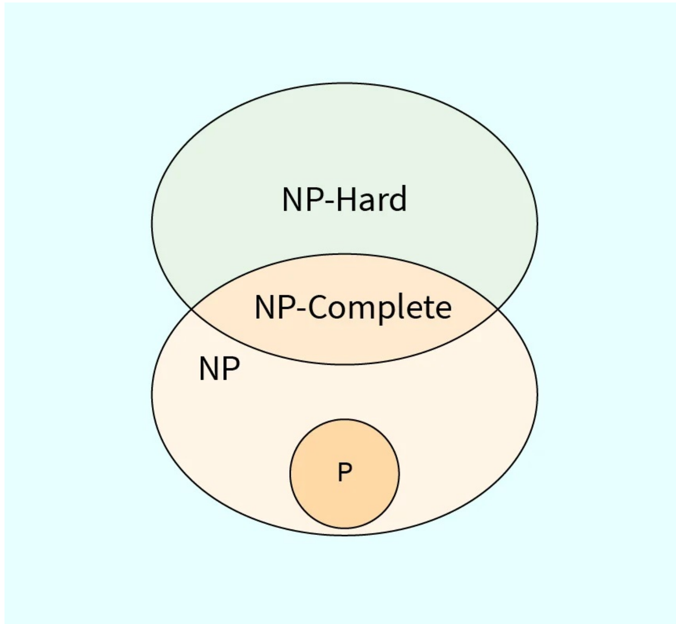

NP-Completo y NP-Hard

Ricardo Cápiro Colomar
C412

Repo en GitHub

Contents

1 Introducción

Un problema es NP-Completo si es NP y NP-Hard.

- **Los problemas NP** son problemas de decisión, tal que dada una solución del problema verificar si es solución se puede hacer en tiempo polinomial, pero encontrar una solución no se sabe (hasta el momento) si puede hacer en tiempo polinomial.
- **Los problemas NP-Hard** son problemas, tal que todo problema NP puede ser transformado a dicho problema en tiempo polinomial. Luego para demostrar que un problema es NP-Hard basta con encontrar un problema NP-Hard que pueda ser reducido al problema en cuestión.

2 Retroalimentación de Arcos

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de retroalimentación de arcos es un subconjunto de arcos $F \subseteq E$ tal que al eliminar todos los arcos en F, el grafo resultante no contiene ciclos (es un grafo acíclico o un bosque, si es no dirigido). El objetivo del problema es encontrar el conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño mínimo.

2.1 Demostración

Antes de demostrar el problema anterior, vamos a demostrar que el problema de decisión de si existe un conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño k es NP-Hard. Para demostrar que `Retroalimentación de Arcos` es NP-Hard, se debe realizar una reducción de un problema NP-Hard conocido; en este caso, se utilizará `Vertex Cover`.

La entrada de `Vertex Cover` es un grafo $G = (V, E)$ y un entero de tamaño k. Ahora se realizará una transformación de la siguiente forma:

- $V' = V \cup \{v' | v \in V\}$
- $E' = \{(u, u'), (v, v'), (v', u), (u', v) | < u, v > \in E\}$

Luego, dada la transformación de la entrada, se demostrará que existe un conjunto de retroalimentación de arcos en G' de tamaño k si y solo si existe una cobertura de vértices en G de tamaño k.

- $\Rightarrow$: Sea S' un conjunto de retroalimentación de arcos de G' de tamaño k, si $\exists\ e \in S'$ tal que e no es una arista (v, v') entonces e es una arista de la forma (v', u). Si e es una arista (v', u), como $e \in S'$, abarca todos los ciclos $[v', u, ..., v']$. Todos los caminos $u \to v'$ pasan por v, ya que el único arco incidente en v' es v. Por tanto si sustituimos (v', u) por (v, v'), se abarcan los mismos ciclos de G'. Por tanto, es posible crear un nuevo conjunto S' de tamaño k formado solamente por arcos de la forma (v, v'). Dado el nuevo conjunto S', como S' abarca todos los ciclos, también abarca los ciclos c de la forma $c = [v, v', u, u', v]$ en G'. A cada ciclo c en G' se le asocia una arista $< u, v > \in E$ y viceversa. Como por cada ciclo c se cumple que $(v, v') \in S'$ o $(u, u') \in S'$, entonces es posible crear un conjunto S formado por los vértices de V correspondientes a las aristas de S', el cual abarca todas las aristas de G, por tanto, S' es una cobertura de vértices de G.

