3]** (*Calcul de la matrice du système  $(S)$* )

Ecrire une fonction/procédure algorithmique (dans MATLAB ...) qui prend, comme paramètre entrant, le vecteur des longueurs  $h_i$ ,  $i = 0(1)N - 1$ , et renvoie, en résultat, la matrice  $\mathbf{A}$ .

• **Etape 3 : Calcul du vecteur-2<sup>nd</sup> membre  $\mathbf{v}$  du système linéaire  $(S)$ .**

Pour cela, on doit d'abord calculer les réels intermédiaires  $\beta_i$  ( $i = 0(1)N - 1$ ) du Théorème D.V-2.3. Ayant les valeurs de ces derniers, on peut déduire celles des coordonnées de  $\mathbf{v}$ .

▷ **Exo-T.P. [D::V.4]** (*Calcul du vecteur-2<sup>nd</sup> membre du système  $(S)$* )

Ecrire une fonction/procédure algorithmique (dans MATLAB ...) qui prend, comme paramètres entrants, le vecteur des images  $y_i$  ( $i = 0(1)N$ ) et celui des longueurs  $h_i$  ( $i = 0(1)N - 1$ ), et renvoie, en résultat, la vecteur  $\mathbf{v}$ .

• **Etape 4 : Calcul des réels  $d_0, \dots, d_N$  du Théorème D.V-1.1.**

Ici, rappelons d'abord que, par (C.4), on a :  $d_0 = d_N = 0$ . Il ne reste donc à calculer que  $d_1, \dots, d_{N-1}$ . On le fait en résolvant le système linéaire  $(S)$ . Malheureusement, ce système étant d'ordre  $N - 1$  (où l'entier  $N$  ne sera, généralement, pas petit), une résolution de  $(S)$  «à la main» sur papier est, en général, peu envisageable. On utilisera plutôt une méthode numérique appropriée pour une telle résolution (telle qu'il en sera étudiée au Chapitre correspondant de ce Cours d'Analyse numérique) et adaptée à la structure très particulière de sa matrice  $\mathbf{A}$  (notamment sa très forte proportion de coefficients nuls).

• **Etape 5 : Calcul des coefficients  $c_{0,i}$ ,  $c_{1,i}$ ,  $c_{2,i}$  et  $c_{3,i}$  des polynômes  $P_i$ ,  $\forall i = 0(1)N - 1$ .**

Pour cela, on fait appel aux formules (V.3) du Théorème D.V-1.1.

▷ **Exo-T.P. [D::V.5]** (*Calcul des coefficients  $c_{0,i}$ ,  $c_{1,i}$ ,  $c_{2,i}$  et  $c_{3,i}$ ,  $\forall i = 0(1)N - 1$* )

Ecrire une fonction/procédure algorithmique (dans MATLAB ...) qui prend, comme paramètres entrants, les réels  $h_i$  ( $i = 0(1)N - 1$ ),  $y_i$  et  $d_i$  ( $i = 0(1)N$ ), et renvoie, en résultats, les valeurs de tous les coefficients  $c_{0,i}$ ,  $c_{1,i}$ ,  $c_{2,i}$  et  $c_{3,i}$ , pour  $i = 0(1)N - 1$ , calculées selon les formules (V.3).

• **Etape 6 : Algorithme de calcul d'un polynôme  $P_i$  en réel  $x$  donné.**

▷ **Exo-T.P. [D::V.6]** (*Calcul d'un polynôme  $P_i$  en réel  $x$  donné*)

Après une analyse appropriée, concevoir, puis écrire une fonction/procédure algorithmique (dans MATLAB, par exemple) qui, pour un indice  $i \in [0(1)N - 1]$ , donné, prend, comme paramètres entrants, un réel  $x$ , le réel  $a_i$  et les valeurs des coefficients  $c_{0,i}$ ,  $c_{1,i}$ ,  $c_{2,i}$  et  $c_{3,i}$  (calculées ci-dessus), et renvoie, comme résultat, la valeur en  $x$  du polynôme  $P_i$ , calculée (*efficacement !*) selon les formules (V.2).

• **Etape 7 : Algorithme de calcul de la fonction  $\tilde{f}_S$  en réel  $x \in [a, b]$  donné.**

▷ **Exo-T.P. [D::V.7]** (*Calcul de la fonction d'interpolation spline cubique  $\tilde{f}_S$  en  $x \in [a, b]$* )

Soit donné un réel  $x \in [a, b]$ .

1°) Décrire les grandes lignes à suivre pour calculer la valeur de  $\tilde{f}_S$  en  $x$ .

