# ЛАиГ. Домашнее задание 1

1) К17.1(а, б, г)

а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + n \cdot 0 & 1 \cdot m + n \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot m + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m + n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ -7 & -5 & 0 \\ 14 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

2) К17.2(б)

б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 10 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & 0 & 8 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 11 \\ 6 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3)

A $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; B $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

AB $= \begin{pmatrix} 2 \cdot a - c & 2 \cdot b - d \\ a & b \end{pmatrix}$ ; BA $= \begin{pmatrix} 2 \cdot a + b & -a \\ 2 \cdot c + d & -c \end{pmatrix}$

Для того, чтобы B была коммутирующей матрицей для A, необходимо поэлементное равенство матриц AB и BA.

$$\begin{cases} 2 \cdot a - c = 2 \cdot a + b \\ 2 \cdot b - d = -a \\ a = 2 \cdot c + d \\ b = -c \end{cases} \qquad \begin{cases} b + c = 0 \\ a = d - 2 \cdot b \\ a = 2 \cdot c + d \\ b + c = 0 \end{cases}$$

Выразим все переменные через a, b. Тогда матрица B будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2\cdot b \end{pmatrix}$$

Все матрицы такого вида будут коммутативными для матрицы A.

4) П802

Вычислим методом мат индукции.

База индукции:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Предположение:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$$

Шаг индукции :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(n\alpha)\cdot\cos\alpha - \sin(n\alpha)\cdot\sin\alpha & -2\sin(n\alpha)\cos\alpha \\ 2\sin(n\alpha)\cos\alpha & \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos((n+1)\alpha) & -\sin((n+1)\alpha) \\ \sin((n+1)\alpha) & \cos((n+1)\alpha) \end{pmatrix}$$

5) П803

Вычислим методом мат индукции.

База индукции:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Предположение:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Шаг индукции:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & & & 0 \\ & \lambda_2^{k+1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^{k+1} \end{pmatrix}$$

6) П805

Вычислим методом мат индукции

База индукции:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Предположение:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n \cdot \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Шаг индукции:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n \cdot \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n \cdot 1 + n \cdot \lambda^{n-1} \cdot \lambda \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1) \cdot \lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

7) K17.5

а) $f(x)=x^3-2x^2+1$ ; A $=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ; $A^3=\begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 7 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

$$f(x)=\begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 7 & 12 & 1 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}+E=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

б) $f(x)=x^3-3x^2+2$ ; A $=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ; $A^3=\begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$

$$f(x)=\begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}+2\cdot E=\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

8) K17.7

Вычислим методом мат индукции

База индукции:

$$H^1_{n,n}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Предположение:

$$H^k = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-k,n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг индукции:

$$H^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & E_{n-k,n-k} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & E_{n-k-1,n-k-1} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Переход возможен, пока k < n. Иначе на месте E стоит 0

9) П829

$$A^2 - (a+d)A + ad - bc = 0 \; ; \; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + bd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -bc & 0 \\ 0 & -bc \end{pmatrix} = 0$$

10)

$$A_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \; ; \; E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & e_{i,j} = 1 & & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{i,j} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ (i,1) = a_{j,1} & (i,2) = a_{j,2} & \cdots & (i,j-1) = a_{j,n-1} & (i,n) = a_{j,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & (1,j) = a_{1,i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & (2,j) = a_{2,i} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & (n-1,j) = a_{n-1,i} & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & (n,j) = a_{n,i} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$