实验五　贪心算法

June 2, 2022

1　前言

美国麻州的克雷（Clay）数学研究所于 2000 年 5 月 24 日在巴黎法兰西学院宣布了一件被媒体炒得火热的大事：对七个“千僖年数学难题”的每一个悬赏一百万美元。“千僖难题”之一便是 NP 问题，如果有人能证明出 $P = NP$ 或 $P \neq NP$，就会获得该机构整整 100 万美元的奖金，并且一旦证明出 $P = NP$ 将会改变现有人类所有的知识体系。NP 完全问题排在百万美元大奖的首位，足见他的显赫地位和无穷魅力。TSP(Traveling Salesman Problem) 即旅行商问题, 是数学领域中著名问题之一，也是 NP 问题。10 个城市时，解有 10！=3628800 个。城市数更多时，根本无法就找到旅行商问题的正确解。而采用贪心算法其时间复杂度和空间复杂度都很低，并且操作简单，容易理解，结果显而易见。

贪心算法简单易行：每步都采取最优的算法。每步都选择局部最优解，最终得到的就是全局最优解。显然，贪心算法并非在任何情况下都行之有效，但它却极易实现。同样是背包问题，采取贪心算法，每次都装入价值最高的商品，简单易行，贪心算法大部分情况下不能获得最优解，但非常接近。在有些情况下，完美是优秀的敌人。有时候，我们只需找到一个能够大致解决问题的算法，而贪婪算法正好可派上用场，它们实现起来容易，得到的结果又与正确结果相当接近。NP 完全问题无处不在！如果能判断要解决的问题属于 NP 完全问题，就不用去寻找完美的解决方案，而是使用近似算法即可。虽然没办法判断问题是不是 NP 完全问题，但还是有些蛛丝马迹可循的：

1. 元素较少时算法的运行速度非常快，但随着元素数量的增加，速度会变得非常慢。

2. 涉及“所有组合”的问题通常是 NP 完全问题。

3. 不能将问题分成小问题，必须考虑各种可能的情况。这可能是 NP 完全问题。

4. 如果问题涉及序列 (如旅行商问题中的城市序列) 且难以解决，它可能就是 NP 完全问题。如果问题涉及集合 (如广播台集合) 且难以解决，它可能就是 NP 完全问题。

5. 如果问题可转换为集合覆盖问题或旅行商问题，那它肯定是 NP 完全问题。

聪明的你一定能够举一反三，对 NP 问题也会有所感悟，对贪心算法也会有所思考，在具体问题中，一定也会思索贪心算法的意义，既然如此，那还等什么，即刻行动起来，一起感受贪心算法的魅力吧！

2 实验项目结构

- huffman 题目一 *Huffman* 编码
  - util.hpp 常用函数头文件
  - main.cpp 主程序代码，待完成
- threesum 题目二 *3-SUM* 问题
  - include
    - util.hpp 常用函数头文件
    - Solution.hpp 待完成
  - data
  - main.cpp 主程序代码
- assign_cake1 题目三 分配蛋糕 *I* (拓展题)
  - 略
- assign_cake2 题目四 分配蛋糕 *II* (拓展题)
  - 略

请注意，每次修改完代码之后，需要重新编译运行 main.cpp，如果直接执行上次编译好的 main.exe 或 main，新的修改将不会生效。

3 实验内容

3.1 Huffman 编码

首先，我们定义 TreeNode，用来表示 Huffman 树上的节点。有关于优先队列 priority_queue 的使用方法请参考《附录》。

```
struct TreeNode {
    char symbol; // 编码的字母
    double freq; // 对应的频率
    TreeNode *left; // 左孩子
    TreeNode *right; // 右孩子
    // 构造函数
    TreeNode()
        : symbol('\0'), freq(0), left(NULL), right(NULL) {}
    // 用symbol和freq构造 TreeNode 对象
    TreeNode(char symbol_, double freq_)
        : symbol(symbol_), freq(freq_), left(NULL), right(NULL) {}
    // () 函数，用于规定优先队列比较运算
    bool operator () (const TreeNode* lhs, const TreeNode* rhs) {
        return lhs->freq > rhs->freq;
    }
};
```

