

同调论

葛化彬

目录

0 前言	2
0.1 关于这篇讲义	2
1 奇异同调	3
1.1 范畴与函子	3
1.2 链复形与链映射	5
1.3 奇异同调群	7
1.4 Mayer-Vietoris 序列	13
1.5 插曲：微分上同调	18
1.6 映射的简约同调序列	36
2 相对同调	40
2.1 相对同调群	40
2.2 切除定理	41
2.3 空间三元组的同调序列	42
3 胞腔同调	43
3.1 CW 复形	43
3.2 定向与映射度	49
3.3 胞腔同调的计算	51
3.4 欧拉示性数与 Morse 不等式	54
3.5 Morse 临界点理论	57
4 万有系数定理	58
4.1 朴素形式	58
4.2 Ext 与 Tor 函子	61

0 前言

0.1 关于这篇讲义

这篇讲义是根据葛化彬老师在第十四期北京国际数学中心强化班上课时的板书整理而成，其中增加了少量我本人在学习中的理解。由于本人精力以及能力的限制，在整理过程中难免出现一些疏漏，而这都是我本人的错误。如有任何修改意见，欢迎通过邮件与我联系：201800150089@mail.sdu.edu.cn。

刘博文
于北京大学图书馆

1 奇异同调

1.1 范畴与函子

1.1.1 范畴

定义 1.1.1 (范畴). 一个范畴 \mathcal{C} 是由以下要素组成:

1. 一类数学对象 $\text{ob}(\mathcal{C})$;
2. 对于每两个对象 X, Y , 给定了一个集合 $\text{Mor}(X, Y)$, 其元素称为从 X 到 Y 的射, 记 $f \in \text{Mor}(X, Y)$ 为 $f: X \rightarrow Y$;
3. 一个复合规则 $\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) \rightarrow \text{Mor}(X, Z)$, 记作 $(f, g) \mapsto g \circ f$, 并且满足以下性质:

- (1) 结合律: 对任意的 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$, 满足

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- (2) 单位律: 每个对象 X 有一个单位射 $\text{id}_X: X \rightarrow X$, 满足对任何 $f: Y \rightarrow X$ 有

$$\text{id}_X \circ f = f$$

对于任何 $g: X \rightarrow Z$, 满足

$$g \circ \text{id}_X = g$$

在下面的例子中, 都以 {对象, 射} 的形式展示:

例 1.1.1. 集合的范畴: {集合, 函数}

例 1.1.2. 光滑流形的范畴: {光滑流形, 光滑映射}

例 1.1.3. 拓扑空间的范畴: {拓扑空间, 连续映射}

例 1.1.4. 单纯复形的范畴: {单纯复形, 单纯映射}

例 1.1.5. 阿贝尔群的范畴: {阿贝尔群, 群同态}

例 1.1.6. 群的范畴: {群, 群同态}; 环的范畴: {环, 环同态}

例 1.1.7. 域 F 上线性空间的范畴: { F 线性空间, F 线性映射}

例 1.1.8. 域 F 上的代数的范畴: { F 代数, F 代数同态}

例 1.1.9. 拓扑空间的范畴: {拓扑空间, X 到 Y 映射的同伦类}

例 1.1.10. 带基点的拓扑空间的范畴: {带基点的拓扑空间, 保持基点的连续映射}

例 1.1.11. 取定拓扑空间 X , 考虑: { X 中的点, 从点 a 到点 b 的道路的同伦类, 其中 $a, b \in X$ }

1.1.2 协变函子

定义 1.1.2 (协变函子). 假设 \mathcal{C}, \mathcal{D} 是两个范畴, 一个协变函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是一个对应:

1. \mathcal{C} 中的每个对象 X 对应于 \mathcal{D} 的一个对象 $F(X)$;
2. \mathcal{C} 的每个射 $f: X \rightarrow Y$ 对应于 \mathcal{D} 的一个射 $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$, 满足以下性质:

- (1) 复合律: 对于射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, 有

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

- (2) 单位律: 对于任意对象 X , 有

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$$

例 1.1.12. 遗忘函子: $\{\text{拓扑空间}, \text{映射}\} \rightarrow \{\text{集合}, \text{函数}\}$

例 1.1.13. 基本群函子 $\pi_1: \{\text{带基点的拓扑空间}, \text{保持基点的连续映射}\} \rightarrow \{\text{群}, \text{群同态}\}$

例 1.1.14. 单纯同调函子 $H_*: \{\text{单纯复形}, \text{单纯映射}\} \rightarrow \{\text{阿贝尔群}, \text{群同态}\}$

1.1.3 反变函子

定义 1.1.3 (反变函子). 假设 \mathcal{C}, \mathcal{D} 是两个范畴, 一个反变函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是一个对应:

1. \mathcal{C} 中的每个对象 X 对应于 \mathcal{D} 的一个对象 $F(X)$;
2. \mathcal{C} 的每个射 $f: X \rightarrow Y$ 对应于 \mathcal{D} 的一个射 $F(f): F(Y) \rightarrow F(X)$, 满足以下性质:

- (1) 复合律: 对于射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, 有

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

- (2) 单位律: 对于任意对象 X , 有

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$$

例 1.1.15. 对偶函子: $\{\text{域 } F \text{ 上的线性空间}, F \text{ 线性映射}\} \rightarrow \{\text{对偶空间}, \text{映射的拉回}\}$

例 1.1.16. 给定拓扑空间 X , 考虑 $C(X) = \{\text{连续函数 } X \rightarrow \mathbb{R}\}$, 则有反变函子 $C^*: \{\text{拓扑空间}, \text{连续映射}\} \rightarrow \{\text{实代数}, \text{实代数同态}\}$

定义 1.1.4. 称一个射 $f: X \rightarrow Y$ 是可逆的, 如果存在射 $g: Y \rightarrow X$, 使得:

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

定义 1.1.5 (同构). 称两个对象是同构的, 如果它们之间存在一对互逆的射。

命题 1.1.1. 协变 (反变) 函子总是把单位射变成单位射, 把可逆射变成可逆射, 把同构的对象变成同构的对象。

证明. 这里只对协变函子进行验证: 根据定义, 函子总把单位射映成单位射; 设函子为 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $f: C_1 \rightarrow C_2$ 是 \mathcal{C} 中的一个可逆射, 其逆为 $g: C_2 \rightarrow C_1$, 那么

$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(\text{id}_C) = \text{id}_D$$

即 $F(f)$ 是 \mathcal{D} 中的可逆射, 其逆为 $F(g)$; 如果 C_1, C_2 是 \mathcal{C} 中的同构的对象, 同构由 f 给出, 那么 $F(C_1), F(C_2)$ 自然也是 \mathcal{D} 中的同构对象, 同构由 $F(f)$ 给出。□

1.2 链复形与链映射

1.2.1 链复形及其同调群

定义 1.2.1 (链复形). 一个链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 是一串阿贝尔群 C_q 以及一串群同态 $\partial_q: C_q \rightarrow C_{q-1}$ (称为 q 维边缘算子), 满足 $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0, \forall q \in \mathbb{Z}$, 写法上有:

$$\cdots \rightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \rightarrow \cdots$$

定义 1.2.2 (闭/边缘链群). 链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 的 q 维闭链群定义为 $Z_q(C) = \ker \partial_q$; q 维边缘链群定义为 $B_q(C) = \text{Im } \partial_{q+1}$

定义 1.2.3 (同调群). 链复形 C 的 q 维同调群定义为 $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$, 其元素称为 C 的 q 维同调类。

约定 1.2.1. 我们约定, $z_q \in Z_q(C)$ 所代表的同调类为 $[z_q] \in H_q(C)$, 记 $H_*(C) = \{H_q(C)\}$, 实际上, $H_*(C)$ 是一个分次群。

定义 1.2.4 (分次群). 分次群指的是一个阿贝尔群序列 $G_* = \{G_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$, 分次群同态 $\phi_*: G_* \rightarrow G'_*$ 指的是一个同态序列 $\{\phi_q: G_q \rightarrow G'_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$

定义 1.2.5 (链映射). 设 C, D 是链复形, 一个链映射 $f: C \rightarrow D$ 是一串同态 $f_q: C_q \rightarrow D_q$, 满足:

$$\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q, \quad \forall q$$

即下面的图表交换¹:

¹我们不在符号上区分不同链复形之间的边缘同态, 一并记作 ∂_q , 请读者留心。

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow f_{q+1} & & \downarrow f_q & & \downarrow f_{q-1} \\
\cdots & \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\partial_q} & D_{q-1} \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

1.2.2 链映射及其诱导同态

命题 1.2.1. 链映射 $f: C \rightarrow D$ 诱导出同调群的同态 $f_*: H_*(C) \rightarrow H_*(D)$, 映射为 $f_*([z_q]) = [f_q(z_q)], \forall z_q \in Z_q(C)$

证明. 首先验证映射是良定义的, 任取 $b_q = \partial_{q+1}(b_{q+1}) \in \text{Im } \partial_{q+1}$, 即在 C_q 的边缘链群中, 则需要证明 $f_q(b_q) \in \text{Im } \partial_{q+1}$, 根据 $f_q \circ \partial_{q+1} = \partial_{q+1} \circ f_{q+1}$, 有

$$f_q(b_q) = \partial_{q+1} \circ f_{q+1}(b_{q+1}) \in \text{Im } \partial_{q+1}$$

即定义是良好的;

下面证明 f_* 是一个群同态, 即验证:

$$f_*([z_q] + [z'_q]) = f_*([z_q]) + f_*([z'_q])$$

根据定义, 因为 $f_q: C_q \rightarrow D_q$ 的同态, :

$$\begin{aligned}
f_*([z_q] + [z'_q]) &= [f_q(z_q + z'_q)] \\
&= [f_q(z_q) + f_q(z'_q)]
\end{aligned}$$

而 $[f_q(z_q) + f_q(z'_q)]$ 与 $[f_q(z_q)] + [f_q(z'_q)]$ 是相同的, 因为它们的差只是一个边缘链。□

至此, 我们得到了一个新的范畴, 即链复形的范畴 {链复形, 链映射}, 以及一个新的函子, 同调函子: {链复形, 链映射} \rightarrow {分次群, 分次群同态}。

1.2.3 链同伦

定义 1.2.6 (链同伦). 两个链映射 $f, g: C \rightarrow D$ 称为是链同伦的, 如果存在一串同态 $T = \{T_q: C_q \rightarrow D_{q+1}\}$, 如下面图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow f_{q+1}-g_{q+1} & \swarrow T_q & \downarrow f_q-g_q & \swarrow T_{q-1} & \downarrow f_{q-1}-g_{q-1} \\
\cdots & \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\partial_q} & D_{q-1} \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

使得对任意 q 满足 $\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q$, 称 T 为联结 f, g 得一个链同伦, 记作 $f \simeq g: C \rightarrow D$ 或者 $T: f \simeq g: C \rightarrow D$

定理 1.2.1. 假设 $f \simeq g: C \rightarrow D$, 则 $f_* = g_*: H_*(C) \rightarrow H_*(D)$, 即链同伦的链映射诱导出相同的同调群同态。

证明. 即验证 $f_* - g_*$ 是零映射即可: 任取 $[z_q] \in H_q(C)$, 则

$$\begin{aligned} f_* - g_*([z_q]) &= [f_q - g_q(z_q)] \\ &= [\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q(z_q)] \\ &= [\partial_{q+1} \circ T_q(z_q)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

命题 1.2.2. 链映射之间的链同伦关系是一个等价关系。

证明. 自反性与对称性是显然的, 不平凡的地方在于传递性:

□

定义 1.2.7 (同伦等价). 两个链复形 C, D 称为是链同伦等价的, 如果存在链映射 $f: C \rightarrow D, g: D \rightarrow C$, 使得 $f \circ g \simeq \text{id}_D, g \circ f \simeq \text{id}_C$

命题 1.2.3. 链同伦等价诱导同调群的同构, 因而链同伦等价的链复形有同构的同调群。

证明. 链同伦等价是链复形层面上的同构关系, 根据命题 1.1.1, 函子将同构的对象映射成同构的对象。 □

1.3 奇异同调群

1.3.1 奇异单形

定义 1.3.1 (标准单形). q 维标准单形 $\Delta_q = \{(x_0, x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=0}^q x_i = 1\}$

定义 1.3.2 (奇异单形). 拓扑空间 X 中的 q 维奇异单形指的是一个连续映射 $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$

例 1.3.1. (线性奇异单形) C 是 \mathbb{R}^n 中的凸集, $c_0, c_1, \dots, c_q \in C$, 则有唯一的线性映射 $\Delta_q \rightarrow C$, 把顶点 e_0, \dots, e_q 映射成 c_0, \dots, c_q , 记为 $(c_0 c_1 \dots c_q): \Delta_q \rightarrow C$, 定义为 $\sum_i x_i e_i \mapsto \sum_i x_i c_i$

在下面的讨论中, 我们取定拓扑空间 X

定义 1.3.3 (奇异链群). X 的 q 维奇异链群 $S_q(X)$ 定义为以 X 中所有 q 维奇异单形为基生成的自由阿贝尔群, 其元素称为 q 维奇异链, 具有形式

$$c_q = k_1 \sigma_q^{(1)} + \dots + k_r \sigma_q^{(r)}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \sigma_q^{(i)}: \Delta_q \rightarrow X, q \geq 0$$

并且规定负维数的 $S_q(X) = 0$

定义 1.3.4 (边缘映射). X 中 q 为奇异单形 $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ 的边缘定义为如下 $q-1$ 维奇异链

$$\partial\sigma = \partial(\sigma \circ (e_0 \dots e_q)) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ (e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_q)$$

做 \mathbb{Z} 线性扩张得到

$$\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$$

是阿贝尔群同态。

命题 1.3.1. $S_*(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$ 是链复形。

证明. 即验证 $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$, 由于 ∂ 是群同态, 因此只需要在奇异单形上验证即可。

先在标准单形上计算:

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q(e_0 \dots e_q) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_{q-1}(e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_q) \\ &= \sum_{i=0}^q \left(\sum_{j<i} (-1)^j (e_0 \dots \hat{e}_j \dots \hat{e}_i \dots e_q) + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} (e_0 \dots \hat{e}_i \dots \hat{e}_j \dots e_q) \right) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (e_0 \dots \hat{e}_j \dots \hat{e}_i \dots e_q) + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j-1} (e_0 \dots \hat{e}_i \dots \hat{e}_j \dots e_q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

将上式用映射 $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ 复合就得到 $\partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) = 0$ □

1.3.2 奇异链复形与奇异同调群

定义 1.3.5 (奇异同调群). 链复形 $S_*(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$ 称为 X 的奇异链复形。由 X 的奇异链复形决定的同调群称为 X 的奇异同调群, 记作 $H_*(X) := H_*(S_*(X))$

