ЛАиГ. Домашнее задание 6

1)

$(12)(345)(67) = ((1627)(354))^2$
$(1234)(5678) = (15263748)^2$
$(1234567) = (1526374)^2$

2) П159, П160

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,5,\cdots,2n-1)\cdot(2,4,6,\cdots,2n)$$

$dec(\sigma) = 2n-2 \Rightarrow sgn(\sigma) = 1$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \cdots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix} =$$

$= (1,2,3)\cdot(4\cdot 5\cdot 6)\cdot\cdots\cdot(3n-2, 3n-1, 3n)$

$dec(\sigma) = n$, если n - четное, то $sgn(\sigma) = 1$, иначе $sgn(\sigma) = -1$

3) П1, П5, П6, П9

П1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3 - 7\cdot 2 = 1$

П5) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2 - (ab)^2 = 0$

П6) $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} = (n+1)(n-1) - n^2 = n^2 - 1 - n^2 = -1$

П9) $\begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix} = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$

4) П44, П47, П58

П44) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot2+2\cdot3\cdot3+1\cdot2\cdot4-1\cdot5\cdot3-3\cdot4\cdot3-2\cdot2\cdot2 = 30+18+8-15-36-8 = -3$

П47) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot7\cdot8+4\cdot(-2)\cdot2+(-5)\cdot8\cdot(-1)-(-5)\cdot7\cdot2-(-2)\cdot(-1)\cdot3-8\cdot4\cdot8 =$

$= 168 - 16 + 40 + 70 - 6 - 256 = 0$

П58) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot c\cdot d + a\cdot d\cdot 0 + 0\cdot b\cdot e - 0\cdot c\cdot 0 - d\cdot e\cdot 0 - 0\cdot a\cdot b = 0$

5) П190, П191

П190) $a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_{51} \cdot a_{74} \cdot a_{25} \cdot a_{43} \cdot a_{62}$

Запишем соответствующую перестановку σ, проверим ее корректность

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Так как в σ 2 переходит как в 7, так и в 5, то σ не является перестановкой, значит исходное произведение не входит в определитель.

П191) $a_{33} \cdot a_{16} \cdot a_{72} \cdot a_{27} \cdot a_{55} \cdot a_{61} \cdot a_{44}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Так как σ является переставкой, то исходное произведение входит в определитель. Посчитаем четность σ через детерминант.

$\sigma = (16) \cdot (27) \cdot (3) \cdot (4) \cdot (5) \quad det(\sigma) = 7 - 5 = 2 \quad sgn(\sigma) = 1$

6) П197, П198

П197) $a_{62} \cdot a_{i5} \cdot a_{33} \cdot a_{k4} \cdot a_{46} \cdot a_{21}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 6 & i & 3 & k & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Чтобы σ была перестановкой, i, k должны быть $1, 5$ или $5, 1$ соответственно. Так же можно заметить, что в 2 случаях знак перестановки будет противоположным, потому что отличается 1 транспозицией. Попробуем подставить 1 вариант, если знак будет положительным, значит подходит 2 вариант.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (1,5,4,6,2) \cdot (3)$$

$det(\sigma) = 6 - 2 = 4 \quad sgn(\sigma) = 1$

1 вариант не подошел, значит подойдет второй, когда $i = 5, k = 1$

П198) $a_{47} \cdot a_{63} \cdot a_{1i} \cdot a_{55} \cdot a_{7k} \cdot a_{24} \cdot a_{31}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 5 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & i & 5 & k & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Возможные варианты: $(i, k) = (2, 6) \vee (i, k) = (6, 2)$ Попробуем первый

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 5 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,4,7,6,3) \cdot (5)$$

$det(\sigma) = 7 - 2 = 5 \quad sgn(\sigma) = -1$

Значит подходит $(i, k) = (6, 2)$

7) Найдите коэффициент при x^5 в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & x & 4 & -5 \\ 3 & x & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & x & 1 \\ -3 & x^2 & -1 & 1 & x \\ x & -2 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

Либо взять из каждой строчки по x, получим комбинацию, соответствующую перестановке $(1,3,2,4,5) = (1,3,4,5) \cdot (2) \quad det = 5-2 = 3 \quad sgn = 1$.
Либо можно взять из 4 строки x^2 и не взять в какой-то строчке x. Тут очевидно, в какой строчке не надо брать, это во второй, потому что тогда из второго столбца мы возьмем 2 элемента. Тогда остается только 1 вариант, взять из 2 строчки 4, из 4 строчки взять x^2, из остальных x. Получим комбинацию, соответствующую $(3,5,4,2,1) = (1,3,4,2,5) \quad det = 5-1 = 4 \quad sgn = 1$ Коэффициент увеличится на 4. Итого коэффициент будет 5.

8) Найдите коэффициент при x^4 в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x & 2 & 2 \\ x & 2 & 1 & 4 & 5 \\ x & 1 & x & 5 & x \\ 3 & x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & x & 2 \end{vmatrix}$$

Важно заметить, что мы можем получить αx^4, когда в 4 строках мы возьмем x, а в пятой возьмем не x. То есть мы однозначно определяем последний элемент, когда выбираем 4 x в разных строчках. Также мы не можем не брать x из 3 строчки, ведь тогда мы должны будем взять из 3 строчки 5 элемент, который x. Пусть мы не берем x из первой строки, тогда мы можем взять из 3 строки x на 3 или 5 позиции. В любом случае получим комбинации $2 \cdot x^4$. **Итого, суммарный коэффициент при x^4 4.** Если мы не берем x из 2 строчки, тогда остается только 1 вариант, который соответствует перестановке $(3,5,1,2,4)$. **Получаем коэффициент при $x^4 = 5$**. Пусть мы не x из 4 строки, тогда вариантов вообще нет, потому что из 3 строки мы не можем взять первый x из-за второго ряда, второй x из-за первого ряда и третий из-за того, что тогда мы должны будем взять x из 4 строки. Пусть мы не берем x из 5 строки, тогда вариантов тоже нет. Получается, что итоговый суммарный коэффициент по всем способам равен $4+5=9$.

9)Найдите наибольшее значение определителя матрицы 3×3, у которой все элементы равны 0 или 1.

Для начала оценим максимальное значение определителя такой матрицы. Каждое произведение элементов в сумму определителя принимает значение либо 0, либо 1, но так как мы берем только половину из всех слагаемых со знаком $+$, максимальное значение определителя не может быть больше 3. Единственный случай, когда положительная часть суммы определителя равняется 3, когда вся матрица состоит из единиц. Но в таком случае определитель матрицы равен 0. То есть максимальное значение определителя не может быть 3, значит оно меньше либо равно 2. Приведем пример, когда определитель матрицы состоящей из нулей и единиц равняется 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: 2