2°) Concevoir, puis écrire une fonction/procédure algorithmique (dans MATLAB, par exemple) qui fait ce travail.

#### 4°) Propriétés de la fonction d'interpolation spline cubique $\tilde{f}_S$ sur $[a, b]$ .

P1  $\oplus$  **La fonction  $\tilde{f}_S$  est continue sur  $[a, b]$** , par construction.

P2  $\oplus$  Par construction, on a :

**La fonction  $\tilde{f}_S$  est de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$** , i.e.  $\tilde{f}$  est 2 fois dérivable et  $f''$  continue sur  $[a, b]$ .

P3  $\oplus$  ( $\tilde{f}_S$  de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$  et polynômiale par morceaux de degré  $\leq 3$ )

$\Rightarrow$   **$C_{\tilde{f}_S}$  est une « très belle » courbe d'approximation sur  $[a, b]$** .

##### ••• Remarque V.2 (A propos de l'allure de la courbe de $\tilde{f}_S$ sur $[a, b]$ )

En fait, la courbe  $C_{\tilde{f}_S}$  reproduit essentiellement l'allure de courbe la plus lisse suggérée par les points  $(a_i, y_i)$  dans le plan. Autrement dit : elle n'invente aucun rebondissement ou rupture d'allure artificiel(le) entre ces points ou à leur traversée.

P4  $\oplus$  **La fonction  $\tilde{f}_S$  donne, en général, une très bonne approximation de  $f$  sur  $[a, b]$** .

En effet, on peut montrer que si  $f$  est de classe  $C^4$  sur  $[a, b]$ , alors :

$$\exists K, \text{ constante } \geq 0 / \mathbf{E}_{[a,b]}(\tilde{f}_S | f) \leq K \cdot \Delta_\sigma^4,$$

avec  $\Delta_\sigma = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$ , où  $h_i = a_{i+1} - a_i$  est la longueur du sous-intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$ .

P5  $\oplus$  **La donnée des valeurs  $y_i$  de  $f$  aux abscisses  $a_i$  suffit pour pouvoir calculer  $\tilde{f}_S$  sur  $[a, b]$** .

En effet, bien qu'elle soit 2 fois dérivable sur  $[a, b]$ , aucune valeur de dérivée de  $f$  n'est requise aux points  $a_i$  pour calculer  $\tilde{f}_S$  : la connaissance des valeurs de  $f$  elle-même en ces points suffit pour effectuer ce calcul.

#### 5°) Considérations finales sur l'approximation par fonction spline cubique.

##### a) Commentaire final sur $\tilde{f}_S$ , la fonction d'interpolation spline cubique de $f$ sur $[a, b]$ .

Du fait de toutes les bonnes propriétés listées ci-dessus, l'approximation par fonction d'interpolation spline cubique est la **méthode la plus recommandée** lorsqu'il s'agit de construire une approximation globale d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  à base de la connaissance des seules valeurs que  $f$  prend aux nœuds  $a_i$  d'une subdivision de  $[a, b]$ .

##### b) Fonctions d'interpolation spline cubique : généralisations, extensions et utilité pratique.

Les idées à la base de la construction d'une fonction d'interpolation spline cubique sur  $[a, b]$  (telles que détaillées dans les pages qui précèdent) peuvent se généraliser et s'étendre à l'approximation numérique des fonctions de  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  (où, en pratique, les 2 entiers  $k, d \in \{1, 2, 3\}$ ), et avec les mêmes propriétés théoriques et pratiques remarquables. Pourtant, du fait du coût numérique de leur mise en œuvre, ce type de fonctions d'approximation globale était peu utilisé avant l'ère de l'ordinateur. Mais avec l'arrivée de l'ordinateur et le développement d'algorithmes efficaces pour calculer concrètement ce type de fonctions à partir des données disponibles, la situation a complètement changé. Aujourd'hui, grâce à l'ordinateur, les fonctions d'approximation du type spline sont massivement utilisées dans la modélisation mathématique de phénomènes concrets. C'est le cas, notamment, dans les problèmes de :

- **détermination de la trajectoire optimale** à suivre par un mobile devant aller d'un point  $A$  vers un point  $B$ , mais en passant par une succession de points intermédiaires imposés  $M_1, \dots, M_n$  (exemple : choix de la trajectoire des engins spatiaux) ;
- **design des infrastructures ou des produits de l'industrie** (CAO-DAO : « conception/dessin assisté par ordinateur »), ce qui donne tous ces produits (véhicules, avions, ou autres) et immeubles avec ces belles courbes que nous pouvons observer (malheureusement souvent plus sur les écrans chez les autres que chez nous...).