定义 1.3.6 (奇异链复形间的链映射). 设 $f : X \rightarrow Y$ 是映射, 它把 X 中的奇异单形 $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ 变成 Y 中的奇异单形 $f \circ \sigma$, 记为 $f_{\#}(\sigma)$ 。通过线性扩张可以得到同态

$$f_{\#} : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$$

命题 1.3.2. $f_{\#}$ 与 ∂ 可交换, 即 $f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ 是链映射。

证明. 显然。 □

定义 1.3.7 (奇异链映射诱导的奇异同调群间的映射). 映射 $f : X \rightarrow Y$ 诱导的同调群的同态 $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ 指的是链映射 $f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ 所诱导的同调群同态。

命题 1.3.3 (奇异同调群的拓扑不变性). 同胚的拓扑空间有着同构的奇异同调群。

注 1.3.1. 协变函子 S_* 把拓扑空间范畴变到链复形范畴, 同调函子把链复形范畴变成分次群范畴, 将这两个协变函子复合得到协变函子称为奇异同调函子 H_* 。因此用这种观点, 命题 1.3.3 是直接的, 因为根据命题 1.1.1, 函子将同构的对象映成同构的对象。

例 1.3.2. 单点空间的奇异同调群 $H_*(\text{pt})$ 如下

$$H_*(\text{pt}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

这是因为对于每一个维度, 都只有一个奇异单形 $\sigma : \Delta_q \rightarrow \{\text{pt}\}$, 因此 $S_q(X) = \mathbb{Z}, \forall q \geq 0$, 对于边缘同态 ∂_q 来说, 我们有

$$\partial_q = \begin{cases} 1, & q = 2k + 1 \\ 0, & q = 2k \end{cases}$$

因此我们有如下的链复形

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \dots$$

因此可以得到我们期待的结果。

定义 1.3.8 (克罗内克同态). 克罗内克同态 $\varepsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ 定义为

$$\varepsilon(k_1 a_1 + \dots + k_r a_r) = k_1 + \dots + k_r$$

注 1.3.2. $\varepsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ 诱导出满同态 $H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, 因为 $S_0(X) = Z(X)$, 并且每个 1 维奇异单形的边缘的克罗内克指标为零。

命题 1.3.4. 如果空间 X 道路连通, 则 $\varepsilon : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ 是同构。

证明. 任取基点 $p \in X$, 任意 $c_0 = k_1 a_1 + \dots + k_r a_r \in \ker(\varepsilon)$, 则 $c_0 = c_0 - \varepsilon(c_0)b = k_1(a_1 - b) + \dots + k_r(a_r - b)$, 由于 X 道路连通, 因此存在道路连接 a_i 和 b , 对于每个 i 成立, 记作 σ_i , 因此

$$\partial(\sum_i k_i \sigma_i) = c_0$$

因此 c_0 是一个边缘链, 因此 $\ker \varepsilon = 0$, 即 ε 是同构。 \square

定义 1.3.9 (链复形的直和). 一族链复形 $\{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, 其中 $C_\lambda = \{C_{\lambda q}, \partial_{\lambda q}\}$ 这族链复形的直和定义为 $\bigoplus C_\lambda = \{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_{\lambda q}, \bigoplus \partial_{\lambda q}\}$

命题 1.3.5.

$$H_*(\bigoplus_\lambda C_\lambda) = \bigoplus_\lambda H_*(C_\lambda)$$

证明. 我们具体写出链复形的直和如下:

$$\cdots \bigoplus_{\lambda} C_{\lambda_{q+1}} \xrightarrow{\oplus_{\lambda} \partial_{\lambda_{q+1}}} \bigoplus_{\lambda} C_{\lambda_q} \xrightarrow{\oplus_{\lambda} \partial_{\lambda_q}} \bigoplus_{\lambda} C_{\lambda_{q-1}} \rightarrow \cdots$$

因此可以注意到

$$H_q(\bigoplus_{\lambda} C_{\lambda}) = \ker \bigoplus_{\lambda} \partial_{\lambda_q} / \operatorname{Im} \bigoplus_{\lambda} \partial_{\lambda_{q+1}} = \bigoplus_{\lambda} \ker \partial_{\lambda_q} / \operatorname{Im} \partial_{\lambda_{q+1}}$$

最后一个等式成立是因为核与像是可以与直和交换的, 因此

$$H_q(\bigoplus_{\lambda} C_{\lambda}) = \bigoplus_{\lambda} H_q(C_{\lambda})$$

□

定理 1.3.1. 设 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}$ 是 X 的道路连通分支分解, 则有同调群的直和分解 $H_*(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(X_{\lambda})$

证明. 用 \sum_X 记 X 中全体奇异单形的集合, 则可以分解为 $\sum_X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} \sum_{X_{\lambda}}$, 从而有直和分解 $S_*(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_*(X_{\lambda})$ □

推论 1.3.1. 拓扑空间 X 道路连通当且仅当 $H^0(X) = \mathbb{Z}$

1.3.3 简约奇异同调群

定义 1.3.10 (增广链复形). 拓扑空间 X 的增广链复形 $\tilde{S}_*(X) = \{\tilde{S}_q(X), \tilde{\partial}_q\}$ 定义为

$$\tilde{S}_q(X) = \begin{cases} S_q(X), & q > -1 \\ \mathbb{Z}, & q = -1 \end{cases} \quad \tilde{\partial}_q = \begin{cases} \partial_q, & q > 0 \\ \varepsilon, & q = 0 \end{cases}$$

注 1.3.3. 增广链复形只改变了 ∂_0 以及 $S_{-1}(X)$ 这两项, 因此只会影响零阶同调群的结果, 因为此时只有 ∂_0 的核发生了改变。在其余维数时, 同调群不发生改变。

注 1.3.4. 由于 $f: X \rightarrow Y$ 诱导的 $f_{\#}: S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$ 保持零维的克罗内克指数, 因此如果规定 $f_{\#}: \tilde{S}_{-1}(X) \rightarrow \tilde{S}_{-1}(Y)$ 规定为 id , 那么拓扑空间之间的映射可以过渡到增广链复形间的链映射 $f_{\#}: \tilde{S}_*(X) \rightarrow \tilde{S}_*(Y)$ 。

定义 1.3.11 (简约同调群). 拓扑空间 X 的简约同调群定义为增广链复形 $\tilde{S}_*(X)$ 对应的同调群, 记作 $\tilde{H}_*(X)$ 。 $f: X \rightarrow Y$ 诱导的同态 $f_{*}: \tilde{H}_*(X) \rightarrow \tilde{H}_*(Y)$ 规定为链映射 $f_{\#}: \tilde{S}_*(X) \rightarrow \tilde{S}_*(Y)$ 所诱导的同调群同态

命题 1.3.6. 对于拓扑空间 X , 简约同调群与同调群有如下关系

$$H_q(X) = \begin{cases} \tilde{H}_q(X), & q \neq 0 \\ \tilde{H}_q(X) \oplus \mathbb{Z}, & q = 0 \end{cases}$$

证明. 由于增广链复形与链复形相比只改变了链群 C_{-1} 以及 ∂_0 , 因此对于 $q > 0$ 时的同调群都是不改变的。

对于零维的情况, 我们有

$$H_0(X) = C_0(X)/\text{Im } \partial_1, \quad \tilde{H}_0(X) = \ker \varepsilon / \text{Im } \partial_1$$

而由于 ε 是满射, 我们有

$$C_0(X)/\ker \varepsilon \cong \mathbb{Z}$$

因此可以得到

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$$

□

注 1.3.5. 上面的证明利用了一个看似“显然”的结果:

$$C_0(X)/\ker \varepsilon \cong \mathbb{Z} \implies C_0(X) \cong \ker \varepsilon \oplus \mathbb{Z}$$

实际上是因为下述短正合列分裂的结果

$$0 \rightarrow \ker \varepsilon \rightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

推论 1.3.2. 拓扑空间 X 是道路连通当且仅当 $\tilde{H}_0(X) = 0$

1.3.4 奇异同调的同伦不变性

定义 1.3.12 (同伦映射). 映射 $f: X \rightarrow Y, g: X \rightarrow Y$ 称为同伦的, 如果存在映射 $F: X \times I \rightarrow Y$, 使得 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$, 记作 $f \cong g$

定义 1.3.13 (同伦等价). 两个拓扑空间 X, Y 称为同伦等价, 或者是有相同的同伦型, 如果存在映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$, 使得 $f \circ g \cong \text{id}_Y, g \circ f \cong \text{id}_X$

定义 1.3.14 (可缩空间). 拓扑空间 X 称为是可缩的, 如果它与单点集有相同的同伦型。

定义 1.3.15. 拓扑空间 X 的子空间 A 称为是 X 的收缩形变核², 如果存在收缩 $r: X \rightarrow A$ ³, 使得 $i \circ r$ 同伦于 id_X , 并且同伦的过程中固定 A ⁴, 其中 $i: A \rightarrow X$ 是嵌入。

例 1.3.3. S^n 是 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的收缩形变核。

²这里的定义有时也被称为强形变收缩核

³映射 $r: X \rightarrow A$ 被称为收缩, 如果 $r \circ i = \text{id}_A$

⁴这意味着同伦 $F: X \times I \rightarrow X$ 满足对于任意的 $t \in I, F(a, t) = a, \forall a \in A$

定理 1.3.2 (同伦不变性). 假定 $f \cong g$ 是同伦的映射, 则 $f_{\#} \cong g_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ 是链同伦的, 因而诱导相同的同调群同态。

注 1.3.6. 在奇异同调的框架下, 同调群的同伦不变性的证明过于繁琐以及极具构造性, 这里略过证明。在之后我们会在微分同调的观点下给出一个相对简单的证明。

推论 1.3.3 (同伦型不变性). 设拓扑空间 X, Y 有相同的同伦型 $X \cong Y$, 则它们的同调群同构。

推论 1.3.4. 设拓扑空间 X 的子空间 A 是 X 的收缩形变核, 则嵌入映射 $i : A \rightarrow X$ 诱导了同调群的同构。

1.3.5 与基本群的关系

定义 1.3.16 (基本群). X 是拓扑空间, $x_0 \in X$ 是取定的基点, 则 X 的基本群为

$$\pi_1(X, x_0) = \{\gamma \text{ 的同伦类} \mid \gamma \text{ 是 } x_0 \text{ 处的闭路}\}$$

如果我们将 $[0, 1]$ 等同于 1 维标准单形, 则 X 中的每条道路都是 X 中的 1 维奇异单形, 若 γ 是闭道路, 则 γ 是闭链, 因此 $H_1(X)$ 关心的也是 X 中的闭路的情况。以 $[\gamma]_h \in H_1(X)$ 表示 γ 代表的同调类, $[\gamma]$ 代表 γ 的同伦类。

易知

$$[\gamma\gamma']_h = [\gamma]_h + [\gamma']_h$$

故我们有同态:

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$$

定义为 $[\gamma] \mapsto [\gamma]_h$, 称为 Hurewicz 同态。

定理 1.3.3. 假设拓扑空间 X 道路连通, 则 Hurewicz 同态是满同态, 并且 $\ker h_*$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的换位子群, 即 $H_1(X)$ 就是 $\pi_1(X, x_0)$ 的交换化。

1.3.6 \mathcal{U} 小奇异链

定义 1.3.17 (\mathcal{U} 小奇异链). X 是拓扑空间, \mathcal{U} 是 X 的覆盖, 奇异单形 $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ 被称为 \mathcal{U} -小的, 如果 $\sigma(\Delta_q) \subset U \in \mathcal{U}$ 。

约定 1.3.1. 记 $S_q^{\mathcal{U}}(X)$ 是由以所有 \mathcal{U} -小奇异单形为基生成的自由阿贝尔群, 是 $S_*(X)$ 的子链复形。

定理 1.3.4. 假设 $\text{Int } \mathcal{U} = \{\overset{\circ}{U} \mid U \in \mathcal{U}\}$ 是 X 的开覆盖, 则存在链映射 $k : S_*(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(X)$ 满足 $k \circ i = \text{id}, i \circ k \cong \text{id}$, 从而包含映射诱导出同调群的同构。

1.4 Mayer-Vietoris 序列

1.4.1 同调代数工具

定义 1.4.1 (正合列). 阿贝尔群同态 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 在 B 处正合, 如果 $\ker g = \operatorname{Im} f$; 阿贝尔群同态序列 $\cdots \rightarrow G_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\phi_i} G_{i+1} \rightarrow \cdots$ 被称为正合列, 如果在每一个 G_i 处都正合。

定理 1.4.1 (Zig-Zag 引理). 链复形和链映射的长正合列 $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ 诱导了同调群间的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C) \xrightarrow{f_*} H_q(D) \xrightarrow{g_*} H_q(E) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C) \rightarrow \cdots$$

证明. 首先 f_*, g_* 都是链复形的链映射自然的诱导的同调群之间的态射, 下面我们定义 ∂_* , 考虑下面的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{f_{q+1}} & D_{q+1} & \xrightarrow{g_{q+1}} & E_{q+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow \partial_{q+1} \\ 0 & \longrightarrow & C_q & \xrightarrow{f_q} & D_q & \xrightarrow{g_q} & E_q \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q \\ 0 & \longrightarrow & C_{q-1} & \xrightarrow{f_{q-1}} & D_{q-1} & \xrightarrow{g_{q-1}} & E_{q-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_{q-1} & & \downarrow \partial_{q-1} & & \downarrow \partial_{q-1} \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

任取 $z \in E_q$ 是一个闭链, 由于 g_q 是满射因此可以考虑 $g_q^{-1}(z)$, 并通过 ∂_q 映到 D_{q-1} , 由于 $g_{q-1}\partial_q(g_q^{-1}(z)) = \partial_q(z) = 0$, 因此 $\partial_q(g_q^{-1}(z)) \in \ker g_{q-1} = \operatorname{Im} f_{q-1}$, 并且由于

$$f_{q-2}\partial_{q-1}f_{q-1}^{-1}\partial_qg_q^{-1}(z) = \partial_{q-1}\partial_qg_q^{-1}(z) = 0$$

以及 f_{q-2} 是单射可知 $\partial_{q-1}f_{q-1}^{-1}\partial_qg_q^{-1}(z) = 0$, 因此 $f_{q-1}^{-1}\partial_qg_q^{-1}(z)$ 是 C_{q-1} 中的闭链, 因此可以定义

$$\partial_*([z]) := [f_{q-1}^{-1}\partial_qg_q^{-1}(z)]$$

在这里, 我们需要小心验证以下的事实:

- (1) 定义不依赖于 z 这个同调类代表元的选取;
- (2) 定义不依赖于 $g_q^{-1}(z)$ 的选取;

