ЛАиГ. Домашнее задание 5

1. К3.1 (б, в, г)

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найдите σ^{2023}

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 12 & 2 & 7 & 1 & 10 & 11 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Найдем циклы в σ:

$\sigma = (1, 3, 5, 12, 8) \cdot (2, 4, 9, 10, 11, 6) \cdot (7)$

$\sigma^{2023} = (1, 3, 5, 12, 8)^{2023} \cdot (2, 4, 9, 10, 11, 6)^{2023} \cdot (7)^{2023} =$

$= (1, 3, 5, 12, 8)^3 \cdot (2, 4, 9, 10, 11, 6)^1 \cdot (7)^1 = (1, 12, 3, 8, 5) \cdot (2, 4, 9, 10, 11, 6) \cdot (7)$

$$\sigma^{2023} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 4 & 8 & 9 & 1 & 2 & 7 & 5 & 10 & 11 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

3. К3.2 (г, д, е)

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1, 4, 7, 2, 3, 6, 5)$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \cdots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix} = (1, 2) \cdot (3, 4) \cdots (2n-1, 2n)$

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1, n+1) \cdot (2, n+2) \cdots (n, 2n)$

4. К3.5 (б, г, е, ж)

б) $\sigma = (6, 3, 1, 2, 5, 4) \quad l(\sigma) = 8$

г) $\sigma = (7, 5, 6, 4, 1, 3, 2) \quad l(\sigma) = 18$

е) $\sigma = (2, 4, 6, ..., 2n, 1, 3, 5, ..., 2n-1) \quad l(\sigma) = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ж) $\sigma = (k, k+1, ..., n, 1, 2, ..., k-1)$ Так как $1 < 2 < \cdots < k-1 < k$, то каждый член из первых $n-k+1$ чисел будет образовывать инверсию с последними $k-1$ членами последовательности. Поэтому $l(\sigma) = (n-k+1) \cdot (k-1)$

5. Сопряжены ли перестановки σ из номера 2 и τ

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 11 & 12 & 2 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

По свойству последовательности сопряжены, если у них совпадает суммарная длина независимых циклов. Найдем суммарные длины циклов σ и τ

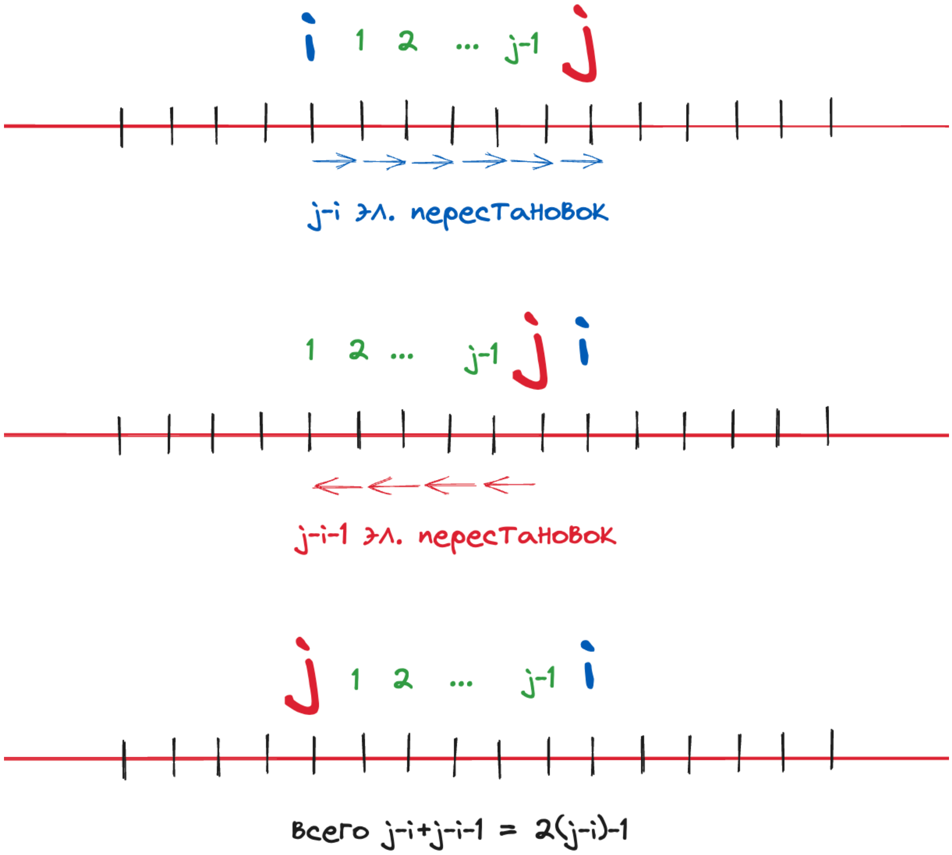
$\sigma = (1, 3, 5, 12, 8) \cdot (2, 4, 9, 10, 11, 6) \cdot (7) \quad S = \{1, 5, 6\}$

$\tau = (1) \cdot (2, 3, 4, 5, 11, 7) \cdot (6, 12, 8, 9, 10) \quad S = \{1, 5, 6\}$

Так как множества длин независимых циклов совпадают, то последовательности сопряжены (доказывали на семинаре).

6. Докажите, что любую транспозицию можно представить в виде произведения нечётного числа элементарных транспозиций

Пусть в перестановке транспозиция меняет элементы i, j. Тогда можно осуществить эту транспозицию по такому алгоритму. Сначала переставить i элемент в j место, сдвигая все элементы кроме i влево на 1 место за $(j-i)$ элементарных перестановок. Затем передвинуть j элемент на i место за $(j-i-1)$ элементарных перестановок. Итого элементарных перестановок $2(j-i)-1$, что является нечетным числом



7) K3.8

Рассмотрим $a_x = i$, всего чисел от 1 до n меньших i ровно $i-1$. Пусть m из них образовывали инверсию с a_x в первой перестановке. Тогда оставшиеся $i-1-m$ чисел стояли "слева" от a_x. Тогда во второй перестановке эти числа будут стоять "справа" от a_x, а значит образовывать с этим элементом инверсию. Итого в двух перестановках для $a_x = i$ образовывается $m+i-1-m = i-1$ инверсий. Значит всего в двух перестановках $1+2+\dots+n-1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ инверсий. Следовательно во второй перестановке

$\frac{n(n-1)}{2} - k$ инверсий.