Домашнее задание 12

1. Найти промежутки монотонности, точки локальных и глобальных экстремумов

а) $f(x) = \dfrac{3x-7}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{3(x^2-1)^2 - (3x-7)(x^2-1)\cdot 4x}{(x^2-1)^4}$

Найдем точки, в которых $f'(x) = 0$:

$3(x^2-1)^2 - (3x-7)(x^2-1)\cdot 4x = 0$

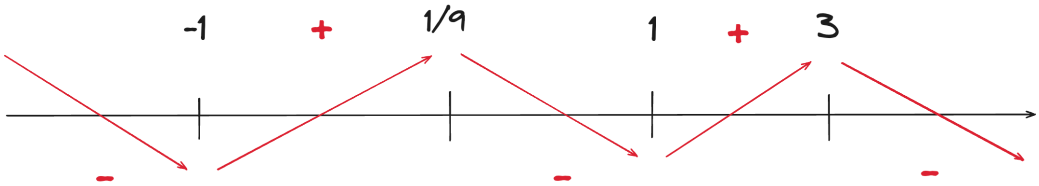
$(x^2-1)(3(x^2-1) - (3x-7)\cdot 4x) = 0$

$x = \pm 1$

или

$9x^2 + 28x - 3 = 0$

$x \in \{-1, \dfrac{1}{9}, 1, 3\}$



$Lmin$: не существует, так как ± 1 не входит в область определения

$Lmax$: $x = \dfrac{1}{9}$, $x = 3$.

$Gmin$: не существует

$Gmax$: нужно сравнить $f(\dfrac{1}{9})$, $f(3)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$f(\dfrac{1}{9}) = -\dfrac{2187}{320}$ $\quad f(3) = \dfrac{1}{32}$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

$Gmax$: $x = 3$

б) $f(x) = \begin{cases} x^{xlnx}, & \text{если } x > 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$

$(x^{xlnx})' = e^{xln^2x} = e^{xln^2x}\cdot(xln^2x)' = e^{xln^2x}\cdot(ln^2x + 2lnx)$

$f'(x) = \begin{cases} e^{xln^2x}\cdot(ln^2x + 2lnx), & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$

Найдем точки, в которых $f'(x) = 0$

$x = 0$

или

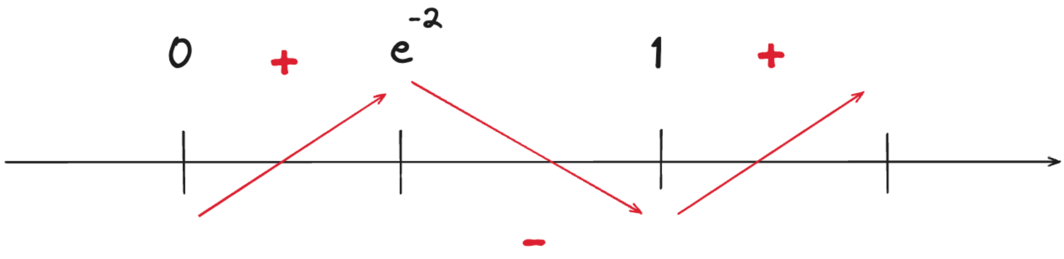
$ln^2x + 2lnx = 0$

$lnx(lnx+2)=0$

$lnx=0$ или $lnx=-2$

$x=1$ или $x=e^{-2}$

$x\in\{0,e^{-2},1\}$



$Lmin$: $x=1$

$Lmax$: $x=e^{-2}$.

$Gmin$: нужно сравнить $f(0), f(1)$

$f(0)=1$

$f(1)=1$

$Gmin$: $x=1$

$Gmax$: нужно сравнить $f(e^{-2})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

$f(e^{-2})=e^{4e^{-2}}$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$Gmax$: не существует

2. Для функции $f(x)=\begin{cases} sinx, & \text{если } x\geqslant 0\\ x^2, & \text{если } x<0\end{cases}$

а) найти прожутки монотонности, точки локальных и глобальных экстремумов

$f'(x)=\begin{cases} cosx, & \text{если } x\geqslant 0\\ 2x, & \text{если } x<0\end{cases}$