我们依次如下验证:

(1) 如果将 z 改成 $z + \partial_{q+1}a, a \in E_{q+1}$, 则

$$\partial_q g_q^{-1}(z + \partial_{q+1}a) = \partial_q g_q^{-1}(z) + \partial_q g_q^{-1} \partial_{q+1}(a) = \partial_q g_q^{-1}(z) + \partial_q \partial_{q+1} g_{q+1}^{-1}(a) = \partial_q g_q^{-1}(z)$$

即与同调类代表元选取无关。

(2) 由于 z 在 g_q^{-1} 下的任何两个原像只相差一个 $\text{Im } f_q$ 中的元素, 我们不妨假设将 $g_q^{-1}(z)$ 换成 $g_q^{-1}(z) + f(a), a \in C_q$, 则

$$f_{q-1}^{-1} \partial_q (g_q^{-1}(z) + f(a)) = f_{q-1}^{-1} \partial_q g_q^{-1}(z) + f_{q-1}^{-1} \partial_q f(a) = f_{q-1}^{-1} \partial_q g_q^{-1}(z) + \partial_q(a)$$

因此更换 $g_q^{-1}(z)$ 的原像将会得到落在同一个同调类中的元素, 因此定义不依赖于 $g_q^{-1}(z)$ 的选取。

因此, ∂_* 的定义是良好的。 □

定理 1.4.2 (同调序列的自然性). 设有链复形与链映射交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

则有下面的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{q+1}(E) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(C) & \xrightarrow{f_*} & H_q(D) & \xrightarrow{g_*} & H_q(E) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{q+1}(E') & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_q(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_q(E') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

引理 1.4.1 (五引理). 设有阿贝尔群的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\phi_1} & A_2 & \xrightarrow{\phi_2} & A_3 & \xrightarrow{\phi_3} & A_4 & \xrightarrow{\phi_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5 \end{array}$$

其中两个横行都是正合列, 如果 f_1, f_2, f_4, f_5 都是同构, 则 f_3 也是同构。

证明. 图上追踪。 □

注 1.4.1. 实际上, 只需要 f_1, f_2, f_4 是满射, f_2, f_4, f_5 是单射。

定义 1.4.2 (split). 阿贝尔群同态的正合列 $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ 称为裂正合的, 如果 $f(C)$ 是 D 的直和项, 即 D 能分解成 $f(C)$ 和某个子群的直和。

注 1.4.2. 短正合列是列正合列的等价于 $D \cong C \oplus E$, 因为如果 $D \cong C \oplus E$, 由于 f 是单射自然有 $f(C)$ 是 D 的直和项; 而如果 $f(C)$ 是 D 的直和项, 那么我们不妨写成 $D = f(C) \oplus E'$, 因此

$$E' \cong D / \operatorname{Im} f \cong D / \ker g \cong E$$

即 $D \cong C \oplus E$.

命题 1.4.1. 对于阿贝尔群同态的短正合列 $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$, 下列叙述等价:

1. 存在同态 $h: D \rightarrow C$, 使得 $h \circ f = \operatorname{id}_C$
2. 存在同态 $k: E \rightarrow D$, 使得 $g \circ k = \operatorname{id}_E$
3. 短正合列 $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ 是裂正合的。

特别的, 若 E 是自由阿贝尔群⁵, 则 1, 2, 3 成立。

证明. 如果短正合列是正合的, 那么 (1), (2) 是显然成立的, 取 $C \oplus E$ 的到每个分量的投射即可。

下面证明 (1) \rightarrow (3), 首先注意到 $D = \operatorname{Im} f + \ker h$, 这是因为任取 $x \in D$, 我们有如下分解

$$x = (x - fh(x)) + fh(x)$$

后者显然在 $\operatorname{Im} f$ 中, 然而前者在 $\ker h$ 中只需要做如下验算

$$h(x - fh(x)) = h(x) - hfh(x) = h(x) - h(x) = 0$$

下面证明 $\operatorname{Im} f \cap \ker h = 0$, 若存在 $c \in C$ 使得 $f(c) = d$ 以及 $h(d) = 0$, 那么 $c = hf(c) = h(d) = 0$, 因此 $D = \operatorname{Im} f \oplus \ker h$, 即该短正合列分裂。

下面证明 (2) \rightarrow (3), 论证的方式与上面类似, 同样注意到 $D = \ker g + \operatorname{Im} k$, 这是因为任取 $x \in D$, 我们有如下的分解

$$x = (x - kg(x)) + kg(x)$$

后者显然在 $\operatorname{Im} k$ 中, 然而前者在 $\ker g$ 中只需要做如下验算

$$g(x - kg(x)) = g(x) - gkg(x) = g(x) - g(x) = 0$$

下面证明 $\operatorname{Im} k \cap \ker g = 0$, 若存在 $d \in D$ 使得 $d = k(e)$, 并且满足 $g(d) = 0$, 那么 $0 = g(d) = gk(e) = e$, 因此交平凡, 即 $D = \ker g \oplus \operatorname{Im} k = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} k$, 即该短正合列分裂。□

⁵更一般的, E 是投射的, 或 C 是内射的即可。

1.4.2 Mayer-Vietoris 序列

我们先来考虑下面的情况：\$X\$ 是拓扑空间，\$X_1, X_2\$ 是 \$X\$ 的子空间，使得 \$\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}\$ 是 \$X\$ 的一个覆盖，则

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(X_1) + S_*(X_2)$$

我们考虑下面的图表：

$$\begin{array}{ccccc} & & X_1 & & \\ & \nearrow i_1 & & \searrow j_1 & \\ X_1 \cap X_2 & & & & X_1 \cup X_2 \\ & \searrow i_2 & & \nearrow j_2 & \\ & & X_2 & & \end{array}$$

则可以得到链复形与链映射的短正合列

$$0 \rightarrow S_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_{\#}} S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \xrightarrow{k_{\#}} S_*(X_1) + S_*(X_2) \rightarrow 0$$

其中 \$h_{\#}(x) := (i_{1\#}(x), -i_{2\#}(x))\$, \$k_{\#}(x) := j_{1\#}(y) + j_{2\#}(z)\$

定义 1.4.3 (Mayer-Vietoris 耦). 设 \$X_1, X_2\$ 是 \$X\$ 的子空间，满足包含映射 \$i : S_*(X_1) + S_*(X_2) \rightarrow S_*(X_1 \cup X_2)\$ 诱导了同调群的同构，则称 \$(X_1, X_2)\$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。

例 1.4.1. 若 \$\mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2 = X\$，则 \$\{X_1, X_2\}\$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。因为此时 \$S_*(X_1) + S_*(X_2) = S_*^{\mathcal{U}}(X)\$，根据定理 1.3.4，可知 \$S_*^{\mathcal{U}}(X) \cong S_*(X) = S_*(X_1 \cup X_2)\$

定理 1.4.3 (Mayer-Vietoris 序列). 设 \$\{X_1, X_2\}\$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。则存在长正合列

$$\cdots \rightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\cap} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{\cap} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \cdots$$

证明. 短正合列诱导长正合列。 \$\square\$

注 1.4.3. 对增广链复形，同样有短正合列

$$0 \rightarrow \tilde{S}_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_{\#}} \tilde{S}_*(X_1) \oplus \tilde{S}_*(X_2) \xrightarrow{k_{\#}} \tilde{S}_*(X_1) + \tilde{S}_*(X_2) \rightarrow 0$$

因此也有简约同调群的 Mayer-Vietoris 序列。

注 1.4.4. \$\partial_* : H_q(X_1 \cup X_2) \rightarrow H_{q-1}(X_1 \cap X_2)\$ 的具体形式：任取 \$[z] \in H_q(X_1 \cup X_2)\$，由于 Mayer-Vietoris 耦的原因，\$[z]\$ 一定有一个代表闭链可以写成 \$x_1 + x_2\$，其中 \$x_1\$ 是 \$X_1\$ 中的链，\$x_2\$ 是 \$X_2\$ 中的链。由于 \$\partial z = \partial x_1 + \partial x_2 = 0\$，则 \$\partial x_1 = -\partial x_2\$，记作 \$y\$，是 \$X_1 \cap X_2\$ 中的闭链，它代表了 \$H_{q-1}(X_1 \cap X_2)\$ 中的同调类，即

$$\partial_*([z]) = [y]$$

定理 1.4.4 (Mayer-Vietoris 序列的自然性). 设 $\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\}$ 是 X, Y 中的 Mayer-Vietoris 耦, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 满足 $f(X_1) \subset Y_1, f(X_2) \subset Y_2$, 则有正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow H_{q+1}(X_1 \cup X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{-} & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) & \xrightarrow{+} & H_q(X_1 \cup X_2) \rightarrow \cdots \\ & \downarrow f_* & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \cdots \rightarrow H_{q+1}(Y_1 \cup Y_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(Y_1 \cap Y_2) & \xrightarrow{-} & H_q(Y_1) \oplus H_q(Y_2) & \xrightarrow{+'} & H_q(Y_1 \cup Y_2) \rightarrow \cdots \end{array}$$

例 1.4.1 利用 \mathcal{U} -小奇异链的性质给出了一种 Mayer-Vietoris 耦, 但是通常在计算中, 我们会选择闭集作为 Mayer-Vietoris 耦, 下面的定理给出了两个闭子空间组成的集合什么时候是一个 Mayer-Vietoris 耦的判断方法:

命题 1.4.2. 如果拓扑空间 $X = X_1 \cup X_2$, X_1, X_2 是闭子空间, 且 $X_1 \cap X_2$ 是某个开邻域的形变收缩核, 则 $\{X_1, X_2\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦

证明. 记 $X_1 \cap X_2$ 的开邻域 V 以及 $F: V \times I \rightarrow V$ 是形变收缩同伦, 记 $V_i = X_i \cup V, i = 1, 2$, 显然 $\{V_1, V_2\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦。

我们断言: 对于 $i = 1, 2$, V_i 可形变收缩到 X_i , 定义

$$F_i(x, t) = \begin{cases} x, & x \in X_i \\ F(x, t), & x \in V \setminus X_i \end{cases}$$

根据 Mayer-Vietoris 序列则有

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(V) & \longrightarrow & H_q(V_1) \oplus H_q(V_2) & \longrightarrow & H_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(V) \longrightarrow \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_q(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) & \longrightarrow & H_q(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \longrightarrow H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

根据五引理可知虚线是一个同构, 即 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。 \square

利用命题 1.4.2, 我们计算高维球面的简约同调群, 这是我们第一个不平凡的例子。

例 1.4.2. 当 $n \geq 0$ 时, 有球面的同调群为

$$\widetilde{H}_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. 令 $B_+ = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \geq 0\}, B_- = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \leq 0\}$, 则 $B_+ \cap B_- = S^{n-1}$ 是其某个开邻域的收缩形变核, 则 $\{B_+, B_-\}$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。而

B_+, B_- 都同胚与 D^{n-1} , 是一个可缩空间, 则其各个维数的简约同调群为零, 利用简约同调群的 Mayer-Vietoris 序列则有

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{\pm} \tilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\mp} 0 \xrightarrow{\pm} \tilde{H}_{q-1}(S^n) \rightarrow \cdots$$

因此可以得到

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \cong \cdots \cong \tilde{H}_{q-n}(S^0)$$

利用两点空间的简约同调群可以得到我们期待的结果。 \square

1.5 插曲：微分上同调

1.5.1 de Rham 上同调

在本节中⁶, 为了简洁起见, 仅从形式上的定义微分形式, 而不深究其背后的代数原理。

取开集 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 并取坐标 $x = (x^1, \dots, x^n)$, 则其上的微分形式如下

$$\begin{aligned}\Omega^0(D) &= \{f \in C^\infty(D)\} \\ \Omega^1(D) &= \left\{ \sum_{i=1}^n f_i dx^i \mid f_i \in C^\infty(D) \right\} \\ \Omega^2(D) &= \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij} dx^i \wedge dx^j \mid f_{ij} \in C^\infty(D) \right\} \\ &\vdots \\ \Omega^n(D) &= \{f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \mid f \in C^\infty(D)\}\end{aligned}$$

规定大于 n 次以及小于 0 次的微分形式都是零, 并且

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$

令 $\Omega^*(D) = \bigoplus_{i=1}^n \Omega^i(D)$, 则 (Ω^*, \wedge) 构成了一个外代数。满足任取 $\omega \in \Omega^p(D), \eta \in \Omega^q(D)$, 则

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$$

在微分形式上定义外微分运算 $d: \Omega^k(D) \rightarrow \Omega^{k+1}(D)$ 如下

$$\begin{aligned}df &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\ d\left(\sum_{i=1}^n f_i dx^i\right) &= \sum_{i=1}^n df_i \wedge dx^i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &\vdots\end{aligned}$$

⁶关于这部分材料, 详见 GTM82

做 \mathbb{R} -线性扩张即可得到 $\Omega^k(D) \rightarrow \Omega^{k+1}(D)$ 的映射, 并且容易验证, $d^2 = 0$, 因此得到了如下的微分复形

$$0 \rightarrow \Omega^0(D) \xrightarrow{d} \Omega^1(D) \xrightarrow{d} \Omega^2(D) \xrightarrow{d} \dots$$

并且可以定义该微分复形对应的上同调群⁷, 记作 $H_{dR}^*(D, \mathbb{R})$ 如果不强调系数, 有时也省略做 $H_{dR}^*(D)$ 。

例 1.5.1. 我们下面计算 $H_{dR}^0(D, \mathbb{R})$ 如下

$$\begin{aligned} H_{dR}^0(D) &= \ker(d : \Omega^0(D) \rightarrow \Omega^1(D)) \\ &= \{f \in C^\infty(D) \mid df = 0\} \end{aligned}$$

因此

$$H_{dR}^0(D, \mathbb{R}) = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}}_{D \text{ 的连通分支的个数}}$$

1.5.2 Stokes 公式

回忆在微积分中所学过的如下公式

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ \iint_{\partial D} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &= \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ \int_{\partial D} Pdx + Qdy + Rdz &= \iiint_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

注意到, 如果我们记

$$\omega = Pdx + Qdy$$

那么根据外微分的运算则有

$$d\omega = d(Pdx + Qdy) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

类似上面的运算, 可以发现后两个公式也有相同的结果, 实际上, 它们都是下面公式的特殊形式

定理 1.5.1 (Stokes 公式). D 是 r 维边界分片光滑的区域, ω 是 $r-1$ 次微分形式, 则

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

注 1.5.1. 上面的等式也可以写成

$$\langle \partial D, \omega \rangle = \langle D, d\omega \rangle$$

即 ∂ 与 d 构成对偶。

⁷ 由于随着边缘同态的作用指标在上升, 因此这种同调群一般称作上同调群, 以与之前的同调群作区分。

1.5.3 de Rham 上同调的函子性

取 $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n, D_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, 以及 D_1 的坐标 (y^1, \dots, y^n) , D_2 的坐标 (x^1, \dots, x^m) , 我们定义切向量的推出

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

设 $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_r} \varphi_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$, 则定义微分形式的拉回为

$$f^*(\omega) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \varphi_{i_1 \dots i_r} \circ f \frac{\partial f^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial f^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_r}$$

并且我们断言 f^* 保持外积以及与外微分交换, 即

$$\begin{cases} f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta) \\ f^* \circ d = d \circ f^* \end{cases}$$

因此微分形式的拉回

$$f^* : \Omega^*(D_2) \rightarrow \Omega^*(D_1)$$

诱导了 de Rham 上同调群之间的态射, 即 H_{dR}^* 是一个反变函子。

1.5.4 de Rham 上同调中的 Mayer-Vietoris 序列

取 U_1, U_2 是 \mathbb{R}^n 中的开集, $U = U_1 \cup U_2$, 则有

$$\begin{array}{ccccc} & & U_1 & & \\ & \nearrow j_1 & & \searrow i_1 & \\ U_1 \cap U_2 & & & & U_1 \cup U_2 = U \\ & \searrow j_2 & & \nearrow i_2 & \\ & & U_2 & & \end{array}$$

命题 1.5.1. 根据上面的图表, 对任意的 p , 我们有下面的短正合列

$$0 \rightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \rightarrow 0$$

其中

$$I^p(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega))$$

$$J^p(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$$

证明. 关键证明 J^p 是满射, 不妨考虑 $p = 0$ 的情形, 其余情况类似. 取从属于 $\{U_1, U_2\}$ 的单位分解 $\{\rho_1, \rho_2\}$, 则任取 $f \in C^\infty(U_1 \cap U_2)$, 考虑 $f_1 = \rho_2 f \in C^\infty(U_1), -\rho_1 f \in C^\infty(U_2)$ ⁸, 则

$$f = \rho_2 f - (-\rho_1 f) = (\rho_1 + \rho_2)f = f$$

⁸思考: 为什么不选取 $f_1 = \rho_1 f, f_2 = -\rho_2 f$?