## \*\*\* ANNEXE \*\*\*

**A. Démonstration des principaux résultats.****A.1. Théorème fondamental sur l'erreur d'interpolation de Lagrange.****a) Préliminaire : Théorème de Rolle.**

Le Théorème fondamental sur l'erreur d'interpolation de Lagrange résulte d'une utilisation répétée du *Théorème de Rolle*. A toutes fins utiles, nous rappelons préalablement l'énoncé de ce théorème classique de l'*Analyse Réelle I* :

**\*\*\* Rappel n° 3 (Théorème de Rolle)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Si  $f$  vérifie :

(i)  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , (ii)  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ , (iii)  $f(a) = f(b)$ ,

alors :  $\exists c \in ]a, b[ \mid f'(c) = 0$ .

**b) Démonstration du Théorème D.II-2.2.**

**Preuve** Avec les données de l'énoncé de ce Théorème, supposons que  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ .

Soit alors  $x \in [a, b]$ . Montrons que (II.2) est vraie. Pour cela, distinguons 2 cas pour  $x$  :

- **Cas 1** :  $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ .

Alors  $(pL_{x_0, \dots, x_n} f)(x) = f(x)$  et  $\pi_n(x) = 0$ , par définition des 2 polynômes  $pL_{x_0, \dots, x_n} f$  et  $\pi_n$ . Il vient que, quelque soit le réel  $c_x$  pris dans  $\text{conv}(x, x_0, \dots, x_n)$ , les 2 membres de l'égalité dans (II.2) seront nuls. Et donc (II.2) est réalisée, dans ce cas, en prenant n'importe quel  $c_x \in \text{conv}(x, x_0, \dots, x_n)$ .

- **Cas 2** :  $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ .

Pour une constante réelle  $A$  à choisir plus loin, considérons ici la fonction  $\varphi$  définie sur  $[a, b]$  par :

$$\forall t \in [a, b], \quad \varphi(t) = f(t) - (pL_{x_0, \dots, x_n} f)(t) - A \cdot \pi_n(t). \quad (\text{A1.1a})$$

Notons d'abord que, quelque soit la valeur prise pour la constante  $A$ , on aura :  $\varphi(x_i) = 0, \forall i = 0(1)n$ .

Rappelons que le réel  $x$  est fixé dans  $[a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ . Essayons alors de choisir la constante  $A$  pour que la fonction  $\varphi$  s'annule aussi en  $t = x$ . Ceci est possible car  $x \notin \{x_0, \dots, x_n\} \implies \pi_n(x) \neq 0$ . D'où :

$$\varphi(x) = 0 \iff f(x) - (pL_{x_0, \dots, x_n} f)(x) - A \cdot \pi_n(x) = 0 \iff A = \frac{f(x) - (pL_{x_0, \dots, x_n} f)(x)}{\pi_n(x)}. \quad (\text{A1.1b})$$

Dans la suite, pour la fonction  $\varphi$  définie par (A1.1a), on considère la valeur de la constante  $A$  donnée par (A1.1b). Alors cette fonction  $\varphi$  s'annule aux  $n+2$  réels distincts  $x, x_0, \dots, x_n \in I_x = \text{conv}(x, x_0, \dots, x_n)$ .

D'autre part, grâce à la Proposition D.II-2.1, il vient :

$x, x_0, \dots, x_n \in [a, b] \implies I_x \subset [a, b]$ , avec  $I_x$  intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide,

$\implies f \in \mathcal{C}^{n+1}(I_x)$ , car  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ , par hypothèse.

$\implies \varphi \in \mathcal{C}^{n+1}(I_x)$ , puisque  $pL_{x_0, \dots, x_n} f$  et  $\pi_n$  sont 2 polynômes de  $\mathbb{R}$ , donc  $\in \mathcal{C}^{n+1}(I_x)$ .

