Матан Дз 8

1.

a) Пусть $f \in \overline{o}(f), x \to a \Rightarrow f = \alpha \cdot f, \alpha \to 0, x \to a$. $\alpha = \dfrac{f}{f} = 1, \alpha \to 1, x \to a \Rightarrow$ противоречие. Утверждение неверно.

b) $f \in \underline{O}(f), x \to a \Rightarrow f = \alpha \cdot f, \alpha$ - ограничена при $x \to a$. $\alpha = \dfrac{f}{f} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha$ - ограничена при $x \to a$. Утверждение верно.

c) $f \cdot \overline{o}(g) = \overline{o}(f \cdot g), x \to a$

Пусть $h \in f \cdot \overline{o}(g) \Rightarrow \exists g_1 \in \overline{o}(g) : h = f \cdot g_1, g_1 \to 0, x \to a \Rightarrow \exists \alpha : g_1 = \alpha \cdot g, \alpha \to 0, x \to a \Rightarrow$

$h = \alpha \cdot (f \cdot g), \alpha \to 0, x \to a \Rightarrow h \in \overline{o}(f \cdot g)$. Утверждение верно.

d) $\overline{o}(f) \cdot \overline{o}(g) = \overline{o}(f \cdot g), x \to a$

Пусть $h \in \overline{o}(f) \cdot \overline{o}(g) \Rightarrow \exists f_1 = \alpha \cdot f, \alpha \to 0, x \to a; \exists g_1 = \beta \cdot g, \beta \to 0, x \to a \Rightarrow$

$h = f_1 \cdot g_1 = \alpha \cdot \beta \cdot f \cdot g, \alpha \cdot \beta \to 0, x \to a \Rightarrow h \in \overline{o}(f \cdot g)$. Утверждение верно.

e) $\underline{O}(\overline{o}(f)) = \underline{O}(f)$

Пусть $h \in \underline{O}(\overline{o}(f)) \Rightarrow \exists g \in \underline{O}(k), k \in \overline{o}(f) \Rightarrow g = \alpha \cdot k, \alpha-$ ограничена при $x \to a, k = \beta \cdot f, \beta \to 0, x \to a \Rightarrow h = \alpha \cdot (\beta \cdot f), \alpha-$ ограничена, при $x \to a, \beta \to 0, x \to a \Rightarrow h \to 0, x \to a \Rightarrow h-$ органичена при $x \to a \Rightarrow h \in \underline{O}(f)$. Утверждение верно.

f) $\overline{o}(f) + \underline{O}(f) = \overline{o}(f), x \to a$

Пусть $h = \overline{o}(f) + \underline{O}(f) \Rightarrow h = g \cdot k, g \in \overline{o}(f), k \in \underline{O}(f) \Rightarrow g = \alpha \cdot f, \alpha \to 0, x \to a; k-$ ограничена при $x \to a \Rightarrow g + k$ - ограничена при $x \to a$, пусть неверно $k \to 0, x \to a$, тогда неверно и $(g + k) \to 0, x \to a \Rightarrow h \notin \overline{o}(f)$, значит утверждение неверно.

g) $\overline{o}(f + \underline{O}(f)) = \overline{o}(f), x \to a$

Пусть $g \in \overline{o}(f + \underline{O}(f)) \Rightarrow g = \alpha(f + h), h \in \underline{O}(f), \alpha \to 0, x \to a \Rightarrow h = \beta \cdot f, \beta-$ ограничена при $x \to a \Rightarrow g = \alpha(f + f \cdot \beta) = \alpha \cdot (\beta + 1) \cdot f$. $\alpha \to 0, x \to a \Rightarrow a \cdot (b + 1) \to 0, x \to a \Rightarrow g \in \overline{o}(f)$. Утверждение верно

h) $(x + \overline{o}(x)) \cdot (7x^2 + \overline{o}(x^2)) = 7x^3 + \overline{o}(x^3), x \to 0$

$\forall \lambda \neq 0 : \lambda \cdot f + \overline{o}(f) = f \cdot (\alpha + \lambda), \alpha \to 0, x \to 0 \Rightarrow \alpha + \lambda \to \lambda, x \to 0 \Rightarrow \lambda \cdot f + \overline{o}(f) = \underline{O}(f)$

$\underline{O}(x) \cdot \underline{O}(x^2) = \underline{O}(x^3), x \to 0 \Rightarrow \alpha \cdot x \cdot \beta \cdot x^2 = \gamma \cdot x^3, \alpha, \beta, \gamma$ - ограничены при $x \to a \Rightarrow 0 = 0$ Утверждение верно.

2.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-e^x}{\sqrt[4]{1+x}-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\dfrac{2x}{5}+\overline{o}(2x)-(1+x+\overline{o}(x))}{1+\dfrac{x}{4}+\overline{o}(x)-(1-\dfrac{x^2}{2}+\overline{o}(x^3))} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{3x}{5}+\overline{o}(x)}{\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{4}+\overline{o}(x)+\overline{o}(x^3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{3}{5}+\overline{o}(1)}{\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}+\overline{o}(1)+\overline{o}(x^2)} = \dfrac{-\dfrac{3}{5}}{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{-12}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x(\dfrac{1}{1-\sqrt{1+3x}}-\dfrac{1}{\sin x}) = \lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x(1+\sqrt{1+3x})}{-3x}-\dfrac{x}{\sin x}) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+1+\dfrac{3x}{2}+\overline{o}(x))}{-3}-1 = \dfrac{-2}{3}-1 = \dfrac{-5}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{5x}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+e^{5x\ln{(1+3x)}}-1}{x^2} = \dfrac{5x\ln(1+3x)+\overline{o}(5x\ln(1+3x))}{x^2} =$

$= \dfrac{15x^2+5x\overline{o}(x^2)+\overline{o}(5x\ln(1+3x))}{x^2} = 15+0+0 = 15$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arccos{(1-x)}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\arccos(\cos(t))}{\sqrt{-\cos t+1}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{t}{\sqrt{1-(1-\dfrac{t^2}{2}+\overline{o}(t^3))}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{t}{\sqrt{\dfrac{t^2}{2}+\overline{o}(t^3)}} = \dfrac{t}{t\sqrt{\dfrac{1}{2}+\overline{o}(t)}} =$

$\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+0}} = \sqrt{2}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\ln(2+\sqrt[5]{x})} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{t}}\right)}{\ln\left(2+\sqrt[5]{\dfrac{1}{t}}\right)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{5\ln\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{t}}\right)^3}{3\ln\left(2+\sqrt[5]{\dfrac{1}{t}}\right)^5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5(x+...+\overline{o}(x))}{3(1+x+...+\overline{o}(1+x))} = \dfrac{5}{3}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^{ok} x}{\mathrm{tg}^{om} x}, k, m, \in \mathbb{N}$

Индукция $P_n : \sin^{ok} x = x + \overline{o}(x)$

P_1: $\sin x = x + \overline{o}(x^2) = x + \overline{o}(x), x \to 0$

P_{n+1}: $\sin^{o(n+1)} x = \sin(\sin^{on} x) = \sin(x+\overline{o}(x)) = x+\overline{o}(x)+\overline{o}(x+\overline{o}(x)) = x+\overline{o}(x), x\to 0$

Индукция $P_n : \mathrm{tg}^{ok} x = x + \overline{o}(x)$ - аналогично

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^{ok} x}{\mathrm{tg}^{om} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\overline{o}(x)}{x+\overline{o}(x)} = 1$