□

推论 1.5.1. 上述微分复形的短正合列诱导了 de Rham 上同调群的长正合列，即 Mayer-Vietoris 序列。

$$\cdots \rightarrow H_{dR}^p(U) \xrightarrow{+} H_{dR}^p(U_1) \oplus H_{dR}^p(U_2) \xrightarrow{-} H_{dR}^q(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^{q+1}(U) \rightarrow \cdots$$

注 1.5.2. 这里我们搞明白 d^* 对理解是十分有帮助的⁹，通过具体进行追图操作，我们可以发现 d^* 可以显式的写成：

$$d^*([\omega]) = \begin{cases} -d(\rho_V \omega), & \text{在 } U \text{ 上} \\ d(\rho_U \omega), & \text{在 } V \text{ 上} \end{cases}$$

注 1.5.3. 关于单位分解，我们做如下补充：

定义 1.5.1 (光滑单位分解). 设 M 是 n 维光滑流形¹⁰， $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 M 的局部有限的开覆盖¹¹，则存在从属于 $\{U_i\}$ 的光滑单位分解，即存在 $\varphi_i \in U_i, 0 \leq \varphi_i \leq 1$ ，满足 $\text{supp } \varphi_i \subset U_i, \forall i \in I$ 。

定义 1.5.2 (紧支的光滑单位分解). 设 M 是 n 维光滑流形， $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 M 的开覆盖，则存在 $\{V_j\}$ 是 $\{U_i\}$ 的一个局部有限的加细，以及从属于 $\{V_j\}$ 的光滑单位分解 $\{\phi_j\}$ ，使得 ϕ_j 的支集是 V_j 的紧子集。

例 1.5.2. 证明 $H_{dR}^2(\mathbb{R}^2) = 0$

证明. 这实际是 Poincaré 引理的特殊结果，我们对于这个例子进行具体的构造：任取 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 中的一个闭的 2-形式 $\omega = g dx \wedge dy$ ，我们直接构造一个 1-形式 $\eta = f_1 dx + f_2 dy$ ，使得 $\omega = d\eta$ 。

由于：

$$\begin{aligned} d\eta &= d(f_1 dx + f_2 dy) \\ &= ((f_2)_x - (f_1)_y) dx \wedge dy \end{aligned}$$

即我们需要构造 f_1, f_2 使得

$$(f_2)_x - (f_1)_y = g$$

而这是非常容易的，只需令 $f_1 \equiv 0$ ，以及

$$f_2 = \int_a^x g(t, y) dt$$

即可。

□

⁹One of hallmarks of a topologist is a sound intuition of d^*

¹⁰当我们提及流形时，总要求它是 T_2 并且可数的。

¹¹即任取 $x \in M$ ， x 只包含在有限多个 U_i 中，我们对流形的要求已经足够强，使得这样的开覆盖总是存在的。

命题 1.5.2. 开子集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 可以被有限个凸开子集覆盖, 则 $H_{dR}^*(U)$ 是有限维的。

证明. 对 U 的凸开子集的个数 r 进行归纳, 当 $r = 1$ 时根据 Poincaré 引理即可。假设 $r < k$ 时都成立, 那么考虑 $r = k$ 时, 假设 $\{U_1, \dots, U_k\}$ 是 U 的一个凸开覆盖, 考虑 $V = \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i$, 则 $U = V \cup U_k$ 。根据 Mayer-Vietoris 序列, 我们有

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(V \cap U_k) \xrightarrow{d^*} H^q(U) \rightarrow H^q(V) \oplus H^q(U_k) \rightarrow \dots$$

而根据归纳假设, $H^{q-1}(V \cap U_k), H^q(V), H^q(U_k)$ 都是有限维的, 再根据正合性可知 $H^q(U)$ 是有限维的, 即归纳成立。□

1.5.5 流形上的 de Rham 上同调

在上面的过程中, 我们实际上都是在处理欧式空间中的对象, 更一般的来说, 可以考虑光滑流形上的 de Rham 上同调。很多结果都是平行的, 因为微分实际上是一种局部性质, 而流形正是那些局部平凡的对象。

由于光滑流形 M 在局部上微分同胚与欧式空间中的开集, 因此我们可以在 M 的坐标卡上定义微分形式, 并且要求其坐标卡相容得到整体上的微分形式。同样其上存在一个外微分算子 d , 与微分形式一起组成了一个 de Rham 复形, 因此可以定义 M 上的 de Rham 上同调群。

并且光滑流形之间的光滑映射会诱导微分形式的拉回, 并且与外微分算子交换, 就如同在局部时一样。因此将会诱导了 de Rham 复形之间的链映射, 进而诱导上同调群之间的映射, 因而 de Rham 上同调仍然具有函子性。

推论 1.5.2. 微分同胚的光滑流形具有同构的 de Rham 上同调群。

下面我们将定义上同调群的卡积, 这是上同调优于同调的一个具体体现¹²

定义 1.5.3 (卡积). 我们定义

$$\begin{aligned} H_{dR}^r(M) \times H_{dR}^s(M) &\rightarrow H_{dR}^{r+s}(M) \\ ([\xi], [\eta]) &\mapsto [\xi \wedge \eta] \end{aligned}$$

注 1.5.4. 上述定义确实是良定义的, 因为设 $\xi' = \xi + d\zeta$, 则

$$\xi' \wedge \eta - \xi \wedge \eta = (\xi' - \xi) \wedge \eta = d\zeta \wedge \eta = d(\zeta \wedge \eta)$$

注 1.5.5. 对于卡积来说, 其满足交换律

$$[\xi] \cup [\eta] = (-1)^{rs} [\eta] \cup [\xi]$$

这实际上源于 $\xi \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \xi$, 其中 $\xi \in \Omega^r(M), \eta \in \Omega^s(M)$ 。

¹²这将给出我们更多的信息, 如果两个光滑流形微分同胚, 那么它们的 de Rham 上同调群不仅要同构, 而且我们将要赋予的环结构, 也应该是相同的。

卡积赋予了上同调群更加丰富的结构,即使得分次群上增加了乘法运算,使得其称为分次环

定义 1.5.4 (分次环). 一个分次环 $R_* = \{R_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ 是一个分次群 R_* , 以及一系列双线性乘法 $\mu_{p,q} : R_p \times R_q \rightarrow R_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$, 简记作 $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$, 并且满足结合率以及存在单位元。

定义 1.5.5 (交换分次环). 分次环 R_* 被称为交换的, 如果

$$\alpha \cdot \beta = (-1)^{pq} \beta \cdot \alpha$$

定义 1.5.6 (分次环同态). 分次环同态是指一个分次群同态, 并且保持乘法以及乘法单位元。

例 1.5.3. de Rham 上同调群 $H_{dR}^*(M)$ 构成了一个交换分次环。光滑流形间的光滑映射诱导的上同调群之间的态射是分次环的同态。

推论 1.5.3. 微分同胚的光滑流形具有同构的上同调环结构。

1.5.6 de Rham 上同调的同伦不变性

引理 1.5.1. 记 $i_t : M \rightarrow M \times I$ 定义为 $x \mapsto (x, t)$, 显然有 i_0 同伦于 i_1 , 则它们诱导的链复形之间的链映射 i_0^*, i_1^* 是链同伦的。即存在 $T_p : \Omega^p(M \times I) \rightarrow \Omega^{p-1}(M), \forall p$, 使得

$$T_{p-1}d + dT_p = i_1^* - i_0^*$$

证明. 任取 $x \in M$, 以及任取 $\omega \in \Omega^p(M \times I)$, 定义

$$(T_p \omega)_x(X_1, \dots, X_{p-1}) := \int_0^1 \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega(X_1, \dots, X_{p-1}) dt = \int_0^1 \omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{p-1}\right) dt$$

下面我们验证这就是我们需要的链同伦:

注意到 $\omega \in \Omega^p(M \times I)$ 一定可以写成形如 $f(x, t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}$ 与 $g(x, t)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ 的线性和, 则只需要对这两种形式的 ω 验证即可。

当 $\omega = f(x, t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}}$ 时, 则计算:

$$\begin{aligned}
d(T_p\omega) &= d\left(\int_0^1 f(x, t)dt\right)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}} \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\int_0^1 f(x, t)dt\right)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}} \\
&= \sum_j \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x, t)dt\right)dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}} \\
T_{p+1}(d\omega) &= T_{p+1}\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}}\right) \\
&= -\sum_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x, t)dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}} \\
&= -d(T_p\omega)
\end{aligned}$$

而 $i_0^*\omega = i_1^*\omega = 0$, 因此对于第一种情况是成立的。

当 $\omega = f(x, t)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, 则 $\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega = 0$, 因此 $d(T_p\omega) = 0$; 而另一方面:

$$\begin{aligned}
T_{p+1}(d\omega) &= T_{p+1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} + \dots\right) \\
&= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dt\right)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= (f(x, 1) - f(x, 0))dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= i_1^*\omega - i_0^*\omega
\end{aligned}$$

□

命题 1.5.3. f, g 是光滑流形 $M \rightarrow N$ 的光滑同伦, 则 $f^* = g^*$ 是相同的从 $H_{dR}^*(M) \rightarrow H_{dR}^*(N)$ 的映射。

证明. 只需证明 f^* 与 g^* 是链同伦的链映射即可。设 $H: M \times I \rightarrow N$ 是 f 和 g 的光滑同伦, 即 $H \circ i_0 = f, H \circ i_1 = g$, 则

$$\begin{aligned}
f^* &= i_0^* \circ H^* \\
g^* &= i_1^* \circ H^*
\end{aligned}$$

而 $i_0^* \cong i_1^*$, 两式消去即有 $f^* \cong g^*$ 。

□

定义 1.5.7. 设 $f: M \rightarrow N$ 是连续函数, 任取¹³光滑函数 $F: M \rightarrow N$, 使得 f 连续同伦于 F , 我们定义

$$f^* := F^*: H_{dR}^*(N) \rightarrow H_{dR}^*(M)$$

¹³ 这样的光滑函数确实是存在的, 这就是逼近定理

注 1.5.6. 我们要说明 f^* 不依赖于 F 的选取, 而这是显然的, 因为任取 G 是光滑映射, 使得 f 同伦于 G , 那么根据传递性, F 连续同伦于 G , 而根据下面的引理, 实际上有 F 光滑同伦于 G 。因此 f^* 不依赖于 F 的选取。

引理 1.5.2. 如果 F, G 是两个光滑函数, 并且 F 与 G 连续同伦, 那么必然有 F 与 G 光滑同伦。

命题 1.5.4 (de Rham 上同调的同伦不变性). 有相同伦型的光滑流形有着相同的 de Rham 上同调群。

推论 1.5.4 (Poincaré 引理). 若 M 可缩, 则有

$$H_{dR}^p(M) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R}, & p = 0 \end{cases}$$

证明. 注意到 \mathbb{R}^n 与 \mathbb{R}^{n-1} 有相同的伦型, 因此有

$$H_{dR}^p(\mathbb{R}^n) = H_{dR}^p(\mathbb{R}^{n-1}) = \cdots = H_{dR}^p(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R}, & p = 0 \end{cases}$$

□

推论 1.5.5. 同胚的光滑流形有着相同的 de Rham 上同调群。

证明. 同胚的光滑流形自然有相同的伦型。

□

例 1.5.4. 计算 $H_{dR}^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ 如下: 我们取 $U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty)$, $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$ 。则

$$H_{dR}^q(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & q = 0 \end{cases}, \quad H_{dR}^q(U_1) \oplus H_{dR}^q(U_2) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & q = 0 \end{cases}$$

因此根据 Mayer-Vietoris 序列, 当 $p > 0$ 时有

$$0 \rightarrow H_{dR}^p(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_{dR}^{p+1}(U_1 \cup U_2) \rightarrow 0$$

即 $p \geq 2$ 时, 有 $H_{dR}^q(U_1 \cup U_2) = 0$

而当 $p = 0$ 时, 有

$$0 \rightarrow H_{dR}^0(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{I^*} H_{dR}^0(U_1) \oplus H_{dR}^0(U_2) \xrightarrow{J^*} H_{dR}^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^1(U_1 \cup U_2) \rightarrow 0$$

我们可以直接计算

$$H_{dR}^1(U_1 \cup U_2) = H_{dR}^0(U_1 \cap U_2) / \text{Im } J^* = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} / \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

例 1.5.5. 计算 S^n 的 de Rham 上同调群。

证明. 注意到 S^n 与 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0, \dots, 0\}$ 有相同的伦型, 而 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 的上同调群可以利用与上例完全一致的证明方式来证明。□

