ЛАиГ ИДЗ 1

1) **Вычислить**

$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B^T \cdot B = \begin{pmatrix} 26 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & 12 \\ 1 & 12 & 17 \end{pmatrix}, tr(B^T \cdot B) = 52, tr(B^T \cdot B) \cdot A = \begin{pmatrix} 312 & 0 & 52 \\ -156 & -52 & -312 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, tr(B^T \cdot B) \cdot A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1924 & -1248 \\ -1248 & 2392 \end{pmatrix},$

$tr(B^T \cdot B) \cdot A \cdot A^T \cdot D = \begin{pmatrix} 27144 & 6552 \\ -8112 & 2080 \end{pmatrix}$

$AB^T = \begin{pmatrix} -2 & 31 \\ -24 & -21 \end{pmatrix}, 4AB^T = \begin{pmatrix} -8 & 124 \\ -96 & -84 \end{pmatrix}, BA^T = \begin{pmatrix} -2 & -24 \\ 31 & -21 \end{pmatrix}, -6BA^T = \begin{pmatrix} 12 & 144 \\ -186 & 126 \end{pmatrix}$

$4AB^T - 6BA^T = \begin{pmatrix} 4 & 268 \\ -282 & 42 \end{pmatrix}, (4AB^T - 6BA^T)D = \begin{pmatrix} 1680 & 1096 \\ -4824 & -1524 \end{pmatrix},$

$D(2BA^T + 6AB^T) = \begin{pmatrix} -780 & 1476 \\ -424 & 156 \end{pmatrix}, (4AB^T - 6BA^T)D + D(2BA^T + 6AB^T) = \begin{pmatrix} 900 & 2572 \\ -5248 & -1368 \end{pmatrix}$

$tr((4AB^T - 6BA^T)D + D(2BA^T + 6AB^T)) = -468$

$(B - A)(B^T + A^T) = \begin{pmatrix} -11 & -32 \\ 78 & -20 \end{pmatrix}, C^2 = \begin{pmatrix} 55 & 6 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}, 4CD = \begin{pmatrix} 552 & 200 \\ 120 & 8 \end{pmatrix}$

$4D^2 = \begin{pmatrix} 1440 & 528 \\ 528 & 208 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 27144 & 6552 \\ -8112 & 2080 \end{pmatrix} - 468 \cdot \begin{pmatrix} -11 & -32 \\ 78 & -20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 55 & 6 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 552 & 200 \\ 120 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1440 & 528 \\ 528 & 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30245 & 20794 \\ -45273 & 11202 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 30245 & 20794 \\ -45273 & 11202 \end{pmatrix}$

2) Найти все возможные значения AB

$$A+B=\begin{pmatrix}24 & -22 & 52 & -50\\ 38 & 32 & 40 & -56\\ -44 & -12 & 8 & -26\\ -50 & -18 & 34 & 24\end{pmatrix}$$

Заметим, что у коссиметрической матрицы на главной диагонали стоят нули. Пусть $m_{i,i} \neq 0 \Rightarrow m_{i,i} \neq m_{i,i}$ (как будто бы поменяли индексы местами). Противоречие. Обозначим C = A + B. Значит $\forall i \in \{1,2,3,4\} : c_{i,i} = a_{i,i}$. Для остальных элементов $\forall i,j \in \{1,2,3,4\}, i \neq j : c_{i,j} + c_{j,i} = a_{i,j} + b_{i,j} + a_{i,j} - b_{i,j} = 2 \cdot a_{i,j}$. Чтобы удобно посчитать сумму A. Можем сложить $C + C^T$, тогда во всех рассматриваемых элементах будет $2 \cdot a_{i,j}$ (главная диагональ сложится сама с собой, а остальные с нужной парой).

Получим матрицу $C + C^T = 2A = \begin{pmatrix}48 & 16 & 8 & -100\\ 16 & 64 & 28 & -74\\ 8 & 28 & 16 & 8\\ -100 & -74 & 8 & 48\end{pmatrix}$

Отсюда $A = \begin{pmatrix}24 & 8 & 4 & -50\\ 8 & 32 & 14 & -37\\ 4 & 14 & 8 & 4\\ -50 & -37 & 4 & 24\end{pmatrix}$, $B = C - A = \begin{pmatrix}0 & -30 & 48 & 0\\ 30 & 0 & 26 & -19\\ -48 & -26 & 0 & -30\\ 0 & 19 & 30 & 0\end{pmatrix}$.

Тогда единственное возможное значение $AB = \begin{pmatrix}48 & -1774 & -140 & -272\\ 288 & -1307 & 106 & -1028\\ 36 & -252 & 676 & -506\\ -1302 & 1852 & -2642 & 583\end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix}48 & -1774 & -140 & -272\\ 288 & -1307 & 106 & -1028\\ 36 & -252 & 676 & -506\\ -1302 & 1852 & -2642 & 583\end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix}1 & -4 & -2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}1 & 4 & -10\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$DC = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A = CJC^{-1} \Leftrightarrow A^n = CJ^nC^{-1}$$

$$S = E + A + A^2 + \cdots + A^2021$$

$$S = CEC^{-1} + CJC^{-1} + \cdots + CJ^{2021}C^{-1}$$

$$S = C(E + J + J^2 + \cdots + J^{2021})C^{-1}$$

$$J^n = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n & (\dfrac{n(n-1)}{2}) \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E + J + J^2 + \cdots + J^{2021}) = \begin{pmatrix} 0 & 2021 & 4082420 \\ 0 & 0 & 2021 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2021 & 4068273 \\ 0 & 0 & 2021 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 2021 & 4068273 \\ 0 & 0 & 2021 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Пусть $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Тогда $uv^t = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 \\ u_1v_2 & u_2v_2 & u_3v_2 \\ u_1v_3 & u_2v_3 & u_3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & -15 & 30 \\ -15 & -9 & 18 \\ -20 & -12 & 24 \end{pmatrix}$

$$u_1 : u_2 : u_3 = 5t : 3t : -6t$$

$$v_1 : v_2 : v_3 = \frac{-5}{t} : \frac{-3}{t} : \frac{-4}{t}$$

След матрицы не изменится в зависимости от выбранного t, потому что $u_iv_i = k_1 t \cdot \dfrac{k_2}{t} = k_1 \cdot k_2$. Пусть t = 1.

$$v^t u = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = -10$$

Тогда $S^{10} = uv^tuv^t \cdots = u \cdot (v^tu)^{10} v^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot 10 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -100$ **Ответ:** -100

5) Решить СЛУ

а) $$\left(\begin{array}{cccc|c} -7 & 7 & 21 & -7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 15 & 9 \\ 6 & -4 & -12 & 10 & -2 \\ 9 & -7 & -21 & 13 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 15 & 9 \\ 6 & -4 & -12 & 10 & -2 \\ 9 & -7 & -21 & 13 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

По последним двум строкам матрицы можно сделать вывод, что СЛУ несовместна.

б) $$\left(\begin{array}{cccc|c} -7 & 7 & 21 & -7 & -35 \\ 5 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 6 & -4 & 12 & 10 & 20 \\ 9 & -7 & -21 & 13 & 35 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 6 & -4 & 12 & 10 & 20 \\ 9 & -7 & -21 & 13 & 35 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & -25 \\ 0 & 2 & 30 & 4 & -10 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & -10 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & -25 \\ 0 & 2 & 30 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 15 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

СЛУ совместна, имеет решения вида $\begin{pmatrix} -3x_4 \\ -5-2x_4 \\ 0 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$.

Частным решением будет $\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$