Софийски университет "Св. Климент Охридски"

Факултет по математика и информатика

МАШИННО САМООБУЧЕНИЕ

спец. Изкуствен интелект, I курс, зимен семестър
учебна година 2024/2025

Изготвил:
Кристиян Симов
фак. номер 4MI3400288

Дата:
23. 10. 2024 г.
София

Домашна работа №1

Съдържание

1 Решение на задача №1

Нека в контекста на изграждане на хипотези означим с ? - всички стойности на атрибут са възможни, а с $\varnothing$ - нито една не е възможна.

Нека означим множествата с допустимите стойности (без $\varnothing$ и ?) за всеки от n-те атрибута с фамилията $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$.

Нека $m_1 = |A_1|, m_2 = |A_2|, ..., m_n = |A_n|$

Тогава за задачата от Лекция 1 имаме $m_1 = 3, m_2 = 2, ..., m_6 = 2$

По вероятностни съображения, тъй като можем да избираме първо по 3 начина, после по 2, ... , накрая отново по 2, получаваме, че броя на всички различни възможни примери е точно числото:

$$E_6 = \prod_{i=1}^{6} m_i = 3 * 2^5 = 3 * 32 = 96$$

За броя на възможните хипотези, които в тази задача имат вида $\langle a_1, ..., a_6 \rangle$, където $a_i \in A_i$ или $a_i = ?$, или $a_i = \varnothing$, правим аналогично съображение на предходното, но към всяка мощност m_i трябва да прибавим 2 (броим ? и $\varnothing$, като валидни стойности за a_i). Така бихме получили:

$$\prod_{i=1}^{6} (m_i + 2) = 5 * 4^5 = 5 * 1024 = 5120,$$

но ще преброим всеки вектор $\langle a_1, ..., a_6 \rangle$, където за някое i имаме $a_i = \varnothing$. Тези вектори за нашите цели ефективно са като вектора $\langle \varnothing, \varnothing, ..., \varnothing \rangle$ и затова нека преброим само него и към броя възможности прибавяме само 1-ца (за ?). Така броя на различните възможни хипотези спада на едва:

$$H_6 = 1 + \prod_{i=1}^{6} (m_i + 1) = 1 + 4 * 3^5 = 1 + 4 * 243 = 1 + 972 = 973$$

Нека добавим множество A_7 с мощност $m_7 = 3$ (по условие) към фамилията A. Тогава вече ще имаме брой възможни примери равен на:

$$E_6 * m_7 = (\prod_{i=1}^{6} m_i) * m_7 = \prod_{i=1}^{7} m_i = 96 * 3 = 288$$

От своя страна, броят хипотези ще се измени по следния начин:

$$1 + (\prod_{i=1}^{6}(m_i + 1)) * (m_7 + 1) = 1 + 972 * 4 = 1 + 3888 = 3889$$

Или изразено чрез H_6:

$$1 + (H_6 - 1) * (m_7 + 1) = H_6 * (m_7 + 1) - m_7 = 973 * 4 - 3 = 3892 - 3 = 3889$$

Нека по-общо прибавим $(n+1)$-во множество A_{n+1} ($\varnothing \notin A_{n+1}$ и $? \notin A_{n+1}$) с мощност k, т.е. $m_{n+1} = |A_{n+1}| = k$, към фамилията A.

Тогава ако функцията $E_n = E(n)$ описва нарастването на броя възможни примери, а $H_n = H(n)$ - на броя възможни хипотези то:

$E(n + 1) = E(n) * m_{n+1} = E(n) * k$
$H(n + 1) = H(n) * (m_{n+1} + 1) - m_{n+1} = H(n) * (k + 1) - k$

2 Решение на задача №2

Нека в множество D имаме обучаващи примери от вида $\langle x, c(x) \rangle$, които в зависимост от реда на постъпване при обучението са индексирани по следния начин (в обратен ред спрямо таблицата от Лекция 1):

