Софийски университет
"Св. Климент Охридски"

Факултет по математика и информатика

МАШИННО САМООБУЧЕНИЕ

спец. Изкуствен интелект, I курс, зимен семестър
учебна година 2024/2025

Изготвил:
Кристиян Симов
фак. номер 4MI3400288

Дата:
25. 10. 2024 г.
София

Домашна работа №2

Съдържание

1 Решение на задача №1

Нека имаме множество от обучаващи примери S дефинирано чрез таблицата:

Пример	Класификация	A_1	A_2
1	$+$	T	T
2	$+$	T	T
3	-	T	F
4	$+$	F	F
5	-	F	T
6	-	F	T

a) Формулата за изчисление на ентропия от информационната теория за произволно множество от примери S с булеви стойности на целевата функция ($+$ или -) , показваща неговата еднородност, е:

$$Entropy(S) \equiv -p_+ \log_2 p_+ - p_- \log_2 p_-,$$

където p_+ и p_- са съответно отношенията на броя на положителните и отрицателните примери към броят всички примери.

Прилагаме я към конкретното множество S и последователно получаваме:

$$Entropy([3_+, 3_-]) = -\frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} - \frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Очаквано, получихме ентропия равна на 1, тъй като броят на положителните и отрицателните примери е еднакъв (в случая равен на 3).

b) Формулата за изчисление информационната печалба на атрибут A по отношение на произволно множество от примери S е:

$$Gain(S, A) \equiv Entropy(S) - \sum_{v \in Values(A)} \frac{|S_v|}{|S|} Entropy(S_v),$$

където $Values(A)$ е множеството от възможни стойности на атрибута A, а множеството $S_v = \{s \in S | A(s) = v\}$.

Прилагаме я към атрибута A_2 по отношение на конкретното множество S и последователно получаваме:

$$\begin{aligned}
Gain(S, A_2) &= Entropy(S) - \sum_{v \in Values(A_2)} \frac{|S_v|}{|S|} Entropy(S_v) \\
&= 1 - \sum_{v \in \{T,F\}} \frac{|S_v|}{6} Entropy(S_v) \\
&= 1 - \frac{|S_T|}{6} Entropy(S_T) - \frac{|S_F|}{6} Entropy(S_F) \\
&= 1 - \frac{4}{6} Entropy([2_+, 2_-]) - \frac{2}{6} Entropy([1_+, 1_-]) \\
&= 1 - (\frac{4}{6})1 - (\frac{2}{6})1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Очаквано, получихме печалба равна на 0, тъй като броят на положителните и отрицателните примери е еднакъв в подмножествата S_T и S_F.

2 Решение на задача №2

а) Нека имаме множество от обучаващи примери S дефинирано чрез таблицата:

Пример	*Небе*	*Въздух*	*Влажност*	*Вятър*	*Вода*	*Прогноза*	*Харесва*
1	Слънце	Топъл	Нормална	Силен	Топла	Същото	**да**
2	Слънце	Топъл	Висока	Силен	Топла	Същото	**да**
3	Дъжд	Студен	Висока	Силен	Топла	Промяна	**не**
4	Слънце	Топъл	Висока	Силен	Студена	Промяна	**да**

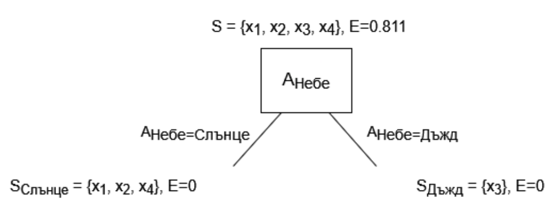
Тогава алгоритъмът ID3 ще премине през рекурсивните извиквания:

0) $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, A = \{A_{\text{Небе}}, A_{\text{Въздух}}, A_{\text{Влажност}}, A_{\text{Вятър}}, A_{\text{Вода}}, A_{\text{Прогноза}}\}$

$$Entropy(S) = Entropy([3_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}]) = -\tfrac{3}{4}\log_2 \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\log_2 \tfrac{1}{4} \approx 0.811$$

$$\begin{aligned} Gain(A_{\text{Небе}}, S) &= Entropy(S) - \frac{3}{4}Entropy([3_{\textbf{да}}, 0_{\textbf{не}}]) - \frac{1}{4}Entropy([0_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}]) \\ &\approx 0.811 - \frac{3}{4}0 - \frac{1}{4}0 \approx 0.811 - 0 - 0 \approx 0.811 \leftarrow best(max) \end{aligned}$$

Тъй като при атрибут $A_{\text{Небе}}$ достигнахме максималната стойност на функцията $Gain(A, S)$ е излишно да пресмятаме останалите печалби.



