ЛАиГ. Домашнее задание 2

1) П809

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3-2 & 2+3-5 & -1-3+4 \\ 0+2-2 & 4+2-5 & -2-2+4 \\ 0+4-4 & 6+4-10 & -3-4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = A; \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

$(A \cdot B \cdot A^{-1})^6 = A \cdot B^6 \cdot A^{-1}$

$$B^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 192 & 1 \\ 2 & 128 & 1 \\ 3 & 256 & 2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$$

2) П815

а) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Так как $AB \neq BA$, то $AB + BA \neq 2AB$, тогда $A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

б) $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$

Так как $AB \neq BA$, то $BA - AB \neq 0$, тогда $A^2 + BA - AB - B^2 \neq A^2 + B^2$

3) П832

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b \cdot c & a \cdot b + b \cdot d \\ a \cdot c + c \cdot d & b \cdot c + d^2 \end{pmatrix}$

Если $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $\begin{cases} a^2 + b \cdot c = 0 \\ a \cdot b + b \cdot d = 0 \\ a \cdot c + c \cdot d = 0 \\ b \cdot c + d^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + b \cdot c = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ b \cdot c + d^2 = 0 \end{cases}$

Пусть $a = 0$, тогда, чтобы $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, необходимо, чтобы $b \cdot c = 0$ (из 1), тогда и $d^2 = 0$ (из 4). Следовательно $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$

Пусть $a \neq 0$, тогда $b \cdot c = -a^2$ (из 1), тогда $b \neq 0 \wedge c \neq 0$, тогда $d = -a$ из (2 или 3). Тогда $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a}{b} & -a \end{pmatrix}$

4) Квадратная матрица A называется верхнетреугольной, если aij = 0 при всех i > j, то есть все её элементы ниже главной диагонали равны нулю. Докажите, что произведение двух верхне- треугольных матриц снова будет верхнетреугольной матрицей.

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad B_{n,p} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ 0 & b_{2,2} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & b_{n,p} \end{pmatrix}$$

Пусть $C = A \cdot B$. Рассмотрим $c_{i,j} = A^{(i)} \cdot B_{(j)} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} \cdot b_{n,j}$. Все элементы $a_{i,k} = 0$, при $0 < k < i$. Тогда первый ненулевой элемент $a_{i,k} = a_{i,i}$. То есть первые $i-1$ произведений "занулятся". Аналогично для B, последний ненулевой элемент в $B_{(j)} = b_{j,j}$. То есть последние $n-j$ прозведений "занулятся". Чтобы $c_{i,j} \neq 0$, необходимо, чтобы был хотя бы 1 ненулевое слагаемое. Иными словами $i - 1 + n - j < n = i < j + 1$. Элементы с такими индексами находятся на главной диагонали или выше, значит C - верхнетреугольная матрица.

5) Назовём квадратную матрицу побочно-диагональной, если все её элементы вне побочной диаго- нали равны нулю. Пусть A, B — две побочнодиагональные матрицы, причём у матрицы A (соответственно B) на побочной диагонали стоят элементы $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (соответственно$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$), если считать от правого верхнего угла к левому нижнему. Найдите произведения AB и BA и определите условия, при которых матрицы A и B коммутируют (то есть AB = BA).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \iddots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & \iddots & 0 & 0 \\ \mu_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \mu_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdot \mu_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \cdot \mu_1 \end{pmatrix} BA = \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot \lambda_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 \cdot \lambda_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_n \cdot \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Когда $AB = BA$? Это условие выполняется, если

$$\lambda_1 \cdot \mu_n = \lambda_n \cdot \mu_1, \lambda_2 \cdot \mu_{n-1} = \lambda_{n-1} \cdot \mu_2, \cdots, \lambda_n \cdot \mu_1 = \lambda_1 \cdot \mu_n$$

Получается, что $AB = BA$, когда $\lambda_i \cdot \mu_{n-i+1} = \lambda_{n-i+1} \cdot \mu_i$, то есть $\frac{\lambda_i}{\lambda_{n-i+1}} = \frac{\mu_i}{\mu_{n-i+1}}$ для любого $1 \leq i \leq n$.

6) Найдите все квадратные (n × n)-матрицы X, удовлетворяющие соотношению XA = AX для любой квадратной матрицы A того же размера.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} X_n = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x_{n,n} \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix}$$

Если X коммутирует со всеми матрицами, то X коммутирует с диагональными матрицами. Тогда X - диагональная матрица. Докажем, что $X = tE$. Пусть $X_{i,i} \neq X_{j,j}$.
Тогда $AX_{i,j} = A_{(i)} \cdot X^{(j)} = a_{i,1} \cdot x_{1,j} + a_{i,2} \cdot x_{2,j} + \cdots + a_{i,n} \cdot x_{n,j} = a_{i,j} \cdot x_{i,i}$
$XA_{i,j} = X_{(i)} \cdot A^{(j)} = x_{i,i} \cdot a_{i,j}$.
Так как X коммутирует с любой матрицей, возьмем такую матрицу A, чтобы $a_{i,j} \neq 0$.
Тогда $AX_{i,j} \neq XA_{i,j}$. Значит X не коммутирует с A. Противоречие. Значит $X = tE$.

7) Приведите пример трёх квадратных (2 × 2)-матриц A, B, C, для которых $tr(ABC) \neq tr(ACB)$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$ABC = \begin{pmatrix} 29 & 29 \\ 25 & 25 \end{pmatrix}$ $ACB = \begin{pmatrix} 21 & 28 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$

$tr(ABC) = 54, tr(ACB) = 41$