# ЛАиГ ИДЗ 4

1. Найти $x$ такие, что $A - xE$ необратима ($\det = 0$)

$$A = \begin{pmatrix} -6-12i & -3-8i \\ 6+16i & 3+12i \end{pmatrix}$$

$$x = a+bi, \quad xE = \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a+bi \end{pmatrix}$$

$$A - xE = \begin{pmatrix} -6-a-(12+b)i & -3-8i \\ 6+16i & 3-a+(12-b)i \end{pmatrix}$$

$|A - xE| = (-6-a-(12+b)i) \cdot (3-a+(12-b)i) - (-3-8i) \cdot (6+16i) = a^2+3a-b^2+2i \cdot ab+3i \cdot b+16-12i$

Решим уравнение $a^2+3a-b^2+2i \cdot ab+3i \cdot b+16-12i = 0$

$$\begin{cases} a^2+3a-b^2+16=0 \\ 2ab+3b-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -a & -a^2-3 \cdot a-16 \\ 2 \cdot a+3 & 12 \end{pmatrix}$$

1) $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} -a & -a^2-3 \cdot a-16 \\ 2 \cdot a+3 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -a & -a^2-3 \cdot a-16 \\ 0 & \frac{-2 \cdot a^3-9 \cdot a^2-29 \cdot a-48}{a} \end{pmatrix}$$

1.1) $a \neq 2a^3+9a^2+29a+48$

$$\begin{cases} -a \cdot b = -a^2-3 \cdot a-16 \\ 0 = \frac{-2 \cdot a^3-9 \cdot a^2-29 \cdot a-48}{a} \end{cases}$$

Нет решений

1.2) $2a^3+9a^2+29a+48=0$

$$\begin{pmatrix} -a & -a^2-3 \cdot a-16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-a \cdot b = -a^2-3 \cdot a-16$$

Общее решение: $x = a + \frac{a^2+3 \cdot a+16}{a} i$

2) $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -a^2-3 \cdot a-16 \\ 2 \cdot a+3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = -a^2-3 \cdot a-16 \\ (2 \cdot a+3) \cdot b = 12 \end{cases}$$

Нет решений

**Ответ:** $x = a + \frac{a^2+3\cdot a+16}{a} i$

2. Вычислить

$$\sqrt[4]{-\frac{81}{2} - \frac{81\sqrt{3}}{2} i}$$

Пусть $z \in \mathbb{C}, z = a + bi = |z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = -\dfrac{81}{2} - \dfrac{81\sqrt{3}}{2} i \quad a = -\dfrac{81}{2}, b = \dfrac{81\sqrt{3}}{2}$

$|z| = \sqrt{\dfrac{3^8}{4} + \dfrac{3\cdot 3^8}{4}} = \sqrt{\dfrac{4\cdot 3^8}{4}} = \sqrt{3^8} = 3^4$

$\cos(\phi) = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\frac{-81}{2}}{81} = \dfrac{-1}{2}$

$\sin(\phi) = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\frac{81\sqrt{3}}{2}}{81} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases} \cos(\phi) = \dfrac{-1}{2} \\ \sin(\phi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \phi = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{N}$

$z = 81(\cos(\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{2\pi}{3}))$

По формуле Муавра

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{81}(\cos(\dfrac{\pi}{6}) + i\sin(\dfrac{\pi}{6})) = 3(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2} i$

**Ответ:** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2} i$

3. Доказать, что векторы ЛНЗ при всех $a$, для каждого $a$ дополнить эти векторы до базиса $R^5$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 4 \\ -8 \\ 28 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{13}{4} \\ 1 \\ a \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Запишем векторы в строки матрицы $3 \times 5$. Приведем матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0 & 1 & -6\\ 12 & -1 & 4 & -8 & 28\\ -4 & \frac{13}{4} & 1 & a & \frac{-3}{4}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-4 & 2 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 5 & 4 & -5 & 10\\ -4 & \frac{13}{4} & 1 & a & \frac{-3}{4}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-4 & 2 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 5 & 4 & -5 & 10\\ 0 & \frac{5}{4} & 1 & a-1 & \frac{21}{4}\end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 5 & 4 & -5 & 10\\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\cdot a+1}{4} & \frac{11}{4}\end{pmatrix}$$

Последняя строка не будет нулевой ни при каких значениях $a$, значит векторы ЛНЗ.

