Домашнее задание 6

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

Д6.1. Найдите количество сюръективных неубывающих функций из [10] в [7]. Функция f неубывающая, если $x \leqslant y$ влечёт $f(x) \leqslant f(y)$.

Из сюрьективности следует, что множество [10] можно разбить на ровно 7 непересекающихся подмножеств, объединяя их по одинаковым значениям после функции. Из неубывания функции можно вывести следствие, что получившиеся подмножества представляют из себя ряды подряд идущих элементов множества [10]. Пусть это не так, тогда $n-1 \in A, n \in B, n+k \in A$. Это противоречит условию неубывания. То есть можно перефразировать задачу в задачу, напоминающую задачу про способы разрубки (если есть такое слово) на n частей. Иными словами нужно расположить 6 распилов (или разделов множества) в 9 позиций. Сделать это можно $C_9^6 = \frac{9!}{6!3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 84$.

Ответ: 84

Д6.2. Докажите, что

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+k}{k}.$$

Докажем по индукции по k.

База k = 1: $\sum_{j=0}^{1} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+1}{1}$

$\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{1}$

$1 + n = n + 1$ - верно

Шаг k = k + 1: $\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+k+1}{k+1}$

$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j-1}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j} + \binom{n+k+1-1}{k+1} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k+1-1}{k+1} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k+1} = \dfrac{(n+k)!}{k!(n-k)!} + \dfrac{(n+k)!}{(k+1)!(n+k-k-1)!} =$

$$= \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n+k)!}{(k+1)!(n+k-k-1)!} = \frac{(n+k)!(1+\frac{k+1}{n})}{(k+1)!n!} = \frac{(n+k)!(n+k+1}{(k+1)!(n-1)!} = \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!(n-1)!}$$

Д6.3. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове ABRACADABRA так, чтобы никакие две буквы A не стояли рядом? Ответом должно быть число в десятичной записи.

Сначала посчитаем слова только из согласных, их $\dfrac{6}{2!2!} = \dfrac{720}{4} = 180$

Затем расставим буквы A согласно условию, для этого воспользуемся формулой. Для этого выберем 5 мест из 7. Семь потому что букву A можно поставить как внутри слова, так и в его начале или конце. Вот схема слова, где С означает согласную букву: ?С?С?С?С?С?С?. На места вопросов надо поставить буквы А. Сделать это можно $\binom{7}{5}$ способами. Итого 21 способ. Получается что различных слов $21 \cdot 180 = 3780$.

Ответ: 3780

Д6.4. Сравните числа (равны ли; если нет, то какое больше):

$$\sum_{i=0}^{512} 2^{2i} \binom{1024}{2i} \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{511} 2^{2i+1} \binom{1024}{2i+1}.$$

$\sum_{i=0}^{512} 2^{2i} \binom{1024}{2i} - \sum_{i=0}^{511} 2^{2i+1} \binom{1024}{2i+1} = \sum_{a=0}^{1024} (-1)^a \cdot 2^a \cdot \binom{1024}{a}$

Почти можем сложить в бином, не хватает только, чтобы -1 был в степени $1024 - a$. Но мы можем спокойно заменить a на $1024 - a$, потому что мы не поменяем четность, а значит не поменяем и само число -1 в степени.

Значит теперь получим запись $\sum_{a=0}^{1024} (-1)^{1024-a} \cdot 2^a \cdot \binom{1024}{a} = (2-1)^1 024 = 1$. Так как $1 > 0$, значит $\sum_{i=0}^{512} 2^{2i} \binom{1024}{2i}$ больше.