Фигура 1: Построяваме клон за $A_{\text{Небе}} = \text{Слънце}$ и $A_{\text{Небе}} = \text{Дъжд}$. Разделяме множеството S на $S_{\text{Слънце}} = \{x_1, x_2, x_4\}$ и $S_{\text{Дъжд}} = \{x_3\}$ и извикваме ID3 върху всяко от тях, но с множество $A \setminus A_{\text{Небе}}$.

1) $S_{\text{Слънце}} = \{x_1, x_2, x_4\}, A = \{A_{\text{Въздух}}, A_{\text{Влажност}}, A_{\text{Вятър}}, A_{\text{Вода}}, A_{\text{Прогноза}}\}$

$Entropy(S_{\text{Слънце}}) = Entropy([3_{\textbf{да}}, 0_{\textbf{не}}]) = 0$

Множеството $S_{\text{Слънце}}$ е напълно еднородно - образуваме листо "да".

Не се генерират повече рекурсивни извиквания на ID3.

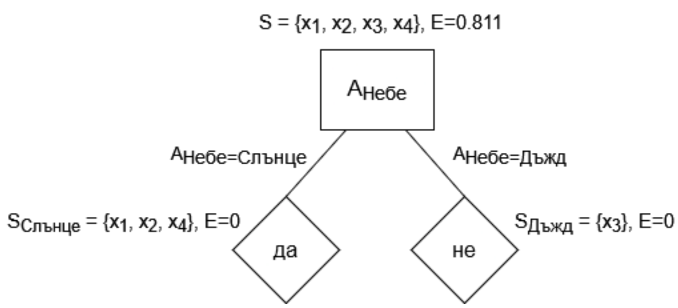
2) $S_{\text{Дъжд}} = \{x_3\}, A = \{A_{\text{Въздух}}, A_{\text{Влажност}}, A_{\text{Вятър}}, A_{\text{Вода}}, A_{\text{Прогноза}}\}$

$Entropy(S_{\text{Дъжд}}) = Entropy([0_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}]) = 0$

Множеството $S_{\text{Дъжд}}$ е напълно еднородно - образуваме листо "не".

Не се генерират повече рекурсивни извиквания на ID3.

Край - дървото е обучено и след 1) и 2) изглежда така:



Фигура 2: На изображението виждаме, че още след първото най-добро разделяне дървото е обучено успешно.

b) Нека към предходната таблица за S прибавим още един обучаващ пример:

Пример	*Небе*	*Въздух*	*Влажност*	*Вятър*	*Вода*	*Прогноза*	*Харесва*
1	Слънце	Топъл	Нормална	Силен	Топла	Същото	**да**
2	Слънце	Топъл	Висока	Силен	Топла	Същото	**да**
3	Дъжд	Студен	Висока	Силен	Топла	Промяна	**не**
4	Слънце	Топъл	Висока	Силен	Студена	Промяна	**да**
5	Слънце	Топъл	Нормална	Слаб	Топла	Същото	**не**

Тогава алгоритъмът ID3 ще премине през рекурсивните извиквания:

0) $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, A = \{A_{\text{Небе}}, A_{\text{Въздух}}, A_{\text{Влажност}}, A_{\text{Вятър}}, A_{\text{Вода}}, A_{\text{Прогноза}}\}$

$$Entropy(S) = Entropy([3_{\textbf{да}}, 2_{\textbf{не}}]) = -\tfrac{3}{5}\log_2\tfrac{3}{5} - \tfrac{2}{5}\log_2\tfrac{2}{5} \approx 0.970$$

$$\begin{aligned} Gain(A_{\text{Небе}}, S) &\approx 0.970 - (\frac{1}{5}Entropy([0_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}]) + \frac{4}{5}Entropy([3_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}])) \\ &\approx 0.970 - \frac{1}{5}0 - \frac{4}{5}0.811 \approx 0.970 - 0.65 \approx 0.32 \end{aligned}$$

$$Gain(A_{\text{Въздух}}, S) = Gain(A_{\text{Небе}}, S) \approx 0.32$$

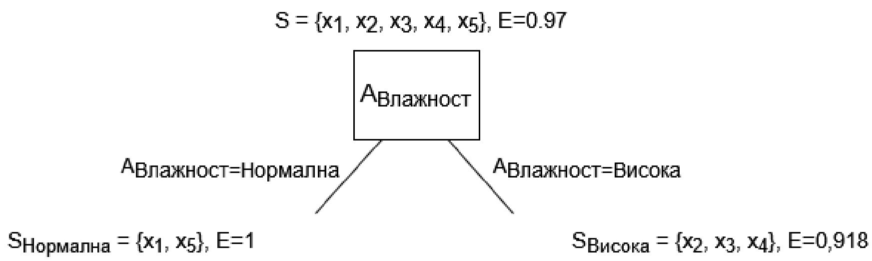
$$\begin{aligned} Gain(A_{\text{Влажност}}, S) &\approx 0.970 - (\frac{2}{5}Entropy([1_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}]) + \frac{3}{5}Entropy([2_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}])) \\ &\approx 0.970 - \frac{2}{5}1 - \frac{3}{5}0.918 \approx 0.970 - 0.55 \approx 0.42 \leftarrow best \end{aligned}$$