$x_1 = \langle$ *Слънце, Топъл, Висока, Силен, Студена, Промяна* $\rangle+$

$x_2 = \langle$ *Дъжд, Студен, Висока, Силен, Топла, Промяна* $\rangle-$

$x_3 = \langle$ *Слънце, Топъл, Висока, Силен, Топла, Същото* $\rangle+$

$x_4 = \langle$ *Слънце, Топъл, Нормална, Силен, Топла, Същото* $\rangle+$

Тогава алгоритъмът CANDIDATE-ELIMINATION ще премине през следните стъпки:

0) Инициализация

$G_0 \leftarrow \langle$ *?, ?, ?, ?, ?, ?* $\rangle$

$S_0 \leftarrow \langle \varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing \rangle$

1) $x_1 = \langle$ *Слънце, Топъл, Висока, Силен, Студена, Промяна* $\rangle+$

Примерът е положителен. В G_0 няма несъвместими хипотези, остава както е. S_0 е несъвместима, тъй като е твърде специфична, премахваме я. В съответствие с x_1 добавяме хипотеза s_1 към S_1.

$S_1 \leftarrow \langle$ *Слънце, Топъл, Висока, Силен, Студена, Промяна* $\rangle$

$G_1 \leftarrow G_0$

2) $x_2 = \langle$ *Дъжд, Студен, Висока, Силен, Топла, Промяна* $\rangle -$

Примерът е отрицателен. В S_1 няма несъвместими хипотези, остава както е. G_1 е несъвместима, тъй като е твърде обща, премахваме я. В съответствие с x_2 и S_2 добавяме само хипотези $g_{2.1}$, $g_{2.2}$ и $g_{2.5}$ към G_2:

$S_2 \leftarrow S_1$

$G_2 \leftarrow \langle$ *Слънце, ?, ?, ?, ?, ?* $\rangle$

$G_2 \leftarrow \langle$ *?, Топъл, ?, ?, ?, ?* $\rangle$

$G_2 \leftarrow \langle$ *?, ?, ?, ?, Студена, ?* $\rangle$

3) $x_3 = \langle$ *Слънце, Топъл, Висока, Силен, Топла, Същото* $\rangle +$

Примерът е положителен. S_2 е несъвместима, тъй като е твърде специфична. Обобщаваме единствената хипотеза в нея до s_3 и получаваме S_3. Вече хипотезата $g_{2.5}$ от G_2 е несъвместима с резюмето s_3 на всички положителни примери до този момент, премахваме я от G_2 и получаваме G_3.

$S_3 \leftarrow \langle$ *Слънце, Топъл, Висока, Силен, ?, ?* $\rangle$

$G_3 \leftarrow G_2 \setminus \langle$ *?, ?, ?, ?, Студена, ?* $\rangle$

4) $x_4 = \langle$ *Слънце, Топъл, Нормална, Силен, Топла, Същото* $\rangle +$

Примерът е положителен. S_3 е несъвместима, тъй като е твърде специфична. Обобщаваме единствената хипотеза в нея до s_4 и получаваме S_4. Новополученото резюме s_4 е съвместимо с хипотезите от G_3. Следователно за G_4 получаваме G_3.

$S_4 \leftarrow \langle$ *Слънце, Топъл, ?, Силен, ?, ?* $\rangle$

$G_4 \leftarrow G_3 = \{\langle$ *Слънце, ?, ?, ?, ?, ?* $\rangle, \langle$ *?, Топъл, ?, ?, ?, ?* $\rangle\}$
Очаквано, получихме същия резултат като при $x_4 \to x_3 \to x_2 \to x_1$. $\square$

3 Решение на задача №3

Нека бележим хипотезите (правоъгълниците) по следния съкратен начин:

$$h_{\square} = \langle a, b, c, d \rangle$$

Да приемем, че всичките обучаващи примери (както и бъдещи примери за класификация) се побират в двумерно пространство на характеристиките (атрибутите) с размерност 10 на 10, център $(0, 0)$ и дискретни стойности - единствено положителни цели числа.