然后，定义函数 Huffman，将传入的待编码字符集 symbols 和对应的出现频率集合 freqs 进行组合，生成 TreeNode* 集合，用于之后求解哈夫曼树。

```
TreeNode* huffman(string symbols, vector<double> freqs) {
    vector<TreeNode *> tree;
    for (size_t i = 0; i < freqs.size(); i++) {
        tree.push_back(new TreeNode(symbols[i], freqs[i]));
    }
    return Huffman(tree);
}
```

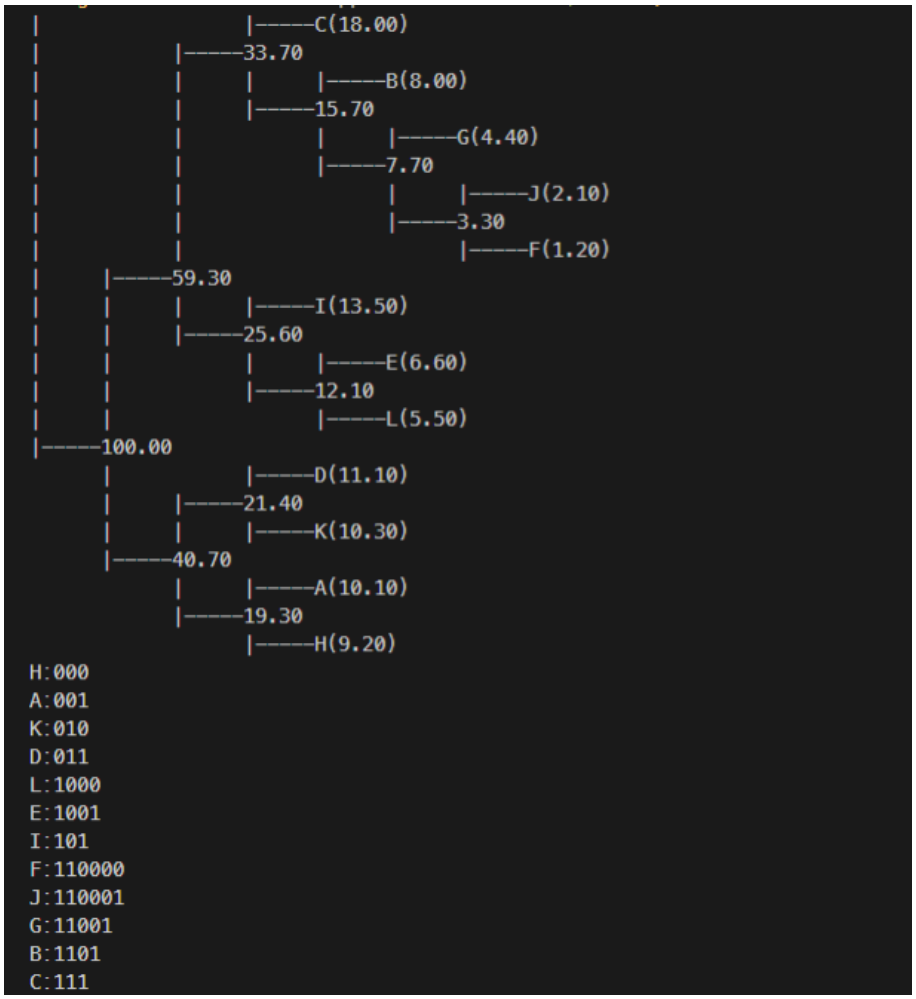
最后，利用 tree 中的节点指针集合，按照贪心算法逐步拼凑出一颗哈夫曼树。

```
TreeNode* huffman(vector<TreeNode*>& tree) {
    int n = tree.size();
    // 创建一个小顶堆
    priority_queue<TreeNode*, vector<TreeNode*>, TreeNode> q;
    // 把 tree 放入 q 中
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        q.push(tree[i]);
    }

    // 请注意，非叶子结点的 symbol 不需要赋值
    // 请在这里完成你的代码
```

```
    return q.top();
}
```