$$Gain(A_{\text{Вятър}}, S) = Gain(A_{\text{Небе}}, S) \approx 0.32$$

$$Gain(A_{\text{Вода}}, S) \approx 0.970 - (\frac{1}{5}Entropy([1_{\textbf{да}}, 0_{\textbf{не}}]) + \frac{4}{5}Entropy([2_{\textbf{да}}, 2_{\textbf{не}}]))$$
$$\approx 0.970 - \frac{1}{5}0 - \frac{4}{5}1 \approx 0.970 - 0.8 \approx 0.17$$

$$Gain(A_{\text{Прогноза}}, S) = Gain(A_{\text{Влажност}}, S) \approx 0.42$$

Тъй като $Gain(A_{\text{Прогноза}}, S) \leq Gain(A_{\text{Влажност}}, S) = 0.42$, то 0.42 е максималната печалба, достигната първо при атрибута $A_{\text{Влажност}}$.



Фигура 3: Построяваме клон за $A_{\text{Влажност}}$ = Нормална и $A_{\text{Влажност}}$ = Висока. Разделяме множеството S на $S_{\text{Нормална}} = \{x_1, x_5\}$ и $S_{\text{Висока}} = \{x_2, x_3, x_4\}$ и извикваме ID3 върху всяко от тях, но с множество $A \setminus A_{\text{Влажност}}$.

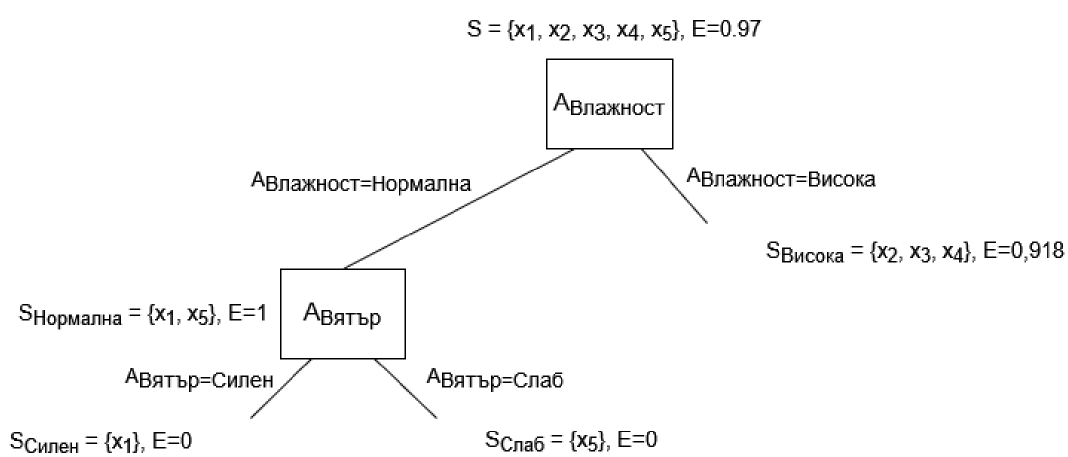
1) $S_{\text{Нормална}} = \{x_1, x_5\}, A = \{A_{\text{Небе}}, A_{\text{Въздух}}, A_{\text{Вятър}}, A_{\text{Вода}}, A_{\text{Прогноза}}\}$

$$Entropy(S_{\text{Нормална}}) = Entropy([1_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}]) = -\tfrac{1}{2}\log_2 \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log_2 \tfrac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} Gain(A_{\text{Небе}}, S_{\text{Нормална}}) &= Gain(A_{\text{Въздух}}, S_{\text{Нормална}}) \\ &= Gain(A_{\text{Вода}}, S_{\text{Нормална}}) \\ &= Gain(A_{\text{Прогноза}}, S_{\text{Нормална}}) \\ &= 1 - Entropy([1_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}]) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Gain(A_{\text{Вятър}}, S_{\text{Нормална}}) &= 1 - Entropy([1_{\textbf{да}}, 0_{\textbf{не}}]) - Entropy([0_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}]) \\ &= 1 - 0 - 0 = 1 \leftarrow best \end{aligned}$$

Тъй като $Gain(A_{\text{Вятър}}, S_{\text{Нормална}}) = 1$, то това е максималната печалба, достигната при атрибута $A_{\text{Вятър}}$.



Фигура 4: Построяваме клон за $A_{\text{Вятър}} = \text{Силен}$ и $A_{\text{Вятър}} = \text{Слаб}$. Разделяме множеството $S_{\text{Нормална}}$ на $S_{\text{Силен}} = \{x_1\}$ и $S_{\text{Слаб}} = \{x_5\}$ и извикваме ID3 върху всяко от тях, но с множество $A \setminus A_{\text{Вятър}}$.

