Домашнее задание 5

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

Д5.1. Имеется множество U, состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в U два подмножества A и B так, чтобы **а)** множества A и B не пересекались; **б)** множество A содержалось бы в множестве B?

а) Каждый элемент может быть в одном из 3 состояний:

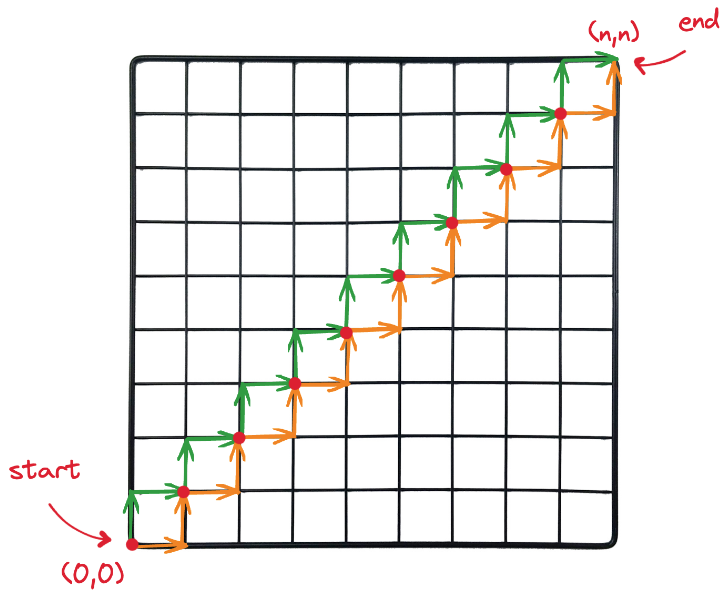
1) Не входит в A, не входит в B
2) Входит в A, не входит в B
3) Входит в B, не входит в A

Элемент не может входить как в A, так и в B, потому что тогда пересечение этих множеств не будет пустым. Итого получаем по 3 независимых комбинации для каждого элемента, поэтому количество всех способов $3^{|U|}$

Ответ: $3^{|U|}$

Д5.2. Найдите количество таких путей из $(0, 0)$ в (n, n), что каждый шаг либо $(1, 0)$, либо $(0, 1)$, и в любой точке (x, y) пути выполняется неравенство $|x - y| \leqslant 1$.

Для большей наглядности я привел изображение.

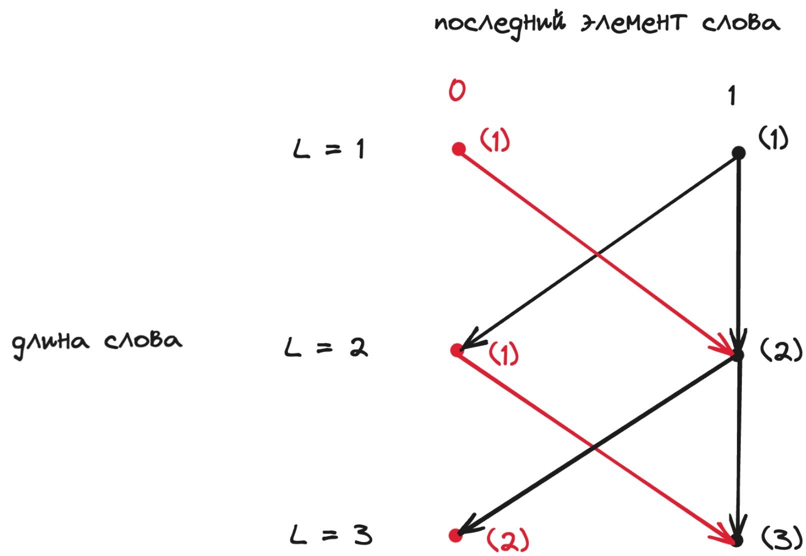


Заметим, что из выполнения неравенства $|x-y| \leqslant 1$ следует, что находясь в точке с координатами

(i, i) нельзя ходить 2 раза в одном направлении, потому что тогда модуль разницы координат будет равен 2. Это оначает, что находясь в точке (i, i) через 2 хода можно оказаться только в точке $(i+1, i+1)$. Значит остается только посчитать количество возможных путей из (i, i) в $(i+1, i+1)$. Их 2: либо сначала движение по горизонтали, затем по вертикали, либо сначала по вертикали, потом по горизонтали. Значит всего путей 2^n, потому что есть 2 варианта на каждой клетке с координатами $(i, i), 0 \leqslant i < n$.

Ответ: 2^n

Д5.3. Обозначим Z_n количество двоичных слов длины n, в которых нет двух нулей подряд. Докажите, что $Z_n = F_{n+1}$ для всех $n \geqslant 1$.



Докажем для $n \geqslant 1$, используя метод полной математической индукции.

База:

$Z_1 = F_2 = 2$. Подойдут слова 0 и 1 - верно

Шаг:

Рассмотрим слово длиной n, если оно оканичивается на 0, оно могло получиться из слов длиной n - 1, оканчивающихся на 1. Слов длиной n - 1, которые оканчиваются на 1 ровно столько же, сколько слов длиной n - 2 (потому что к любому слову можно доставить 1 в конце).
Если же слово длиной n оканчивается на 1, то оно могло получиться из любого слова длиной n - 1 (аналогично). Получается, что $Z_n = Z_{n-1} + Z_{n-2}$, используем предположение индукции, получим

$Z_n = F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$

Д5.4. Дайте комбинаторное доказательство равенства $\sum_{j=0}^{k} \binom{r}{j}\binom{s}{k-j} = \binom{r+s}{k}$.

Для простоты доказательства будем называть элементы из r буквами, а элементы из s цифрами. j проходит от 0 до k, то есть рассматриваются все возможные количества букв, остальные места занимают цифры. Дальше для каждого j выбираются все наборы из j букв и k - j цифр. То есть для каждого возможного количества букв перебираются все возможные наборы букв размера j и цифр размера k - j. Почему это равно $\binom{r+s}{k}$? Можно перефразировать последнюю запись как набор размера k, где каждый элемент это буква или цифра. Очевидно, что фиксируя количество букв не меняется итоговое количество наборов.