在本题目中，你只需要运行出与下图相类似的结果即可（不一定完全相同，但是总代价需一致）。总代价即 $B(T) = \sum_{c \in C} c.freq \cdot d_T(c)$，其中 c 是字符表 C 中的每个字符，c.freq 表示 c 在文件中出现的频率，$d_T(c)$ 为对应的编码长度。



3.2 3-SUM 问题

给定 A,B,C 三个数组（长度依次为 n, m, p），求出所有满足 $A[i]+B[j] = C[k]$ 的组合，并按照 $A[i], B[j], C[k]$ 的顺序保存每一组值。

下面的代码提供了一种时间复杂度为 $O(nmp)$ 的暴力方法:

```
vector<vector<int>> three_sum_brute_force(vector<int> A, vector<int>
    B, vector<int> C) {
    vector<vector<int>> res;
    for(int i = 0; i < A.size(); i++) {
```

```
        for(int j = 0; j < B.size(); j++) {
          for(int k = 0; k < C.size(); k++) {
            if(C[k] == A[i] + B[j]) {
              vector<int> temp = {A[i], B[j], C[k]};
              res.push_back(temp);
            }
          }
        }
      }
      return res;
}
```

现在需要你利用贪心思想进行优化。

```
vector<vector<int>> three_sum(vector<int>& A, vector<int>& B, vector<
    int> &C) {
    // 请在这里完成你的代码
}
```

提示： 首先将 A, B 进行排序，然后对于每一个 $C[k]$，利用 A 和 B 的单调性快速找到所有满足条件的 $A[i], B[j]$。

数据范围：

- 70% 的数据满足：$1 \leq n, m, p \leq 300$
- 100% 的数据满足：$1 \leq n, m, p \leq 1000$，保证 A 和 B 中所有的元素都不重复出现

4 实验思考

1. Huffman 树在构建过程中，选择的节点左右顺序可以调换吗，为什么?
2. 3-SUM 问题中，你的优化方法时间复杂度是多少?
3. 3-SUM 问题中，如果 A，B 数组中存在重复元素，那么原来的解法是否依旧有效，为什么?

5 拓展实验

5.1 分配蛋糕 I

六一儿童节快到了，作为老师的你想要给班里的孩子们分发一些蛋糕，但是考虑到经费问题，每个孩子最多只能分到一个蛋糕。

班里面共有 n 个孩子，第 i 个孩子的胃口值是 $g[i]$。你提前买到了 m 个蛋糕，第 j 个蛋糕的尺寸是 $s[j]$。第 i 个孩子感到满足的条件是他分配到的蛋糕尺寸大于等于他的胃口值，即 $s[j] >= g[i]$。你能找到一种合理分配蛋糕的方案使得感到满足的孩子数量最多吗？请输出这个数量。

数据范围：$1 \leq n, m \leq 1 * 10^5, 1 \leq g[i], s[j] \leq 10^9$。

- 示例一

  输入：g = [1, 2, 3], s = [1, 1]
  输出：1

- 示例一

  输入：g = [1, 2], s = [1, 2, 3]
  输出：2

请注意本题算法时间复杂度最大应为 $O(n \log n + m \log m)$

5.2 分发蛋糕 II

在本题中，每个孩子的胃口值是一个区间 $g[i][0] \sim g[i][1]$，只有他收到的蛋糕尺寸 x 满足 $g[i][0] \leq x \leq g[i][1]$ 时，才会感到满足。现在老师买了 m 种蛋糕，第 j 种蛋糕的尺寸为 $s[j][0]$，共买了 $s[j][1]$ 个。

你能找到一种合理分配蛋糕的方案使得感到满足的孩子数量最多吗？请输出这个数量。

数据范围：$1 \leq n, m \leq 2500, 1 \leq g[i][0], g[i][1], s[j][0], s[j][1] \leq 1000$。

- 示例

  输入：g = [[3, 10], [2, 5], [1, 5]], s = [[6, 2], [4, 1]]
  输出：2
  解释：第一种蛋糕尺寸为 6，个数为 2。但仅能满足第一个孩子 ([3, 10])，第二种蛋糕尺寸为 4，个数为 1，仅能满足第二个孩子 ([2, 5]) 或第三个孩子 ([1,5])。

