Матан Дз 9

1. Установить род каждой точки разрыва

a) 0 - точка разрыва.

$$\lim_{x\to 0^-} 2^{x^{-1}} = +\infty \quad \lim_{x\to 0^+} 2^{x^{-1}} = +\infty.$$

Так как хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, то 0 - точка разрыва второго рода.

b) 0 - точка разрыва.

$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Так как односторонние пределы отличаются на конечную величину, то 0 - точка разрыва первого рода

c) Любая точка из множества $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ - точка разрыва. Возьмем произвольную точку a из этого множества. Рассмотрим подотрезок последовательности всех рациональных чисел, где каждый элемент меньше a. По определению предела получим, что $\lim\limits_{x\to a^-} x = a$. Аналогично $\lim\limits_{x\to a^+} x = a$. Так как односторонние пределы одинаковые, то точка a, как и все из множества $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, является точкой разрыва нулевого рода (устранимой).

2. Найдите λ при котором функция является непрерывной в точке $x = 0$

По определению функция непрерывна в точке, когда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin(3x)) - 1}{x^2} = \lambda$. То есть по факту нам надо найти предел.

так как $1 - \cos(x) = 2\cdot\sin(\dfrac{x}{2})$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin(3x)) - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin(\frac{1}{2}\cdot\sin(3x))^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(3x)}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{-2x^2} = \dfrac{-9}{2}$.

Ответ: $\dfrac{-9}{2}$

3. Найти производную

a) $f(x) = \dfrac{2+x^2}{\sqrt{1+x^4}} \quad f'(x) = \dfrac{(2+x^2)'\sqrt{1+x^4} + (2+x^2)\sqrt{1+x^4}'}{1+x^4} = \dfrac{2x\sqrt{1+x^4} + \dfrac{(2+x^2)4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4}$

b) $f(x) = \arcsin(5^{x^2}) \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-5^{2x^2}}}\cdot(5^{x^2})' = \dfrac{2\cdot x\cdot 5^{x^2}\cdot\ln(5)}{\sqrt{1-5^{2x^2}}}$

c) $f(x) = (2+\cos(3x))^{\ln x} \quad f'(x) = (e^{\ln(x)\ln(2+\cos(3x))})' = (e^{\ln(x)\ln(2+\cos(3x))})\cdot(\ln(x)\ln(\cos(3x)+2))' = e^{\ln(x)\,\ln(\cos(3\,x)+2)}\cdot\left((\ln(x))'\cdot\ln(\cos(3\,x)+2) + (\ln(\cos(3\,x)+2))'\cdot\ln(x)\right) =$

$$= e^{\ln(x)\,\ln(\cos(3\,x)+2)}\cdot\left(\frac{\ln(\cos(3\,x)+2)}{x} + \frac{\ln(x)}{\cos(3\,x)+2}\cdot\left((\cos(3\,x))' + (2)'\right)\right) =$$

$$= e^{\ln(x)\,\ln(\cos(3\,x)+2)} \cdot \left(\frac{\ln(\cos(3\,x)+2)}{x} - \frac{\ln(x)\,\sin(3\,x)}{\cos(3\,x)+2} \cdot (3\,x)'\right) =$$

$= (\cos(3\,x)+2)^{\ln(x)}\,\left(\frac{\ln(\cos(3\,x)+2)}{x} - \frac{3\,\ln(x)\,\sin(3\,x)}{\cos(3\,x)+2}\right)$ что это такое... что за монстр...

d) $f = 2^{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+1}\right)}$ $\quad f'(x) = 2^{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \ln(2) \cdot \left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)' =$

$$= \ln(2)\;2^{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{\ln(2)\;x\,2^{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+1}\right)}}{\sqrt{x^2+1}\;(x^2+2)}$$

извини, я тут на бумажке немного пописал и не техал каждое действие, а то бы я до Нового года делал бы...

e) $f = a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a}$ $\quad f'(x) = \left(a^{a^x}\right)' + \left(a^{x^a}\right)' + \left(x^{a^a}\right)' = \ln(a)\;a^{a^x} \cdot a^x \cdot \ln(a) + \ln(a)\;a^{x^a} \cdot a \cdot x^{a-1} + a^a\,x^{a^a-1} =$

$= \ln^2(a)\;a^{a^x+x} + \ln(a)\;x^{a-1}\,a^{x^a+1} + a^a\,x^{a^a-1}$. Если честно, это какая-то пытка была

4.

a) Для $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)' \cdot x^2 + \left(x^2\right)' \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\;x^2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} + 2\,\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\;x = 2\,\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\;x - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

Для $x = 0$, вычислим по определению:

$$f'(0) = \lim_{\delta x \to 0^\pm} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0^\pm} \frac{f(\delta x) - f(0)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0^\pm} \frac{f(\delta x)}{\delta x} = \frac{(\delta x)^2 \cdot \sin\dfrac{1}{\delta x}}{\delta x} = (\delta x) \cdot \sin\frac{1}{\delta x} = 0$$

b) Так как оба односторонних предела равны нулю, то точка 0 является устранимой или 0 рода.

5.

$$\frac{d}{dx}\det A(x) = \frac{d}{dx}(a(x)\cdot d(x) - b(x)\cdot c(x)) = a'(x)\cdot d(x) + a(x)\cdot d'(x) - b'(x)\cdot c(x) - c(x)\cdot b'(x) = a'd + ad' - b'c - cb'$$

$$tr(adj(A(x)) \cdot \frac{dA(x)}{dx}) = tr(\begin{pmatrix} d(x) & -b(x) \\ -c(x) & a(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{pmatrix}) = da' - bc' - cb' + ad'$$