Нека в множество D имаме обучаващи примери от вида $\langle x, c(x) \rangle$, които в зависимост от реда на постъпване при обучението са индексирани по следния начин (напълно произволно, с изключение на това че първо са индексирани положителните примери, с цел стегнатост на решението - ако имаме резюмето на положителните по начало, ще можем с лекота да отхвърлим множество от хипотези за G):

$$x_1 = \langle\ 6,\ 5\ \rangle +$$

$$x_2 = \langle\ 5,\ 3\ \rangle +$$

$$x_3 = \langle\ 4,\ 4\ \rangle +$$

$$x_4 = \langle\ 5,\ 1\ \rangle -$$

$$x_5 = \langle\ 1,\ 3\ \rangle -$$

$$x_6 = \langle\ 2,\ 6\ \rangle -$$

$$x_7 = \langle\ 5,\ 8\ \rangle -$$

$$x_8 = \langle\ 9,\ 4\ \rangle -$$

Тогава алгоритъмът CANDIDATE-ELIMINATION ще премине през следните стъпки:

0) Инициализация

$S_0 \leftarrow \langle \varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing \rangle$

$G_0 \leftarrow \langle 0, 10, 0, 10 \rangle$

1) $x_1 = \langle\ 6,\ 5\ \rangle +$

Примерът е положителен. G_0 е съвместима. S_0 е твърде специфична, тъй като е несъвместима. Обобщаваме я и получаваме S_1 - правоъгълник, който покрива точно една точка - самата x_1.

$S_1 \leftarrow \langle 6, 6, 5, 5 \rangle$

$G_1 \leftarrow G_0$

2) $x_2 = \langle\ 5,\ 3\ \rangle +$

Примерът е положителен. G_1 е съвместима. Остава както е. S_1 е твърде специфична и значи несъвместима. Обобщаваме я и получаваме S_2 - правоъгълник, който покрива точно двете точки x_1 и x_2.

$S_2 \leftarrow \langle 5, 6, 3, 5 \rangle$

$G_2 \leftarrow G_1$

3) $x_3 = \langle\ 4,\ 4\ \rangle +$

Примерът е положителен. G_2 е съвместима. Остава както е. S_2 е твърде специфична и значи несъвместима. Обобщаваме я и получаваме S_3 - правоъгълник, който покрива точно трите точки x_1, x_2 и x_3.

$S_3 \leftarrow \langle 4, 6, 3, 5\rangle$

$G_3 \leftarrow G_2$

4) $x_4 = \langle\ 5,\ 1\ \rangle-$

Примерът е отрицателен. S_3 е съвместима. Остава както е. G_3 е твърде обща и значи несъвместима. Специфицираме я и получаваме g_4 - единствен правоъгълник, който е съвместим едновременно с S_3 и с новата точка x_4.

$S_4 \leftarrow S_3$

$G_4 \leftarrow \langle 0, 10, 2, 10\rangle$

5) $x_5 = \langle\ 1,\ 3\ \rangle-$

Примерът е отрицателен. S_4 е съвместима. Остава както е. G_4 е твърде обща и значи несъвместима. Специфицираме я и получаваме g_5 - единствен правоъгълник, който е съвместим едновременно с S_4 и с новата точка x_5.

$S_5 \leftarrow S_4$

$G_5 \leftarrow \langle 2, 10, 2, 10\rangle$

6) $x_6 = \langle\ 2,\ 6\ \rangle-$

Примерът е отрицателен. S_5 е съвместима. Остава както е. g_5 от G_5 е твърде обща и значи несъвместима. Специфицираме я и получаваме $g_{6.1}$ и $g_{6.2}$- два възможни правоъгълника, който са съвместими едновременно с S_5 и с новата точка x_6.

$S_6 \leftarrow S_5$

$G_6 \leftarrow \{\langle 3, 10, 2, 10\rangle, \langle 2, 10, 2, 5\rangle\}$

7) $x_7 = \langle\ 5,\, 8\ \rangle -$

Примерът е отрицателен. S_6 е съвместима. Остава както е. $g_{6.1}$ от G_6 е твърде обща и значи несъвместима. Специфицираме я и получаваме $g_{7.2}$, а $g_{7.1}$ е съвместимата $g_{6.2}$ от G_6. Накрая, в G_7 имаме единствено два възможни правоъгълника, който са съвместими едновременно с S_6 и с новата точка x_7.