2) $S_{\text{Силен}} = \{x_1\}, A = \{A_{\text{Небе}}, A_{\text{Въздух}}, A_{\text{Вода}}, A_{\text{Прогноза}}\}$

$Entropy(S_{\text{Силен}}) = Entropy([1_{\mathbf{да}}, 0_{\mathbf{не}}]) = 0$

Множеството $S_{\text{Силен}}$ е напълно еднородно - образуваме листо "да".

Не се генерират повече рекурсивни извиквания на ID3.

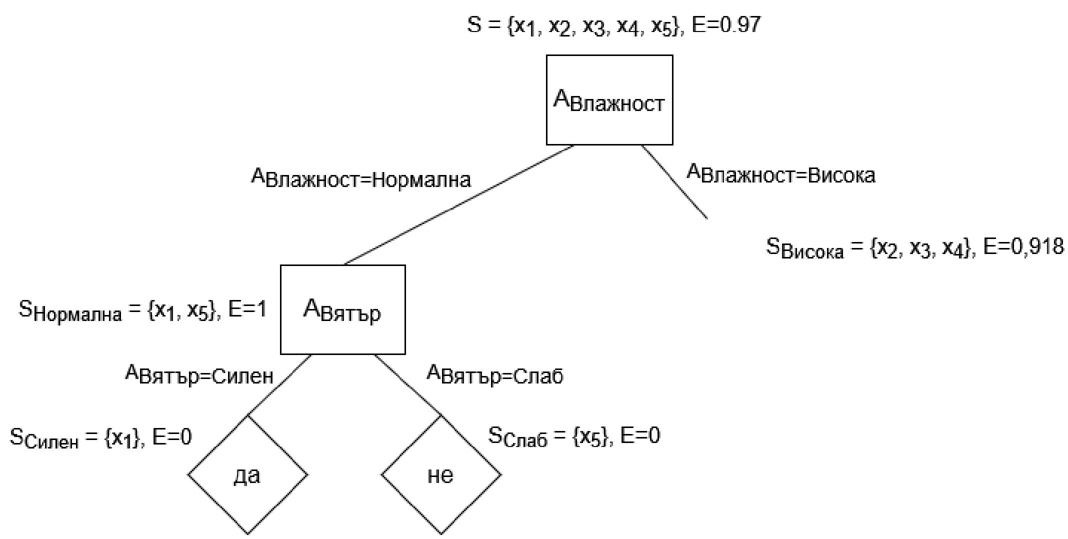
3) $S_{\text{Слаб}} = \{x_5\}, A = \{A_{\text{Небе}}, A_{\text{Въздух}}, A_{\text{Вода}}, A_{\text{Прогноза}}\}$

$Entropy(S_{\text{Слаб}}) = Entropy([0_{\mathbf{да}}, 1_{\mathbf{не}}]) = 0$

Множеството $S_{\text{Слаб}}$ е напълно еднородно - образуваме листо "не".

Не се генерират повече рекурсивни извиквания на ID3.

След 2) и 3) дървото вече изглежда така:



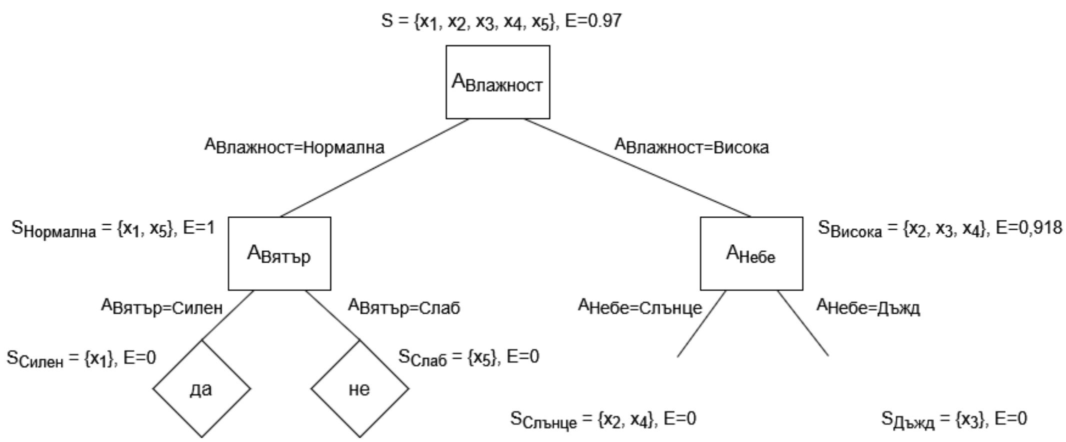
Фигура 5: На изображението виждаме, че лявото поддърво е обучено успешно. Предстои рекурсията да се върне и обработи дясното поддърво.

