Матан Дз 3

1) **Исследуйте следующие рекуррентные последовательности на сходимость:**

a) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, a_1 = \sqrt{2}$

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} \Leftrightarrow a = \sqrt{2a} \Leftrightarrow a = 2.$

Докажем, что предел существует.

1) Ограниченность

Докажем используя математическую индукцию $0 < a_n \leqslant 2 : P_n$.

База: $P_1 : 0 < \sqrt{2} \leqslant 2$ - верно

Шаг: $P_{n+1} : 0 < \sqrt{2a_n} \leqslant \sqrt{2 \cdot 2} = 2$ - верно

2) Монотонность

$a_{n-1} - a_n = \sqrt{2a_n} - a_n = \sqrt{2a_n} - \sqrt{a_n^2} = \sqrt{a_n}(\sqrt{2} - \sqrt{a_n})$. Так как $0 < a_n \leqslant 2$, то $\sqrt{a_n}(\sqrt{2} - \sqrt{a_n}) \geqslant 0$.

По теореме Вейерштрасса у последовательности есть предел

Ответ: 2

b) $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, a_1 = 0$

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} \Leftrightarrow a = \sqrt{6 + a} \Leftrightarrow a = 3.$

Докажем, что предел существует.

1) Ограниченность

Докажем используя математическую индукцию $0 \leqslant a_n \leqslant: P_n$.

База: $P_1 : 0 \leqslant 0 \leqslant 3$ - верно

Шаг: $P_{n+1} : 0 \leqslant \sqrt{6 + a_n} \leqslant \sqrt{6 + 3} = 3$ - верно

2) Монотонность

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{6 + a_n}}{a_n}$$

$(\frac{\sqrt{6+a_n}}{a_n})^2 = \frac{6+a_n}{a_n^2} = \frac{6}{a_n^2} + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{6}{9} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geqslant 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$(так как $a_n \geqslant 0$)

- последовательность монотонно возрастает

По теореме Вейерштрасса у последовательности есть предел

Ответ: 3

c) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{a_n^2}, a_1 = 3$

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{a_n^2} \Leftrightarrow a = \frac{2a}{3} + \frac{1}{a^2}$.

$a = \frac{2a}{3} + \frac{1}{a^2}$

$3a^3 = 2a^3 + 3$

$a = \sqrt[3]{3}$

Докажем, что предел существует.

1) Ограниченность

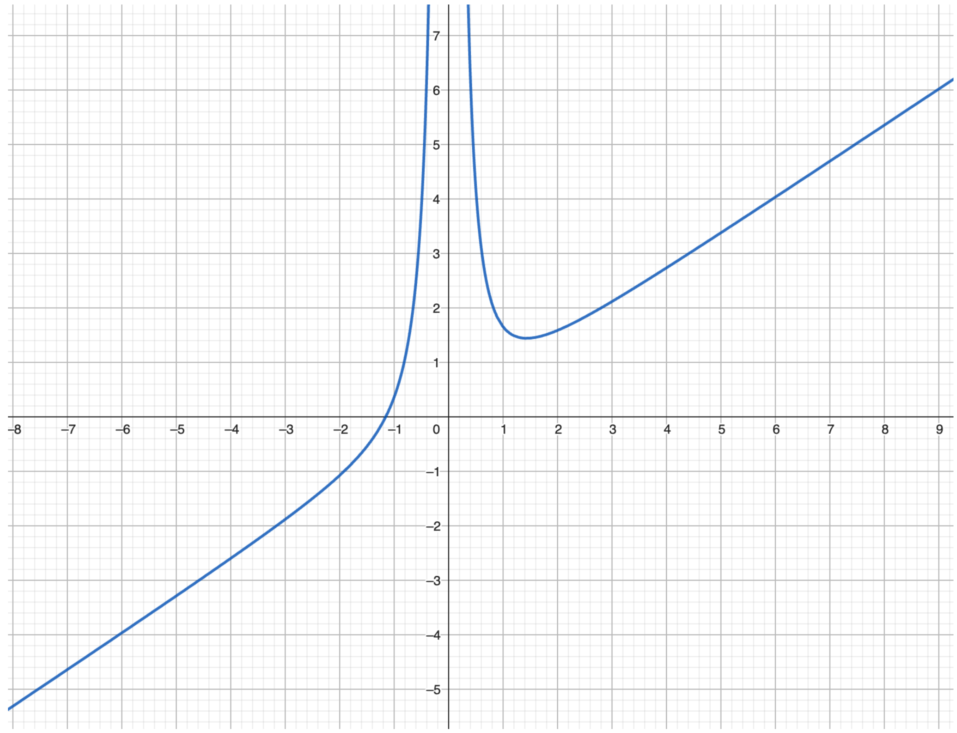
Докажем используя математическую индукцию $\sqrt[3]{3} \leqslant a_n \leqslant 3 : P_n$.