例 1.5.6. 当 $m \neq n$ 时, \mathbb{R}^m 与 \mathbb{R}^n 不同胚。

证明. 根据 Poincaré 引理得到它们的 de Rham 上同调群的结果即可。□

定义 1.5.8 (good cover). 光滑流形 M 的一个开覆盖 $\{U_i\}$ 被称为一个好覆盖¹⁴, 如果任意有限交那么空, 要么同胚于 \mathbb{R}^n 。

命题 1.5.5. 若光滑流形 M 存在一个有限的好覆盖, 则 $H_{dR}^*(M)$ 是有限维的。

证明. 同命题 1.5.2 □

定理 1.5.2 (Poincaré 对偶). M 是 n 维可定向紧流形, 则有同构

$$H_{dR}^k(M) \cong H_{dR}^{n-k}(M), \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

证明. 由于 M 上存在好覆盖, 则 $H_{dR}^*(M)$ 都是有限维的。我们考虑下面的配对

$$\begin{aligned} H_{dR}^k(M) \times H_{dR}^{n-k}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([\xi], [\eta]) &\mapsto \int_M \xi \wedge \eta \end{aligned}$$

这个配对是良定义的非退化的双线性型, 这样的双线性型直接导致了 Poincaré 对偶。□

推论 1.5.6. $\dim H_{dR}^k(M) = \dim H_{dR}^{n-k}(M), 0 \leq k \leq n$, 即 M 的第 k 个 Betti 数和第 $n-k$ 个 Betti 数是相同的。

定义 1.5.9 (Euler 示性数). M 的欧拉示性数定义为

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H_{dR}^i(M)$$

推论 1.5.7. M 是奇数维可定向紧流形, 则 $\chi(M) = 0$

推论 1.5.8. M 是连通的 n 维可定向紧流形, 则 $H_{dR}^n(M) = \mathbb{R}$

¹⁴ 这样的覆盖总是存在的, 需要借助一些黎曼几何的工具, 在其上赋予一个黎曼度量, 再考虑测地凸邻域。

1.5.7 微分上同调的一些应用

本节中，为了符号的简洁，省略 de Rham 上同调群 $H_{dR}^*(X)$ 的下标，简记作 $H^*(X)$ ¹⁵。

定理 1.5.3. 记 $\mathbb{R} \cdot 1$ 是常值函数全体，对于 \mathbb{R}^n 中的任意真闭子集 A ，有同构

$$H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = H^p(\mathbb{R}^n \setminus A), \quad \forall p \geq 1$$

$$H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = H^0(\mathbb{R} \setminus A) / \mathbb{R} \cdot 1$$

$$H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = \mathbb{R}$$

证明. 令 $U_1 = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, +\infty)$ ，以及 U_2 是 U_1 关于 \mathbb{R}^n 的对称，则 $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ ，以及 $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, 1)$ ，则显然有下面的结果：

1. U_1, U_2 可缩；
2. $U_1 \cap U_2$ 同伦等价于 $\mathbb{R}^n \setminus A$

利用 dR Rham 上同调的 Mayer-Vietoris 序列即可得到需要的结果。 \square

推论 1.5.9. 当 $n \geq 2$ 时，我们有

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, n-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. 取 $A = \{0\}$ 是 \mathbb{R} 中的真闭子集。 \square

利用上面的结果，实际上可以得到许多非常深刻的定理。第一个重要的应用则是 Brouwer 不动点定理。

定理 1.5.4 (Brouwer 不动点定理). 若 $f : D^n \rightarrow D^n$ 是连续函数，其中 $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ，则 f 必存在不动点。

证明. 设 $f(x) \neq x, \forall x \in D^n$ ，则构造 $g(x) : D^n \rightarrow S^n$ ，其中 $g(x)$ 为从 $f(x)$ 连接 x 的射线与 S^n 的交点，显然 $g(x)$ 连续，并且 $g(x)|_{S^n} = \text{id}_{S^n}$ ，考虑

$$S^{n-1} \xrightarrow{i} D^n \xrightarrow{g} S^{n-1}$$

则有 $g \circ i = \text{id}_{S^n}$ ，则 $i^* \circ g^* : H^{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{g^*} H^{n-1}(D^n) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(S^{n-1})$ 诱导了上同调群间的同构，但是 $H^{n-1}(D^n) = 0$ ，矛盾。 \square

¹⁵实际上，这也是有道理的，因为我们目前只接触到了一种上同调理论，去掉下标并不会导致混淆；并且当我们介绍了奇异上同调后，德拉姆定理告诉我们 de Rham 上同调群与 \mathbb{R} 系数的奇异上同调群是同构的，因此亦不需要加以区分。

另一个有趣的应用则是毛球定理,在后面我们将看到,毛球定理实际上是 Poincaré – Hopf 定理的一个特殊情况。

定理 1.5.5 (毛球定理). S^n 上存在连续的处处非零切向量场当且仅当 n 是奇数。

在证明之前,我们先看如何构造奇数维的球面上一个连续的处处非零的切向量的一个例子:

例 1.5.7. S^{2n+1} 上的处处非零的切向量场可以如下定义: $(x_0, x_1, \dots, x_{2n+1})$ 处的非零切向量可以定义为 $(-x_1, x_0, \dots, -x_{2n+1}, x_{2n})$ 。

下面我们给出毛球定理的证明

证明. 假设 S^n 上有一个连续的处处非零的切向量场 $v(x), x \in S^n$, 下面我们只需要说明 n 是奇数。构造 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上的一个连续切向量场为

$$w(x) = v\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

那么令 $F(x, t) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)w(x)$, 实现了 $F(x, 0) = \text{id}$ 与 $F(x, 1) = -\text{id}$ 的同伦, 因此

$$\text{id}^* = f_1^* : H^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$$

但是对于 f_1^* 来说, 我们可以写成其具体的形式如下:

$$\begin{aligned} f_1^* : H^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\rightarrow H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \\ [\xi] &\mapsto (-1)^{n+1}[\xi] \end{aligned}$$

因此 $n+1$ 是偶数, 即 n 是奇数。 □

最后一步 f_1^* 的具体形式是由下面的引理保证的, 因为 f_1 可以看成是线性变换 $-\text{I}_{n+1}$ 。

引理 1.5.3. 如果 $n \geq 2$, 并且 $A \in \text{GL}(n)$, 记 $f_A : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 定义为 $x \mapsto Ax$, 则 $f_A^* = \text{sgn } |A|$

证明. 对 A 进行初等变换得到 $B = (I + cE_{r,s})A, c \in \mathbb{R}$, 则有同伦 $f_A \cong f_B$, 因此 $f_A^* = f_B^*$, 经过有限次初等变换后可以得到 $A = \text{diag}(1, 1, \dots, \text{sgn } |A|)$, 因此可知 $f_A^* = \text{sgn } |A|$ 。 □

第三个应用则是分离定理, 特别地, 当 $n = 2$ 时, 就是 Jordan 闭曲线定理。

定理 1.5.6 (Jordan-Brouwer 分离定理). 取 Σ 同胚于 $S^{n-1}, \Sigma \subset \mathbb{R}^n$, 则 $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ 有两个连通分支 U_1, U_2 , 且其中 U_1 有界, U_2 无界, 并且 $\partial U_1 = \partial U_2 = \Sigma$, 并称 U_1 是 Σ 的内部, U_2 是 Σ 的外部。

为了证明这个定理，我们先做一些准备工作，下面的延拓定理是一个重要的工具，使得我们可以将闭子集上的同胚延拓到全空间上，因为 S^n 和与其同胚的 Σ 都是 \mathbb{R}^n 中的闭子集。

引理 1.5.4 (Urysohn-Tietze 引理). A 是 \mathbb{R}^n 中的闭集, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续函数, 则存在连续延拓 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 使得 $g|_A = f$ 。

证明. 标准的点集拓扑结论。 □

引理 1.5.5. $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$, 是闭子集, 且 $\phi: A \rightarrow B$ 是同胚, 则存在 \mathbb{R}^{n+m} 到自身的同胚 h 使得 $h(x, 0) = (0, \phi(x)), \forall x \in A$ 。

证明. 先将 ϕ 延拓成连续映射 $f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 并且定义

$$\begin{aligned} h_1: \mathbb{R}^{m+n} &\rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (x, y) &\mapsto (x, y + f_1(x)) \end{aligned}$$

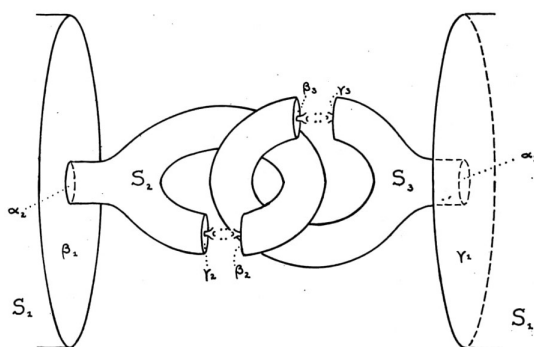
同理可以延拓 f^{-1} 成 $f_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, 类似的定义

$$\begin{aligned} h_2: \mathbb{R}^{m+n} &\rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (x, y) &\mapsto (x + f_2(y), y) \end{aligned}$$

则定义 $h = h_2^{-1} \circ h_1$ 即可。 □

推论 1.5.10. A, B 是 \mathbb{R}^n 中的闭子集, $\phi: A \rightarrow B$ 是同胚, 则 ϕ 可以扩张为同胚 $\tilde{\phi}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ 。

注 1.5.7. 上面的引理意味着 $\tilde{\phi}: \mathbb{R}^{2n} \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \setminus B$ 是同胚! 但一般而言, $\mathbb{R}^n \setminus A$ 与 $\mathbb{R}^n \setminus B$ 是不同胚的, 例如 Alexander's 角球 (见下图) 在 \mathbb{R}^3 中同胚与 S^2 , 但是它们的补是不同胚的。



虽然补不一定同胚, 但是我们有下面的结论:

定理 1.5.7. A, B 都是 \mathbb{R}^n 的真闭子集, A, B 同胚, 则 $H^k(\mathbb{R}^n \setminus A) = H^k(\mathbb{R}^n \setminus B), 0 \leq k \leq n$ 。

证明. 对 m 进行归纳可知对任意 $m \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} H^{k+m}(\mathbb{R}^{n+m} \setminus A) &\cong H^k(\mathbb{R} \setminus A) \\ H^m(\mathbb{R}^{n+m} \setminus A) &\cong H^0(\mathbb{R} \setminus A) / \mathbb{R} \cdot 1 \end{aligned}$$

由于 $\mathbb{R}^{2n} \setminus A$ 与 $\mathbb{R}^{2n} \setminus B$ 同胚, 从而有

$$H^k(\mathbb{R} \setminus A) \cong H^{k+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong H^{k+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus B) \cong H^k(\mathbb{R} \setminus B), \quad k \geq 0$$

□

推论 1.5.11. A, B 是 \mathbb{R}^n 的真闭子集, 则它们的补有相同的连通分支个数。

有了上面的准备, 我们可以证明 Jordan-Brouwer 分离定理

证明. 由于 $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ 有两个连通分支, 因此 $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ 也有两个连通分支。记 $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ 的两个连通分支为 $\mathring{D}^n, W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\}$, 取 $r = \max_{x \in \Sigma} \|x\|$, 则 rW 连通, 必含在 $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ 的某个连通分支中, 记作 U_2 , 则另一个连通分支必有界, 记作 U_1 。

下面证明 U_1, U_2 的边界都是 Σ , 即证明任取 $p \in \Sigma$, 对任意 p 的开邻域 V , V 中既存在 U_1 中的点也存在 U_2 中的点。定义 $A = \Sigma \setminus (\Sigma \cap V)$, 则 A 是闭的, 则 A 同胚于 S^{n-1} 的某个闭子集 B , 则 $\mathbb{R}^n \setminus B$ 是连通的, 从而 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 连通。取 $p_1 \in U_1, p_2 \in U_2$, 以及连接 p_1, p_2 的连续曲线 γ , 由第一部分的结果 γ 与 Σ 必相交, 即 $\gamma^{-1}(\Sigma)$ 非空, 闭子集 $\gamma^{-1}(\Sigma)$ 必有第一个以及最后一个元素 c_1 和 c_2 。 $\gamma(c_1) \in \Sigma \cap V, \gamma(c_2) \in \Sigma \cap V$, 那么存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\gamma(c_1 - \varepsilon) \in V \cap U_1, \gamma(c_2 + \varepsilon) \in V \cap U_2$ 。 □

推论 1.5.12. $A \subset \mathbb{R}^n$, 且 A 同胚于 $D^k, 0 \leq k \leq n$, 则 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 连通。

定理 1.5.8 (Brouwer). V 是 \mathbb{R}^n 中的开集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续单射, 则 $f(U)$ 是 \mathbb{R}^n 中的开子集, 从而 f 是 U 到 $f(U)$ 的同胚。

证明. 任取 $f(x) \in f(U), x \in U$, 取 x 的开邻域 V 使得其闭包 $\bar{V} \subset U, \bar{V} \cong D^n$ 且 $\partial V \cong S^{n-1}$ 。由于 \bar{V} 是紧集, 其上的单映射是同胚, 因此 $h(\bar{V}) \cong \bar{V} \cong D^n$, 根据推论 1.5.12, 有 $\mathbb{R}^n \setminus h(\bar{V})$ 是连通的, 而显然 $h(V)$ 也是连通的, 则观察分解

$$\mathbb{R}^n \setminus h(\partial V) = (\mathbb{R}^n \setminus h(\bar{V})) \cup h(V)$$

将 $\mathbb{R}^n \setminus h(\partial V)$ 分解成了两个连通的部分, 根据分离定理的结果, 这两个连通分支一定是开集, 因此 $h(V)$ 是开集, 从而 $h(x)$ 是内点。由于 $h(U)$ 的每一个点都是内点从而 $h(U)$ 是开集。 □

推论 1.5.13 (区域不变性原理). $V \subset \mathbb{R}^n$, 且 V 同胚于 \mathbb{R}^n 的某个开子集, 则 V 是开子集。

推论 1.5.14 (维数不变性原理). $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ 都是非空开子集, 并且 U 同胚于 V , 则 $m = n$ 。

例 1.5.8. \mathbb{R}^3 中的纽结 K 指的是 $K \cong S^1$, 则有

$$H^k(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \begin{cases} \mathbb{R}, & 0 \leq k \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. 只需要考虑 $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ 即可, 而

$$H^k(\mathbb{R}^2 \setminus S^1) = H^k(\mathring{D}^n) \oplus H^k(\mathbb{R}^2 \setminus D^2)$$

再利用

$$H^k(\mathbb{R}^2 \setminus S^1) \cong H^{k+1}(\mathbb{R}^3 \setminus S^1), \quad \forall k$$

