Домашнее задание 12

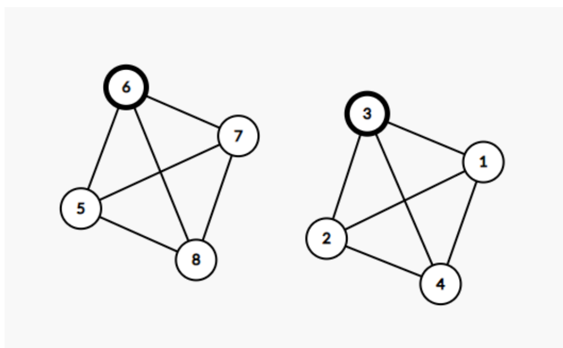
Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

Д12.1. Докажите, что можно так занумеровать вершины связного неориентированного графа на n вершинах числами от 1 до n, что для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$ связен подграф, индуцированный множеством вершин с номерами от 1 до k.

Множество S вершин графа $G = (V, E)$ индуцирует подграф с множеством вершин S, рёбрами которого являются все рёбра из E с обоими концами в S.

Зададим обход в глубину по вершинам графа со стартом в произвольной вершине v. Будем присваивать каждой новой вершине новый наименьший доступный номер. Так как изначальный граф связен, получим остовное дерево с корнем в вершине v. Для каждой вершины будет существовать путь до корня, номера вершин на пути будут убывать. Пусть дано k, тогда любой путь из вершин с номерами $q \leqslant k$ входит в индуцированный подграф, потому что номера вершин на нем уменьшаются. Получаем, что в подграфе каждая вершина связана с v, значит подграф связен.

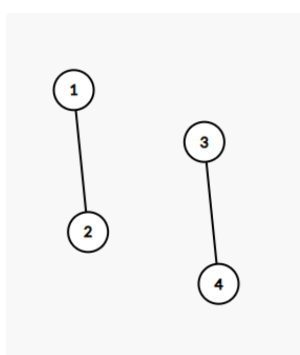
Д12.2. Найдите такой граф на 8 вершинах, что степень каждой вершина равна 3 и в этом графе нет независимого множества размера 4. (Напомним, что, как и во всех остальных задачах, ответ должен быть обоснован. Нужно доказать, что ваш пример удовлетворяет требуемым свойствам.)



Из каждой компоненты связности можно взять только по одной вершине, получается, что размер независимого множества не больше 2.

Д12.3. Известно, что в простом неориентированном графе нечётное количество независимых множеств. Следует ли из этого, что граф связный? (Независимое множество — это подмножество вершин, в котором каждая пара вершин не соединена ребром. Пустое множество и 1-элементные множества являются независимыми.)

Контрпример



Независимых множеств 9, но граф не связный.

Д12.4. При каких n в булевом кубе Q_n существует остовное дерево, в котором все вершины кроме двух имеют степень 2?

При всех $n \in \mathbb{N}$. Приведем алгоритм построения остовного дерева. Для $n = 2$ построим дерево: 0 - 1. При увеличении n допишем для уже имеющегося пути 0 в конец каждого члена, получим $00 - 10$. Мы не нарушим путь, потому что дописываем одинаковые символы. Теперь соединим последний член пути с ним же, только где последний разряд 1. Ребро есть, потому что они отличаются только последним разрядом. Теперь пройдемся по предыдущему пути для $n-1$ в обратном порядке, к каждому члену пути будем дописывать 1 в конец: $00 - 10 - 11 - 01$. Путь есть, потому что дописываем одно и то же
Для $n = 3 : 000 - 100 - 110 - 010 - 011 - 111 - 101 - 001$.
Для $n = 4 : 0000 - 1000 - 1100 - 0100 - 0110 - 1110 - 1010 - 0010 - 0011 - 1011 - 1111 - 0111 - 0101 - 1101 - 1001 - 0001$