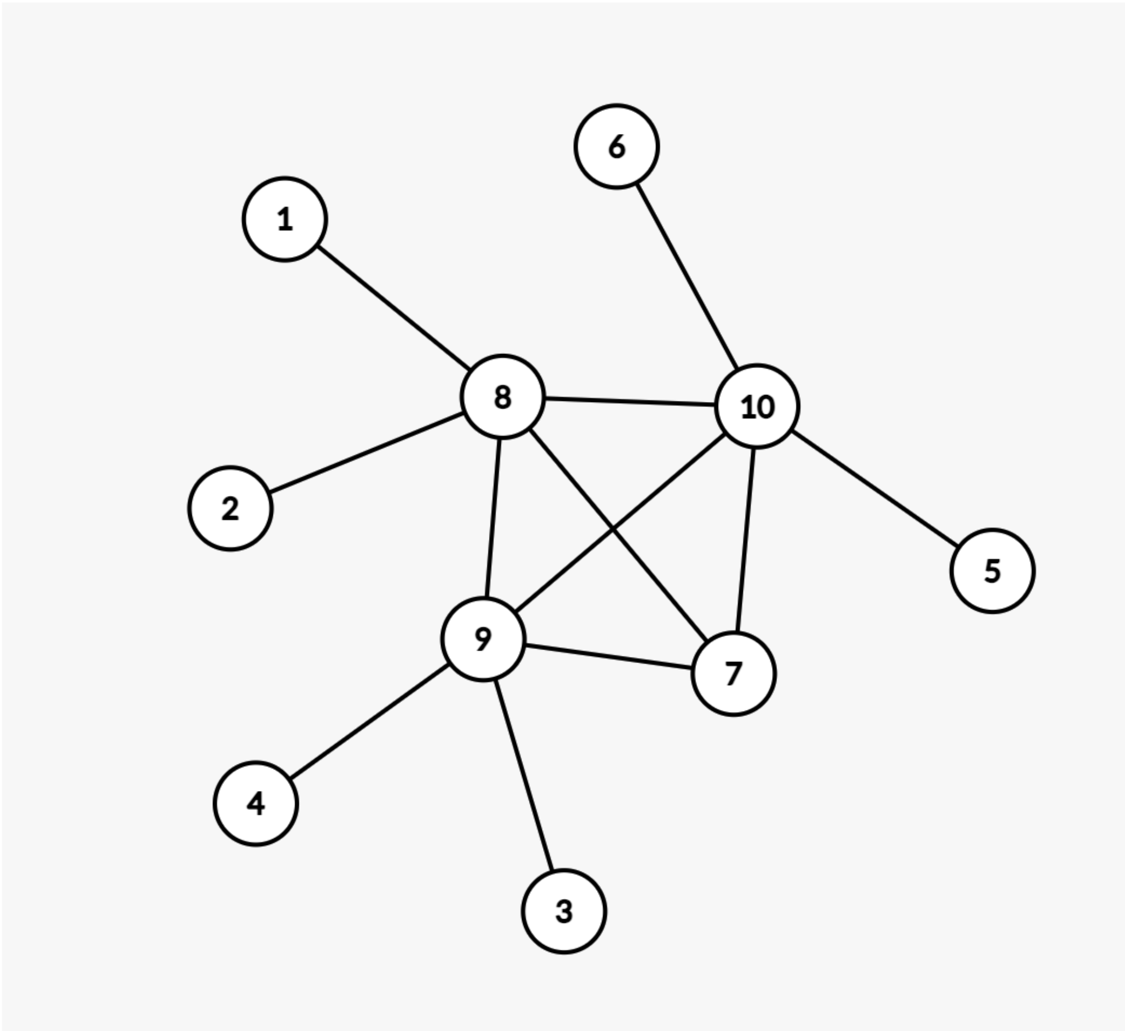
Домашнее задание 9

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

Д9.1. Существует ли граф на 10 вершинах, степени которых равны $1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 5, 5$?



Д9.2. Найдите наименьшее количество вершин в графе, сумма степеней вершин в котором равна 26.

Наименьшее количество вершин для заданного числа ребер в полном графе. Ребер в данном графе $\frac{26}{2} = 13$. В полном графе наибольшее количество ребер для заданного числа вершин. В полном графе на 5 вершинах $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ ребер, значит вершин больше 5. Ребер в полном графе на 6 вершинах $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, что больше 13, то есть можно убрать 2 ребра и получить граф из условия на 6 вершинах.

Ответ: 6

Д9.3. Вершины графа G — слова длины 2 в алфавите $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, то есть последовательности десятичных цифр длины 2. Две вершины (два слова длины 2) соединены ребром в G, если в каждой из позиций цифры различаются ровно на 1. Найдите количество компонент связности графа G.

Заметим, что при переходе по ребрам не меняется остаток от деления суммы цифр числа на 2. Это значит, что существует как минимум 2 компоненты связности. Докажем, что компонент связности ровно 2. Опишем путь внутри одной компоненты связности. Пусть $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ находятся внутри одной компоненты связности. В этой задаче пару чисел (A, B) я буду называть ребром, если оно переводит из числа $\overline{x, y}$ в число $\overline{x+A, y+B}$. Под суммой ребер я подразумеваю постепенное прохождение по ребрам. Мы хотим получить сумму ребер, которая будет равна ребру $(c-a, d-b)$. Важно заметить, что так как $a+b \equiv c+d \mod 2$, то $c-a \equiv d-b \mod 2$. Покажем, что любое подобное ребро можно получить комбинацией имеющихся. Можем получить ребро $(2,0)$, как $(1,1)+(1,-1)$ или $(1,-1)+(1,1)$. Аналогично для любого числа можно получить ребра $(-2,0),(0,2),(0,-2)$. Получается, что можно получить любое ребро $(2k, 2n)$, где $k, n \in \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$. Теперь, применив одно из ребер $(-1,-1),(1,1)$ - можно получить любое ребро, где 2 числа его определяющие одной четности. Получается, что можно получить и ребро $(c-a, d-b)$, значит существует путь между $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$.

Д9.4. Пусть A — непустое множество, E_1 и E_2 — такие отношения эквивалентности на A, что $E_1 \cup E_2$ также является отношением эквивалентности, C_1 — класс эквивалентности отношения E_1, C_2 — класс эквивалентности отношения E_2. Докажите, что $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, или $C_1 \subseteq C_2$, или $C_2 \subseteq C_1$.

Если честно, я пытался понять в деталях определение класса эквивалентности и отношения эквивалентности, но сколько бы я не просил мне объяснить, я так и не понял, чем это отличается от графа без всяких ограничений. Определение класса эквивалентности я понял, как все "достижимые" элементы множества от какого-то элемента. Поэтому дальше в решении я и буду отталкиваться от этого понимания терминов.

Пусть $C_1(x) \cap C_2(y) \neq \varnothing \Rightarrow \exists z : (x,z) \in E_1, (y,z) \in E_2$. Так как $E_1 \cup E_2$ - отношение эквивалентности по условию, то по транзитивности $\forall a \in C_2(y) : (x,a) \in E_1 \cup E_2 \Rightarrow a \in C_1(x)$. Аналогично и в другую сторону. Таким образом любой достижимый элемент для x будет достижим для y и наоборот.

Я пришел к довольно странному ответу, что $C_1(x) = C_2(y)$ при заданных условиях, тем не менее это означает, что все верно или $C_1(x) \subseteq C_2(y)$ или $C_2(y) \subseteq C_1(x)$.