ЛАиГ ИДЗ 2

1. Определите число решений следующей системы в зависимости от значений параметров a и b:

Представим СЛУ в виде расширенной матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 4 & 5 \\ -6 & -5 & b & -7 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 4 & 5 \\ -6 & -5 & b & -7 \\ 1 & 4 & -b & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 19 & -5b & 23 \\ 1 & 4 & -b & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & -4a & 4+ab & 5-5a \\ 0 & 19 & b & 23 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{b}{19} & \frac{23}{19} \\ 0 & -4a & 4+ab & 5-5a \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4b}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 1 & \frac{b}{19} & \frac{23}{19} \\ 0 & 0 & 4+\frac{23ab}{19} & 5-\frac{-3a}{19} \end{array}\right)$$

1. Если $4+\frac{23ab}{19}=0$, то $ab=\frac{-76}{23}$,

1.1 Если $5+\frac{3a}{19}=0$, то $a=\frac{95}{3}$ - решений бесконечно много

1.2 Если $5+\frac{3a}{19}\neq 0$, то $a\neq\frac{95}{3}$ - решений нет

2. Если $4+\frac{23ab}{19}\neq 0$, то $ab\neq\frac{-76}{23}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4b}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 1 & \frac{b}{19} & \frac{23}{19} \\ 0 & 0 & 4+\frac{23ab}{19} & 5-\frac{-3a}{19} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4b}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 1 & \frac{b}{19} & \frac{23}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5-\frac{-3a}{19}}{4+\frac{23ab}{19}} \end{array}\right)$$

Очевидно, что дальше можно привести матрицу к улучшенному ступенчатому виду, поэтому решение 1.

2. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ -9 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти все матрицы вида

$$X = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

удовлетворяющие условию AX = XA.

$$AX = \begin{pmatrix} 5a & 0 & 5b+7f \\ -9a & 0 & -9b+4f \\ 0 & 0 & 6f \end{pmatrix} \quad XA = \begin{pmatrix} 5a & 0 & 7a+6b \\ 5c-9d & 0 & 7c+4d+6e \\ 0 & 0 & 6f \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6 \cdot e + 7 \cdot c + 4 \cdot d + 9 \cdot b - 4 \cdot f = 0 \\ 5 \cdot c - 9 \cdot d + 9 \cdot a = 0 \\ 7 \cdot a + b - 7 \cdot f = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 & 0 & 9 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Из 3 уравнения найдем a

$a = \frac{-1}{7} \cdot b + f$

Из 2 уравнения найдем c

$c = \frac{9}{5} \cdot d + \frac{9}{35} \cdot b - \frac{9}{5} \cdot f$

Найдем из 1 уравнения c

$e = \frac{-83}{30} \cdot d - \frac{9}{5} \cdot b + \frac{83}{30} \cdot f$

Таким образом подойдут все X вида:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} \cdot b + f & 0 & b \\ \frac{9}{5} \cdot d + \frac{9}{35} \cdot b - \frac{9}{5} \cdot f & d & \frac{-83}{30} \cdot d - \frac{9}{5} \cdot b + \frac{83}{30} \cdot f \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

3. Решить уравнение $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 56 & -25 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -204 & -184 & -43 \\ -11 & 0 & 4 \\ -20 & -20 & -6 \end{pmatrix}$$

Решим (A|B)

$$(A|B) = \begin{pmatrix} -19 & 1 & -5 & 2 & | & 30 & -36 & -37 \\ -11 & 1 & -2 & 2 & | & 13 & -24 & -21 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & | & -9 & 7 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -8 & | & 24 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 14 & | & -47 & 10 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 25 & | & -81 & 25 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -8 & 24 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 11 & -34 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 21 & -20 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -10 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 19 & -55 & 35 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 21 & -20 & 0 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -59 + 19 \cdot x_{4,1} & 16 + 19 \cdot x_{4,2} & 37 + 19 \cdot x_{4,3} \\ -345 + 116 \cdot x_{4,1} & 116 + 116 \cdot x_{4,2} & 232 + 116 \cdot x_{4,3} \\ -1105 + 367 \cdot x_{4,1} & 364 + 367 \cdot x_{4,2} & 737 + 367 \cdot x_{4,3} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} \end{pmatrix}$$

4. Найти матрицу P

Пусть B - улучшенный ступенчатый вид A

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -8 & -3 & -15 & -22 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 10 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 13 & 25 & 26 & -38 & 1 & 8 & 0 & -8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & -6 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 10 & 10 & -15 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -8 & -8 & 12 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -2 & -2 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & -5 & -7 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 4 & 6 & 0 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Сравнить число решений СЛУ

Найдем C^{-1}

$$(C|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ABC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & -9 & -8 \\ 1 & -12 & 47 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 & -2 \\ 19 & -7 & -13 & -9 \\ 44 & -17 & -30 & -20 \\ -222 & 81 & 152 & 106 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad ABC^{-1}x = \begin{pmatrix} 6 \cdot a - 3 \cdot b - 4 \cdot c - 2 \cdot d \\ 19 \cdot a - 7 \cdot b - 13 \cdot c - 9 \cdot d \\ 44 \cdot a - 17 \cdot b - 30 \cdot c - 20 \cdot d \\ -222 \cdot a + 81 \cdot b + 152 \cdot c + 106 \cdot d \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & -4 & -2 & 0 \\ 19 & -7 & -13 & -9 & 0 \\ 44 & -17 & -30 & -20 & 0 \\ -222 & 81 & 152 & 106 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 2 & 16 & 0 \\ 0 & -105 & 14 & 112 & 0 \\ 0 & 525 & -70 & -560 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 2 & 16 & 0 \\ 0 & -105 & 14 & 112 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 2 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{15} & -\frac{16}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{11}{15} & -\frac{13}{15} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{15} & -\frac{16}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

У СЛУ бесконечно много решений.

$$D = \begin{pmatrix} -16 & 13 & 10 & 0 \\ 2 & -11 & 0 & 10 \\ -22 & 46 & 10 & -30 \\ -26 & -7 & 20 & 30 \end{pmatrix} Dx = \begin{pmatrix} -16 \cdot a + 13 \cdot b + 10 \cdot c \\ 2 \cdot a - 11 \cdot b + 10 \cdot d \\ -22 \cdot a + 46 \cdot b + 10 \cdot c - 30 \cdot d \\ -26 \cdot a - 7 \cdot b + 20 \cdot c + 30 \cdot d \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -16 & 13 & 10 & 0 & 0 \\ 2 & -11 & 0 & 10 & 0 \\ -22 & 46 & 10 & -30 & 0 \\ -26 & -7 & 20 & 30 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -75 & 10 & 80 & 0 \\ 2 & -11 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -75 & 10 & 80 & 0 \\ 0 & -150 & 20 & 160 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -11 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -75 & 10 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

У этой системы тоже бесконечно много решений

Ответ: Да