$$S_7 \leftarrow S_6$$

$$G_7 \leftarrow (G_6 \setminus \{3, 10, 2, 10\}) \cup \{\langle 3, 10, 2, 7\rangle\}$$

$$G_7 = \{\langle 2, 10, 2, 5\rangle, \langle 3, 10, 2, 7\rangle\}$$

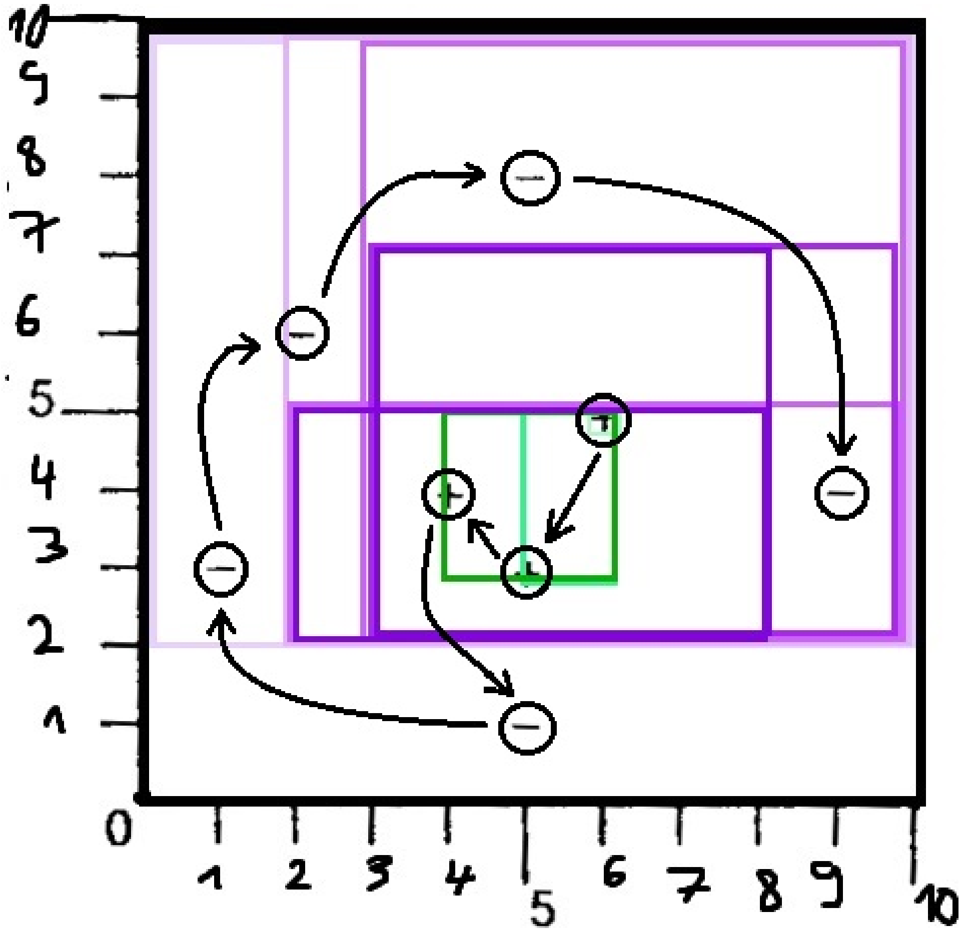
8) $x_8 = \langle\ 9,\, 4\ \rangle -$

Примерът е отрицателен. S_7 е съвместима. Остава както е. $g_{7.1}$ и $g_{7.2}$ от G_7 са твърде общи и значи несъвместими. Специфицираме ги и получаваме $g_{8.1}$ и $g_{8.2}$ - два възможни правоъгълника, който са съвместим едновременно с S_7 и с новата точка x_8.

$$S_8 \leftarrow S_7 (= S_6 = ... = S_3 = \langle 4, 6, 3, 5\rangle)$$

$$G_8 \leftarrow \{\langle 2, 8, 2, 5\rangle, \langle 3, 8, 2, 7\rangle\}$$

Край на обучението.



Фигура 1: На изображението виждаме в нюансите на зеления цвят последователните хипотези за S, а в нюансите на лилавото - последователните хипотези за G, генерирани в хода на изпълнението на алгоритъма. Финалните хипотези са нанесени в съответните най-тъмни нюанси.