Ainsi,  $\varphi$  vérifie :

$$\varphi \in \mathcal{C}^{n+1}(I_x) \text{ et } \varphi \text{ admet au moins } n+2 \text{ racines distinctes dans l'intervalle } I_x. \quad (\text{A1.1c})$$

Mais, comme conséquence du **Théorème de Rolle**, on sait qu'entre 2 racines d'une fonction dérivable dans un intervalle de  $\mathbb{R}$ , il existe (au moins) une racine de la dérivée de cette fonction. Par conséquent,

(A1.1c)  $\implies \varphi' \in \mathcal{C}^n(I_x)$  et  $\varphi'$  admet au moins  $n+1$  racines distinctes dans  $I_x$  ;

$\implies \varphi'' \in \mathcal{C}^{n-1}(I_x)$  et  $\varphi''$  admet au moins  $n$  racines distinctes dans  $I_x$  ;

$\implies \dots \dots \dots$

$\implies \varphi^{(n+1)} \in \mathcal{C}^0(I_x)$  (i.e.  $\varphi^{(n+1)}$  continue sur  $I_x$ ) et  $\varphi^{(n+1)}$  admet au moins une racine dans  $I_x$  ;

$\implies \exists c_x \in I_x \mid \varphi^{(n+1)}(c_x) = 0$ .

Maintenant, par définition (A1.1a) de la fonction  $\varphi$ , il vient,  $\forall t \in [a, b]$  :

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)^{(n+1)}(t) - A \cdot \pi_n^{(n+1)}(t) ; \\
&= f^{(n+1)}(t) - A \cdot \pi_n^{(n+1)}(t), \quad \text{car } \text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f \in \mathbb{R}_n[x] \implies (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)^{(n+1)} \text{ est le polynôme nul} ; \\
&= f^{(n+1)}(t) - A \cdot (t^{n+1})^{(n+1)}, \quad \text{car } \pi_n^{(n+1)}(t) = t^{n+1} + (\text{monômes en } t \text{ de degrés } \leq n) ; \\
&= f^{(n+1)}(t) - A \cdot (n+1)!, \quad \text{car } (t^{n+1})^{(n+1)} = \text{constante} = (n+1)! \text{ sur } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Il s'ensuit que : } \varphi^{(n+1)}(c_x) = 0 &\iff f^{(n+1)}(c_x) - A \cdot (n+1)! = 0 \iff A = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}, \\
\iff \frac{f(x) - (\text{pL}_{x_0, \dots, x_n} f)(x)}{\pi_n(x)} &= \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}, \text{ d'après (A1.1b). D'où (II.2). } \boxed{\text{Cqfd}}
\end{aligned}$$

## A.2. C.N.S. pour la continuité d'une fonction polynômiale par morceaux.

### a) Préliminaire : Lemme de base.

Le Lemme de base ci-après montre pourquoi l'étude de la continuité ou de la dérivabilité d'une fonction polynômiale par morceaux peut se limiter à effectuer ce travail au niveau de ses nœuds.

#### Lemme D-ℓ3 (Régularité hors nœuds d'une fonction polynômiale par morceaux)

1. La fonction polynômiale par morceaux  $\varphi$  de la Définition-Propriété D.d5 est continue, dérivable et de classe  $C^\infty$  sur chacun des sous-intervalles ouverts  $]a, c_1[, ]c_1, c_2[, \dots, ]c_{q-1}, b[$  de  $\sigma$ .
2. Par conséquent,  $\varphi$  est continue, dérivable et indéfiniment dérivable en tout  $x_0 \in [a, b] \setminus \text{Supp}(\sigma)$ , où on rappelle que  $\text{Supp}(\sigma) = \{c_0, \dots, c_q\} = \{a, c_1, \dots, c_{q-1}, b\}$  est le support de la subdivision  $\sigma$ .
3. De plus, on a,  $\forall k = 0(1)q-1, \forall j \in \mathbb{N} : \forall x \in ]c_k, c_{k+1}[ , \varphi^{(j)}(x) = P_k^{(j)}(x)$ .

#### Preuve

Ce résultat est une conséquence immédiate du fait que dans chacun des sous-intervalles ouverts  $]c_k, c_{k+1}[$  ( $k = 0(1)q-1$ ), la fonction  $\varphi$  coïncide avec un polynôme  $P_k$ , lequel est une fonction continue, dérivable et indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Cqfd

### b) Démonstration du Théorème D.III-4.1.

Preuve Démontrons d'abord que **1.**  $\iff$  **2.** Pour cela, commençons par rappeler que :

$$\varphi \text{ continue sur } [a, b] \iff \varphi \text{ continue en tout } x_0 \in [a, b] \iff \forall x_0 \in [a, b], \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Or, pour un réel  $x_0 \in [a, b]$ , on a les cas suivants :

- **Cas 1** :  $x_0 \in [a, b] \setminus \text{Supp}(\sigma)$ , avec  $\text{Supp}(\sigma) = \{c_0, \dots, c_q\} = \{a, c_1, \dots, c_{q-1}, b\}$ .

Alors on sait déjà que  $\varphi$  est continue en  $x_0$ , d'après le Lemme D-ℓ3.

