БГУИР

Кафедра информатики

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 5

Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Выполнил: Проверил:

ст. гр. 553504 Гербик А. И.

Криницин А. В.

Минск 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

[1. Введение 3](#_Toc465628474)

[1.1. Постановка задачи 3](#_Toc465628475)

[1.2. Краткие теоретические сведения 3](#_Toc465628476)

2.  [Исходный код программы………….](#_Toc465628485) 6

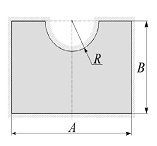
3[. Анализ полученных результатов](#_Toc465628485) 7

# 1.Введение

## Постановка задачи

Пластина прямоугольной формы с вырезом на одной из сторон жестко закреплена по Краям и равномерно нагружена по площади. Прогиб

пластины определяется из уравнения Пуассона см. задание 6). Рассчитайте прогиб W(x,y) поданным, приведенным в таблице: A, B – размеры пластины; h − ее толщина; R – радиус выреза; P – нагрузка Е− модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона. Граничное условие W= 0.





А = 200 мм h = 5 мм v = 0.3

В = 140 мм P = 70 \* 109 H

R = 35 мм E = 40 Н/м2

## Краткие теоретические сведения

Пусть D = {(x, у): 0 < х < 1, 0 < y < 1} — открытый квадрат, Г — его граница, = — замкнутый квадрат, f (х, у) — заданная на достаточно гладкая функция.

Задача Дирихле состоит в следующем. Требуется найти непрерывную на функцию u (х, у), удовлетво­ряющую на открытом квадрате D уравнению Пуассона

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | = f(x, y) | (1) |

и обращающуюся на границе квадрата в нуль, т. е.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | u = 0 на Г. | (2) |

Задача Дирихле (1), (2) имеет единственное реше­ние u (х, у).

Положим h = l/N, = kh, = mh, . Построим сетки

={: k, m = 0, 1, . . . , N },

={: k, m = 1, 2, . . . , N-1},

=\ ( — множество узлов, лежащих на Г).

Зададим нормы

, .

Разностная схема:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , k, m = 1, 2, . . . , N-1, | (3) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | на , | (4) |

Разностное уравнение (3) в более подробной записи имеет вид

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (3\*) |

Его шаблон изображен на рис. 4.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | ◦ |  | |
|  | ◦ | ◦ | ◦ | |
|  |  | ◦ |  | |
|  |  |  |  | |
|  |  |  |  | |
|  | Рис. 4. | | |  |

Решение разностной задачи Дирихле (3), (4) находится методом последовательных приближений по схеме пе­ременных направлений, (33.9), где , —

произвольные. Можно доказать, что

, k, m = 1, 2, . . . , N-1,

при любых начальных приближениях , причем наи­большая скорость сходимости достигается

при . Здесь положена в основу идея о стабилизации при t решения уравнения теплопроводности к решению уравнения Пуассона, если f не зависит от t.

Разностная схема (3), (4) устойчива по правой части, т. е. разностная задача

=, k, m = 1, 2, . . . , N-1,

= 0 на

при любом h = 1/N, N2, имеет единственное реше­ние z, и это решение удовлетворяет неравенству

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (5) |

где с — некоторая постоянная, не зависящая от h и сеточной функции .

Предположим, что решение задачи Дирихле (1), (2) достаточно гладкое на замкнутом квадрате , а именно, u (х, у). Тогда разностное уравнение (3) ап­проксимирует дифференциальное уравнение (2) на реше­нии u задачи (1), (2) со вторым порядком относительно

h, т.е.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (6) |

где

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (7) |

есть невязка u для разностного уравнения.

При получении оценки (6) используется тот факт, что частным производным и , входящим в урав­нение (1), в разностном уравнении (3\*) отвечают вто­рые разностные производные, аппроксимирующие на основании (10.3) указанные частные производные с точ­ностью . Более подробно аналогичные оценки невязок проводятся в §§ 30, 31.

Поскольку краевое условие (2) аппроксимируется на сетке согласно (4) точно, то из (6) и устойчи­вости разностной схемы (3), (4) по правой части вытекает сходимость ее решения к решению u задачи (1), (2) со вторым порядком относительно h, т. е.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (8) |

Действительно, из уравнения (3), равенства (7) и условий (2), (4) вытекает, что погрешность на сетке является решением разностной задачи

=, k, m = 1, 2, . . . , N-1,

= 0 на .

Отсюда и из (5), (6) следует (8).

# Исходный код программы

|  |
| --- |
| # coding: utf-8  # In[1]:  import numpy as np  import sympy as sp  import pandas as pd  # In[2]:  get\_ipython().magic(u'pylab inline')  # In[3]:  x = sp.Symbol('x')  y = sp.Symbol('y')  # In[107]:  T = 0.25  A = 180  B = 50  h = 3  f\_coef = 70\*(10\*\*3) / (40\*8 / 12\*(1-0.3\*0.3)) \* 10\*\*(-4)  print f\_coef  # In[108]:  columns = np.arange(0, A + h, h)  index = np.arange(0, B + h, h)  values = np.zeros((len(columns), len(index)))  # In[109]:  for row\_pos in range(len(index)):  for col\_pos in range(len(columns)):  values[col\_pos][row\_pos] = 0  # In[110]:  eps = 0.01  dmax = 1  iterations = 0  while dmax > eps:  dmax = 0  iterations += 1  for row\_pos in range(1, len(index) - 1):  for col\_pos in range(1, len(columns) - 1):  temp = values[col\_pos][row\_pos]  values[col\_pos][row\_pos] = (values[col\_pos+1][row\_pos] + values[col\_pos-1][row\_pos] +  values[col\_pos][row\_pos+1] + values[col\_pos][row\_pos-1] -  h\*h\*f\_coef)\* 0.25  dm = abs(temp - values[col\_pos][row\_pos])  if (dmax < dm):  dmax = dm  print iterations  # In[111]:  values  # In[112]:  import matplotlib.pyplot as plt  from mpl\_toolkits.mplot3d import Axes3D  xs, ys = np.meshgrid(index, columns)  zs = values  fig = plt.figure()  ax = Axes3D(fig)  ax.plot\_surface(xs, ys, zs, rstride=1, cstride=1, cmap='hot')  plt.show() |

# Анализ полученных результатов

# 

## В результате работы алгоритма получена таблица приближений функции W(x, y) на заданных диапазонах изменения х и у:

## 

## График функции W(x, y):

## 