Дополнять до базиса будем разными способами, когда в третьей строке будут разные ведущие элементы, для этого рассмотрим случаи.

1) $\dfrac{4a+1}{4} = 0, a = -0,25$

$$\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 5 & 4 & -5 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4}\end{pmatrix}$$

В данном случае не хватает $e_3, e_4$, базис будет выглядеть так: $\{v_1, v_2, v_3, e_3, e_4\}$

2) $a \neq -0,25$

В данном случае не хватает $e_3, e_5$, базис будет выглядеть так: $\{v_1, v_2, v_3, e_3, e_5\}$

**Ответ:** $\begin{cases}\{v_1, v_2, v_3, e_3, e_4\}, a = -0,25\\ \{v_1, v_2, v_3, e_3, e_5\}, a \neq -0,25\end{cases}$

4. Подпространство $U$ в пространстве $R^5$ задано линейной оболочкой векторав $v_1, v_2, v_3, v_4$.

$$v_1 = \begin{pmatrix}10\\25\\5\\17\\26\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}-30\\-35\\-25\\-33\\-34\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}2\\-3\\2\\0\\-4\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}-10\\-10\\-5\\-11\\-8\end{pmatrix}$$

а) Выбрать среди векторов $v_1, v_2, v_3, v_4$ базис.

Для того, чтобы найти базис, запишем векторы в строки матрицы и приведем ее к ступенчатому виду, если будут нулевые строки, значит какие-то векторы можно выразить через остальные.

$$\begin{pmatrix}10 & 25 & 5 & 17 & 26\\ -30 & -35 & -25 & -33 & -34\\ 2 & -3 & 2 & 0 & -4\\ -10 & -10 & -5 & -11 & -8\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}10 & 25 & 5 & 17 & 26\\ 0 & 40 & -10 & 18 & 44\\ 2 & -3 & 2 & 0 & -4\\ -10 & -10 & -5 & -11 & -8\end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 10 & 25 & 5 & 17 & 26 \\ 0 & 40 & -10 & 18 & 44 \\ 0 & -8 & 1 & \frac{-17}{5} & \frac{-46}{5} \\ -10 & -10 & -5 & -11 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 10 & 25 & 5 & 17 & 26 \\ 0 & 40 & -10 & 18 & 44 \\ 0 & -8 & 1 & \frac{-17}{5} & \frac{-46}{5} \\ 0 & 15 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 10 & 25 & 5 & 17 & 26 \\ 0 & 40 & -10 & 18 & 44 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 15 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 10 & 25 & 5 & 17 & 26 \\ 0 & 40 & -10 & 18 & 44 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 10 & 25 & 5 & 17 & 26 \\ 0 & 40 & -10 & 18 & 44 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили нулевую строку, значит $v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.

Значит $< v_1, v_2, v_3, v_4 >=< v_1, v_2, v_3 >$. Больше строк нулевых нет, значит $v_1, v_2, v_3$ ЛНЗ. Они и есть базис, так как $< v_1, v_2, v_3 >= U$.

б) Среди векторов $u_1, u_2$ выбрать те, которые лежат в $U$ и выразить их через базис.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 23 \\ 23 \\ 18 \\ 24 \\ 21 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Пусть $u_1 \in U$, тогда $u_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, то есть соответственная СЛУ совместна. Проверим это.

$$\begin{cases} u_{1_1} = \lambda_1 v_{1_1} + \lambda_2 v_{2_1} + \lambda_3 v_{3_1} \\ u_{1_2} = \lambda_1 v_{1_2} + \lambda_2 v_{2_2} + \lambda_3 v_{3_2} \\ u_{1_3} = \lambda_1 v_{1_3} + \lambda_2 v_{2_3} + \lambda_3 v_{3_3} \\ u_{1_4} = \lambda_1 v_{1_4} + \lambda_2 v_{2_4} + \lambda_3 v_{3_4} \\ u_{1_5} = \lambda_1 v_{1_5} + \lambda_2 v_{2_5} + \lambda_3 v_{3_5} \end{cases} = \begin{cases} 23 = 10\lambda_1 - 30\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 23 = 25\lambda_1 - 35\lambda_2 - 3\lambda_3 \\ 18 = 5\lambda_1 - 25\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 24 = 17\lambda_1 - 33\lambda_2 + 0\lambda_3 \\ 21 = 26\lambda_1 - 34\lambda_2 - 4\lambda_3 \end{cases}$$

