Домашнее задание 15

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

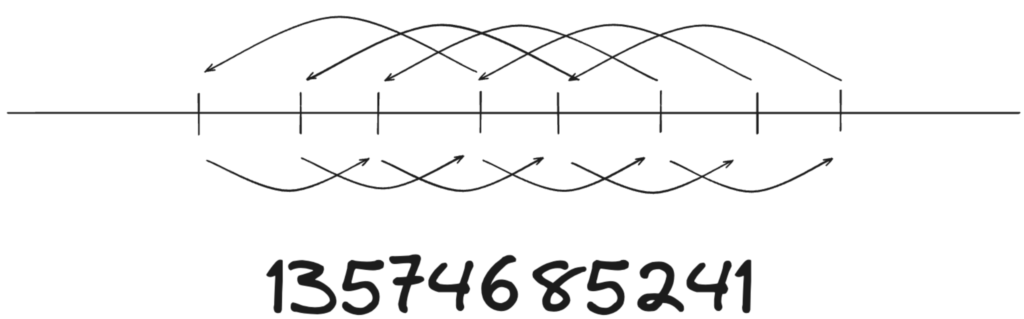
Д15.1. Существует ли ориентированный граф на 10 вершинах со 100 рёбрами? Если да, обязательно ли такой граф эйлеров?

Сколько ребер в полном ориентированном графе на 10 вершинах? $10 \cdot 10 = 100$. То есть такой граф существует и он может быть только полным. Так как существуют все ребра, то у каждой вершины исходящая степень равна 10, входящая тоже равна 10. Поэтому выполняется критерий эйлерова графа, поэтому такой граф всегда будет эйлеровым.

Ответ: Да, существует. Да, обязательно.

Д15.2. Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 2023. Ребро идёт из вершины x в вершину y если $y - x = 2$ или $x - y = 3$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.

Можно перефразировать условие так: из каждой вершины исходит ребро к второму соседу справа и 3 соседу слева, если такие есть. Всего вершин 2024, поэтому разобъем все вершины на группы, чтобы 2024 делилось на размер группы. Возьмем размер группы равный 8. Докажем, что 8 подряд идущих вершин - компонента сильной связности.



Здесь я в явном виде привел цикл, проходящий по всем вершинам группы.

Пусть мы разбили все вершины на 253 группы по 8 подряд идущих, начиная с 0. Докажем, что из любой группы можно добраться в любую другую. Возьмем последнюю вершину в группе, тогда по ребру "вперед" мы можем попасть в следующую группу, если такая есть. Возьмем первую вершину в группе, тогда по ребру "назад" мы можем попасть в предыдущую группу, если такая есть. Поэтому если рассматривать группы, то можно записать цикл $1, 2, ..., 252, 253, 252, ..., 2, 1$. Таким образом, можно добраться из любой группы в любую другую, значит множество всех вершин - компонента сильной связности.

Ответ: 1

Д15.3. Функция $C\colon V \to P(V)$ сопоставляет вершине ориентированного графа с множеством вершин V область достижимости этой вершины (определение см. в задаче **??**). Здесь $P(V)$ — множество всех подмножеств множества V. Верно ли, что для любого ациклического ориентированного графа на 2024 вершинах функция C является инъекцией?

Пусть C не инъекция. Заметим, что $V \in P(V)$. Тогда если для $A \neq B \wedge P(A) = P(B)$, верно, что $B \in P(A) \wedge A \in P(B)$, значит существует путь $A \rightsquigarrow B$ и $B \rightsquigarrow A$, то есть в графе есть цикл. Противоречие. Значит C - инъекция.

Ответ: да

Д15.4. *Турниром* называется такой ориентированный граф, в котором нет петель и для любых двух различных вершин x, y есть ровно одно ребро с концами x, y.

Докажите, что любой турнир либо ациклический, либо в нем есть цикл длины 3.

Заметим, что в турнирах нет циклов длины 1 (в турнире нет петель) или 2 (между любыми 2 вершинами ровно 1 ребро). Рассмотрим в турнире цикл минимальной длины (1). Пусть он длины больше, чем 3. Тогда возьмем 4 подряд идущих в цилке вершины. Назовем их a, b, c, d. Есть ребра $a \to b, b \to c, c \to d$. Рассмотрим вершины (b, d). Если сущесвтует ребро $d \to b$, то есть цикл меньшей длины, а именно b, c, d, что противоречит условию 1. Если существует ребро $b \to d$, то можно составить цикл из вершин минимального цикла, но без вершины c. То есть уменьшить цикл, что тоже противоречит условию 1. Таким образом, приходим к противоречию. Значит, минимальный цикл в турнире не больше 3, но так как он не может быть размера 1 или 2, то минимальный цикл точно размера 3 (или его нет).