4) $S_{\text{Висока}} = \{x_2, x_3, x_4\}, A = \{A_{\text{Небе}}, A_{\text{Въздух}}, A_{\text{Вода}}, A_{\text{Прогноза}}\}$

$$Entropy(S_{\text{Висока}}) = Entropy([2_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}]) = -\tfrac{2}{3}\log_2 \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}\log_2 \tfrac{1}{3} \approx 0.918$$

$$\begin{aligned} Gain(A_{\text{Небе}}, S_{\text{Висока}}) &\approx 0.918 - (\frac{2}{3}Entropy([2_{\textbf{да}}, 0_{\textbf{не}}]) + \frac{1}{3}Entropy([0_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}])) \\ &\approx 0.918 - (\frac{2}{3}0 + \frac{1}{3}0) \\ &\approx 0.918 - 0 \approx 0.918 \leftarrow best(max) \end{aligned}$$

Тъй като при атрибут $A_{\text{Небе}}$ достигнахме максималната стойност на функцията $Gain(A, S_{\text{Висока}})$ е излишно да пресмятаме останалите печалби.



Фигура 6: Построяваме клон за $A_{\text{Небе}} = \text{Слънце}$ и $A_{\text{Небе}} = \text{Дъжд}$. Разделяме множеството $S_{\text{Висока}}$ на $S_{\text{Слънце}} = \{x_2, x_4\}$ и $S_{\text{Дъжд}} = \{x_3\}$ и извикваме ID3 върху всяко от тях, но с множество $A \setminus A_{\text{Небе}}$.

5) $S_{\text{Слънце}} = \{x_2, x_4\}, A = \{A_{\text{Въздух}}, A_{\text{Вятър}}, A_{\text{Вода}}, A_{\text{Прогноза}}\}$

$Entropy(S_{\text{Слънце}}) = Entropy([2_{\textbf{да}}, 0_{\textbf{не}}]) = 0$

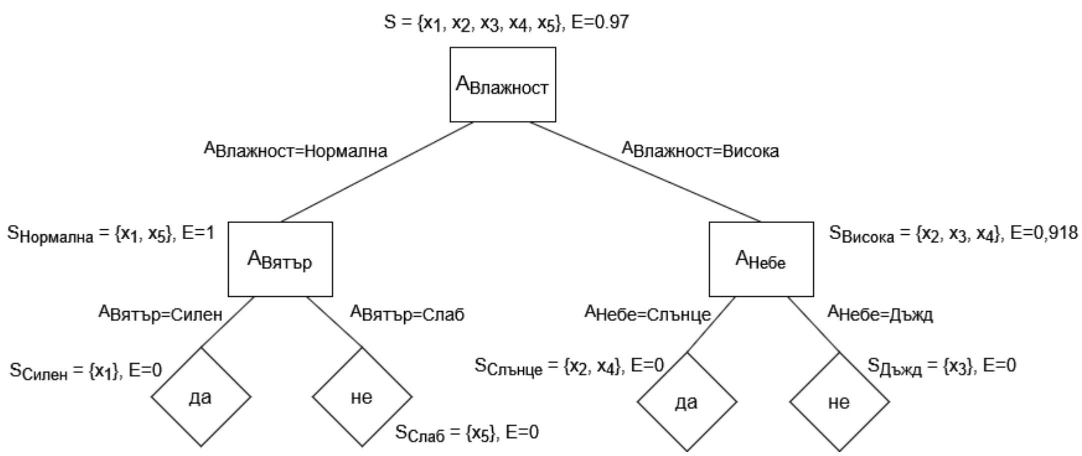
Множеството $S_{\text{Слънце}}$ е напълно еднородно - образуваме листо "да".

6) $S_{\text{Дъжд}} = \{x_3\}, A = \{A_{\text{Въздух}}, A_{\text{Вятър}}, A_{\text{Вода}}, A_{\text{Прогноза}}\}$

$Entropy(S_{\text{Дъжд}}) = Entropy([0_{\textbf{да}}, 1_{\textbf{не}}]) = 0$

Множеството $S_{\text{Дъжд}}$ е напълно еднородно - образуваме листо "не".