- **Cas 2** :  $x_0 = a$ , i.e.  $x_0 = c_0$ .

Le réel  $x_0 = a$  étant la borne gauche de l'intervalle  $[a, b]$ , alors on a :

$$\varphi \text{ continue en } x_0 = a \iff \varphi \text{ continue à droite en } x_0 = a \iff \lim_{x \xrightarrow{>} a} \varphi(x) = \varphi(a). \quad (\text{A2.1a})$$

Mais, dans la Définition-Propriété D.d5, on sait que  $\varphi$  vérifie :

$$\forall x \in ]c_0, c_1[ = ]a, c_1[, \varphi(x) = P_0(x). \quad (\text{A2.1b})$$

Or, pour que  $x \xrightarrow{>} a$ , il est nécessaire que la variable  $x$  entre à un moment donné dans l'intervalle  $]a, c_1[$  pour ne plus jamais en ressortir. D'où :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \xrightarrow{>} a \\ x \in ]a, c_1[}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \xrightarrow{>} a \\ x \in ]a, c_1[}} P_0(x) = P_0(a), \quad (\text{A2.1c})$$

la 2<sup>ème</sup> égalité découlant de (A2.1b) et la dernière de ce que  $P_0$  polynôme de  $\mathbb{R} \implies P_0$  continu sur  $\mathbb{R}$ , donc en  $x_0 = a$ . De (A2.1a) et (A2.1c), on déduit ainsi l'équivalence :

$$\varphi \text{ continue en } x_0 = a \iff P_0(a) = \varphi(a). \quad (\text{A2.1d})$$

- **Cas 3** :  $x_0 = b$ , i.e.  $x_0 = c_q$ .

Le réel  $x_0 = b$  étant la borne droite de l'intervalle  $[a, b]$ , alors on a :

$$\varphi \text{ continue en } x_0 = b \iff \varphi \text{ continue à gauche en } x_0 = b \iff \lim_{x \xrightarrow{<} b} \varphi(x) = \varphi(b). \quad (\text{A2.1e})$$

Mais, par définition de  $\varphi$ , on sait qu'on a :

$$\forall x \in ]c_{q-1}, c_q[ = ]c_{q-1}, b[, \quad \varphi(x) = P_{q-1}(x). \quad (\text{A2.1f})$$

Or, pour que  $x \xrightarrow{<} b$ , il est nécessaire que la variable  $x$  entre à un moment donné dans l'intervalle  $]c_{q-1}, b[$  pour ne plus jamais en ressortir. D'où :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} b} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \xrightarrow{<} b \\ x \in ]c_{q-1}, b[}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \xrightarrow{<} b \\ x \in ]c_{q-1}, b[}} P_{q-1}(x) = P_{q-1}(b), \quad (\text{A2.1g})$$

la 2<sup>ème</sup> égalité découlant de (A2.1f) et la dernière de ce que  $P_{q-1}$  polynôme de  $\mathbb{R} \implies P_{q-1}$  continu sur  $\mathbb{R}$ , donc en  $x_0 = b$ . De (A2.1e) et (A2.1g), on déduit ainsi l'équivalence :

$$\varphi \text{ continue en } x_0 = b \iff P_{q-1}(b) = \varphi(b). \quad (\text{A2.1h})$$

• **Cas 4** :  $x_0 = c_k$ , avec  $k \in [1(1)q - 1]$ .

Dans ce cas,  $c_k \in ]a, b[$ , et comme la fonction  $\varphi$  a une expression différente à gauche et à droite de  $x_0$ , on va alors utiliser le fait que :  $\varphi$  continue en  $x_0 = c_k \iff \varphi$  continue à gauche et à droite en  $x_0 = c_k$ , i.e.

$$\varphi \text{ continue en } x_0 = c_k \iff \lim_{x \xrightarrow{<} c_k} \varphi(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} c_k} \varphi(x) = \varphi(c_k). \quad (\text{A2.1i})$$

Or, dans la Définition-Propriété D.d5,

– juste à droite de  $x_0$ ,  $x \in ]c_k, c_{k+1}[$ , et donc  $\varphi(x) = P_k(x)$ ; d'où :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} c_k} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \xrightarrow{>} c_k \\ x \in ]c_k, c_{k+1}[}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \xrightarrow{>} c_k \\ x \in ]c_k, c_{k+1}[}} P_k(x) = P_k(c_k), \quad (\text{A2.1j})$$

la dernière égalité venant de ce que  $P_k$  polynôme de  $\mathbb{R} \implies P_k$  continu sur  $\mathbb{R}$ , donc en  $x_0 = c_k$ ;

