

ЛАиГ. Домашнее задание 8

1. Вычислить выражения

$$\begin{aligned} \text{е)} \frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2} &= \frac{8+24i-i-3i^2}{4+4i+i^2} = \frac{11+23i}{3+4i} = \frac{(11+23i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{33+69i-44i-92i^2}{9-16i^2} = \\ &= \frac{125-25i}{25} = 5-i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{з)} \frac{(3-i)(1-4i)}{2-i} &= \frac{3-i-12i+4i^2}{2-i} = \frac{(-1-13i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-2-26i-i-13i^2}{5} = \frac{11-27i}{5} = \\ &= \frac{11}{5} - \frac{27i}{5} \end{aligned}$$

2. Решить методом гаусса и методом Крамера

1) Методом Гаусса

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 2+2i \\ 2i & 3+2i & 5+3i \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 2+2i \\ 0 & 1 & 1-i \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1+i}{i} & \frac{2+2i}{i} \\ 0 & 1 & 1-i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-1+i}{-1} & \frac{-2+2i}{-1} \\ 0 & 1 & 1-i \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1-i & 2-2i \\ 0 & 1 & 1-i \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-2i-(1-i)^2 \\ 0 & 1 & 1-i \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-2i+2i \\ 0 & 1 & 1-i \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1-i \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ответ: $z_1 = 2, z_2 = 1-i$

2) Методом Крамера

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 2+2i \\ 2i & 3+2i & 5+3i \end{array} \right) \\ z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2+2i & 1+i \\ 5+3i & 3+2i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 1+i \\ 2i & 3+2i \end{vmatrix}} &= \frac{(2+2i)(3+2i) - (1+i)(5+3i)}{i(3+2i) - (1+i)2i} = \frac{6+6i+4i+4i^2-5-5i-3i-3i^2}{3i+2i^2-2i-2i^2} = \\ &= \frac{2i}{i} = 2 \\ z_2 = \frac{\begin{vmatrix} i & 2+2i \\ 2i & 5+3i \end{vmatrix}}{i} &= \frac{i(5+3i) - 2i(2+2i)}{i} = 5+3i-2(2+2i) = 5+3i-4-4i = 1-i \end{aligned}$$

Ответ: $z_1 = 2, z_2 = 1 - i$

3. Найти все числа, сопряженные своему квадрату

Пусть $z = a + bi, z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + -b^2, \overline{z^2} = a^2 - b^2 - 2abi$

$$z = \overline{z^2} \Rightarrow a = a^2 - b^2, b = -2ab$$

Пусть $b = 0 \Rightarrow a = 1$, пусть $b \neq 0 \Rightarrow 1 = -2a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $a = 1, b = 0$ или $a = -\frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Решить уравнение

е) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$

$$D = (2i - 7)^2 - 52 + 4i = 4i^2 - 28i + 49 - 52 + 4i = -7 - 24i$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-7 - 24i} = x + yi$$

$$-7 - 24i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\begin{cases} -7 = x^2 - y^2 \\ -24 = 2xy \end{cases} \quad x = \pm 3, y = \mp 4$$

Возьмем пару $x = -3, y = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = -3 + 4i$

$$z_1 = \frac{7 - 2i + 3 - 4i}{2}$$

$$z_2 = \frac{7 - 2i - 3 + 4i}{2}$$

Ответ: $z = 5 + 3i$ или $z = 2 + i$

5. Найти тригонометрическую форму числа

$$z = -1 + i\sqrt{3} = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$|z| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\cos \phi = \frac{-1}{2} \quad \sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$

Ответ: $2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

6. Вычислить выражение

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} \right)^{30} \\
 z &= \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{2} = \frac{\sqrt{3} - i + i\sqrt{3} - i^2}{2} = \frac{1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i}{2} = \\
 &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i \\
 |z| &= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4} + \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2} \\
 \cos \phi &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\
 \sin \phi &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\
 \phi &= \frac{\pi}{12} \\
 \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} \right)^{30} &= z^{30} = |z|^{30} (\cos 30\phi \cdot \sin 30\phi) = 2^{15} \left(\cos \frac{5\pi}{2} \cdot \sin \frac{5\pi}{2} \right) = 2^{15} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= 2^{15}i
 \end{aligned}$$

Ответ: $2^{15}i$

7. Вычислить сумму

$$\text{в) } 1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots = \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$$

	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$
$2^n = (1+1)^n$	+	+	+	+	+
$0 = (1-1)^n$	+	-	+	-	+
$(1+i)^n$	+	i	-	-i	+
$(1-i)^n$	+	-i	-	i	+

Можно представить изначальную последовательность как $\frac{2^n + 0 + (1+i)^n + (1-i)^n}{4}$

8. Доказать

$$\text{в) } \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} = 0$$

$$\text{Пусть } z = |z|(\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n})$$

$$\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} = z + z^3 + z^5 + \dots + z^{2n-1} = z(1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2n-2}) = z \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1} = 0$$

9. Вычислить

$$\text{з) } \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos(\pi + 2\pi k) + i \sin(\pi + 2\pi k))} = \sqrt[4]{4}(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4})$$

Корни:

$$\text{при } k = 0: \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i$$

$$\text{при } k = 1: -1 + i$$

$$\text{при } k = 2: -1 - i$$

$$\text{при } k = 3: 1 - i$$

10. Найдите все значения $z \in \mathbb{C}$ и $n \geq 2$, при которых множество $\sqrt[n]{z}$ содержит хотя бы одно действительное число.

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi), \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos \frac{\phi}{n} + i \sin \frac{\phi}{n}). \text{ Получается, что } \sin \frac{\phi}{n} = 0, \text{ то есть } \frac{\phi}{n} = \pi k, \text{ значит } \phi = \pi n k, k \in \mathbb{Z}$$

Поэтому подойдут все $z : \operatorname{Im}(z) = 0$