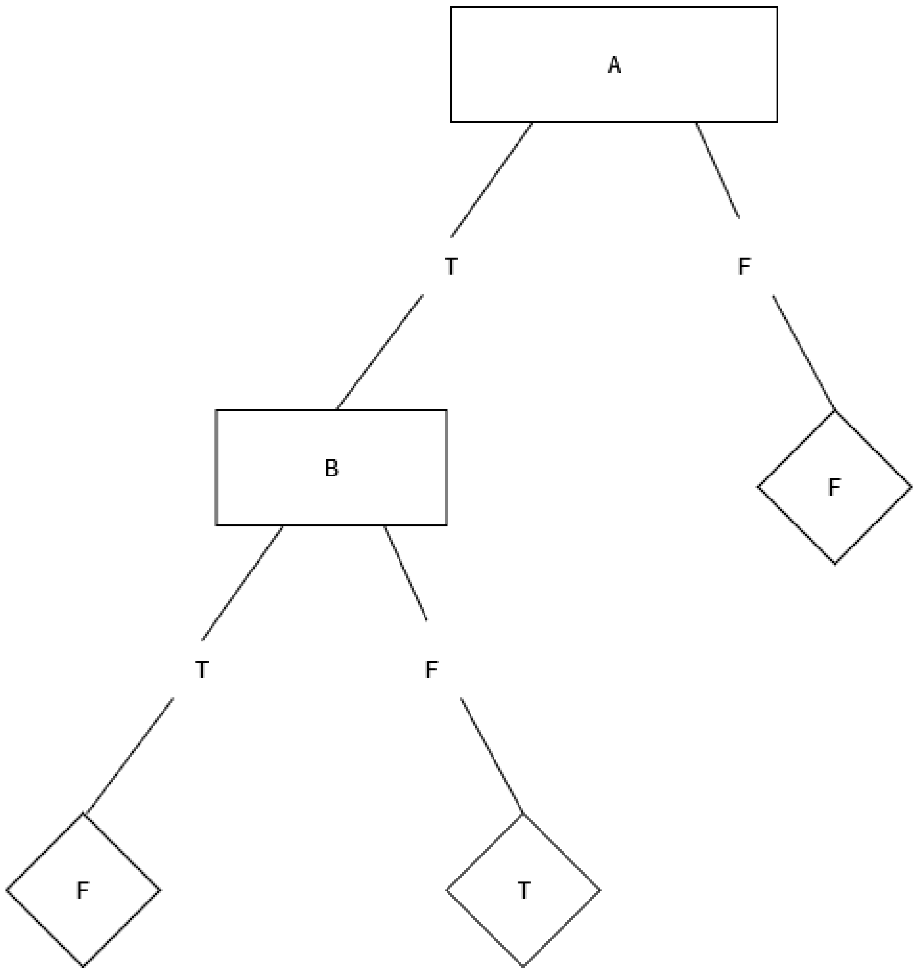
Край - дървото е обучено и след 5) и 6) изглежда така:



Фигура 7: На изображението виждаме, че вече след първото най-добро разделяне се налага ID3 да избере още едно такова както за множеството в лявото поддърво, така и за това в дясното поддърво, след което дървото е обучено успешно.