– juste à gauche de  $x_0$ ,  $x \in ]c_{k-1}, c_k[$ , et donc  $\varphi(x) = P_{k-1}(x)$ ; d'où :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} c_k} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \xrightarrow{<} c_k \\ x \in ]c_{k-1}, c_k[}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \xrightarrow{<} c_k \\ x \in ]c_{k-1}, c_k[}} P_{k-1}(x) = P_{k-1}(c_k). \quad (\text{A2.1k})$$

la dernière égalité venant de ce que  $P_{k-1}$  polynôme de  $\mathbb{R} \implies P_{k-1}$  continu sur  $\mathbb{R}$ , donc en  $x_0 = c_k$ . De (A2.1i), (A2.1j) et (A2.1k), on déduit que :

$$\varphi \text{ continue en } x_0 = c_k \iff P_k(c_k) = P_{k-1}(c_k) = \varphi(c_k). \quad (\text{A2.1l})$$

• Le Lemme D-ℓ3, (A2.1d), (A2.1h) et (A2.1l) prouvent que **1.**  $\iff$  **2.**

• Montrons maintenant que **2.**  $\implies$  **3.**

Pour cela, rappelons d'abord que, par la Définition-Propriété D.d5 de  $\varphi$ , on a :

$$\forall k = 0(1)q - 1, \quad \varphi(x) = P_k(x) \text{ sur le } \textbf{sous-intervalle ouvert} ]c_k, c_{k+1}[. \quad (\text{A2.1m})$$

Supposons que **2.** est vraie, i.e.  $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{2.1. } P_0(a) = \varphi(a); \\ \textbf{2.2. } P_{q-1}(b) = \varphi(b); \\ \textbf{2.3. } \forall k = 1(1)q - 1, P_{k-1}(c_k) = P_k(c_k) = \varphi(c_k). \end{array} \right.$

Il s'ensuit :

- $\forall k = 0(1)q - 2, P_k(c_{k+1}) = \varphi(c_{k+1})$  (par **2.3.**);
- pour  $k = 0, P_k(c_k) = P_0(c_0) = P_0(a) = \varphi(a)$  (par **2.1.**),  $\implies P_k(c_k) = \varphi(c_k)$ ;
- pour  $k = q - 1, P_k(c_{k+1}) = P_{q-1}(c_q) = P_{q-1}(b) = \varphi(b)$  (par **2.2.**),  $\implies P_k(c_{k+1}) = \varphi(c_{k+1})$ .

$$\implies \forall k = 0(1)q - 1, P_k(c_k) = \varphi(c_k) \text{ et } P_k(c_{k+1}) = \varphi(c_{k+1}). \quad (\text{A2.1n})$$

Enfin, (A2.1m) et (A2.1n)  $\implies \forall k = 0(1)q - 1, \varphi(x) = P_k(x)$  sur le **sous-intervalle fermé**  $[c_k, c_{k+1}]$ .

Ceci prouve bien que **2.**  $\implies$  **3.**

• Enfin, montrons que **3.**  $\implies$  **2.**

En effet, si  $\forall k = 0(1)q - 1, \varphi(x) = P_k(x)$  sur le **sous-intervalle fermé**  $[c_k, c_{k+1}]$ , alors :

- pour  $k = 0, \varphi(x) = P_0(x)$  sur  $[c_0, c_1] = [a, c_1]$  et  $a \in [a, c_1] \implies$  pour  $x = a, \varphi(a) = P_0(a)$ ;
- pour  $k = q - 1, \varphi(x) = P_{q-1}(x)$  sur  $[c_{q-1}, c_q] = [c_{q-1}, b]$  et  $b \in [c_{q-1}, b]$ ,

$$\implies \text{pour } x = b, \varphi(b) = P_{q-1}(b);$$

$$- \forall k = 1(1)q - 1, \text{ on a : } \left\{ \begin{array}{l} c_k \in [c_k, c_{k+1}] \implies \varphi(c_k) = P_k(c_k) \\ c_k \in [c_{k-1}, c_k] \implies \varphi(c_k) = P_{k-1}(c_k) \end{array} \right\} \implies P_{k-1}(c_k) = P_k(c_k) = \varphi(c_k).$$

Ceci prouve que **3.**  $\implies$  **2.**

• • **Conclusion** : **1.**  $\iff$  **2.**  $\iff$  **3.** Cqfd



**A.3. C.N.S. pour la dérivabilité d'une fonction polynômiale par morceaux.****a) Préliminaire : Un Corollaire du Théorème D.III-4.1.**

Le Corollaire suivant du Théorème D.III-4.1 énonce que si une fonction polynômiale par morceaux sur un intervalle  $[a, b]$  est continue en une des bornes de cet intervalle, alors elle devient automatiquement indéfiniment dérivable en cette borne. Ce résultat est un préliminaire pour étudier la dérivabilité d'une fonction polynômiale par morceaux sur  $[a, b]$ .

