Дискретная математика. Домашнее задание 3

Д3.1. Функции из A в B — это по определению подмножества A × B и потому к ним применимы теоретико-множественные операции. Пусть f, g — две функции из A в B. Верно ли, что всегда а) их объединение — тоже функция; б) их пересечение — тоже функция?

1) Для функции верно, что каждому аргументу соответствует одно значение. При объединении 2 функций может получиться так, что одному аргументу будут соответствовать 2 значения. Так, например, если взять функции $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$. Аргументу 2 в полученном объединении будут соответствовать пары (2, 3) и (2, 4). Таким образом объединие двух функций не всегда является функцией.

2) Ответ: да. Докажем, используя закон контрапозиции. Пусть $f(x) \cap g(x)$ не функция. Тогда должно выпольняться условие, что существует такой $x \in A$, которому в множестве пересечения функция соответствует больше одной пары. Пусть это верно, тогда обе эти пары есть как в множестве $f(x)$, так и в $g(x)$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ не функции. Таким образом, по закону контрапозиции, пересечение функций является функцией.

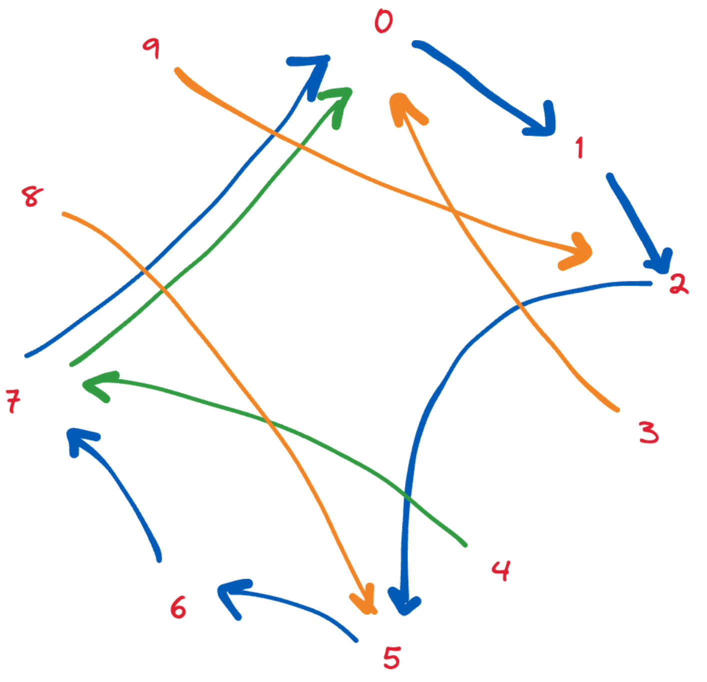
Д3.2. Докажите, что функция $f : (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \to (x_0+0, x_1+1, \cdots, x_{n-1}+n-1)$ является биекцией из множества неубывающих целочисленных последовательностей длины n в множество строго возрастающих целочисленных последовательностей длины n. В неубывающей последовательности каждый член не меньше предыдущего, в строго возрастающей каждый член больше предыдущего.

Докажем, что f - инъекция. Докажем от противного. Если f(x) не сюрьекция, то существуют две неубывающих последовательности A и B, такие что $f(A) = f(B) = C$. Поэлементно сравним $f(A)$ и $f(B)$.
$c_0 = a_0 + 0 = b_0 + 0 \to a_0 = b_0$
$c_1 = a_1 + 1 = b_1 + 1 \to a_1 = b_1$
$\vdots$
$c_{n-1} = a_{n-1} + n - 1 = b_{n-1} + n - 1 \to a_{n-1} = b_{n-1}$. Получаем, что A = B. Значит, не существует таких неубывающих последовательностей A и B, таких, что $f(A) = f(B) = C$. Таким образом f(x) - инъекция.
Докажем, что f(x) - сюрьекция. Покажем, как восстановить по произвольной возрастающей целочисленную последовательности Y такую неубывающую целочисленную последовательность X, чтобы $f(X) = Y$. Необходимо, чтобы $(x_0+0 = y_0) \wedge (x_1+1 = y_1) \wedge \cdots \wedge (x_{n-1}+n-1 = y_{n-1})$. Таким образом $X = (y_0 - 0, y_1 - 1, \cdots, y_{n-1} - n + 1)$. Докажем, что полученная последовательность X является неубывающей: Из того, что Y - возрастающая целочисленная последовательность следует, что $\forall i, j : j \geqslant i | y_i + (j - i) \leqslant y_j$, значит верно $j \geqslant i | y_i - i \leqslant y_i + (j - i) - j$. Значит X - неубывающая последовательность. Таким образом, f(x) - сюрьекция.
Так как f(x) инъекция и сюрьекция, то f(x) - биекция.

Д3.3 Функция f из множества $[10] = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ в [10] сопоставляет x последнюю цифру десятичной записи $x^2 + 1$. Последовательность функций f_n определена как $f_0 = f, f_{n+1} = f \circ f_n$.
Докажите, что $f_{2023}(3) \neq f_{2023}(4)$.

ФКН ВШЭ, 2023/24 уч. г.

Для каждого числа из [10] посчитаем f(x).
$\{f(0), f(1), f(2) \cdots, f(9)\} = \{1, 2, 5, 0, 7, 6, 7, 0, 5, 2\}$.



На картинке я показал нагляднее, как происходят переходы из одного состояния в другое, после применения функции f(x). Таким образом $f_{2023}(3) = f_{2022}(0)$, $f_{2023}(4) = f_{2021}(0)$. Так как в графе нет петель или $\forall x \in [10] : f(x) \neq x$, то $(f \circ f_{2021})(0) \neq f_{2021}(0)$, значит и $f_{2023}(3) \neq f_{2023}(4)$

Д3.4 Пусть $f : A \to B, g : B \to A$ — две функции, причём g ∘ f — тождественная функция на A (то есть для любого $x \in A$ выполнено (g ∘ f)(x) = x). Докажите, что g — сюръекция, а f — инъекция.

Докажем, что f - инъекция. Докажем от противного. Если f не инъекция, то $\exists (x, y) : x \neq y | f(x) = f(y) = C$. Тогда так как $g \circ f$ тождественная функция, то $(g(C) = x) \wedge (g(C) = y)$. Значит $x = y$. Противоречие. Значит f - инъекция.
Докажем, что g - сюръекция. По определению функции $Range(f) \subseteq B$. Так как f - инъекция, значит для каждого $x \in A$ сущестует $g(f(x)) = x$. Значит g - сюрьекция.