即可 □

1.5.8 奇异上同调与 de Rham 定理

回顾奇异同调, 我们定义了奇异链复形 $S_*(X) = \{S_q(X) \mid q \in \mathbb{Z}\}$ 以及其上的边界算子 $\partial: S_q \rightarrow S_{q-1}$ 。实际上 $S_*(X)$ 可以被视作 $S_*(X; \mathbb{Z})$, 进而对于任何一个群 G , 我们都可以定义带 G 系数的奇异链复形 $S_*(X; G)$, 以及带 G 系数的奇异同调群 $H_*(X; G)$ ¹⁶。

而如果想要定义奇异上同调, 我们就需要定义一些上链复形以及其上的边界算子, 如何从一个链复形自然的得到一个上链复形呢? 一个很好的办法就是利用反变函子 $\text{Hom}(-, G)$ 。

固定阿贝尔群 G 和拓扑空间 X , 我们如下定义:

定义 1.5.10 (带 G 系数的上链复形). 带 G 系数的奇异上链复形定义为

$$S^q(X; G) := \text{Hom}(S_q(X), G)$$

以及边缘算子

$$\begin{aligned} \delta: S^q(X; G) &\rightarrow S^{q+1}(X; G) \\ f &\mapsto f \circ \partial \end{aligned}$$

注 1.5.8. 利用下面的图表可以更好的理解 δ 的定义以及为什么 $\delta^2 = 0$:

$$\begin{array}{ccc} S_{q+1} & & \\ \downarrow \partial & \searrow \delta^2(f) & \\ S_q & & \\ \downarrow \partial & \searrow \delta(f) & \\ S_{q-1} & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

¹⁶这里我们采用记号 $H_*(X; G)$ 而不是 $H_*(X, G)$, 以免与之后要定义的相对同调群混淆。

定义 1.5.11 (带 G 系数的奇异上同调群). 我们定义带 G 系数的奇异上同调群为上链复形 $\{S^*(X; G), \delta\}$ 的同调群, 记作 $H^*(X; G)$ 。

实际上, 可以看作是反变函子 $\text{Hom}(-, G)$ 与奇异同调函子的复合。因此, 它继承了奇异同调许多重要的性质, 如: G 系数的奇异上同调群仍然具有函子性, 以及

命题 1.5.6 (同伦不变性). 如果 $f \cong g: X \rightarrow Y$ 是同伦的映射, 则

$$f^* = g^*: H^*(Y; G) \rightarrow H^*(X; G)$$

由于上下同调群之间构成对偶关系, 因此我们可以自然的在上下同调群之间构造一个配对, 我们先在一般的阿贝尔群上叙述: 如果 A, B 是阿贝尔群, 定义

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, B) \times A &\xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} B \\ (\phi, a) &\mapsto \phi(a) \end{aligned}$$

记作 $\langle \phi, a \rangle := \phi(a), a \in A, \phi \in \text{Hom}(A, B)$ 。

对于任意的链复形 $C = \{C_q, \partial\}$, 通过 $\text{Hom}(-, G)$ 函子可以得到一个上链复形 $\text{Hom}(C, G) = \{\text{Hom}(C_q, G), \delta\}$, 下面定义上链复形 $\text{Hom}(C, G)$ 与 C 的 Kronecker 乘积如下

$$\langle \sigma^p, \sigma_q \rangle = \begin{cases} \langle \sigma^p, \sigma_p \rangle, & p = q \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这可以过渡到同调群之间的 Kronecker 乘积:

$$\begin{aligned} H^q(X; G) \times H_q(X; G) &\xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} G \\ \langle [z^q], [z_q] \rangle &= \langle z^q, z_q \rangle = z^q(z_q) \end{aligned}$$

定理 1.5.9 (de Rham 定理). 设 M 是紧的光滑流形, 则其 de Rham 上同调群同构于带 \mathbb{R} 系数的奇异上同调群。

证明. (概要) 我们用 $S_q^{\text{smooth}}(X; \mathbb{R})$ 来记以光滑¹⁷奇异单形 $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$ 为基生成的 \mathbb{R} 向量空间。我们定义如下的双线性的函数

$$\begin{aligned} \Omega^q(X) \times S_q^{\text{smooth}}(X; \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, \sigma) &\mapsto \int_{\sigma} \omega \end{aligned}$$

并且 Stokes 公式表明:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega$$

¹⁷ $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$ 光滑指的是 σ 可以延拓成某个包含 Δ_q 的某开集到 X 的光滑函数。

即边界算子 ∂ 与外微分算子 d 对偶, 并且可以诱导到同调群上。从而有上链映射:

$$\Omega^*(X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(S_*^{\text{smooth}}(X; \mathbb{R}), \mathbb{R}) = S_{\text{smooth}}^*(X; \mathbb{R})$$

它是一个上链同伦等价。因此有 de Rham 上同调群 $H_{dR}^*(X)$ 与 $H^*(S_{\text{smooth}}^*(X; \mathbb{R}))$ 的同构。并且我们断言包含链映射

$$S_*^{\text{smooth}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow S_*(X; \mathbb{R})$$

也是一个链同伦等价。因而它们的 Kronecker 对偶 $S^*(X; \mathbb{R}) \rightarrow S_{\text{smooth}}^*(X; \mathbb{R})$ 是一个链同伦等价。因此, de Rham 定理实际上归结于这两个链同伦等价的证明。 \square

约定 1.5.1. 为了符号上的简洁, 在之后 X 上同调群都用符号 $H^*(X)$ 表示, 如果强调系数再明确指出, 不加以区分 deRham 上同调和奇异上同调。

1.5.9 Künneth 公式

Künneth 公式给出了我们如何通过单个空间的同调群来计算乘积空间同调群的一个办法, 即如何去计算 $H^*(X \times Y)$ 。

定义 1.5.12 (分次群的张量积). 分次群 $A = \{A_p : p \in \mathbb{Z}\}$ 以 $B = \{B_q : q \in \mathbb{Z}\}$, $A \otimes B$ 也是一个分次群, 定义为

$$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{p+q=n} (A_p \otimes B_q)$$

定理 1.5.10 (Künneth 公式). 设 M, N 是紧的光滑流形, 则有

$$H^*(M \times N) = H^*(M) \otimes H^*(N)$$

例 1.5.9. 由于 $T^2 = S^1 \times S^1$, 显然 $H^0(T^2) = H^2(T^2) = \mathbb{R}$ 。关键在于计算 $H^1(T^2)$, 根据 Künneth 公式有

$$\begin{aligned} H^1(T^2) &= (H^0(S^1) \otimes H^1(S^1)) \oplus (H^1(S^1) \otimes H^0(S^1)) \\ &= (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) \\ &= \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.5.10 映射度

设 $f: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射, 其中 M, N 可定向的紧致光滑流形, 并且 N 是连通的。对任意 $\omega \in \Omega^n(N)$, f 的度 $\deg(f)$ 定义为

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega$$

$\deg(f)$ 的存在性可以通过下面的交换图得到:

$$\begin{array}{ccc} H^n(N) & \xrightarrow{f} & H^n(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\deg(f)} & \mathbb{R} \end{array}$$

而对于一个连续函数 f ，想要定义 f 的度我们任取一个与其连续同伦的光滑函数 \tilde{f} ，定义 $\deg(f) := \deg(\tilde{f})$ ，这种想法我们之前已经使用过。

命题 1.5.7. 对于映射度，我们有以下基本的结论

1. $\deg(\text{id}_M) = 1$
2. $\deg(\text{常值}) = 0$
3. $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$
4. 设 M 的连通分支为 M_1, \dots, M_n ，则 $\deg(f) = \sum_{i=1}^n \deg(f|_{M_i})$

命题 1.5.8. 设 $f: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射，其中 M, N 可定向的紧致光滑流形，并且 N 是连通的，则对于任意正则值 $q \in N$ ，有

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{ind}_p(f)$$

我们先回顾一下相关的定义，对于任意光滑流形间的光滑映射 $f: M^m \rightarrow N^n$ ， $q \in N$ 被称为是 f 的正则值，如果任取 $p \in f^{-1}(q)$ ，有 $D_p f = T_p M \rightarrow T_p N$ 是满秩。当 $m = n$ 时， $D_p f$ 是一个可逆矩阵，我们定义

$$\text{ind}_p(f) = \begin{cases} 1, & \det D_p f > 0 \\ -1, & \det D_p f < 0 \end{cases}$$

命题的证明极大的依赖于下面的正则值原像定理

定理 1.5.11. 假定 M, N 都是紧致的光滑流形， f 是光滑映射， $q \in N$ 是 f 的正则值，假定 $\{p_1, \dots, p_r\} = f^{-1}(q)$ ，则存在 q 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^r V_i$ ，其中 $\{V_i\}$ 是互不相交的，且对每个 i 有 $f|_{V_i}: V_i \rightarrow V$ 是微分同胚， $p_i \in V_i$ 。

下面给出定理的证明

证明. 由正则值原像定理， $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^r V_i$ 。任取 $\omega \in A^n(N)$ ，使得 $\text{supp } \omega \subset V$ 并且 $\int_N \omega = 1$ ，则 $f^* \omega \in A^n(M)$ ，其支撑集 $\text{supp}(f^* \omega) \subset \bigcup_{i=1}^r V_i$ ，则

$$f^* \omega = \sum_{i=1}^r \omega_i, \quad \text{supp } \omega_i \subset V_i$$

则

$$\begin{aligned}
 \deg(f) &= \deg(f) \int_N \omega = \int_M f^* \omega = \int_M \sum_{i=1}^r \omega_i \\
 &= \sum_{i=1}^r \int_{V_i} (f|_{V_i})^* \omega \\
 &= \sum_{i=1}^r \text{ind}_{p_i}(f) \int_V \omega \\
 &= \sum_{i=1}^r \text{ind}_{p_i}(f)
 \end{aligned}$$

□

推论 1.5.15. 若 $\deg(f) \neq 0$, 则 f 是满射。

一个和映射度紧密相关的定理就是有名的 Poincaré – Hopf 定理

定理 1.5.12 (Poincaré-Hopf 定理). M 是 n 维紧致光滑流形, X 是 M 上的光滑向量场, 并且其零点集孤立, 则

$$\sum_p \text{ind}_p(X) = \chi(M)$$

同样的, 我们需要回顾一下向量场指数 $\text{ind}_p(X)$ 的定义, 任取以 p 点为中心的局部坐标 (U, φ) , 取 B_δ 是以原点为中心, δ 为半径的球, 使得 $B_\delta \subset \varphi(U)$, 并且 X 在 U 上只有 p 一个零点, 记 $\xi = \varphi_*(X|_U)$, 考虑映射

$$\begin{aligned}
 \partial B_\delta &= S_\delta^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \\
 x &\mapsto \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}
 \end{aligned}$$

则 X 在 p 点的度定义为这个映射的度。

例 1.5.10. 毛球定理实际上是 Poincaré – Hopf 定理的一个特殊情况。例如在 S^2 时, 任何连续的向量场都一定存在零点, 因为 $\chi(S^2) = 2$; 然而对于奇数维的球面上则不会出现这种情况, 这是由于 Poincaré 对偶的推论告诉我们 $\chi(S^{2n+1}) = 0$ 。

注 1.5.9. 对连续函数 $f: S^n \rightarrow S^n$ 的映射度 $\deg(f)$, 实际上还有下面的定义: 考虑 f 诱导的同调群同态, 则

$$\begin{aligned}
 f_*: H_n(S^n) &\rightarrow H_n(S^n) \\
 \alpha &\mapsto \deg(f)\alpha
 \end{aligned}$$

定理 1.5.13 (Hopf 定理). 考虑 $f, g: S^n \rightarrow S^n$, 则 f 同伦于 g 当且仅当 $\deg(f) = \deg(g)$ 。

1.6 映射的简约同调序列

定义 1.6.1 (贴空间). 设 X, Y 是拓扑空间, $A \hookrightarrow X$, 以及 $f: A \rightarrow Y$ 是连续映射, 在无交并 $X \amalg Y$ 中由 $a \sim f(a), a \in A$ 给出等价关系, 则定义贴空间 $X \cup_f Y$ 为 $X \amalg Y / \sim$, 称通过映射 f 把 X 贴到 Y 上。

命题 1.6.1. $Y \hookrightarrow X \cup_f Y$, 即 Y 可以自然地看成贴空间的子空间。

注 1.6.1. 一般来说, X 不能看成是贴空间 $X \cup_f Y$ 的子空间。

定义 1.6.2 (贴胞腔). $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ 称为闭胞腔; $\mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ 称为开胞腔, 或简称为胞腔。任给连续映射 $f: S^{n-1} \rightarrow X$, 则 $X \cup_f S^{n-1}$ 称为在 X 上贴一个 n 胞腔。

例 1.6.1. S^n 可以看作是向单点集上贴一个 $n-1$ 胞腔。

例 1.6.2. T^2 可以看作是向单点集上贴两个 1 胞腔和一个 2 胞腔。

例 1.6.3. 对于子空间 $A \hookrightarrow X$, 商空间 X/A 可以看作是 X 通过 $f: A \rightarrow \{pt\}$ 贴到单点集上去。

例 1.6.4 (X 上的锥形). X 上的锥形 CX 定义为

$$CX = X \times [0, 1] / X \times \{1\}$$

显然, 对于任意空间 X , CX 可缩。

例 1.6.5 (双角锥). 对于拓扑空间 X , 其双角锥 $\sum X$ 定义为

$$\sum X = CX / X \times \{0\}$$

例 1.6.6. S^1 的双角锥 $\sum S^1 = S^2$, 更一般的, $S^n = \sum S^{n-1} = \sum^n S^0$ 。

例 1.6.7 (映射柱). 对于拓扑空间之间的连续映射 $f: X \rightarrow Y$, f 的映射柱 Zf 定义为将 $X \times [0, 1]$ 通过映射 $f: X \times \{0\} \rightarrow Y$ 贴到 Y 上去。

例 1.6.8 (映射锥). 对于拓扑空间之间的连续映射 $f: X \rightarrow Y$, f 的映射锥 Cf 定义为

$$Cf = Zf / X \times \{1\}$$

注 1.6.2. 映射柱与映射锥的一个想法在于, 将对映射的研究转移为对空间的研究, 即将对映射 f 的研究转移为对映射柱和映射锥的研究。

例 1.6.9. 设 X 是多面体, $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, 其中 X_i 是 X 的子多面体, 并且任取 i, j 有 $X_i \cap X_j = x_0 \in X$, 称为 X 是诸 X_i 的单点并, 通常记作 $\bigvee_{i=1}^n X_i$, 则有

$$\tilde{H}_*(X) = \bigoplus_{i=1}^n \tilde{H}_*(X_i)$$

对于连续映射 $f: X \rightarrow Y$, 我们记

$$C_+f = X \times [\frac{1}{2}, 1]/X \times \{1\}, \quad C_-f = X \times [0, \frac{1}{2}] \cup_f Y$$