**Corollaire D.A.-3.1 (Régularité d'une fonction polynômiale par morceaux aux bornes)**

Pour la fonction polynômiale par morceaux  $\varphi$  de la Définition-Propriété D.d5, on a :

1. Si  $\varphi$  est continue en  $x_0 = a$ , alors  $\varphi = P_0$  sur  $[a, c_1[$ , et donc  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[a, c_1[$  et, en particulier, en  $x_0 = a$ .
2. Si  $\varphi$  est continue en  $x_0 = b$ , alors  $\varphi = P_{q-1}$  sur  $]c_{q-1}, b]$ , et donc  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]c_{q-1}, b]$  et, en particulier, en  $x_0 = b$ .

**Preuve**

Conséquence immédiate des implications **1.**  $\implies$  **2.1.** et **1.**  $\implies$  **2.2.** du Théorème D.III-4.1, puis du fait que  $P_0$  et  $P_{q-1}$  sont 2 polynômes de  $\mathbb{R}$ , donc 2 fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Cqfd

**b) Démonstration du Théorème D.III-4.2.**

**Preuve** Nous allons montrer que **2.**  $\implies$  **1.**  $\implies$  **3.**  $\implies$  **2.**

- **2.**  $\implies$  **1.** : Trivial, car  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$   $\iff$   $\varphi$  dérivable sur  $[a, b]$  et  $\varphi'$  continue sur  $[a, b]$ .
- **1.**  $\implies$  **3.** : Supposons que  $\varphi$  est dérivable sur  $[a, b]$ .  
Alors  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$ , et donc **3.1.** est vraie. Mais, d'autre part, soit un indice  $k \in [1(1)q - 1]$ . Comme  $c_k \in [a, b]$ , alors  $\varphi$  est dérivable en  $x = c_k$ , i.e.

$$\lim_{x \rightarrow c_k} \frac{\varphi(x) - \varphi(c_k)}{x - c_k} = \varphi'(c_k) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A3.1a})$$

Par ailleurs,  $k \in [1(1)q - 1] \implies c_k \in ]a, b[$ . De ce fait, (A3.1a) équivaut à :

$$x \lim_{\substack{\rightarrow \\ c_k}} \frac{\varphi(x) - \varphi(c_k)}{x - c_k} = x \lim_{\substack{\rightarrow \\ c_k}} \frac{\varphi(x) - \varphi(c_k)}{x - c_k} = \varphi'(c_k) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A3.1b})$$

Or, dans les conditions de la Définition-Propriété D.d5,

- juste à droite de  $x_0$ , on a :  $x \in ]c_k, c_{k+1}[$ , et donc  $\varphi(x) = P_k(x)$ ; de plus,  $\varphi(c_k) = P_k(c_k)$ , par continuité de  $\varphi$  sur  $[a, b]$  (Théorème D.III-4.1); d'où :

$$x \lim_{\substack{\rightarrow \\ c_k}} \frac{\varphi(x) - \varphi(c_k)}{x - c_k} = x \lim_{\substack{\rightarrow \\ c_k}} \frac{P_k(x) - P_k(c_k)}{x - c_k} = P'_k(c_k) \in \mathbb{R}, \quad (\text{A3.1c})$$

la dernière égalité venant de ce que  $P_k$  polynôme de  $\mathbb{R} \implies P_k$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc en  $x_0 = c_k$ ;

- juste à gauche de  $x_0$ , on a :  $x \in ]c_{k-1}, c_k[$ , et donc  $\varphi(x) = P_{k-1}(x)$ ; de plus,  $\varphi(c_k) = P_{k-1}(c_k)$ , par continuité de  $\varphi$  sur  $[a, b]$  (Théorème D.III-4.1); d'où :

$$x \lim_{\substack{\rightarrow \\ c_k}} \frac{\varphi(x) - \varphi(c_k)}{x - c_k} = x \lim_{\substack{\rightarrow \\ c_k}} \frac{P_{k-1}(x) - P_{k-1}(c_k)}{x - c_k} = P'_{k-1}(c_k) \in \mathbb{R}, \quad (\text{A3.1d})$$

la dernière égalité venant de ce que  $P_{k-1}$  polynôme de  $\mathbb{R} \implies P_{k-1}$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc en  $x_0 = c_k$ . Maintenant, (A3.1b), (A3.1c) et (A3.1d)  $\implies P'_{k-1}(c_k) = P'_k(c_k)$ , et ce  $\forall k = 1(1)q - 1$ . Ainsi **3.2.** est prouvé, et la démonstration de **1.**  $\implies$  **3.** est terminée.