Запишем уравнения в строки матрицы и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 25 & -35 & -3 & 23 \\ 5 & -25 & 2 & 18 \\ 17 & -33 & 0 & 24 \\ 26 & -34 & -4 & 21 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-69}{2} \\ 5 & -25 & 2 & 18 \\ 17 & -33 & 0 & 24 \\ 26 & -34 & -4 & 21 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-69}{2} \\ 0 & -10 & 1 & \frac{13}{2} \\ 17 & -33 & 0 & 24 \\ 26 & -34 & -4 & 21 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-69}{2} \\ 0 & -10 & 1 & \frac{13}{2} \\ 0 & 18 & \frac{-17}{5} & \frac{-151}{10} \\ 26 & -34 & -4 & 21 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-69}{2} \\ 0 & -10 & 1 & \frac{13}{2} \\ 0 & 18 & \frac{-17}{5} & \frac{-151}{10} \\ 0 & 44 & \frac{-46}{5} & \frac{-194}{5} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-69}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-17}{8} \\ 0 & 18 & \frac{-17}{5} & \frac{-151}{10} \\ 0 & 44 & \frac{-46}{5} & \frac{-194}{5} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-69}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-17}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{17}{40} \\ 0 & 44 & \frac{-46}{5} & \frac{-194}{5} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-69}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-17}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{17}{40} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{-17}{20} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-69}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-17}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{-17}{20} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-69}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-17}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

СЛУ совместна, значит $u_1 \in U$. Чтобы найти координаты в базисе $v_1, v_2, v_3$, приведем матрицу к УСВ.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 23 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-69}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-17}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$u_1 = \frac{9}{16}v_1 - \frac{7}{16}v_2 + \frac{17}{8}v_3$$

Сделаем то же самое для вектора $u_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 25 & -35 & -3 & -3 \\ 5 & -25 & 2 & 1 \\ 17 & -33 & 0 & 1 \\ 26 & -34 & -4 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-21}{2} \\ 5 & -25 & 2 & 1 \\ 17 & -33 & 0 & 1 \\ 26 & -34 & -4 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-21}{2} \\ 0 & -10 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 17 & -33 & 0 & 1 \\ 26 & -34 & -4 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-21}{2} \\ 0 & -10 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 18 & \frac{-17}{5} & \frac{-41}{10} \\ 26 & -34 & -4 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-21}{2} \\ 0 & -10 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 18 & \frac{-17}{5} & \frac{-41}{10} \\ 0 & 44 & \frac{-46}{5} & \frac{-64}{5} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-21}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-25}{8} \\ 0 & 18 & \frac{-17}{5} & \frac{-41}{10} \\ 0 & 44 & \frac{-46}{5} & \frac{-64}{5} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-21}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-25}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{5}{8} \\ 0 & 44 & \frac{-46}{5} & \frac{-64}{5} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-21}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-25}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{-5}{4} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-21}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-25}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{-5}{4} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-21}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-25}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 2 & 3 \\ 0 & 40 & -8 & \frac{-21}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-25}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{61}{80} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{80} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{25}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$u_2 \in U, u_2 = \frac{61}{80}v_1 + \frac{29}{80}v_2 + \frac{25}{8}v_3$$

5. Найти базис и размерность подпространства $U \subseteq R^5$, являющегося множеством решений ОСЛУ.

(только тут я понял, что нам разрешается не писать каждый этап преобразования матриц)

Запишем ОСЛУ в матрицу, приведем ее к УСВ.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & -6 & -7 & -9 & -1 & 0 \\ 7 & -4 & -8 & -11 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -12 & -22 & 2 & 0 \\ 8 & -7 & -6 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & -6 & -7 & -9 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-24}{7} & \frac{-64}{7} & \frac{-16}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Сразу можно определить размерность подпространства как $n - c = 2$, где $n = 5$ - количество переменных (или размер пространства), $c = 3$ - количество главных переменных в улучшенной матрице.

Чтобы найти базис, запишем общее решение.

$$\begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \cdot x_4 - \frac{5}{3} \cdot x_5 \\ \frac{-1}{3} \cdot x_4 - \frac{4}{3} \cdot x_5 \\ \frac{-8}{3} \cdot x_4 - \frac{2}{3} \cdot x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Разделим это решение на 2 вектора, один для $x_4$, другой для $x_5$

$$v_4 = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-8}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = < v_4, v_5 >$$