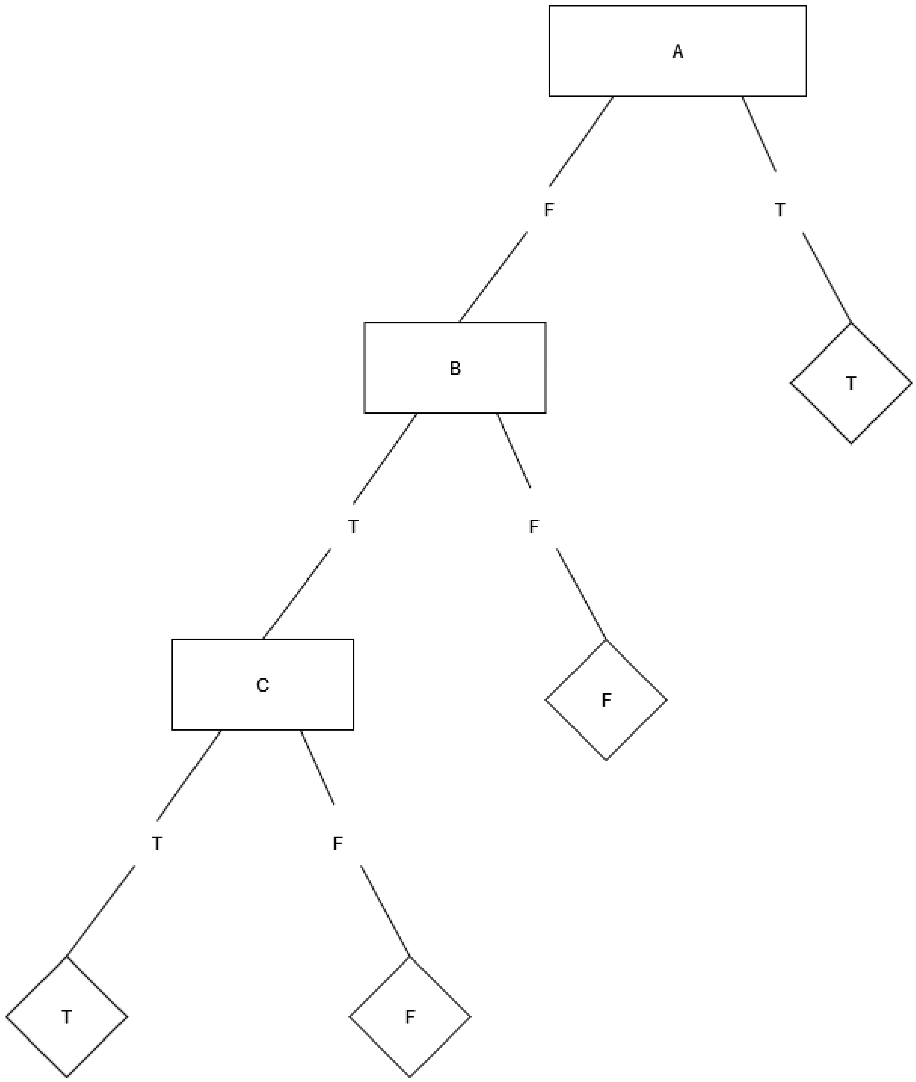
3 Решение на задача №3

a) $A \wedge \neg B$



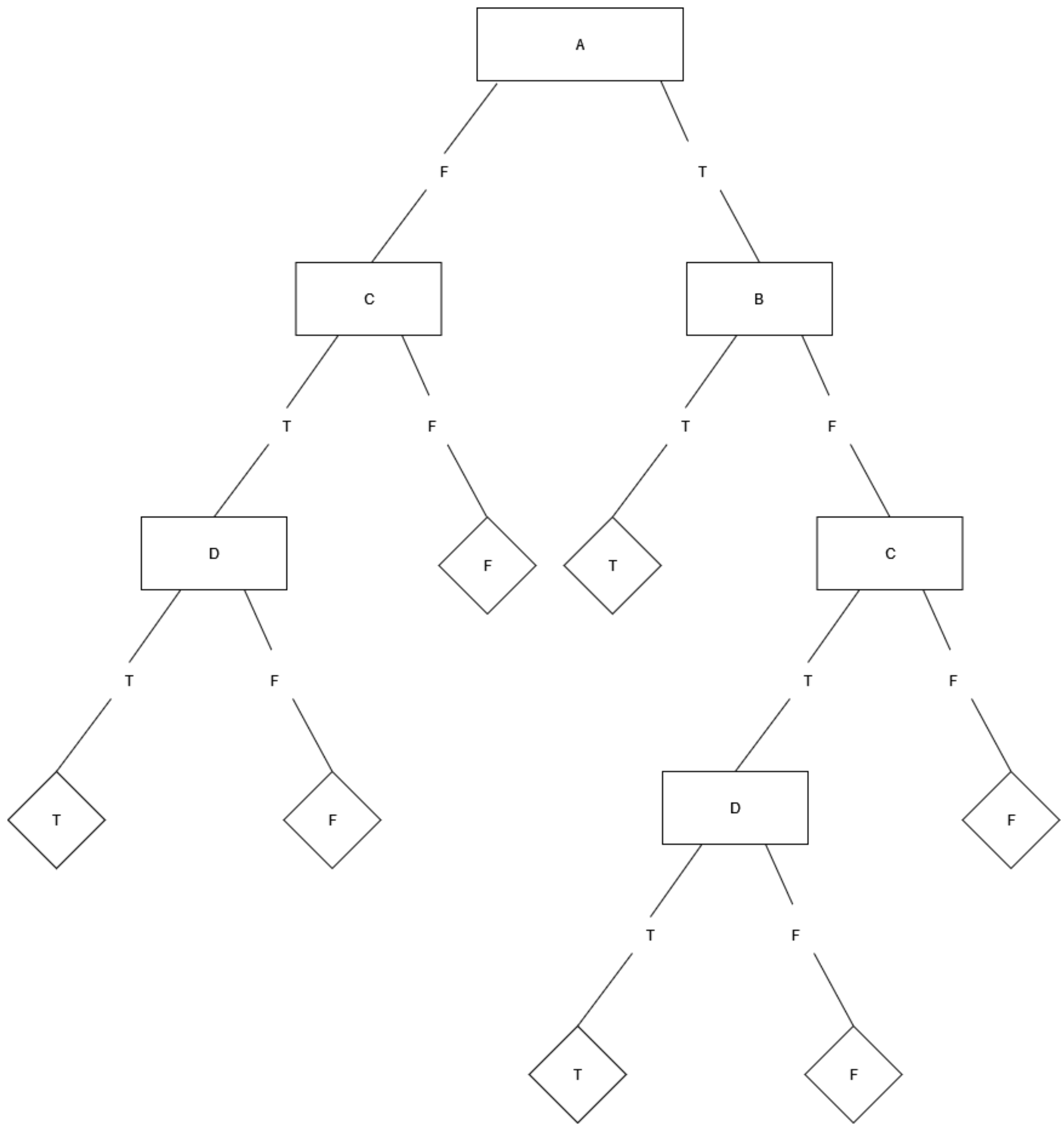
Фигура 8: a)

b) $A \vee (B \wedge C)$



Фигура 9: b)

c) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$



Фигура 10: c)

4 Решение на задача №4

Нека D1 и D2 са класификационни дървета описващи булеви функции (като тези от Задача №3), такива че D2 е получено от D1 чрез заместване на листо (термален възел) в D1 с цяло поддърво T'.

