Домашнее задание 2

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

Д2.1. Найдите количество нулей в последовательности B, определённой в задаче К2.1.
Последовательность:

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

Среди однозначных чисел >1 нет тех, среди которых есть с цифрой 0.
Среди двузначных чисел цифра ноль есть в числах, которые имеют вид $n = 10k, k < 9, k \in \mathbb{N}$. Таких чисел 9. Соответственно и нулей 9.
Трехзначные числа имеют ноль, либо если они вида $\overline{a0b}$, a - цифра от 1 до 9, b - цифра от 0 до 9. Всего таких чисел $9 \cdot 10 = 90$. Либо если они вида $\overline{ab0}$, a - цифра от 1 до 9, b - цифра от 0 до 9. Всего таких чисел $9 \cdot 10 = 90$. Важно не забыть про числа вида $\overline{a00}$, которые входят в оба множества, поэтому мы их посчитали дважды, но и нуля в них 2, поэтому лишних нулей не будет. Поэтому всего нулей среди чисел промежутка $[100, 999]$ 180.
Остались только цетырехзначные числа... Разберем только числа в промежутке $[1000, 2000)$ С 1 нулем числа вида $\overline{10bc}, \overline{1b0c}, \overline{1bc0}$. Их $9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$. Числа с нулями могут иметь вид $\overline{100a}, \overline{10a0}, \overline{1a00}$. Их $9 \cdot 3 = 27$. Нулей в них $27 \cdot 2 = 54$. Осталось добавить 3 нуля от числа 1000. Всегда нулей в промежутке $[1000, 2000)$ 300
Остальные числа разберу вручную. 2000 + 3 нуля. 2001 - 2009 + 18 нулей. 2010 + 2 нуля. 2011 - 2019 + 9 нулей. 2020 + 2 нуля. 2021 -2023 + 3 нуля. Итого + 37 нулей.

Итого: 9 + 180 + 300 + 37 = 526.

Д2.2. Для любого целого положительного n докажите равенство

$$n \cdot 2^0 + (n-1) \cdot 2^1 + (n-2) \cdot 2^2 + (n-3) \cdot 2^3 \cdots + 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} - 2 - n.$$

Докажем методом математической индукции.

База индукции:

Для n = 1: $1 \cdot 2^0 = 2^{1+1} - 2 - 1$, верно

Шаг индукции:

Левая часть: $(n+1) \cdot 2^0 + (n+1-1) \cdot 2^1 + (n+1-2) \cdot 2^2 + (n+1-3) \cdot 2^3 \cdots + 1 \cdot 2^n = 2^{n+1} - 2 - n + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2 - n + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 2 - n - 1$
Так как верна база индукции и ее шаг, то можно сделать вывод, что исходное утверждение верно для любых целых положительных n.

Д2.3. а) Докажите, что

$$(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) \subseteq (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$$

для любых множеств A_1, A_2, B_1, B_2.
$(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) = \{(x, y) : (x \in A_1 \wedge x \notin A_2) \wedge (y \in B_1 \wedge y \notin B_2)\} = M$
$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \{(x, y) : x \in A_1 \wedge y \in B_1 \wedge (x \notin A_2 \vee y \notin B_2)\} = N$

$(a_1 \wedge \neg a_2) \wedge (b_1 \wedge \neg b_2) \to (a_1 \wedge \neg a_2 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b_1 \wedge \neg b_2)$
Значит $M \subseteq N$

б) Выполняется ли обратное включение для любых множеств A_1, A_2, B_1, B_2?
Нет. Приведем контрпример. $A_1 = \{1\}; A_2 = \{1\}; B_1 = \{3\}; B_2 = \{4\}$
$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \{(1,3)\}$
$(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) = \varnothing$
$\{(1,3)\} \nsubseteq \varnothing$

Д2.4. В последовательность $A = (x_1, \ldots, x_{2n})$ входят целые числа от 1 до n, каждое из этих чисел входит в A ровно два раза. Известно, что для любых $1 \leqslant a, b \leqslant n$, $a \neq b$, после вычёркивания из A всех чисел за исключением a, b получается либо последовательность (a, b, a, b), либо последовательность (b, a, b, a). Докажите, что в последовательности $(x_1, \ldots, x_n)$ каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Чтобы доказать, что в последовательности $(x_1, \ldots, x_n)$ каждое число от 1 до n встречается ровно один раз, докажем, что если это условие не выполняется, то не выполняется и условие, что для любых $1 \leqslant a, b \leqslant n$, $a \neq b$, после вычёркивания из A всех чисел за исключением a, b получается либо последовательность (a, b, a, b), либо последовательность (b, a, b, a). Тогда исходное утверждение будет доказано по закону контрапозиции.

Пусть в последовательности $B = (x_1, \ldots, x_n)$ есть повторяющиеся элементы, соответственно в этой последовательности различных элементов максимум $n - 1$. Тогда в последовательности $= (x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$ какой-то элемент встречается 2 раза. Назовем элемент, который повторяется в последовательности B x, а в C y. Тогда после вычеркивания всех остальных элементов кроме x, y останется последовательность вида (x, x, y, y).

Следовательно в последовательности $(x_1, \ldots, x_n)$ каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.