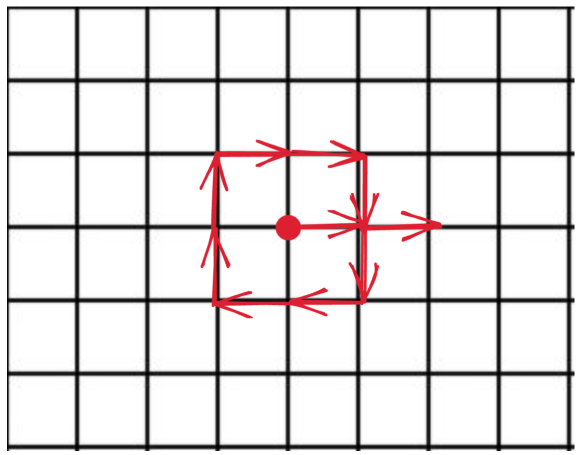
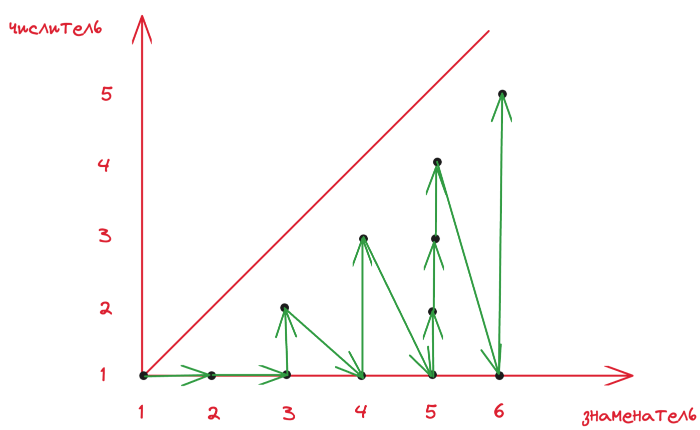
Матан Дз 5

1)

a) Опишем обход числовой плоскости. Начнем из точки (0,0) - эта пара будет соответствовать числу 1. Затем сделаем шаг в положительном направлении оси X, затем как по квадрату обойдем точки с целыми координатами по часовой стрелке, повторим процесс. Таким образом, каждому натуральному числу будет соответствовать ровно одна пара из целых чисел. Нагляднее показать на картинке.



b) Мы можем расселить все рациональные числа как на картинке (по аналогии с парадоском отеля), при этом 0 переставим на место 1. Иррациональные числа оставим на месте, потому что их количество не меняется.



2)

a) Пусть $a_k = (-1)^k, b_k = (-1)^{k+1}$

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_k = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} b_k = 1 \quad \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_k \cdot b_k = -1$

$-1 < 1 \cdot 1$

b) Пусть $a_k = b_k = (-1)^{k+1}$

$\varliminf\limits_{k\to\infty} a_k = \varliminf\limits_{k\to\infty} b_k = -1 \quad \varliminf\limits_{k\to\infty} a_k + b_k = 0$

$-1-1<0$

c) Пусть $a_k = -1, b_k = (-2)^k$

$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = -1 \quad \varlimsup\limits_{k\to\infty} a_k \cdot b_k = 2 \quad -1\cdot \varlimsup\limits_{k\to\infty} b_k = -1\cdot 2 = -2$

$-2 \neq 2$

3)

a) $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k} + \dfrac{1+(-1)^k}{2}$

$\varlimsup\limits_{k\to\infty} a_k = 1 \quad \varliminf\limits_{k\to\infty} a_k = 0 \quad \sup\{a_k\}_{k=1}^{+\infty} = a_2 = \dfrac{3}{2} \quad \inf\{a_k\}_{k=1}^{+\infty} = a_1 = -1$

b) $a_k = \dfrac{((-1)^k - 1)k^2 + k + 1}{k}$

$\forall k = 2n, n\in\mathbb{N} \hookrightarrow a_k = \dfrac{k+1}{k} = b_k$

$\forall k = 2n-1, n\in\mathbb{N} \hookrightarrow a_k = \dfrac{-2k^2+k+1}{k} = -2k+1-\dfrac{1}{k} = c_k$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_k = 1 \quad \lim\limits_{k\to\infty} c_n = -\infty$

$\varlimsup\limits_{k\to\infty} a_k = 1 \quad \varliminf\limits_{k\to\infty} a_k = -\infty \quad \sup\{a_k\}_{k=1}^{+\infty} = a_2 = \dfrac{3}{2} \quad \inf\{a_k\}_{k=1}^{+\infty} = -\infty$

c) $a_k = 1 + 2(-1)^{k+1} + 3(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$

	+1	+2	+3	lim
4n+1	+	+	+	6
4n	+	-	+	2
4n+3	+	+	-	0
4n+2	+	-	-	-4

Можно разбить свою последовательность на 4 подпоследовательности, пределы которых будут 6, 4, 3, 1, как в таблице. Соответственно получим

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_k = 6 \quad \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_k = -4 \quad \sup\{a_k\}_{k=1}^{+\infty} = 6 \quad \inf\{a_k\}_{k=1}^{+\infty} = -4$

4)

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{1} \right\} = \infty$

Раскрываем как телескопическую сумму, остается только первый и последний член, тк последний член бесконечность, то и вся сумма тоже бесконечность

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\{\cos kx\}$

Предположим, что все элементы ряда 0, тогда $kx = \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \frac{(2n-1)\pi}{2k}$

Это значит, что x зависит от k, хотя не должен. Получается, что для каждого k нужен свой x, но так как x одинаковый при всех k, то такой случай невозможен.

Получается, что в ряду есть ненулевые элементы, будем дальше рассматривать только их, потому что нулевые не влияют на сумму.

Пусть $\exists a \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) = a \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \cos((k+1)\cdot x) = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(kx+x) = 0$

1 переход, потому что если ряд сходится, то если отбросить его первые сколько-то элементов, он продолжит сходиться. 2 переход, потому что если ряд сходится, то его общий член стремится к 0.

Пусть это верно $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(kx+x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\cos(kx)\cdot\cos x - \sin(kx)\cdot\sin x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sin(kx)\cdot\sin x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sin(kx) = 0$

Последний переход, потому что $\sin x$ константа. Получаем противоречие, потому что по основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Значит предположение неверно, значит ряд расходится