3.1

Финалния вид на S след обучението е следния:

$$S = \langle 4, 6, 3, 5 \rangle$$

Видът на S е нанесен в най-тъмния нюанс на зеленото на чертежа в Фиг.1 на стр.10

3.2

Финалния вид на G след обучението е следния:

$$G = \{\langle 2, 8, 2, 5 \rangle, \langle 3, 8, 2, 7 \rangle\}$$

Видът на G е нанесен в най-тъмния нюанс лилавото на чертежа в Фиг.1 на стр.10

3.3

Нека хипотезите от $G = \{\langle 2, 8, 2, 5 \rangle, \langle 3, 8, 2, 7 \rangle\}$ означим така:

$$g_1 = \langle 2, 8, 2, 5 \rangle$$

$$g_2 = \langle 3, 8, 2, 7 \rangle$$

Тогава пример, който ще намали пространството на версиите задължително когато постъпи, се намира в участъка $\langle 3, 8, 5, 7 \rangle$ (в g_2, но извън g_1), например нека това е:

$$x_{decr} = \langle 4, 6 \rangle$$

1.1) $x_{decr} = \langle 4, 6 \rangle +$

Примерът е положителен. Тогава хипотезата g_1 вече няма да е съвместима с него и ще трябва да я премахнем. В допълнение ще трябва да обобщим единствената хипотеза s_1 от S, така че тя да покрие новия положителен пример, което обаче няма да промени броят хипотези. В крайна сметка броят хипотези намалява (съответно и пространството на версиите).

1.2) $x_{decr} = \langle 4, 6 \rangle -$

Примерът е отрицателен. Тогава хипотезата g_2 вече няма да е съвместима с него и ще трябва да я премахнем, тъй като тя ще се специфицира до нова хипотеза g_3, която попада изцяло вътре в g_1. Така в крайна сметка в G ще остане само g_1. Следователно отново правим същия извод като в края на 1.1).

Пример, който няма да намали пространството на версиите задължително когато постъпи, се намира в участъка извън пространството заключено от G, например нека това е:

$$x_{\neg decr} = \langle 9, 4 \rangle$$

2.1) $x_{\neg decr} = \langle 9, 4 \rangle -$

Примерът задължително ще е отрицателен, според модела нямаме друг случай за него. Той е съвместим и с S, и с G. Следователно няма нужда да правим промени по хипотезите и така пространството на версиите не се променя (тоест също така не намалява).

3.4

По дефиниция, за да се научи едно понятие абсолютно точно, е необходимо границите S и G да се "стегнат" до една и съща граница съдържаща единствена хипотеза.

В случая искаме това да е точно хипотезата:

$$h_{\square} = \langle 3, 5, 2, 9 \rangle$$

1) Първо да конструираме S, която има същия вид като $h_\Box$.

За целта можем да използваме минимално 2 обучаващи положителни примера, които ако свържем биха образували диагонала на хипотезата (правоъгълника $h_\Box$), например:

$x_1 = \langle\ 3,\ 2\ \rangle +$ и $x_2 = \langle\ 5,\ 9\ \rangle +$

Така ще получим $S_2 = \langle 3, 5, 2, 9 \rangle$ за две стъпки от $S_0 = \langle \varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing \rangle$:

$$\langle \varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing \rangle \rightarrow \langle 3, 3, 2, 2 \rangle \rightarrow \langle 3, 5, 2, 9 \rangle$$

2) Сега остана да "свиваме" G докато $G \equiv S$.