- **3.**  $\implies$  **2.** : Supposons **3.** vraie, i.e.  $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{3.1.} \varphi \text{ est continue sur } [a, b]; \\ \textbf{3.2.} \forall k = 1(1)q - 1, P'_{k-1}(c_k) = P'_k(c_k). \end{array} \right.$

Déduisons en que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , i.e.  $\varphi$  dérivable sur  $[a, b]$  et  $\varphi'$  continue sur  $[a, b]$ . Cela revient à démontrer que :

$$\forall x_0 \in [a, b], \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi'(x) = \varphi'(x_0). \quad (\text{A3.1e})$$

Or, pour un réel  $x_0 \in [a, b]$ , on a les cas suivants :

- **Cas 1** :  $x_0 \in [a, b] \setminus \text{Supp}(\sigma)$ , avec  $\text{Supp}(\sigma) = \{c_0, \dots, c_q\} = \{a, c_1, \dots, c_{q-1}, b\}$ .

Par le Lemme D-ℓ3, on sait déjà que  $\varphi$  est indéfiniment dérivable en  $x_0$ , donc de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $x_0$ .

- **Cas 2** :  $x_0 \in \{a, b\}$ .

Avec 3.1., le Corollaire D.A.-3.1 implique que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $a$  et  $b$ , donc de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $a$  et  $b$ .

- **Cas 3** :  $x_0 = c_k$ , avec  $k \in [1(1)q - 1]$ .

Montrons d'abord que  $\varphi$  est dérivable en  $c_k$ . Cela revient à montrer que (A3.1a) est vraie. Mais puisque  $k \in [1(1)q - 1] \implies c_k \in ]a, b[$ , cela revient aussi à montrer que (A3.1b) est vraie, ce qui est bien le cas ici grâce à 3.2. en posant :

$$\varphi'(c_k) = P'_{k-1}(c_k) = P'_k(c_k), \quad (\text{A3.1f})$$

car le raisonnement ayant mené à (A3.1c) et (A3.1d) reste valable ici.

Montrons maintenant que  $\varphi'$  est continue en  $c_k$ . Pour cela, comme  $c_k \in ]a, b[$  et la fonction  $\varphi$  a une expression différente à gauche et à droite de  $x_0$ , on va alors utiliser le fait que :

$$\varphi' \text{ continue en } x_0 = c_k \iff \lim_{x \xrightarrow{<} c_k} \varphi'(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} c_k} \varphi'(x) = \varphi'(c_k). \quad (\text{A3.1g})$$

Or, dans la Définition-Propriété D.d5,

– juste à droite de  $x_0$ ,  $x \in ]c_k, c_{k+1}[$ , et donc  $\varphi(x) = P_k(x) \implies \varphi'(x) = P'_k(x)$ ; d'où :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} c_k} \varphi'(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} c_k} \varphi'(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} c_k} P'_k(x) = P'_k(c_k), \quad (\text{A3.1h})$$

la dernière égalité venant de :  $P_k$  polynôme de  $\mathbb{R} \implies P'_k$  polynôme de  $\mathbb{R}$ , donc continu en  $x_0 = c_k$ ;

– juste à gauche de  $x_0$ ,  $x \in ]c_{k-1}, c_k[$ , et donc  $\varphi(x) = P_{k-1}(x) \implies \varphi'(x) = P'_{k-1}(x)$ ; d'où :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} c_k} \varphi'(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} c_k} \varphi'(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} c_k} P'_{k-1}(x) = P'_{k-1}(c_k), \quad (\text{A3.1i})$$

car  $P_{k-1}$  polynôme de  $\mathbb{R} \implies P'_{k-1}$  polynôme de  $\mathbb{R}$ , donc continu en  $x_0 = c_k$ .

Sachant 3.2., il vient : (A3.1g), (A3.1h) et (A3.1i)  $\implies \varphi'$  continue en  $x_0 = c_k$ .

- On a bien montré que 3.  $\iff$  2., i.e.  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ .

- • **Conclusion** : 2.  $\implies$  1.  $\implies$  3.  $\implies$  2., et donc 1.  $\iff$  2.  $\iff$  3. Cqfd