Домашнее задание 1

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

Д1.1. Докажите частичным разбором случаев тавтологичность следующих составных высказываний

а) $(A \to B) \lor (B \to C)$;
Пусть $B = 0$, тогда $(A \to B) = 1$, тогда $(A \to B) \lor (B \to C) = 1$
Пусть $B = 1$, тогда $(B \to C) = 1$, тогда $(A \to B) \lor (B \to C) = 1$
Исходное высказывание является тавтологией.

б) $A \to B \equiv A \to (A \land B)$;
$A \to (A \land B) = (A \to A) \land (A \to B)$
$(A \to A) \land (A \to B) = A \to B$
$A \to B = A \to B$
Исходное высказывание является тавтологией.

в) $A \to (B \to C) \equiv (A \to B) \to C$;
Пусть $A = 0, B = 0, C = 0$, тогда $A \to (B \to C) = 1$, а $(A \to B) \to C = 0$
Исходное высказывание не является тавтологией.

г) $A \land (B \to C) \equiv (A \land B) \to (A \land C)$.
Пусть $A = 0, B = 0, C = 0$, тогда $A \land (B \to C) = 0$, а $(A \land B) \to (A \land C) = 1$
Исходное высказывание не является тавтологией.

Д1.2. Рассмотрим целые числа x, y, z, t, w и два высказывания: $A =$«$x+y+z+t+w$ чётное», $B =$«$xyztw$ чётное». Докажите, что $A \to B$ истинно.
Докажем методом от обратного. Пусть $A \to B$ ложно. Тогда A истинно, а B ложно.
Если B ложно, тогда все числа x, y, z, t, w нечетные. Но тогда сумма x, y, z, t, w нечетна.
Противоречие
Вывод: $A \to B$ истинно

Д1.3. Верно ли, что для любых множеств A, B и C

а) выполняется равенство $\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) \setminus (A \setminus B) = B \setminus A$?
$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (x \in A \lor x \in B) \land (x \notin (A \cap B))$
$\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) \setminus (A \setminus B) = (x \in A \lor x \in B) \land (x \notin (A \cap B)) \land (x \in B) \land (x \notin A) =$
$= (x \in B) \land (x \notin (A \cap B)) = x \in (B \setminus A)$
Обратное доказательство делается аналогично

б) выполняется равенство $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$?
$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (x \in A \land x \notin C) \land (x \in B \land x \notin C) = x \in A \land x \in B \land x \notin C = x \in ((A \cup B) \setminus C)$
Обратное доказательство делается аналогично

в) выполняется включение $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$?
$(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = (x \in A \lor x \in B) \land x \in B \land x \notin A = x \in (B \setminus A)$
Так как $(B \setminus A) \subseteq B$, то изначальное высказывание истинно

г) выполняется равенство $\big((A \setminus B) \cup (A \setminus C)\big) \cap \big(A \setminus (B \cap C)\big) = A \setminus (B \cup C)$?
$\big((A \setminus B) \cup (A \setminus C)\big) = (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in A \land x \notin C) = x \in A \land x \notin B \land x \notin C = x \in A \land x \notin (B \cup C) =$

$= x \in (A \setminus (B \cup C))$
Обратное доказательство делается аналогично

Д1.4. Про множества A, B, C известно, что $A \cap B \subseteq C \setminus (A \cup B)$. Верно ли, что тогда $A \subseteq A \triangle B$, где $\triangle$ обозначает симметрическую разность множеств?
$C \setminus (A \cup B) = x \in C \wedge x \notin (A \cup B) = x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B$
$x \in A \wedge x \in B \to x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B$
Условие выполняется, только когда $A \cap B = \varnothing$, то есть у множеств A и B нет общих элементов.
Тогда $A \triangle B = A \cup B$, тогда $A \subseteq A \triangle B$ - верно