请注意本题算法时间复杂度最大应为 $O(nm + n \log n + m \log m)$

6 附录

6.1 sort

C++ STL 提供了 sort 函数，可以方便的对数据进行排序，它包含在 algorithm 头文件中：

```
vector<int> a = {10, 1, 5, 7, 2};
sort(a.begin(), a.end()); // 对 a 中元素进行排序
```

它默认从小到大排序，如果你想从大到小排，可以这样写：

```
bool cmp(int x, int y) {
    return x > y;
}
int main(){
    vector<int> a = {10, 1, 5, 7, 2};
    sort(a.begin(), a.end(), cmp); // 对 a 中元素进行排序
}
```

同样，如果是一个结构体，你也可以用 cmp 来完成排序规则的指定：

```
struct rec {
    int x, y;
    rec(int x, int y):x(x),y(y){}
};
bool cmp(rec &lth, rec &rth) {
    return lth.x == rth.x ? lth.y < rth.y : lth.x < rth.x;
}
int main(){
    vector<rec> a = {{1, 3}, {1, 2}, {2, 3}};
    sort(a.begin(), a.end(), cmp); // 对 a 中元素进行排序
}
```

对于拓展题 II，可能会用到关于 vector 的排序：

```
bool cmp(vector<int> &lth, vector<int> &rth) {
    return lth[0] == rth[0] ? lth[1] < rth[1] : lth[0] < rth[0];
}
int main(){
    vector<vector<int>> a = {{5, 10}, {4, 5}, {3, 8}, {4, 3}};
    sort(a.begin(), a.end(), cmp);
    for(auto &v : a) {
        cout << v[0] << ' ' << v[1] << endl;
    }
}
```

排序后顺序为：[3, 8], [4, 3], [4, 5], [5, 10]

6.2 priority_queue

priority_queue 是 C++ STL 中的优先队列，遵循"First in, Largest out" 原则。它内部实现基于二叉堆，可以像二叉堆一样完成元素的存取。

下面展示了一些优先队列的用法：

```
#include <iostream>
#include <queue> // priority_queue 包含在 queue 头文件中

using namespace std;

int main() {
    priority_queue<int> q; // 构建一个大顶堆
    q.push(3); // 将元素压入堆中
    q.push(1);
    q.push(4);
    q.push(2);
    while(q.size()) { // 或者写成 !q.empty()
        cout << q.top() << ' ';
        q.pop(); // 堆顶弹出
    }
    return 0;
}
```

上述代码的输出结果是 4 3 2 1 。

如果要使用小顶堆，你可以这样做：

```
priority_queue<int, vector<int>, greater<int>> q;
```

其中包含三个模版参数，第一个 int 表示队内元素类型是 int，第二个 vector<int> 表示内部的二叉堆是基于 vector<int> 实现的，第三个参数表示元素排序时采用 greater<int> 规则。

由于内部排序时默认使用的是 less<int> 规则，数组按照从小到大排序，优先队列会优先选取后面的元素放在堆顶，所以当排序规则采用 greater<int> 时，数组将从大到小排序，优先队列仍然优先选取后面的元素即较小的元素放在堆顶，这样就构造出了一个最小堆。

如果堆中的元素是自定义结构体，没有提供像 less 和 greater 这样的比较函数时，我们就需要自定义一个满足需求的排序规则。比如在 Huffman 编码中我们需要对 TreeNode* 自定义排序规则：

```
struct TreeNode {
    char symbol; // 编码的字母
    double freq; // 对应的频率
```

```
    TreeNode *left; // 左孩子
    TreeNode *right; // 右孩子
    // 构造函数
    TreeNode()
        : symbol('\0'), freq(0), left(NULL), right(NULL) {}
    // 用symbol和freq构造 TreeNode 对象
    TreeNode(char symbol_, double freq_)
        : symbol(symbol_), freq(freq_), left(NULL), right(NULL) {}
    // () 函数，用于规定优先队列比较运算
    bool operator () (const TreeNode* lhs, const TreeNode* rhs) {
        return lhs->freq > rhs->freq;
    }
};
priority_queue<TreeNode*, vector<TreeNode*>, TreeNode> q;
```