Ще покажем, че твърдението:

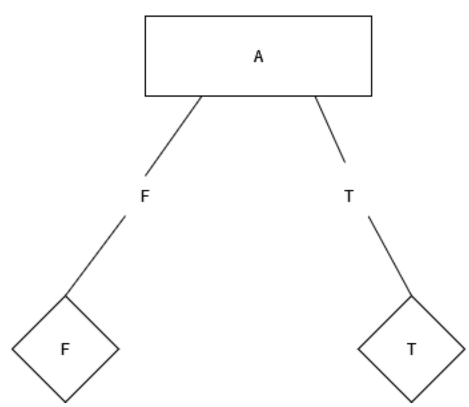
*D1 е **по-общо-или-равно-на** D2*

е **не**винаги в сила.

1) Нека за простота D1 се описва чрез израза:

A

Тогава D1 ще изглежда така:

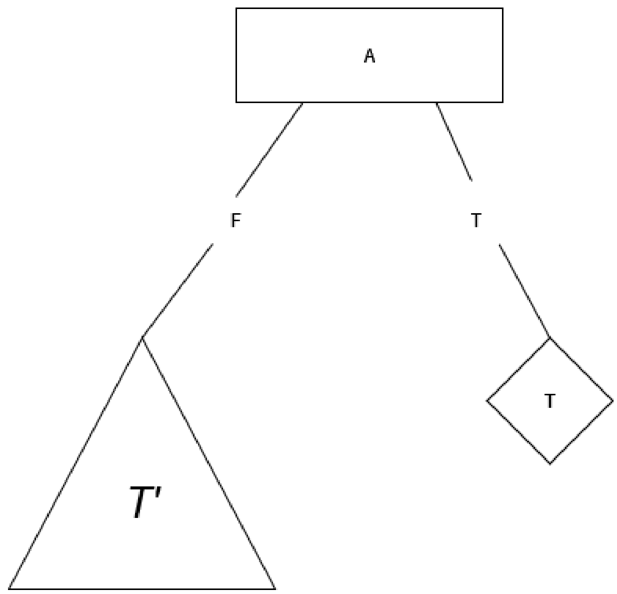


Фигура 11: D1

1) Нека получим израз за D2 от този на D1 чрез добавяне на непразния (състоящ се поне от променлива B) израз на поддърво T' посредством дизюнкция:

$A \vee T'$

Тогава D2 най-общо ще изглежда така:

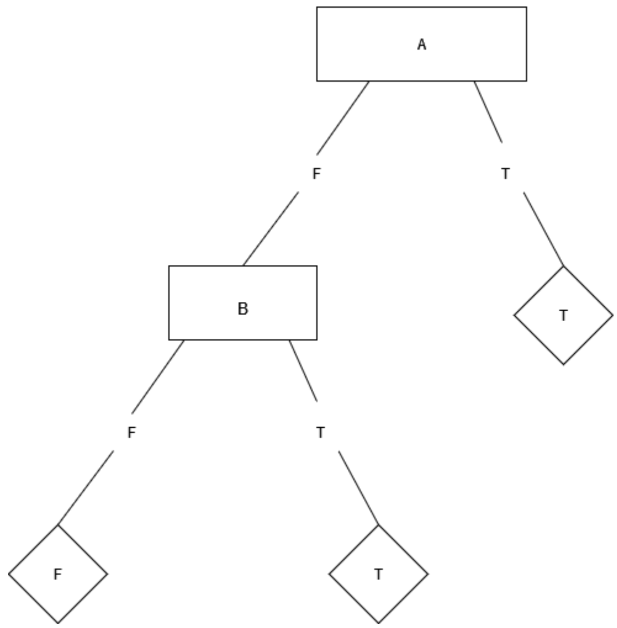


Фигура 12: D2

Забелязваме, че вече оценката на пример с $A = F$ не е директно F, а вече зависи от резултата от минаването по поддървото T'. Ако резултатът от това минаване е T, тогава общия резултат ще е T противно на резултатът F, получен при $A = F$ в D1. Това би означавало противоречие с твърдението, тъй като примерът $A = F \wedge T' = T$ се покрива от хипотезата D2, но не от хипотезата D1. Нека за простота изразът описващ поддървото T' е равен на B. Тоест израза за D2 става:

$A \vee B$

Тогава D2 ще изглежда по следния начин:



Фигура 13: D2

Нека разгледаме примерът $x \equiv A = F \wedge B = T$. Той се покрива от хипотезата D2 ($D2(x) = T$), но не се покрива от хипотезата D1 ($D1(x) = F$). D1 го "изпуска". Достигнахме до противоречие с твърдението *D1 е* ***по-общо-или-равно-на*** *D2*. $\square$