Матан Дз 7

1. По Гейне, доказать

$\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x} = 3$

$\forall\{x\}_{n=1}^{\infty} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 9 \rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = 3, x_n \in [0,9)\cup(9,+\infty]$

$\forall\varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N \hookrightarrow |x_n - 9| < \varepsilon$

$|x_n - 9| = |\sqrt{x}-3||\sqrt{x}+3| < |\sqrt{x}-3| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = 3$
(пункт стоит мало а тут кроме этого еще миллион задач, поэтому я не уверен в том, что написал)

2 По Коши, доказать

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$, где

$$\begin{cases} 2, & x \in \mathbb{R}\setminus 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Так как x никогда не принимает значение 0, то $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x \in B'_\delta \hookrightarrow |x-2| = 0 < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

3. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left\{\frac{2x^4+5x^3+3x^2-x-1}{-x^4-x^3+3x^2+5x+2} = \frac{(2x^3+3x^2-1)(x+1)}{(-x^3+3x+2)(x+1)} = \frac{2x^3+3x^2-1}{-x^3+3x+2} = \frac{(2x^2+x-1)(x+1)}{(-x^2+x+2)(x+1)} = \frac{2x^2+x-1}{-x^2+x+2} = \frac{(2x-1)(x+1)}{(-x+2)(x+1)} = \frac{2x+1}{-x+2}\right\} = \frac{-2+1}{1+2} = \frac{-1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -8}\left\{\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \frac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^2)}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)} = \frac{-(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^2)}{\sqrt{1-x}+3}\right\} = \frac{-4-4-4}{6} = -2$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left\{\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right) = \frac{-3+x^2+x+1}{x^3-1} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}\right\} = \frac{1+2}{1+1+1} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{\sqrt[k]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x} = \frac{\sqrt[km]{(1+ax)^m}-\sqrt[km]{(1+bx)^k}}{x} = \frac{(1+ax)^m-(1+bx)^k}{x\cdot(\cdots)} =\right.$

$$= \frac{1+C_m^1(ax)+C_m^2(ax)^2+\cdots+(ax)^m-1-C_k^1(bx)-C_k^2(bx)^2-\cdots-(bx)^k}{x\cdot(\cdots)} =$$

$$= \frac{+C_m^1a+C_m^2a^2x+\cdots+a^mx^{m-1}-C_k^1b-C_k^2b^2x-\cdots-b^kx^{k-1}}{\cdots} =$$

$$\left.= \frac{+C_m^1a+C_m^2a^2x+\cdots+a^mx^{m-1}-C_k^1b-C_k^2b^2x-\cdots-b^kx^{k-1}}{\sqrt[km]{(1+ax)^{km-1}}+\sqrt[km]{(1+ax)^{km-2}\cdot(1+bx)}+\cdots+\sqrt[km]{(1+bx)^{km-1}}}\right\} = \frac{ma-kb}{1+1+\cdots+1} = \frac{ma-pkb}{km}$$

4. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{3x}\cdot\dfrac{3x}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{e^{2x}-1}=1\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$
(не понял до конца, как тут сделать, используя только то, что мы знаем)

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(2x)}{x+\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin(2x)}{x}}{1+\dfrac{\sin 3x}{x}}=\dfrac{1-2}{1+3}=\dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin x^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\dfrac{1}{1\cdot(1+1)}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax\cos bx-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax\cos bx+\cos ax-\cos ax-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax(1+\cos bx)-\cos ax-1}{x^2}=$
$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\cos ax(1+\cos bx)(1-\cos bx)}{(x^2)(1+\cos bx)}-\dfrac{(\cos ax+1)(\cos ax-1)}{(x^2)(\cos ax+1)})=\lim\limits_{x\to 0}(-\dfrac{\cos ax\sin^2(bx)}{(x^2)(1+\cos bx)}+\dfrac{\sin^2(ax)}{(x^2)(\cos ax+1)})=$
$\lim\limits_{x\to 0}(-\dfrac{\cos ax\sin^2(bx)b^2}{x^2(1+\cos bx)b^2}+\dfrac{\sin^2(ax)\cdot a^2}{x^2(\cos ax+1)\cdot a^2})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos axb^2}{1+\cos bx}+\dfrac{a^2}{\cos ax+1}=-\dfrac{1\cdot b^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2-b^2}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+\cos(\dfrac{\pi x}{2})}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t^2+2t+1+\cos\dfrac{\pi t+\pi}{2})}{\sqrt{t+1}-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t^2+2t+1+\cos\dfrac{\pi t+\pi}{2})(\sqrt{t+1}+1)}{t}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(t^2+2t+1-\sin\dfrac{\pi t}{2})\ln(t^2+2t+1-\sin\dfrac{\pi t}{2})(\sqrt{t+1}+1)}{t(t^2+2t+1-\sin\dfrac{\pi t}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{(t^2+2t+1-\sin\dfrac{\pi t}{2})(\sqrt{t+1}+1)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(t^2+2t+1-\sin\dfrac{\pi t}{2})(\sqrt{t+1}-1)}{t}+\frac{2t^2+4t-2sin\dfrac{\pi t}{2}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}2t+4-\frac{2sin\dfrac{\pi t}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{\pi}{2}t}+\frac{(t^2+2t+1-\sin\dfrac{\pi t}{2})(\sqrt{t+1}-1)}{t}=4-\pi$$