Домашнее задание 8

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

Д8.1. а) Верно ли, что если $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, то $|A| = |B|$?

$|A| = |A \cup B| + |A \setminus B|, |B| = |A \cup B| + |B \setminus A| \Rightarrow |A| = |B|$

Ответ: Да

б) Верно ли, что если $|A| = |C|$, $|B| = |D|$, $B \subseteq A$, $D \subseteq C$, то $|A \setminus B| = |C \setminus D|$?

$|A| = |B| + |A \setminus B|, |C| = |A| = |D| + |C \setminus D| \Rightarrow |B| + |A \setminus B| = |D| + |C \setminus D| \Rightarrow |A \setminus B| = |C \setminus D|$

Ответ: Да

Д8.2. Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счётно.

Для каждого подмножества рациональных чисел можно найти рациональное число, которое будет соответствовать произведению элементов подмножества. Далее можно выписать все полученные произведения в порядке неубывания, поэтому

Д8.3. Функция периодическая, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x + T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ счётно.

Д8.4. Тотальную функцию из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ назовём представительной, если она строго возрастающая и её значения — все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что множество представительных функций счётно.

Д8.5. Множество A состоит из бесконечных последовательностей десятичных цифр (то есть, элементов множества $\{0, 1, \ldots, 9\}$), в которых цифра 5 встречается на втором месте, а больше эта цифра нигде не встречается. Является ли это множество счётным?