Найдем точки, в которых $f'(x)=0$

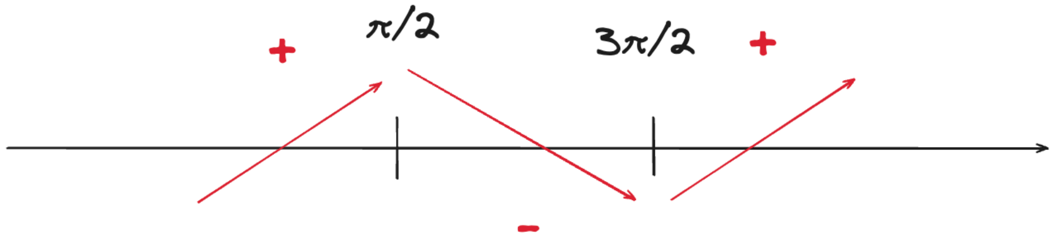
$cosx=0, x\geqslant 0$

или

$2x=0, x<0$

$x\in\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{N}$

Так как функция периодичная, рассмотрим только первый период $[0,2\pi]$



$Lmin$: $\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{N}$

$Lmax$: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{N}$

$Gmin$: $\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{N}$

$Gmax$: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{N}$

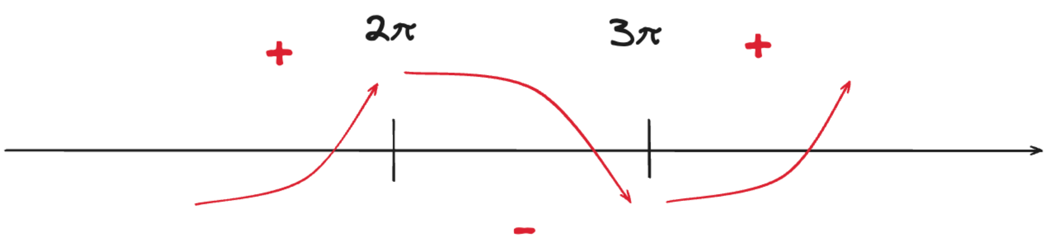
б) найти промежутки, на которых функция является выпуклой, вогнутой

$$f''(x) = \begin{cases} -sinx, & \text{если } x \geqslant 0 \\ 2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$-sinx = 0, x \geqslant 0$

$x \in \pi k, k \in \mathbb{N}$

Опять рассмотрим только один период $[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}]$



Функция выпуклая на промежутках $[\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k], k \in \mathbb{N}$

Функция вогнутая на промежутках $[2\pi k, \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{N}$

3. Доказать неравенства

а) $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2} \quad , \forall x > 0$

Докажем $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}$

$g(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8}$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4}$

Разложим по Формуле 1 при $n = 0, \lambda = 0$

$\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}=g(0)+g'(c)=0+\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{c}{4}$

Хотим доказать, что $\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{c}{4}>0, \forall c>0$

$f(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{c}{4}$

$f'(c)=\dfrac{1}{4}-(2\sqrt{1+c})^{-2}$

$f'(c)=0$ при $c=0$

То есть при $c\in(0,+\infty]f(x)>f(0)=0$

Докажем $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$

$f(x)=1+\dfrac{x}{2}-\sqrt{1+x}$

$f'(x)$

Разложим по Формуле 1 при $n=0$, $\lambda=0$

$1+\dfrac{x}{2}-\sqrt{1+x}=0+x(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(1+c))}$

$c>0\Rightarrow\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2(1+c)}$

$\begin{cases}x>0\\ \dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2(1+c)}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$

б) $\dfrac{b-a}{b}<ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a} \quad ,\forall 0<a<b$

Докажем $ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$

$\forall x>0: e^x>1+x\Rightarrow x>ln(1+x)$

Пусть $1+x=\dfrac{b}{a}, x=\dfrac{b-a}{a}, ln(1+x)=ln\dfrac{b}{a}$

$x>ln(1+x)\Rightarrow\dfrac{b-a}{a}>ln\dfrac{b}{a}$

Докажем $\dfrac{b-a}{b}<ln\dfrac{b}{a}$

$x>ln(1+x)\Rightarrow -x<-ln(1+x)\Rightarrow -x<ln(\dfrac{1}{1+x})$

Пусть $1+x=\dfrac{a}{b}, x=\dfrac{a-b}{b}, -x=\dfrac{b-a}{b}, ln(1+x)=ln(\dfrac{a}{b}), ln(\dfrac{1}{1+x})=ln(\dfrac{b}{a})$

$-x<ln(\dfrac{1}{1+x})\Rightarrow\dfrac{b-a}{b}<ln(\dfrac{b}{a})$

4. Доказать утверждения

а) Если $x,y,z>0, x+y+z=3\pi$, то $x^x+y^y+z^z>108$

Используем неравенство Йенсена при $n=3, \lambda_i=\dfrac{1}{3}, f(x)=x^x$

Определим выпуклость $f(x)$

$(x^x)'=(e^{xlnx})'=x^x(lnx+1)$

$(x^x)'' = (x^x(lnx+1))' = (x^x)'(lnx+1) + x^x(lnx+1)' = x^x(lnx+1)^2 + x^{x-1} > 0 \forall x \geqslant 0$

$f(x)-$ выпуклая

$36 < \pi^\pi \leqslant \dfrac{x^x + y^y + z^z}{3} \Rightarrow x^x + y^y + z^z > 3 \cdot 36 = 108$

б) $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

Используем неравенство Йенсена при $n = n, \lambda_i = \dfrac{1}{n}, f(x) = lnx$

Определим выпуклость $f(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0-$ $f(x)$вогнутая

$ln(\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \geqslant \dfrac{ln(x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)}{n}$

$ln(\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \geqslant ln(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n})$

$\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$

5. Найти максимальную сумму $sinA + sinB + sinC$, где $A + B + C = 180, A, B, C \in [0, \pi]$

Используем неравенство Йенсена при $n = 3, \lambda_i = \dfrac{1}{n}, f(x) = sinx, f''(x) = -sinx < 0$ - вогнутая на $[0, \pi]$

$sin\dfrac{\pi}{3} \geqslant \dfrac{sinA + sinB + sinC}{3} \Rightarrow sinA + sinB + sinC \leqslant 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$