ЛАиГ ИДЗ 3

1. Найдите матрицу, обратную к данной

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{III} \cdot (-1), \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{III} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{II\ \text{-}\ 4I}, \mathbf{III\ \text{-}\ 2I} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{II + IV}, \mathbf{III\ \text{-}\ 2IV} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{II} \Leftrightarrow \mathbf{III}, \mathbf{IV + 3II} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 6 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{IV\ \text{-}\ III} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{III} \cdot (-1), \mathbf{IV} \cdot (-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{I\ \text{-}\ II}, \mathbf{I\ \text{-}\ III} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

2. Решить уравнение относительно незвестной перестановки X

$$\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&7&8&3&1&4&2\end{pmatrix}^{19}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&8&7&4&1&2&5\end{pmatrix}^{-1}\right)^{141}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&3&6&7&2&8&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&7&8&3&1&4&2\end{pmatrix}^{19}=(1,6)^{19}\cdot(2,5,3,7,4,8)^{19}=(1,6)\cdot(2,5,3,7,4,8)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&7&8&3&1&4&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&8&7&4&1&2&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&1&5&8&2&4&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&7&8&3&1&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&1&5&8&2&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&8&4&3&1&6&5&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&8&4&3&1&6&5&7\end{pmatrix}^{141}=(1,2,8,7,5)^{141}(3,4)^{141}(6)^{141}=(1,2,8,7,5)(3,4)(6)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&8&4&3&1&6&5&7\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&8&4&3&1&6&5&7\end{pmatrix}$

3. Определить четность перестановки

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&97&98&\cdots&115&116&\cdots&141\\45&46&\cdots&141&27&\cdots&44&1&\cdots&26\end{pmatrix}$$

Рассмотрим 1 блок от 45 до 141. Они будут образовывать инверсии со всеми числами из других блоков. То есть $97\cdot 44=4268$. Числа из второго блока (27-44) будут образовывать новые инверсии со всеми числами из последнего блока. То есть $18\cdot 26=468$. Последний блок не будет образовывать новых инверсий. Итого: $4268+468=4\,736$. Так как инверсий четное число, то и вся перестановка четная.

Ответ: Четная

PS. Вся перестановка это один цикл:

(1, 45, 89, 133, 18, 62, 106, 35, 79, 123, 8, 52, 96, 140, 25, 69, 113, 42, 86, 130, 15, 59, 103, 32, 76, 120, 5, 49, 93, 137, 22, 66, 110, 39, 83, 127, 12, 56, 100, 29, 73, 117, 2, 46, 90, 134, 19, 63, 107, 36, 80, 124, 9, 53, 97, 141, 26, 70, 114, 43, 87, 131, 16, 60, 104, 33, 77, 121, 6, 50, 94, 138, 23, 67, 111, 40, 84, 128, 13, 57, 101, 30, 74, 118, 3, 47, 91, 135, 20, 64, 108, 37, 81, 125, 10, 54, 98, 27, 71, 115, 44, 88, 132, 17, 61, 105, 34, 78, 122, 7, 51, 95, 139, 24, 68, 112, 41, 85, 129, 14, 58, 102, 31, 75, 119, 4, 48, 92, 136, 21, 65, 109, 38, 82, 126, 11, 55, 99, 28, 72, 116).

Так что четность можно было посчитать и через детерминант, но такое решение мне показалось нечестным.

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ x & x & 0 & x & 6 & 6 \\ 0 & x & 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 6 & 2 & 3 & 9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1-x \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ x & x & 0 & x & 6 & 6 \\ 0 & x & 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 6 & 2 & 3 & 9 & 9-2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 & 1-x \\ 0 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ x & x & x & 6 & 6 \\ 0 & x & 2 & 0 & x \\ 0 & 6 & 3 & 9 & 9-2x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 & 1-x \\ 0 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & x & x-\frac{x}{3} & 6 & 6-\frac{x(1-x)}{6} \\ 0 & x & 2 & 0 & x \\ 0 & 6 & 3 & 9 & 9-2x \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & 6 \\ x & x-\frac{x}{3} & 6 & 6-\frac{x(1-x)}{6} \\ x & 2 & 0 & x \\ 6 & 3 & 9 & 9-2x \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & 6 \\ x-12 & x-\frac{x}{3}-4 & 0 & -6-\frac{x(1-x)}{6} \\ x & 2 & 0 & x \\ 6 & 3 & 9 & 9-2x \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & 6 \\ x-12 & x-\frac{x}{3}-4 & 0 & -6-\frac{x(1-x)}{6} \\ x & 2 & 0 & x \\ -12 & -3 & 0 & -9-2x \end{vmatrix} =$$

$$= 18 \cdot \begin{vmatrix} x-12 & \frac{2x}{3}-4 & -6-\frac{x(1-x)}{6} \\ x & 2 & x \\ -12 & -3 & -9-2x \end{vmatrix} =$$

$= 18((x-12)\cdot 2\cdot(-9-2x)+(\frac{2x}{3}-4)\cdot x\cdot(-12)+(-6-\frac{x(1-x)}{6})\cdot x\cdot(-3))-18((-6-\frac{x(1-x)}{6})\cdot 2\cdot(-12)+x\cdot(-3)\cdot(x-12)+(-9-2x)\cdot(\frac{2x}{3}-4)\cdot x) = 18(-4x^2+30x-24-8x^2+48x+18x-\frac{x^2-x^3}{2})-18(144+4x^2-4x-3x^2+36x-6x^2+36x-\frac{4x^3}{3}+8x^2) = 18(\frac{x^3}{2}-\frac{25x^2}{2}+96x-24)-18(-\frac{4x^3}{3}+3x^2+68x+144) = 18(\frac{11x^3}{6}-\frac{31x^2}{2}+28x-168) = 33x^3-279x^2+504x-3024$

Ответ: $33x^3 - 279x^2 + 504x - 3024$

5. Найдите коэффициент x^5 в выражении определителя

Выпишем все перестановки где присутствует x^5 и коэффициенты, с которыми они входят в выражение определителя:
Перестановка: 2431765, k: -10
Перестановка: 2437165, k: 16
Перестановка: 3412765, k: -9
Перестановка: 3472165, k: 9
Перестановка: 4132765, k: -10

Перестановка: 4732165, k: 15
Перестановка: 5132764, k: 16
Перестановка: 5412763, k: 9
Перестановка: 5431762, k: 15
Перестановка: 5432176, k: -36
Перестановка: 5432716, k: 36
Перестановка: 5437162, k: -24
Перестановка: 5472163, k: -9
Перестановка: 5732164, k: -24
Перестановка: 6432175, k: 36
Перестановка: 6432715, k: -36
Итого: -6
Ответ: -6