- $\Leftarrow$: Sea S una cobertura de vértices de G, entonces $\forall < u, v > \in E$ se cumple que $u \in S$ o $v \in S$. Sea S' un conjunto de arcos formado por las arcos que (v', v) correspondientes a los vértices v que pertenecen a S, demostremos que $G' - S'$ no tiene ciclos. Dado un ciclo c de G'; si $v' \in c$, entonces $(v, v') \in c$, ya que en v' solo incide v; si $v \in c$, entonces $(v, v') \in c$, ya que v solo incide en v'. Por tanto, en cada ciclo de G' existe un arco de la forma (v, v'), por lo que S' es una retroalimentación de arcos de G'.

Regresando al problema de optimización, ahora se demostrará que es NP-Hard a partir del problema de decisión de si existe un conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño k. Se demostrará que existe el conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño mínimo si y solo si existe un conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño k, con $k \geq 0$.

- $\Leftarrow$ Se cumple por Principio del Buen Orden.
- $\Rightarrow$ Si existe un conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño mínimo l, al agregar $k - l$ vértices al conjunto, este va a seguir cumpliendo que es un conjunto de retroalimentación de arcos y esta vez de tamaño k.

3 Retroalimentación de Vértices

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de retroalimentación de vértices es un subconjunto de vértices $F \subseteq V$ tal que al eliminar todos los vértices en F (y sus aristas incidentes), el grafo resultante no contiene ciclos (es un grafo acíclico o un bosque, si es no dirigido). El objetivo del problema es encontrar el conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño mínimo.

3.1 Demostración

Antes de demostrar el problema de optimización, vamos a demostrar que el problema de decisión de si existe un conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño k, es NP-Hard. Para demostrar que `Retroalimentación de Vértices` es NP-Hard, se debe realizar una reducción de un problema NP-Hard conocido, en este caso se utilizará `Vertex Cover`.

La entrada de `Vertex Cover` es un grafo $G = (V, E)$ y un entero de tamaño k. Ahora se realizará una transformación del grafo G en $G' = (V', E')$ de la siguiente forma:

- $V' = V$
- $E' = \{(u, v), (v, u) \quad | \quad < u, v > \in E\}$

Luego, dada la transformación de la entrada, se demostrará que existe en G' un conjunto F de retroalimentación de vértices de tamaño k si y solo si existe una cobertura de vértices en G de tamaño k.

- $\Rightarrow$: Dado que existe un conjunto F de retroalimentación de vértices que cumple que el grafo resultante de eliminar dichos vértices es un grafo acíclico, entonces es evidente que cada ciclo de tamaño 2 del grafo G' tiene al menos un vértice que pertenece a F, pues de no ser así F no sería un conjunto de retroalimentación de vértices. Luego, como por cada arista $< u, v > \in E$ existe un ciclo $(u, v) \to (v, u)$ de tamaño 2 en G', entonces todas las aristas de E inciden en G a todos los vértices del conjunto F. Luego, F es una cobertura de vértices de tamaño k.

- $\Leftarrow$: Dado que existe una cobertura S de vértices de tamaño k, como por cada arista $< u, v > \in E$ existe un ciclo $(u, v) \to (v, u)$ de tamaño 2 en G' y en S inciden todas las aristas de E, entonces a todos los ciclos de tamaño 2 en G' pertenecen al menos un vértice del conjunto S. Luego, al eliminar esos vértices del grafo G' se eliminan todos los ciclos del grafo y por ende S es un conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño k.

