ЛАиГ. Домашнее задание 4

1) Найдите многочлен $P(x)$ степени не выше 3, для которого $P(-1) = -4$, $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 2$.

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 2 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ответ: $P(x) = -\frac{5x^3}{6} + 2x^2 - \frac{x}{6} + 1$

2) Найдите многочлен $P(x)$ степени не выше 3, для которого

$P(1) = 3, P'(1) = 5, P''(-1) = -3, P'(-1) = 1$ (символы P' и P'' обозначают соответственно первую и вторую производную многочлена P).

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P''(x) = 6ax + 2b$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{5}{6} \\ 3 & 0 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & | & \frac{7}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Ответ: $P(x) = \frac{5x^3}{6} + x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$

3) П863

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 45 & -17 \\ 61 & -23 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 45 & -17 \\ 61 & -23 \end{pmatrix}$

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 45 & -17 & | & 1 & 0 \\ 61 & -23 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & | & 4 & -3 \\ 1 & -1 & | & 19 & -14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & | & 61 & -45 \\ 1 & -1 & | & 19 & -14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 19 & -14 \\ 0 & 2 & | & -61 & 45 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 19 & -14 \\ 0 & 1 & | & -\frac{61}{2} & \frac{45}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{23}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 1 & | & -\frac{61}{2} & \frac{45}{2} \end{pmatrix}$$