Матан. Дз 2

1. Указав $N(\epsilon)$, вычислить пределы

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+6}{n^2-10n+26} = 1 = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N : |a - a_n| < \epsilon$

$|1-a_n| < \epsilon$

$$\left|1-\frac{n^2+6}{n^2-10n+26}\right| = \left|\frac{n^2-10n+26-n^2-6}{n^2-10n+26}\right| = \left|\frac{-10n+20}{n^2-10n+26}\right|$$

Рассмотрим для n $>$ 3, тогда числитель $<$ 0, знаменатель всегда положиетльный, поэтому раскроем модуль со знаком -

$$\frac{10n-20}{n^2-10n+26} < \frac{10n-20}{n^2-10n} < \frac{10n}{n^2-10n} = \frac{10}{n-10} < \frac{10}{N-10} < \epsilon$$

$N_{(e)} > \dfrac{10}{\epsilon} + 10$

Ответ: $N_{(e)} > \dfrac{10}{\epsilon} + 10$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\{(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}) = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{n^2-n}{2n^2}\} = \frac{1}{2} = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\exists N > 0 :$

$\forall n > N : |a-a_n| < \epsilon$

$|\frac{1}{2} - \frac{n^2-n}{2n^2}| < \epsilon$

$|\frac{1}{2} - \frac{n^2-n}{2n^2}| = |\frac{n^2-n^2+n}{2n^2}| = |\frac{1}{2n}|$

Так как $n > 0$, то раскроем модуль как для положительного числа.

$\frac{1}{2n} < \frac{1}{2N}\epsilon$

$N_{(e)} > \frac{1}{2\epsilon}$

Ответ: $N_{(e)} > \frac{1}{2\epsilon}$

2. Пользуясь арифметикой предела, вычислить:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{5^n+n\cdot 3^n+n^{10}}{3^{n+7}+n^{100}+5^{n+1}} = \frac{5^n(1+\dfrac{n\cdot 3^n}{5^n}+\dfrac{n^{10}}{5^n})}{5^n(5+\dfrac{5\cdot 3^{n+7}}{5^n}+\dfrac{5\cdot n^{100}}{5^n}})= \frac{1+\dfrac{n\cdot 3^n}{5^n}+\dfrac{n^{10}}{5^n}}{5+\dfrac{5\cdot 3^{n+7}}{5^n}+\dfrac{5\cdot n^{100}}{5^n}}\right\} = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \frac{2n - \sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n} = \frac{\sqrt{4n^2} - \sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2}} = \frac{(\sqrt{4n^2} - \sqrt{4n^2-1})\cdot(\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2})}{3} = \right.$

$$= \frac{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2}}{3\cdot(\sqrt{4n^2}+\sqrt{4n^2-1})} = \left. \frac{n(\frac{\sqrt{n^2+3}}{n}+1)}{3\cdot n(2+\frac{\sqrt{4n^2-1}}{n})} \right\} = \frac{1+1}{3\cdot(2+2)} = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{n2^n}{n!+1})$

Используем теорему о двух миллиционерах. Сначала найдем правого миллиционера. Зная, что $\sin(x) \leq x$, поставим на место правого миллицонера аргумент синуса. Найдем его предел.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n2^n}{n!+1} = 0$, потому что факториал растет быстрее экспоненты.

Теперь найдем левого миллиционера. Так как аргумент стремится к 0, то предположим, что аргумент - маленькое число. По словам Мажуга А.М. "Все маленькие чиселки лежат в 1 четверти единичной окружности". Значит можно выбрать 0 в качестве левого миллиционера.

Так как оба миллиционера стремятся к 0, то по теореме о двух миллиционерах, исходное выражение тоже стремится к 0.

Ответ: 0

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+4^n}{n+5^n}}$

Используем теоремум о 2 миллиционерах.

$$\sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n+5^n}} < \sqrt[n]{\frac{n^2+4^n}{n+5^n}} < \sqrt[n]{\frac{4^n+4^n}{5^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n+5^n}} = \frac{4}{5}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \right\} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt[n]{\frac{4^n+4^n}{5^n}}=\frac{4}{5}\cdot\sqrt[n]{2}\right\}=\frac{4}{5}$$

Ответ: $\frac{4}{5}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$

Использем теорему о 2 миллиционерах. В правой части я воспользовался хинтом, но так как (n - 1) > (n - 2), то $(n-1)\cdot(n-2)! > (n-2)\cdot(n-2)!$

$$\frac{n!}{n!}<\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}<\frac{(n-1)\cdot(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n-1)\cdot(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}=\frac{2\cdot(n-1)!+n!}{n!}=\frac{n!\left(1+\dfrac{2\cdot(n-1)!}{n\cdot(n-1)!}\right)}{n!}=\right.$$

$$\left.=1+\frac{2\cdot(n-1)!}{n\cdot(n-1)!}\right\}=1$$

Ответ: 1

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\cdot n^n}{(3n)!}$

Используем теорему о 2 миллиционерах.

$$\frac{n!}{(3n)!}<\frac{n!\cdot n^n}{(3n)!}<\frac{n!\cdot n^n}{n!\cdot n^{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^n}{n!\cdot n^{2n}}=0$$

Ответ: 1

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \Bigg\{ \sin(\pi\sqrt[3]{n^3+1}) = (-1)^n \cdot \sin(\pi\sqrt[3]{n^3+1} - \pi n) =$

$$= (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi^3(n^3+1) - \pi^3 n^3}{\pi^2\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + \pi^2 n\sqrt[3]{n^3+1} + \pi^2 n^2}\right) =$$

$$= (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2}\right)\Bigg\} = (-1)^n \cdot \sin 0 = 0$$

Ответ: 0