

Домашнее задание 9

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

Д9.1. Рассмотрим бесконечные последовательности из 0, 1 и 2, в которых никакая цифра не встречается два раза подряд. Верно ли, что мощность множества таких последовательностей имеет мощность континуум?

Представим последовательность a размера n как начальный элемент + последовательность 0, 1 размера $n - 1$ по такому принципу. Пусть мы знаем последовательность до i -ого элемента, если $a_i = 0$, в последовательность 0, если $a_{i+1} = 1$, 1, если $a_{i+1} = 2$. Аналогично, если $a_i = 1$, запишем 0, если $a_{i+1} = 0$, 1, если $a_{i+1} = 2$. Для $a_i = 2$, если $a_{i+1} = 0$, запишем 0, иначе 1. Получается, что мы построили биекцию из множества заданных последовательностей в множество $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow |\{0, 1, 2\}| = |\{0, 1\}_{n=1}^{\infty}| = C$

Ответ: Да

Д9.2. Рассмотрим множество пар различных действительных чисел, то есть

$$\bar{D} = \{(x, y) : x \neq y, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Является ли множество \bar{D} континуальным?

$$|D| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|, |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}| \text{ (из лекции), значит } |D| = |\mathbb{R}| = C$$

Ответ: Да

Д9.3. Является ли множество всех тотальных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ континуальным?

Множество всех тотальных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет мощность $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$\text{Мощность всех подмножеств } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ имеет мощность } 2^{\mathbb{R}}. \mathbb{R}^{\mathbb{R}} > 2^{\mathbb{R}}, |2^{\mathbb{R}}| > |\mathbb{R}| = C \Rightarrow |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| > C$$

Ответ: Нет

Д9.4. Функция периодическая, если для некоторого числа $T > 0$ (периода) и любого x выполняется $f(x + T) = f(x)$. Счётно ли множество периодических функций $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$? Период считайте рациональным.

Можем от каждой функции оставить только ее первый положительный период, то есть когда первый аргумент в периоде положителен. Получим биекцию из множества $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ в множество полуотрезков на множестве \mathbb{Q} , так как по условию функция тотальная (мы подставляем в функцию любой x). Каждый полуотрезок отрезок можно задать парой рациональных чисел - началом и концом. Получаем биекцию в множество $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, так как $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, то можно построить биекцию в множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, которое счётно, потому что его можно разбить в объединение счётного числа счётных множеств $\{0\} \times \mathbb{N}, \{1\} \times \mathbb{N}, \{2\} \times \mathbb{N}, \dots$

Ответ: Да