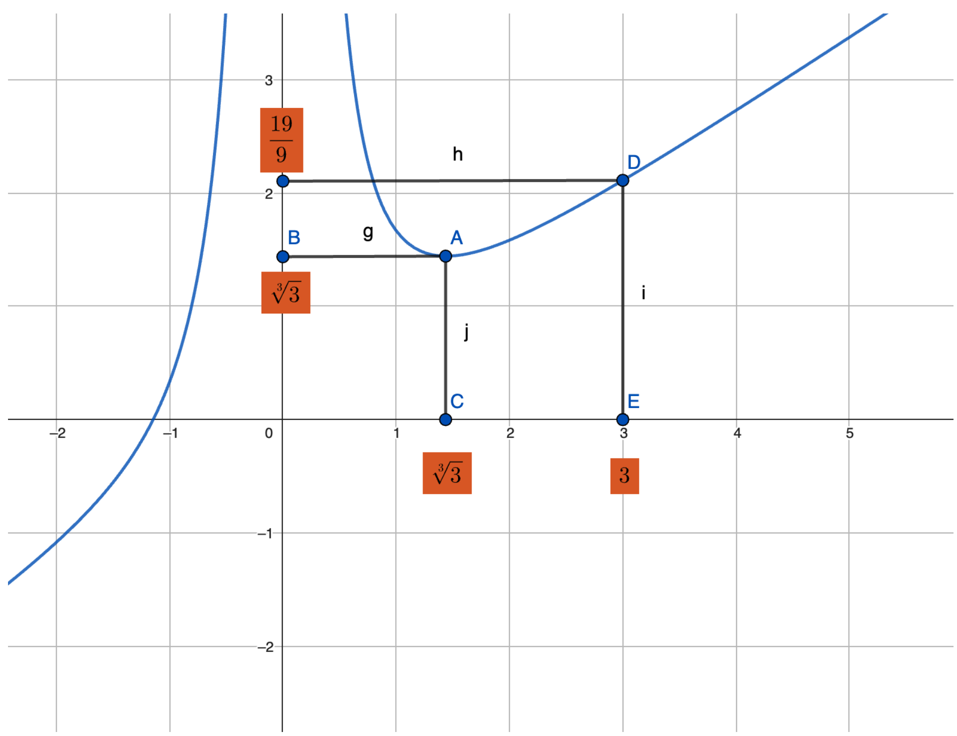
База: $P_1 : \sqrt[3]{3} \leqslant 3 \leqslant 3 : P_n$ - верно

Шаг: P_{n+1} : Докажем используя график функции $f(x) = \frac{2x}{3} - \frac{1}{x^2}$

$f(a_n) = a_{n+1}$.

Так как $a_n \in [\sqrt[3]{3}; 3]$, то $a_{n+1} \in [\sqrt[3]{3}; \frac{19}{9}] \Rightarrow \sqrt[3]{3} \leqslant a_{n+1} \leqslant 3$





2) Монотонность

$a_n - a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3} - \dfrac{1}{a_n^2} = \dfrac{a_n^3 - 3}{3a_n^2} \geqslant 0$. Функция монотонна и ограничена, значит по теореме Вейерштрасса у нее есть предел.

Ответ: $\sqrt[3]{3}$

d) $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+a_n}, a_1 = 1$

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{1+a_n} \Leftrightarrow a = 1 + \frac{1}{1+a} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$ или $a = -\sqrt{2}$

Так как $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n} \geqslant 1$, то предел $a = -\sqrt{2}$ точно не подходит. Остается доказать существование предела последовательности a_n.

Для этого сначала докажем неравенство $|a_n - a| \leqslant \lambda |a_{n-1} - a|, \lambda \in (0;1)$

$|a_n - a| = |1 + \frac{1}{1+a_{n-1}} - 1 - \frac{1}{1+a}| = |\frac{1+a-1-a_{n-1}}{(1+a_{n-1})(1+a)}| = \frac{|a-a_{n-1}|}{(1+a)(1+a_{n-1})} = \lambda |a_{n-1} - a|$

(так как $1 + a \geqslant 1 \wedge 1 + a_{n-1} \geqslant 1$)

$|a_n - a| = \lambda^n |1 - a| = \lambda^n (\sqrt{2} - 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ |a_n - a| = \lambda^n (\sqrt{2} - 1) \right\} = 0$$

Значит по определению a - предел последовательности.

Ответ: $\sqrt{2}$

2) **Найти предел:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}}$

$a_{n+1} = a_n^2 - 2, a_1 = 3$

Докажем используя метод математической индукции, что при $n \geqslant 2$, выполняется:

$P_n : a_n^2 - 4 = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 (a_1^2 - 4)$

База: $P_2 : a_2^2 - 4 = a_1^2 \cdot (a_1^2 - 4)$

$a_2 = 3^2 - 2 = 7$

$49 - 4 = 9 \cdot (9 - 4)$ - верно

Шаг: $P_{n+1} : a_{n+1}^2 - 4 = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdots a_n^2 (a_1^2 - 4)$

$a_{n+1}^2 - 4 = (a_n^2 - 4) a_n^2$

Используя выражение $n+1$ого члена последовательности:

$(a_n^2 - 2)^2 - 4 = a_n^4 - 4a_n^2 \quad a_n^4 - 4a_n^2 + 4 - 4 = a_n^4 - 4a_n^2$ - верно.

Далее вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{a_n^2}{a_1^2 \cdot a_2^2 \cdots a_{n-1}^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{a_1^2 \cdot a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 (a_1^2 - 4) + 4}{a_1^2 \cdot a_2^2 \cdots a_{n-1}^2}} =$$

$$= \sqrt{a_1^2 - 4} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

Ответ: $\sqrt{5}$