则 $C_+f \cup C_-f = Cf$, $C_+f \cap C_-f = X \times \{\frac{1}{2}\} \cong X$, 并且 $\{C_+f, C_-f\}$ 构成了映射锥 Cf 的 Mayer-Vietoris 耦, 则

定理 1.6.1. 我们有如下的同调正合列

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_q(Y) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(Cf) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{q-1}(X) \rightarrow \cdots$$

证明. 考虑映射锥 Cf 的 Mayer-Vietoris 耦 $\{C_+f, C_-f\}$, 利用 Mayer-Vietoris 序列则有

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(C_-f) \oplus \tilde{H}_q(C_+f) \rightarrow \tilde{H}_q(Cf) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(X) \rightarrow \cdots$$

考虑到 C_+f 可缩, C_-f 收缩形变到 Y , 则上面有上面正合列到下面序列的同构

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_q(Y) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(Cf) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{q-1}(X) \rightarrow \cdots$$

因而有下面序列的正合。 □

推论 1.6.1. 设 $A \subset X$, 则有下面的长正合列

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(A) \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(X \cup CA) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(A) \rightarrow \cdots$$

证明. $X \cup CA$ 就是嵌入 $i: A \rightarrow X$ 的映射锥。 □

推论 1.6.2. 对于空间 X 的双角锥 $\sum X$, 有同构

$$\tilde{H}_{q+1}(\sum X) \cong \tilde{H}_q(X)$$

证明. $\sum X$ 是点映射 $X \rightarrow \{pt\}$ 的映射锥, 并且 $\tilde{H}_*(\{pt\}) = 0$ 。 □

下面我们来考虑一种特殊的贴映射, 并称这种操作为粘贴胞腔: 假设有从 D^n 的边缘 S^{n-1} 到空间 X 的映射 $f: S^{n-1} \rightarrow X$, 由于 CS^{n-1} 同胚于 D^n , 因此映射锥 Cf 就是贴空间 $X \cup_f D^n$, 因此立刻有下面的推论

推论 1.6.3. 对于 $D^n \supset S^{n-1} \xrightarrow{f} X$, 有

1. $\tilde{H}_q(X \cup_f D^n) = \tilde{H}_q(X)$, 当 $q \neq n, n-1$ 时。

2. 对于 $q = n, n-1$ 时, 有正合列

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X \cup_f D^n) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X \cup_f D^n) \rightarrow 0$$

证明. 因为当 $q \neq n, n-1$ 时, $\tilde{H}_q(S^{n-1})$ 和 $\tilde{H}_{q-1}(X)$ 都平凡, 因此根据定理 1.6.1, 有同构 $\tilde{H}_q(X \cup_f D^n) = \tilde{H}_q(X)$. \square

注 1.6.3. 因此, 对于粘贴一个 n 胞腔的结果, n 维同调群可能不变, 也可能变成与 \mathbb{Z} 作直和, 这是因为

$$\tilde{H}_n(X \cup_f D^n) / \tilde{H}_n(X) \cong \text{im } \partial_* \leq \mathbb{Z}$$

而 \mathbb{Z} 的子群只有 0 和 \mathbb{Z} ; $n-1$ 维同调群可能不变, 也可能变成以循环子群为核的商群, 这是因为

$$\tilde{H}_{n-1}(X) / \text{im } f_* \cong \tilde{H}_{n-1}(X \cup_f D^n)$$

并且 $\text{im } f_*$ 是一个循环子群。

因此确定粘贴一个 n 胞腔的结果, 确定 f_* 的具体形式是非常重要的, 根据映射度的观点, 确定映射 f 的度是非常关键的事情, 决定了同调群会如何改变。

例 1.6.10. 环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 可以看作是在 $S^1 \vee S^1$ 上再粘贴一个 2 胞腔, 其粘贴映射 $f: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ 是在两个 S^1 上都正反各绕一圈, 因此得到

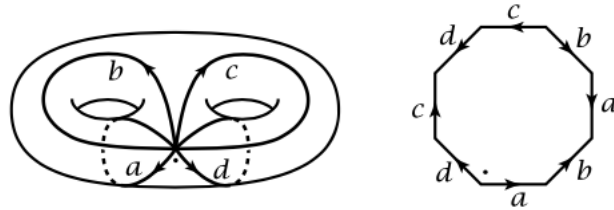
$$0 \rightarrow H_2(S^1 \vee S^1) \rightarrow H_2(T^2) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} H_1(S^1 \vee S^1) \rightarrow H_1(T^2) \rightarrow 0$$

从而有

$$H_2(T^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_0(T^2) = \mathbb{Z}$$

更高维的同调群都为零。

例 1.6.11. 双环面 $T^2 \# T^2$ 可以看作是在 $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ 上面再粘贴一个 2 胞腔



根据闭曲面的分类定理, 任何一个可定向的闭曲面根据其亏格分类。一般的, 对于亏格为 g 的闭曲面, 我们有如下的序列

$$0 \rightarrow H_2(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{2g\uparrow}) \rightarrow H_2(T^2) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} H_1(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{2g\uparrow}) \rightarrow H_1(T^2) \rightarrow 0$$

从而有

$$H_2(\Sigma_g) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\Sigma_g) = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}, \quad H_0(\Sigma_g) = \mathbb{Z}$$

更高维的同调群都为零。

例 1.6.12. 计算不可定向的闭曲面的同调群

例 1.6.13. 计算 $H_*(S^m \times S^n), m, n \in \mathbb{N}$

另一个非常有趣的例子则是复射影空间 \mathbb{CP}^n 的同调群, 一般来说, \mathbb{CP}^n 通常定义为

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$$

为了方便看出其上的胞腔结构, 我们不妨将 \mathbb{CP}^n 视作是 S^{2n+1} 上每一族圆周中的一个粘合成一点得到的空间, 可以显式的写成

$$\mathbb{CP}^n = S^{2n+1} / \{z \sim e^{i\theta} z, \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall z \in S^{2n+1}\}$$

这是我们之后常用的做法, 粘合映射记作 $\pi_{(n)} : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ 。更详细的来说: 定义 $r : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^{2n+1}$ 如下

$$r(z) = \frac{z}{\|z\|}, \quad z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$$

那么我们定义

$$f : \mathbb{CP}^n \rightarrow S^{2n+1}/S^1$$

$$[z] \mapsto [r(z)]_{S^1}$$

我们来验证这是一个良好定义的映射: 假设 z, z' 在 \mathbb{CP}^n 中代表相同的元素, 即 $z = \lambda z', \lambda \in \mathbb{C}^*$, 那么

$$r(z) = \frac{z}{\|z\|} = \frac{\lambda z'}{|\lambda| \|z'\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} r(z')$$

因此 $[r(z)]_{S^1} = [r(z')]_{S^1}$, 即映射是良定的; 下面证明映射 f 实际上是一个同胚, 因此从拓扑上来看 \mathbb{CP}^n 与 S^{2n+1}/S^1 同胚。先证明单射: 如果 $[r(z)]_{S^1} = [r(z')]_{S^1}$, 那么

$$\frac{z}{\|z\|} = \lambda \frac{z'}{\|z'\|} \implies z = \frac{\lambda \|z\|}{\|z'\|} z'$$

因此 $[z] = [z']$, 即 f 是一个单射; 另一方面, 任取 $[x]_{S^1} \in S^{2n+1}/S^1$, 选取其一个代表元 x , 那么 $x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, 并且 $r(x) = x$, 因此 $f([x]) = [r(x)]_{S^1} = [x]_{S^1}$, 即 f 也是满射。关于 f 的连续性, 我们在这里省略。

根据第二种看法, 很容易得到第三种看法, 如果我们将 D^{2n} 与 $\{(z', \sqrt{1 - \|z'\|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid z' \in D^{2n}\} \subset S^{2n+1}$ 视作同胚, 那么当 $z_n \neq 0$ 时, 每一个圆周 $\{e^{i\theta} z\}$ 与 D^{2n} 只交于一点, 因此

$$\mathbb{CP}^n = D^{2n} / \{z' \sim \theta^{i\theta} z', \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall z' \in S^{2n-1}\}$$

从第三种定义来看, 可以直接得到 \mathbb{CP}^n 的胞腔结构, 就是 \mathbb{CP}^{n-1} 上粘贴一个 D^{2n} 得到, 粘贴映射正好是 $\pi_{(n-1)} : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ 。利用这个胞腔结构, 可以直接计算 \mathbb{CP}^n 的同调群。

2 相对同调

2.1 相对同调群

定义 2.1.1 (拓扑空间偶). 一个拓扑空间 X 与它的一个子空间 A 放在一起, 称为一个拓扑空间偶 (X, A) 。

定义 2.1.2 (空间偶的映射). 拓扑空间偶之间的映射 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 指的是 $f : X \rightarrow Y$ 满足 $f(A) \subset B$ 。

定义 2.1.3 (空间偶的同伦). 空间偶映射的同伦 $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 指的是联结 f, g 的同伦 $(X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ 。

现在观察空间偶 (X, A) , 则对任意的 q , 我们有 $S_q(A) \subset S_q(X)$, 则定义空间偶的 q 维奇异链群为

定义 2.1.4 (空间偶的奇异链). 空间偶 (X, A) 的 q 维奇异链群定义为商群

$$S_q(X, A) := S_q(X) / S_q(A)$$

注意到边缘态射 $\partial_q : S_q(A) \rightarrow S_{q-1}(A)$, 那么其诱导了空间偶的奇异链群之间的态射, 并且作用两次仍为零, 那么:

定义 2.1.5 (空间偶的相对奇异链复形). 空间偶 (X, A) 的相对奇异链复形定义为

$$S_*(X, A) := \{S_q(X, A), \partial_q\}$$

定义 2.1.6 (空间偶的相对奇异同调群). 空间偶 (X, A) 的相对奇异同调群

$$H_*(X, A) := H_*(S_*(X, A))$$

定义 2.1.7 (相对同调的同态). 设 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是空间偶的映射, 链映射 $f_\# : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ 把子复形 $S_*(A)$ 映入 $S_*(B)$, 则诱导了相对链映射 $f_\# : S_*(X, A) \rightarrow S_*(Y, B)$, 而相对同调的同态 $f_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$ 指的是这个相对链映射诱导的同调群同态。

注 2.1.1. 自然的, 如果两个空间偶映射 f, g 同伦, 则诱导的相对同调的同态 f_*, g_* 也相同。同样地, 如果两个空间偶有着相同的伦型, 则它们有着相同的相对同调群。

对于空间偶来说, 显然我们下面的短正合列

$$0 \rightarrow S_*(A) \rightarrow S_*(X) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0$$

所以我们有下面的定理

定理 2.1.1 (空间偶的同调序列). 设 (X, A) 是空间偶, 则有正合同调序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

注 2.1.2. 与单个空间不同的是, 对于空间偶的简约同调群没有给出任何新鲜的东西, 这是因为

$$S_*(X)/S_*(A) = \tilde{S}_*(X)/\tilde{S}_*(A)$$

完全相同, 因此

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_q(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

注 2.1.3. 我们仔细探究一下边缘同态

$$\partial_* : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$$

任取相对闭链 $\bar{z} \in Z_q(X, A)$ 是 $[\bar{z}] \in H_q(X, A)$ 的代表元, 则 \bar{z} 也可以看作是 X 上的链, 并且满足 $\partial^X \bar{z} \in A$, 并且 $\partial^X \bar{z} \in Z_{q-1}(A)$, 这是因为 $\partial^A(\partial^X \bar{z}) = \partial^X(\partial^X \bar{z}) = 0$, 根据 ∂_* 的定义实际上

$$\partial_*([\bar{z}]) = [\partial^X \bar{z}]$$

例 2.1.1. 设 x_0 是空间 X 中的一个点, 则 $H_*(X, x_0) \cong \tilde{H}_*(X)$ 。

例 2.1.2. 相对同调群

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & q \neq n \end{cases}$$

2.2 切除定理

定理 2.2.1. 设 X_1, X_2 是 X 的子空间, 则 $\{X_1, X_2\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦的充要条件是含入映射 $i : (X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$ 诱导了相对同调群的同构

$$i_* : H_*(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\cong} H_*(X_1 \cup X_2, X_2)$$

证明. 注意到

$$\frac{S_*(X_1) + S_*(X_2)}{S_*(X_2)} = \frac{S_*(X_1)}{S_*(X_1) \cap S_*(X_2)} = \frac{S_*(X_1)}{S_*(X_1 \cap X_2)} = S_*(X_1, X_1 \cap X_2)$$

在链复形偶 $(S_*(X_1) + S_*(X_2), S_*(X_2))$ 的正合同调序列中做上述替换, 即替换

$$H_q((S_*(X_1) + S_*(X_2), S_*(X_2))) = H_q((S_*(X_1), S_*(X_1) \cap S_*(X_2))) = H_q(X_1, X_1 \cap X_2)$$

从而得到

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_q(X_2) & \longrightarrow & H_q(S_*(X_1) + S_*(X_2)) & \longrightarrow & H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_q(X_2) \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & H_q(X_2) & \longrightarrow & H_q(X_1 \cup X_2) & \longrightarrow & H_q(X_1 \cup X_2, X_2) \longrightarrow H_q(X_2) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

再利用五引理即可。 \square

推论 2.2.1 (切除定理). 设 (X, A) 是空间偶, 子集 $W \subset A$ 满足 $\overline{W} \subset \text{int } A$, 则包含映射 $i: (X \setminus W, A \setminus W) \rightarrow (X, A)$ 诱导了相对同调群的同构

$$i_*: H_*(X - W, A - W) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A)$$

证明. 设 $X_1 = X \setminus W, X_2 = A$, 则 $\dot{X}_1 \cup \dot{X}_2 = X$, 则 $\{X_1, X_2\}$ 是 X 的是 Mayer-Vietoris 耦。 \square

下面的定理揭示了相对同调群与绝对同调群的关系

定理 2.2.2. 设 (X, A) 是空间偶, A 非空, 则

$$H_*(X, A) \cong \tilde{H}_*(X \cup CA)$$

证明. 由于 CA 可缩, 观察空间偶 $(X \cup CA, CA)$ 则有

$$H_*(X \cup CA, CA) \cong \tilde{H}_*(X \cup CA)$$

再利用切除定理切除上半锥 $W = (A \times [\frac{1}{2}, 1]) / (A \times \{1\})$, 切除后的空间以 (X, A) 为收缩形变核, 因此

$$H_*(X \cup CA, CA) \cong H_*(X, A)$$

\square

2.3 空间三元组的同调序列

定义 2.3.1 (空间三元组). 一个拓扑空间 X 与它的两个子空间 $B \subset A$ 放在一起, 称为一个空间三元组 (X, A, B)

