Матан Дз 10

1. Посчитать дифференциалы

a) $f(x) = arctg(\frac{u}{v})$

$df = f'dx$

$f' = (arctg(\frac{u}{v}))' = \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}} \cdot (\frac{u}{v})' = \frac{v^2}{u^2+v^2} \cdot \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{u^2+v^2}$

$df = \frac{u'v-uv'}{v^2} \cdot dx = \frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$

Ответ: $\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$

b) $f = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$

$df = f'dx$

$f' = (\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}})' = -\frac{1}{u^2+v^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}} \cdot (2uu'+2vv') = -\frac{uu'+vv'}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}$

$df = -\frac{uu'+vv'}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} \cdot dx = -\frac{udu+vdv}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}$

Ответ: $-\frac{udu+vdv}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}$

2. Доказать, используя матиндукцию

a) $P_n : (cos(ax+b))^{(n)} = a^n cos(ax+b+\frac{\pi}{2} \cdot n)$, где $a, b \in R$

$P_1 : cos(ax+b)' = acos(ax+b+\frac{\pi}{2})$

$cos(ax+b)' = sin(ax+b) \cdot a = cos(ax+b+\frac{\pi}{2}) \cdot a$ - верно

$P_{n+1} = cos(ax+b)^{(n+1)} = (cos(ax+b)^n)' = (a^n cos(ax+b+\frac{\pi}{2} \cdot n))' = 0 + a^n \cdot (cos(ax+b+\frac{\pi}{2}) \cdot n)' =$
$a^n \cdot a \cdot sin(ax+b+\frac{\pi}{2} \cdot n) = a^{n+1} \cdot cos(ax+b+\frac{\pi}{2} \cdot (n+1))$ - верно

b) $P_n : (ln(ax+b))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$

Это мы доказывали на семинаре, но мне надо бы попрактиковаться, так что решу еще раз сам.

$P_1 : (ln(ax+b))' = \dfrac{a}{ax+b}$

$(ln(ax+b))' = \dfrac{1}{ax+b} \cdot (ax)' = \dfrac{a}{ax+b}$ - верно

$P_{n+1} = (ln(ax+b))^{n+1} = ((ln(ax+b))^n)' = (\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n})' = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot a^n \cdot ((ax+b)^{-n})' =$
$(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot a^n \cdot (-1) \cdot n \cdot a \cdot (ax+b)^{-n-1} = \dfrac{(-1)^n \cdot n! \cdot a^{n+1}}{(ax+b)^{n+1}}$

3. Найти n-ую производную

a) $f(x) = \dfrac{x-13}{x^2-x-6}$

$\dfrac{x-13}{x^2-x-6} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-3} = \dfrac{(A+B)x-3A+2B}{x^2-x-6} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -3A+2B=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x-13}{x^2-x-6} = \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{-2}{x-3}$

$f(x)^{(n)} = (\dfrac{3}{x+2})^{(n)} + (\dfrac{-2}{x-3})^{(n)} = 3 \cdot (\dfrac{1}{x+2})^{(n)} - 2 \cdot (\dfrac{1}{x-3})^{(n)}$

$P_n : (\dfrac{1}{x+\lambda})^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+\lambda)^{n+1}} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$P_1 : (\dfrac{1}{x+\lambda})' = \dfrac{-1}{(x+\lambda)^2}$ - верно

$P_{n+1} : (\dfrac{1}{x+\lambda})^{(n+1)} = ((\dfrac{1}{x+\lambda})^{(n)})' = (\dfrac{(-1)^n n!}{(x+\lambda)^{n+1}})' = (-1)^n \cdot n! \cdot (\dfrac{1}{(x+\lambda)^{n+1}})' = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n!} \cdot (-1) \cdot$
$(n+1) \cdot \dfrac{1}{(x+\lambda)^{n+2}} =$

$= \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+\lambda)^{x+2}}$ - верно

$f(x)^{(n)} = 3 \cdot (\dfrac{1}{x+2})^{(n)} - 2 \cdot (\dfrac{1}{x-3})^{(n)} = 3 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} - 2 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$

b) $f(x) = (x^2+x+1)e^{-3x}$

$$f(x)^{(n)} = ((x^2+x+1)e^{-3x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2+x+1)^{(n)} (e^{-3x})^{(n-k)}$$

$n : (x^2+x+1)^{(n)}$

$n = 0 : x^2+x+1$

$n = 1 : (x^2+x+1)' = 2x+1$

$n = 2 : (x^2+x+1)'' = (2x+1)' = 2$

$n \geqslant 3 : 0$

$$f(x)^{(n)} = \begin{cases} (x^2+x+1)e^{-3x}, n=0 \\ \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (2x+1)(e^{-3x})^{(1-k)}, n=1 \\ \sum\limits_{k=0}^{2} \binom{1}{k} 2(e^{-3x})^{(2-k)}, n=2 \\ 0, n \geqslant 3 \end{cases} = \begin{cases} (x^2+x+1)e^{-3x}, n=0 \\ (2x+1)(e^{-3x})' + (2x+1)e^{-3x}, n=1 \\ 2(e^{-3x})'' + 4(e^{-3x})' + 2e^{-3x}, n=2 \\ 0, n \geqslant 3; \end{cases}$$