Матан Дз 4

1) Пусть $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$

a) $a_n - b_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} > 0,$

потому что функция $f(x) = \sqrt{x}$ монотонно возрастает.

b) $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n+1} = 2\sqrt{n+1} -$
$2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2(n+1) - 2\sqrt{n^2+n} - 1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{4n^2+4n+1} - \sqrt{4n^2+4n}}{\sqrt{n+1}} > 0$

значит последовательность монотонно убывает.

c) $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} - \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{n+1} =$

$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1 + 2(n+1) - 2\sqrt{(n+2)(n+1)}}{\sqrt{n+1}} =$

$= \frac{\sqrt{4n^2+12n+9} - \sqrt{4n^2+12n+8}}{\sqrt{n+1}} > 0$ значит последовательность возрастает

d) Пусть k $>$ m: $a_k < a_m, b_k > b_m$. Пусть неверно $a_k > b_m$, тогда $a_k \leqslant b_m < b_k \Rightarrow a_k < b_k$

- противоречие с пунктом а.

Пусть k $<$ m: $a_k > a_m, b_k < b_m$. Пусть неверно $a_k > b_m$, тогда $a_m < a_k \leqslant b_m \Rightarrow a_m < b_m$

- противоречие с пунктом а.

Пусть k $=$ m: по пункту (a) $a_k > b_k$

e) $a_1 > a_2 > \dots > a_n > b_1$, значит a_n ограничена снизу.
$b_1 < b_2 < \dots < b_n < a_1$, значит b_n ограничена сверху.

f) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}) = 0$

$A - B = 0 \Rightarrow A = B$

2)

a) $a_n = 2 + (-1)^n$

$[C] \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

Для четного n: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{2 \cdot n}{n} = 2$

Для нечетного n: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n - 1}{n} = 2$

Ответ: 2

b) $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$

$$[C]\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

Из семинарской задачи 3.1 известно, что последовательность $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} e$. Так же по семинарской задаче 3.3 известно, что любая последовательность, которая имеет предел в обычном понимании, имеет такой же предел по Чезаро, значит $[C]\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$

c) $a_n = \sin n$

$S_n = \sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \cdots + \sin n$

$2\sin\frac{1}{2}\cdot S_n = 2\sin\frac{1}{2}(\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n)$

$2\sin\frac{1}{2}\cdot S_n = \cos\frac{1}{2} - \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{3}{2} - \cos\frac{5}{2} + \cdots + \cos\frac{2n-1}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}$

$2\sin\frac{1}{2}\cdot S_n = \cos\frac{1}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}$

$2\sin\frac{1}{2}\cdot S_n = 2\sin\frac{1+2n+1}{2}\sin\frac{1-2n-1}{2}$

$$S_n = \frac{\sin(n+1)\sin n}{\sin\frac{1}{2}}$$

$$[C]\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)\sin n}{\sin\frac{1}{2}\cdot n} = 0$$

Ответ: 0

3)

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \sqrt{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(n+1-n)} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2$$

$b_n > 0 \quad b_{n-1}-b_n > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

По теореме Штольца $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$

Ответ: 2

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 1^k+2^k+\cdots+n^k$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = n^{k+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k(1+\frac{k}{n}+\frac{\lambda_1}{n^2}+\frac{\lambda_2}{n^3}+\dots+\frac{\lambda_{k-1}}{n^{k-2}}+\frac{k}{n^{k-1}}+\frac{1}{n^k})}{-n^{k+1}+n^{k+1}+n^k(k+1+\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n^2}+\dots+\frac{k+1}{n^{k-1}}+\frac{1}{n^k})}=\frac{1}{k+1}$$

Если словами объяснять эту страшную штуку, то n^{k+1} в знаменателе сократилась, поэтому старшая степень n^k, ее и выносим за скобки как в числителе, так и в знаменателе. В числителе при n^k коёффициент 1, в знаменателе k $+$ 1, это можно понять из треугольника Паскаля. Так как все остальные члены стремятся к 0, то можем брать в рассчет только отношение коэффициентов при старшей степени.

$b_n > 0 \quad b_{n-1}-b_n > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$

По теореме Штольца $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}=\dfrac{1}{k+1}$

Ответ: $\dfrac{1}{k+1}$