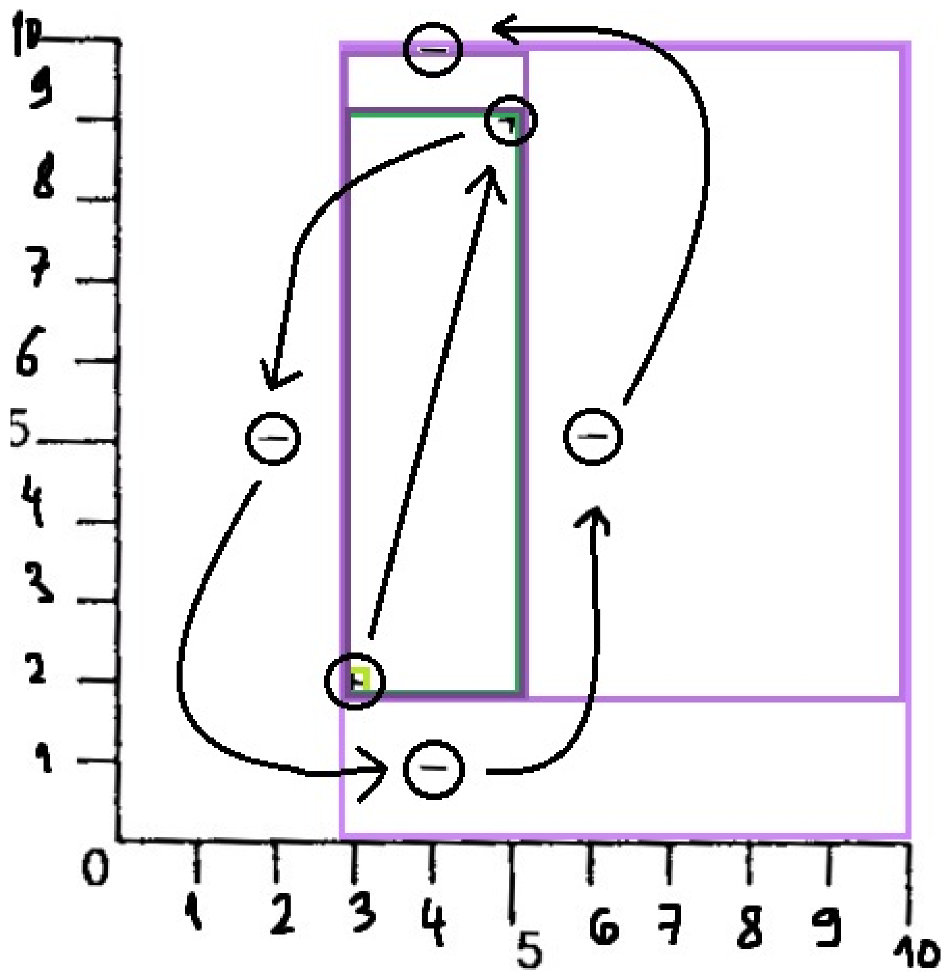
За целта можем да използваме минимално 4 обучаващи отрицателни примера, които заради стъпка 1) е нужно да са непосредствено извън S_2 и разположени перпендикулярно над средите на всяка от страните на правоъгълника $h_\Box$, с цел несъвместимите спецификации на G да се отхвърлят възможно най-рано, тъй като по-този начин отрицателните примери ще попадат непосредствено между двата положителни формиращи $h_\Box$. Нека например това са:

$x_3 = \langle\ 2,\ 5\ \rangle -$, $x_4 = \langle\ 4,\ 1\ \rangle -$, $x_5 = \langle\ 6,\ 5\ \rangle -$ и $x_6 = \langle\ 4,\ 10\ \rangle -$

Така ще получим $G_4 = \langle 3, 5, 2, 9 \rangle$ за четири стъпки от $G_0 = \langle 0, 10, 0, 10 \rangle$:

$$\langle 0, 10, 0, 10 \rangle \rightarrow \langle 3, 10, 0, 10 \rangle \rightarrow \langle 3, 10, 2, 10 \rangle \rightarrow \langle 3, 5, 2, 10 \rangle \rightarrow \langle 3, 5, 2, 9 \rangle$$

Визуално пояснение на гореизложенето в 1) и 2) може да бъде видяно във Фиг.2 на стр.14 (следващата и последна страница).



Фигура 2: На изображението виждаме в нюансите на зеления цвят последователните хипотези за S, а в нюансите на лилавото - последователните хипотези за G, генерирани в хода на изпълнението на построението от 1) и 2). Забелязваме, че поставяйки отрицателните примери в определени геометрични среди, те бързо разрязват пространството максимизирайки скоростта на обучение. Финалните хипотези за S и G са нанесени в съответните най-тъмни нюанси. Както се вижда те ще съвпаднат, както искахме, и то с минималния брой от 6 необходими точки - 2 положителни за S и 4 отрицателни за G.