Regresando al problema de optimización, ahora se demostrará que es NP-Hard a partir del problema de decisión de si existe un conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño k. Se demostrará que existe el conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño mínimo si y solo si existe un conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño k.

- $\Rightarrow$: Dado que existe un conjunto S de retroalimentación de vértices de tamaño mínimo igual a l, entonces se añade $k - l$ vértices al conjunto S y se obtiene un conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño k.
- $\Leftarrow$: Dado que existe un conjunto S de retroalimentación de vértices de tamaño k, entonces existe un conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño mínimo por el principio del buen orden.

4 Conjunto Dominante

En un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de vértices $D \subseteq V$ es un conjunto dominante si cada vértice de V que no está en D es adyacente a al menos un vértice en D. Una partición de los vértices V en k conjuntos $D_1, D_2, ..., D_k$ es una partición domática si cada D_i (para cada $i = 1, 2, ..., k$) es un conjunto dominante. El número dominante es la cardinalidad del menor conjunto dominante de G.
Hallar el número dominante de G.

4.1 Demostración

Antes de demostrar el problema de optimización, vamos a demostrar que el problema de decisión de si existe un conjunto dominante de tamaño k es NP-Hard. Para demostrar que `Conjunto Dominante` es NP-Hard, se debe realizar una reducción de un problema NP-Hard conocido; en este caso, se utilizará `Vertex Cover`.

La entrada de `Vertex Cover` es un grafo $G = (V, E)$ y un entero de tamaño k. Ahora se realizará una transformación del grafo G en $G' = (V', E')$ de la siguiente forma:

- $V' = V \quad \cup \quad \{uv \quad | < u, v > \in E\}$
- $E' = E \quad \cup \quad \{< u, uv >, < uv, v > | < u, v > \in E\}$

Luego, dada la transformación de la entrada, se demostrará que existe en G' un conjunto dominante D de tamaño k si y solo si existe una cobertura de vértices en G de tamaño k.

- $\Rightarrow$: Dado un conjunto dominante D de tamaño k, si existe un vértice recién añadido $uv \in D$ que no pertenece a V, entonces este se puede reemplazar en D por u o v abarcando los mismos vértices, ya que uv, u y v en G' forman un clique de tamaño 3. Luego, se obtiene un conjunto dominante formado solo por vértices que pertenecen a V. Además, como en un conjunto dominante todos los vértices que no pertenecen al mismo están conectados con al menos un vértice adyacente a ellos y como $\forall u \in V' \wedge u \notin V$ se cumple que $u \in V' - D$, entonces todos los vértices que no pertenecen a V van a ser abarcados por el conjunto dominante. Luego, como por cada vértice $uv \in V' - D$, existe $< u, v > \in E$,entonces existe una cobertura de vértices de tamaño k en G.

- $\Leftarrow$: Dada una cobertura X de vértices de tamaño k en G, como todas las aristas de E inciden en X, entonces todas los vértices de V que no están en X son abarcados por los vértices de X. Como por cada arista $< u, v > \in E$ existe un vértice $uv \in V'$ y como cada $uv \in V'$ está conectado a u y v, entonces uv está abarcado por vértices del conjunto X. Luego, todos los vértices que no pertenecen a X son abarcados por vértices de X. Por tanto, X es un conjunto dominante de tamaño k.

Regresando al problema de optimización, ahora se demostrará que es NP-Hard a partir del problema de decisión de si existe un conjunto dominante de tamaño k. Se demostrará que existe el conjunto de dominante de tamaño mínimo si y solo si existe un conjunto dominante de tamaño k.

- $\Rightarrow$: Dado que existe un conjunto D dominante de tamaño mínimo igual a l, entonces al añadir $k - l$ vértices al conjunto D se obtiene un conjunto dominante de tamaño k.

- $\Leftarrow$: Dado que existe un conjunto D dominante de tamaño k, entonces existe un conjunto dominante de tamaño mínimo por el principio del buen orden.