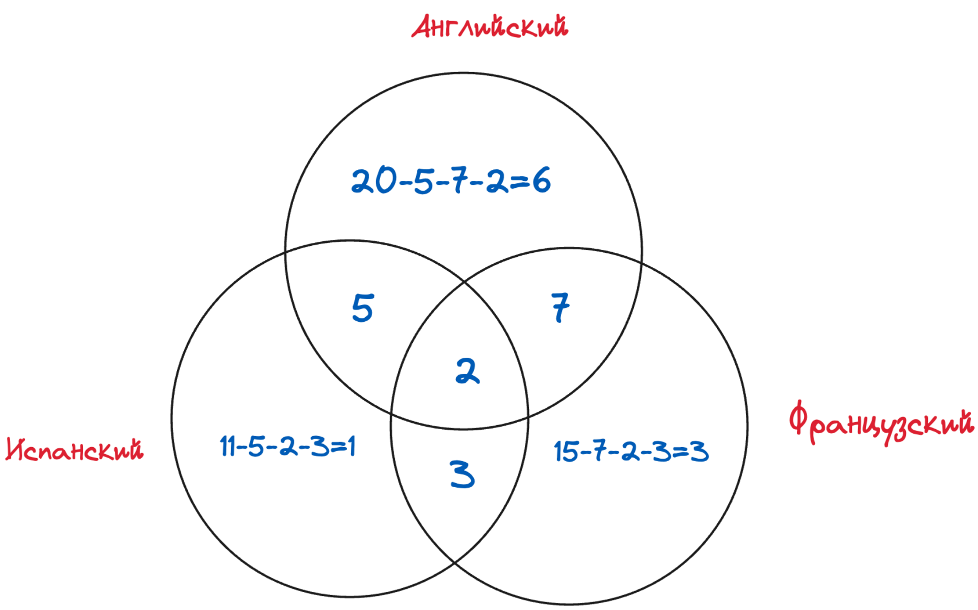
Домашнее задание 7

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

Д7.1. В группе 40 туристов. Из них 20 человек знают английский язык, 15 — французский, 11 — испанский. Английский и французский знают 7 человек, английский и испанский — 5, французский и испанский — 3. Двое туристов знают все три языка. Сколько человек в группе не знает ни одного из этих языков?

Проще всего будет изобразить группу с помощью диаграммы Эйлера-Венна.



Получается, что тех, кто не знает ни одного языка, $40 - 6 - 5 - 2 - 7 - 1 - 3 - 3 = 13$

Ответ: 13

Д7.2. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов. Сколькими способами можно составить букет из 7 цветов, используя имеющиеся цветы? (Цветы одного сорта считаем одинаковыми.)

Ответом должно быть число в десятичной записи.

Зная, сколько гвоздик и сколько роз можно однозначно понять, сколько нужно доложить тюльпанов, чтобы получить букет из 7 цветов. Главное, чтобы количество гвоздик + роз было $\geqslant 2$, потому что иначе не хватит тюльпанов, чтобы дополнить букет до 7 цветов. Всего вариантов выбрать количество гвоздик и роз $4 \cdot 5 = 20$ способов, из них не подойдут под условие пары $(0, 0)$

(0,1) (1,0) - 3 пары. Остается 17 вариантов.

Ответ: 17

Д7.3. Сколько двоичных слов длины 12 содержат подслово 1100? *Подслово* — это последовательность стоящих подряд символов. Ответ должен быть целым числом в десятичной записи.

Так как можно построить биекцию между словами, которые содержат 1100 в слова, которые содержат 1000, то можем рассматривать в этой задаче слова, которые содержат 1000 в качестве подслова, потому что их столько же. Биекцию можно построить, если во всех подсловах 1000 и 1100 перевернуть второй бит, при этом запомнить, где встречались подслова и дальше искать подслова только в этих местах. Иными словами, чтобы не получилось 11100 - 11000 - 10000. После первого применения функции мы запомним все биты, которые меняли и будем дальше работать только с ними, другие не будем менять ни при каких обстоятельствах. Посчитаем, сколько слов длины n не содержат 1000, назовем это функцией $f(n)$. Слова, которые меньше 4 символов всегда не содержат, поэтому $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8$. Дальше для $n \geqslant 4$, если слово заканчивается на 1, то подходит $f(n-1)$ слов, если слово заканчивается на 10, то подходит $f(n-2)$ слов, если заканчивается на 100, то подходит $f(n-3)$ слов, если на 000, то подходит только 1 слово из всех нулей. Таким образом $f(n) = f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)+1$. Может посчитать, что $f(12) = 2031$. Теперь чтобы посчитать количество слов длины 12, которые содержат подстроку, надо вычесть из всех слов $f(12)$. Получим $2^{12} - 2031 = 2065$

Ответ: 2065

Д7.4. Обозначим через $S_{n,k}$ долю сюръекций из $[n]$ в $[k]$ среди всех тотальных функций из $[n]$ в $[k]$. Докажите, что если $k = \lfloor n/\ln n \rfloor$, то $S_{n,k} > 0.999$ при всех достаточно больших n.

Можно переформулировать задачу в доказательство выражения $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n,\ln n} = 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ S_{n,k} = \frac{\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \cdot C_m^k \cdot (k-m)^n}{k^n} = \right.$$

$$= \frac{\dfrac{k!}{0!(k-0)!} \cdot (k-0)^n - \dfrac{k!}{1!(k-1)!} \cdot (k-1)^n + \cdots + \dfrac{1}{1!(k-1)!} \cdot (1)^n}{k^n} =$$

$$\left. = \frac{1 - \dfrac{k!}{1!(k-1)!} \cdot \dfrac{(k-1)^n}{k^n} + \cdots + \dfrac{1}{1!(k-1)!} \cdot \dfrac{1}{k^n}}{1} = \frac{1 - 0 + 0 - \cdots + 0}{1} \right\} = 1$$

Значит, по определению предела, найдется такое N, что для каждого n $>$ N выполняется $S_{n,k} > 0.999$.