Матан. Дз 1

1. Найти взаимнопростые m, n такие, что $\frac{m}{n} = 5,(2023)$

Пусть $\frac{m}{n} = x$; $x = 5,(2023)$

$10000x = 52023,(2023)$

$9999x = 52023,(2023) - 5,(2023)$

$x = \frac{52018}{9999}$

НОД(52018, 9999) = 0, значит 52018 и 9999 взаимнопростые числа

Ответ: m = 52018, n = 9999

2. Вычислить суммы

а) $A_n = \frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \frac{1}{9\cdot13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}$

Разложим каждый элемент последовательности используя равенство

$\frac{1}{k(k+4)} = \frac{1}{4}(\frac{4}{k(k+4)}) = \frac{1}{4}(\frac{4+k-k}{k(k+4)}) = \frac{1}{4}(\frac{k+4}{k(k+4)} - \frac{k}{k(k+4)}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4})$

Получим телескопическую сумму: $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + ... - \frac{1}{4n+1}) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4n+1})$

Ответ: $A_n = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4n+1})$

б) $B_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$

Умножим обе части уравнения на 2 и отделим из каждой дроби часть, которая входит в B_n. Также добавим и вычтем последний элемент из B_n, чтобы можно было упростить выражение

$2B_n = 1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}} = 1+(\frac{1}{2})+\frac{2}{2}+(\frac{3}{2^2})+\frac{2}{2^2}+(\frac{5}{2^3})+\frac{2}{2^3}+\cdots+(\frac{2n-3}{2^{n-1}})+\frac{2}{2^{n-1}}+(\frac{2n-1}{2^n})-\frac{2n-1}{2^n} =$

$= B_n + 1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n}$

Выразим B_n

$B_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}$

Используем равенство $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$, чтобы упростить выражение.

$B_n = 1 + 1 + 1 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$

Ответ: $B_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$

в) $C_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$

Пусть $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$, тогда $f'(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}$

Заметим, что $\frac{1}{3} \cdot f'(\frac{1}{3}) = C_n$. Для того, чтобы вычислить C_n сначала вычислим $f(x)$, затем посчитаем производную $f'(x)$ и подставим $f'(\frac{1}{3})$ в уравнение с C_n.

$f(x)$ - сумма геометрической прогрессии B, где $b_1 = x$, $q = x$ вычислим сумму по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

$f(x) = \frac{x^{n+1}-x}{x-1}$

$f'(x) = \frac{((n+1)x^n-1)\cdot(x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2} = \frac{(nx^n+x^n-1)(x-1)-x^{n+1}+x}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}+x^{n+1}-x-nx^n-x^n+1-x^{n+1}+x}{(x-1)^2} =$

$= \frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{(x-1)^2}$

$f'(\frac{1}{3}) = \frac{\frac{n}{3^{n+1}}-\frac{n+1}{3^n}+1}{\frac{4}{9}} = \frac{9+\frac{n}{3^{n-1}}-\frac{n+1}{3^{n-2}}}{4}$

$C_n = \frac{1}{3} \cdot f'(\frac{1}{3}) = \frac{3+\frac{n}{3^n}-\frac{n+1}{3^{n-1}}}{4}$

Ответ: $C_n = \frac{3+\frac{n}{3^n}-\frac{n+1}{3^{n-1}}}{4}$

3. Доказать утверждения, применяя метод математической индукции

а) $\forall n \in \mathbb{N}$ верно: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

База индукции $n = 1$: $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

$1 = \frac{6}{6}$ - верно

Шаг индукции: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Используя предположение из условия заменим первые n слагаемых левой части уравнения

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)-n(n+1)(2n+1)}{6}$

Сократим обе части уравнения на $n+1 \neq 0$, тк $n > 0$

$n + 1 = \frac{(n+2)(2n+3)-n(2n+1)}{6}$

Умножим обе части уравнения на 6

$6n + 6 = 2n^2 + 7n + 6 - 2n^2 - n$

$6n + 6 = 6n + 6$ - верно

Так как база и шаг индукции верны, то $\forall n \in \mathbb{N}$ верно: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

б) Доказать, что

$\forall n : n \in \mathbb{N}, \forall \phi : \phi^2 - \phi - 1 = 0, F_k = \begin{cases} 0, k = 0 \\ 1, k = 1 \\ F_{k-1} + F_{k-2} \end{cases}$
выполняется $\phi^n = \phi \cdot F_n + F_{n-1}$

База индукции $n = 1$: $\phi = \phi \cdot F_1 + F_0$
$\phi = \phi \cdot 1 + 0$ - верно

Шаг индукции: $\phi^{n+1} = \phi \cdot F_{n+1} + F_n$

$\phi \cdot \phi^n = \phi \cdot (F_n + Fn - 1) + F_n$

Используя предположение заменим ϕ^n в левой части

$\phi \cdot (\phi \cdot F_n + F_{n-1}) = \phi \cdot (F_n + F_{n-1}) + F_n$

$\phi^2 \cdot F_n + \phi \cdot F_{n-1} = \phi \cdot F_n + \phi \cdot F_{n-1} + F_n$

$\phi^2 \cdot F_n = F_n(\phi + 1)$

$F_n(\phi^2 - \phi - 1) = 0$ Используем условие для $\phi : \phi^2 - \phi - 1 = 0$

$F_n \cdot 0 = 0$ - верно

Так как база и шаг индукции верны, то исходное утверждение верно.

в) Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N} : F_n < 2^n$

(в этом подпункте я пользуюсь методом полной математической индукции)

Отдельно докажем, что для $n = 1$ условие выполняется

$F_1 < 2^1$

$1 < 2$ - верно

(1) Теперь докажем верность исходного высказывания для n > 1

База индукции $n = 2$: $F_2 < 2^2$

$1 < 4$ - верно

Шаг индукции: $F_{n+1} < 2^{n+1}$

Для любого числа Фибоначчи верно $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, заменим F_{n+1} в левой части уравнения

$F_n + F_{n+1} < 2^{n+1}$

Используя предположение для F_n и F_{n-1} оценим $F_n + F_{n-1} < 2^n + 2^{n-1}$

Так как по оценке $2^n + 2^{n-1} > F_n + F_{n+1}$, то мы можем заменить левую часть на $2^n + 2^{n-1}$

$2^n + 2^{n-1} < 2^{n+1}$

$2 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} < 2 \cdot 2 \cdot 2^{n-1}$

$3 \cdot 2^{n-1} < 4 \cdot 2^{n-1}$

Так как n $>$ 1 по условию (1), то $2^{n-1} \neq 0$, сократим обе части уравнения на 2^{n-1}

$3 < 4$ - верно

Так как база индукции и шаг индукции верны, то $\forall n \in \mathbb{N} : n > 1$ исходное высказывание верно.

Так как для $n = 1$ и $\forall n \in \mathbb{N} : n > 1$ высказывание верно, то верно $\forall n \in \mathbb{N} : F_n < 2^n$