ЛАиГ. Домашнее задание 8

1. Вычислить выражения

е) $$\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2} = \frac{8+24i-i-3i^2}{4+4i+i^2} = \frac{11+23i}{3+4i} = \frac{(11+23i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{33+69i-44i-92i^2}{9-16i^2} =$$

$$= \frac{125-25i}{25} = 5-i$$

з) $$\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i} = \frac{3-i-12i+4i^2}{2-i} = \frac{(-1-13i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-2-26i-i-13i^2}{5} = \frac{11-27i}{5} =$$

$$= \frac{11}{5} - \frac{27i}{5}$$

2. Решить методом гаусса и методом Крамера

1) Методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} i & 1+i & | & 2+2i \\ 2i & 3+2i & | & 5+3i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & 1+i & | & 2+2i \\ 0 & 1 & | & 1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+i}{i} & | & \frac{2+2i}{i} \\ 0 & 1 & | & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+i}{-1} & | & \frac{-2+2i}{-1} \\ 0 & 1 & | & 1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & | & 2-2i \\ 0 & 1 & | & 1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2-2i-(1-i)^2 \\ 0 & 1 & | & 1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2-2i+2i \\ 0 & 1 & | & 1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 1-i \end{pmatrix}$$

Ответ: $z_1 = 2, z_2 = 1-i$

2) Методом Крамера

$$\begin{pmatrix} i & 1+i & | & 2+2i \\ 2i & 3+2i & | & 5+3i \end{pmatrix}$$

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2+2i & 1+i \\ 5+3i & 3+2i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 1+i \\ 2i & 3+2i \end{vmatrix}} = \frac{(2+2i)(3+2i)-(1+i)(5+3i)}{i(3+2i)-(1+i)2i} = \frac{6+6i+4i+4i^2-5-5i-3i-3i^2}{3i+2i^2-2i-2i^2} =$$

$$= \frac{2i}{i} = 2$$

$$z_2 = \frac{\begin{vmatrix} i & 2+2i \\ 2i & 5+3i \end{vmatrix}}{i} = \frac{i(5+3i)-2i(2+2i)}{i} = 5+3i-2(2+2i) = 5+3i-4-4i = 1-i$$

Ответ: $z_1 = 2, z_2 = 1 - i$

3. Найти все числа, сопряженные своему квадрату

Пусть $z = a + bi, z^2 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi + -b^2, \overline{z^2} = a^2 - b^2 - 2abi$

$z = \overline{z^2} \Rightarrow a = a^2 - b^2, b = -2ab$

Пусть $b = 0 \Rightarrow a = 1$, пусть $b \neq 0 \Rightarrow 1 = -2a \Rightarrow a = \dfrac{-1}{2}, b^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} \Rightarrow b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $a = 1, b = 0$ или $a = -\dfrac{1}{2}, b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. Решить уравнение

е) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$

$D = (2i-7)^2 - 52 + 4i = 4i^2 - 28i + 49 - 52 + 4i = -7 - 24i$

$\sqrt{D} = \sqrt{-7-24i} = x + yi$

$-7 - 24i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\begin{cases} -7 = x^2 - y^2 \\ -24 = 2xy \end{cases} \quad x = \pm 3, y = \mp 4$$

Возьмем пару $x = -3, y = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = -3 + 4i$

$z_1 = \dfrac{7 - 2i + 3 - 4i}{2}$

$z_2 = \dfrac{7 - 2i - 3 + 4i}{2}$

Ответ: $z = 5 + 3i$ или $z = 2 + i$

5. Найти тригонометрическую форму числа

$z = -1 + i\sqrt{3} = |z|(\cos\phi \cdot \sin\phi)$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$

$\cos\phi = \dfrac{-1}{2} \quad \sin\phi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \phi = \dfrac{2\pi}{3}$

$z = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})$

Ответ: $2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})$

6. Вычислить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{30}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{2} = \frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}-i^2}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i}{2} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$|z| = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4} + \frac{4-2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\cos\phi = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\phi = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\phi = \frac{\pi}{12}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{30} = z^30 = |z|^30(\cos 30\phi \cdot \sin 30\phi) = 2^{15}(\cos\frac{5\pi}{2} \cdot \sin\frac{5\pi}{2}) = 2^{15}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) =$$

$$= 2^{15}i$$

Ответ: $2^{15}i$

7. Вычислить сумму

в) $1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$

	(n, 0)	(n, 1)	(n, 2)	(n, 3)	(n, 4)
$2^n=(1+1)^n$	+	+	+	+	+
$0=(1-1)^n$	+	-	+	-	+
$(1+i)^n$	+	i	-	-i	+
$(1-i)^n$	+	-i	-	i	+

Можно представить изначальную последовательность как $\dfrac{2^n + 0 + (1+i)^n + (1-i)^n}{4}$

8. Доказать

в) $\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\dfrac{3\pi}{n} + \cos\dfrac{5\pi}{n} + \cdots + \cos\dfrac{(2n-1)\pi}{n} = 0$

Пусть $z = |z|(\cos\dfrac{\pi}{n} + i\sin\dfrac{\pi}{n})$

$\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\dfrac{3\pi}{n} + \cos\dfrac{5\pi}{n} + \cdots + \cos\dfrac{(2n-1)\pi}{n} = z + z^3 + z^5 + \cdots + z^{2n-1} = z(1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n-2}) = z\dfrac{z^{2n}-1}{z^2-1} = 0$

9. Вычислить

з) $\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos(\pi + 2\pi k) + i\sin(\pi + 2\pi k))} = \sqrt[4]{4}(\cos\dfrac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\dfrac{\pi + 2\pi k}{4})$

Корни:

при k = 0: $\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i$

при k = 1: $-1 + i$

при k = 2: $-1 - i$

при k = 3: $1 - i$

10. Найдите все значения $z \in \mathbb{C}$ и $n \geq 2$, при которых множество $\sqrt[n]{z}$ содержит хотя бы одно действительное число.

$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\dfrac{\phi}{n} + i\sin\dfrac{\phi}{n})$. Получается, что $\sin\dfrac{\phi}{n} = 0$, то есть $\dfrac{\phi}{n} = \pi k$, значит $\phi = \pi n k, k \in \mathbb{Z}$

Поэтому подойдут все $z : Im(z) = 0$