定义 2.3.2. 空间三元组之间的映射 $f: (X, A, B) \rightarrow (X', A', B')$ 指的是 $f: X \rightarrow X'$ 满足 $f(A) \subset A', f(B) \subset B'$ 。

对于空间三元组 (X, A, B) , 我们总是有下面的短正合列

$$0 \rightarrow S_*(A, B) \xrightarrow{i\#} S_*(X, B) \xrightarrow{j\#} S_*(X, A) \rightarrow 0$$

则我们有

定理 2.3.1. 设 (X, A, B) 是空间三元组, 则有正合同调序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(A, B) \xrightarrow{i_*} H_q(X, B) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

定理 2.3.2. 三元组 (X, A, B) 相对同调长正合列中的边缘同态 ∂_* 有分解: 对于任意 $C \subset B$, 有

$$H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A, C) \xrightarrow{j_*} H_{q-1}(A, B)$$

其中 j_* 是由包含映射 $j: (A, C) \rightarrow (A, B)$ 诱导的。

证明. 包含映射 $j: (X, A, C) \rightarrow (X, A, B)$ 给我们了如下的交换图表

而右边方块的交换性就是我们需要的分解。 \square

3 胞腔同调

3.1 CW 复形

定义 3.1.1 (*CW 剖分*). 设 X 是一个 Hausdorff 空间, $\mathcal{E} \subset 2^X$, 其中 2^X 是 X 的子空间族. X 上的一个 *CW 剖分* 指的是 \mathcal{E} 满足

1. $X = \bigcup_{e \in \mathcal{E}} e$, 且当 $e \neq e'$ 时, $e \cap e' = \emptyset$
2. 每一个 $e \in \mathcal{E}$ 都同胚于 $\mathbb{R}^{|e|}$, 其中 $|e| \in \mathbb{N}$, 称为是 e 的维数。
3. 对每一个 $e \in \mathcal{E}, |e| = n$, 都存在一个连续映射 ϕ_e 使得

$$\phi_e: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^{n-1} \cup e, X^{n-1})$$

满足 ϕ_e 是 $\mathring{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}$ 到 e 的同胚, 称为是 e 的特征映射。

4. 每个 $e \in \mathcal{E}$, \bar{e} 只与 \mathcal{E} 中有限个胞腔相交。
5. $A \subset X$ 闭当且仅当对每个 $e \in \mathcal{E}$ 有 $A \cap \bar{e}$ 是 \bar{e} 中的闭集。

简记为 (X, \mathcal{E}) 是一个 *CW 复形*, 或者 X 是一个 *CW 复形*, 或 \mathcal{E} 是 X 的一个 *CW 分解*。

约定 3.1.1. 记 $X^n = \bigcup_{\substack{|e| \leq n \\ e \in \mathcal{E}}} e$, 称为是 X 的 n 骨架; 当 $|e| = n$ 时, 称 e 是一个 n 胞腔, 此时 $e \cong \mathring{D}^n$; 如果 \mathcal{E} 是一个有限集, 则称 (X, \mathcal{E}) 是一个有限 *CW 复形*。

命题 3.1.1. 对于胞腔复形, 我们有以下事实

1. 对于特征映射 ϕ_e , 我们有 $\phi_e(D^n) = \bar{e}$ 。
2. X 是紧的当且仅当 \mathcal{E} 有限。

3. 若 X 是有限 CW 复形, 则定义中的 4,5 冗余。

定义 3.1.2 (子复形). 记 $X' = \bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e$, 其中 $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, 称 (X', \mathcal{E}') 是 (X, \mathcal{E}) 的子复形, 如果 \mathcal{E}' 形成了 X' 的 CW 结构。

命题 3.1.2. 下面命题等价

1. (X', \mathcal{E}') 是子复形;
2. X' 是闭集;
3. 对每个 $e \in \mathcal{E}'$ 满足 \bar{e} 包含在 \mathcal{E}' 的胞腔的并中;
4. 对每个 $e \in \mathcal{E}'$ 有 $\bar{e} \in X'$ 。

利用上述命题我们可以给出子复形的一个等价定义:

定义 3.1.3 (子复形的另一定义). 对于 CW 复形 X , 设 $A \subset X$, A 闭且 A 是 X 中若干胞腔的并, 则 A 是 X 的子复形。

推论 3.1.1. X^n 是子复形。

定义 3.1.4 (CW 复形的维数). 若有 n 使得 $X^n = X$, 则最小的这样的 n 称为 X 的维数。

定义 3.1.5 (CW 复形的等价定义). 设 X 是 $Hausdorff$ 空间, 一族闭子空间 $\emptyset = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots$ 使得 $X = \bigcup_{n \geq 0} X^n$, 其中 X^0 是 X 的离散点集, 且 X^q 是把一些 q 胞腔粘贴到 X^{q-1} 上得到的, 更详细地说, 记

$$\varphi^q : \coprod_{i \in \Lambda_q} D_i^q \supset \coprod_{i \in \Lambda_q} S_i^{q-1} \rightarrow X^{q-1}$$

则

$$X^q = \left(\coprod_{i \in \Lambda_q} D_i^q \right) \cup_{\varphi^q} X^{q-1}$$

其中对每个 $i \in \Lambda_q$, 映射 $\varphi_i^q : D_i^q \rightarrow X^{q-1}$ 是特征映射; 并且满足弱拓扑条件, 即 $A \subset X$ 闭当且仅当对每个 q 有 $A \cap X^q$ 是 X^q 的闭集。

例 3.1.1. 对 n 维球面 S^n 来说, $X^0 = \dots = X^{n-1} = \{pt\}$, $X^n = D^n \cup_f X^0$, 其中 $D^n \supset S^{n-1} \xrightarrow{f} \{pt\}$ 。

例 3.1.2. 对于环面 T^2 来说, $X^0 = \{pt\}$, $X^1 = \bigvee_2 S^1$, $X^2 = D^2 \cup_f X^1$, 如果将 D^2 看成 4 边形, $\bigvee_2 S^1$ 的两个 S^1 分别以 a, b 来记, 则 f 将 D^2 粘贴在 $\bigvee_2 S^1$ 上的方式为 $aba^{-1}b^{-1}$ 。

例 3.1.3. 对于亏格为 g 的有向闭曲面 T^g 来说, $X^0 = \{pt\}, X^1 = \bigvee_{2g} S^1, X^2 = D^2 \cup_f X^1$, 如果将 D^2 看成 $4g$ 边形, 则 $D^2 \supset S^1 \xrightarrow{f} \bigvee_{2g} S^1$ 为 $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ 。

例 3.1.4. 对于实射影空间 \mathbb{RP}^n , 我们可以将其看作是 S^n 商掉对径点, 圆盘 D^n 将边界 S^{n-1} 对径点相粘贴, 而 S^{n-1} 将对径点相粘贴则就是 \mathbb{RP}^{n-1} , 因此可以看出 \mathbb{RP}^n 的 CW 复形结构为 $\mathbb{RP}^n = D^n \cup_{\pi_{n-1}} \mathbb{RP}^{n-1}$, 其中 $\pi_{n-1}: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ 为对径映射, 因此

$$\mathbb{RP}^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$$

例 3.1.5. 同上例, 我们可以看出复射影空间 \mathbb{CP}^n 的 CW 复形结构为

$$\mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}$$

定义 3.1.6 (good pair). (X, A) 是空间偶, A 闭且 A 有开邻域 V 使得其以 A 为强形变收缩核, 则 (X, A) 称为一个好配对。

定义 3.1.7 (CW 偶). 空间偶 (X, A) 被称为一个 CW 偶, 如果 X 是 CW 复形, A 是 X 的子复形。

命题 3.1.3. CW 偶 (X, A) 是一个好配对。

定义 3.1.8 (CW 映射). $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是一个空间偶的映射, 而 $(X, A), (Y, B)$ 都是 CW 偶, 满足 $f(X^k) \subset Y^k$, 则称 f 是一个 CW 映射。

命题 3.1.4. 给定 CW 偶 $(X, A), (Y, B)$ 以及空间偶映射 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, 都存在 CW 映射 $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 使得 $f \simeq g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, 称 g 为 f 的 CW 逼近。

命题 3.1.5. 设 (X, A) 是一个好配对, 则有同调群的同构

$$H_*(X, A) \cong H_*(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_*(X/A)$$

证明. 取 V 是 A 的开邻域使得 V 强形变收缩到 A , 则空间偶 (V, A) 强形变收缩到 (A, A) , 从而有同构

$$H_*(V, A) \cong H_*(A, A)$$

而后者是平凡群。写出 (X, V, A) 的同调正合序列, 由于 $H_*(X, A) \cong H_*(X, V)$, 观察下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} H_*(X, A) & \xrightarrow{\cong} & H_*(X, V) & \xleftarrow{\cong} & H_*(X \setminus A, V \setminus A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ H_*(X/A, A/A) & \xrightarrow{\cong} & H_*(X/A, V/A) & \xleftarrow{\cong} & H_*(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A) \end{array}$$

根据已有的同构关系可知 $H_*(X, A) \rightarrow H_*(X/A, A/A)$ 是同构。 \square

推论 3.1.2. 设 (X, A) 是好配对, 则有长正合列

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_q(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{q-1}(A) \rightarrow \cdots$$

其中 $i: A \rightarrow X$ 是嵌入, $j: X \rightarrow X/A$ 是商映射。

定义 3.1.9 (相对同胚). 空间偶的映射 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 如果满足 f 是 X/A 到 Y/B 的同胚, 则称 f 是相对同胚。

命题 3.1.6. 设 $(X, A), (Y, B)$ 是好配对, $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是相对同胚, 则 f 诱导同构

$$f_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$$

证明.

$$H_*(X, A) \cong H_*(X/A) \cong H_*(Y/B) \cong H_*(Y, B)$$

□

由于 CW 偶给我们提供了大量的好配对的例子, 因此这也是 CW 复形重要的一个原因, 并且为了方便起见, 除非特殊说明, 今后的 CW 复形均指有限 CW 复形, 用 X 来记。

引理 3.1.1.

$$H_q(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0, & q \neq n \\ \bigoplus_{\Lambda_n} \mathbb{Z}, & q = n \end{cases}$$

即 $H_n(X^n, X^{n-1})$ 是自由阿贝尔群, 每一个 n 胞腔对应了它的一个生成元。

证明. 注意到 X^n/X^{n-1} 是 n 个 S^n 的单点并, 因此

$$H_q(X^n, X^{n-1}) = \tilde{H}_q(X^n/X^{n-1}) = \tilde{H}_q\left(\bigvee_{i \in \Lambda_n} S_i^n\right) = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} \tilde{H}_q(S_i^n) = \begin{cases} 0, & q \neq n \\ \bigoplus_{\Lambda_n} \mathbb{Z}, & q = n \end{cases}$$

□

引理 3.1.2.

$$H_q(X^k) = \begin{cases} 0, & q > k \\ H_q(X), & q \leq k \end{cases}$$

证明. 考虑空间偶 (X^k, X^{k-1}) 的相对同调序列

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X^k, X^{k-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_q(X^k, X^{k-1}) \xrightarrow{i_*} H_q(X^k) \rightarrow H_q(X^k, X^{k-1}) \rightarrow \cdots$$

因此当 $q \neq k, k-1$, 左右两端都为零, 从而 $H_q(X^{k-1}) \cong H_q(X^k)$ 。观察 $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$ 诱导的同调群序列

$$H_q(X^0) \rightarrow H_q(X^1) \rightarrow H_q(X^2) \rightarrow \dots \rightarrow H_q(X^{k-1}) \rightarrow H_q(X^k)$$

因此当 $q > k$ 时,

$$H_q(X^k) \cong H_q(X^{k-1}) \cong \dots \cong H_q(X^0) = 0$$

而当 $q < k$ 时,

$$H_q(X^k) \cong H_q(X^{k+1}) \cong \dots \cong H_q(X^n) = H_q(X)$$

□

有了上面的两个引理, 我们则可以建立胞腔同调下面关键的结果:

定义 3.1.10 (胞腔链群). 记 $C_q(X) = H_q(X^q, X^{q-1})$, 称为 X 的 q 维胞腔链群, 定义 $\partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ 为空间三元组 (X^q, X^{q-1}, X^{q-2}) 的相对同调序列中的连接同态 ∂_* , 即

$$\partial_* : H_q(X^q, X^{q-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2})$$

定理 3.1.1. $\{C_q(X), \partial_q\}$ 是链复形, 记为 $C_*(X)$ 。

证明. 我们只需要验证, $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, 考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) & & & & \\ \downarrow \partial_* & \searrow \partial_{q+1} & & & \\ H_q(X^q) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X^q, X^{q-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(X^{q-1}) \\ & & \searrow \partial_q & & \downarrow i_* \\ & & & & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \end{array}$$

由于中间的横行是正合列, 因此有我们期待的结论。

□

定理 3.1.2. 设 X 是 CW 复形, 则有同构 $H_*(C_*(X)) \cong H_*(X)$ 。

证明. 所有的叙述中提到的符号都在证明结尾处的交换图表中出现: 由于胞腔同调的性质, 我们有 $H_q(X^{q-1})$ 和 $H_{q-1}(X^{q-2})$ 都是平凡群, 因此根据正合性有出现的两个 j_* 都是单射; 根据定义, 我们有 $C_q = H_q(X^q, X^{q-1})$, 因此 C_q 中的闭链为 $\ker \partial_q = \ker j_* \circ \partial_*$, 由于 j_* 是单射因此 $Z_q(C_q) = \ker \partial_* = \text{Im } j_*$, 因此 $Z_q(C_q)$ 和 $H_q(X^q)$ 是同构。下面考虑 $\text{Im } \partial_{q+1}$, 由于 $j_*^{-1}(\text{Im } \partial_{q+1}) = \text{Im } \partial_* = \ker i_*$, 而由于 $H_q(X^q) = H_q(X^{q+1})$, 因此 i_* 的核平凡, 从而:

$$H_q(C_q(X)) = \frac{\ker \partial_q}{\text{Im } \partial_{q+1}} = \frac{H_q(X^q)}{\ker i_*} = H_q(X^q) = H_q(X^{q+1}) = H_q(X)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) & & & & H_{q-1}(X^{q-2}) = 0 \\
& & \downarrow \partial_* & \searrow \partial_{q+1} & & & \downarrow i_* \\
0 = H_q(X^{q-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_q(X^q) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X^q, X^{q-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(X^{q-1}) \\
& & \downarrow i_* & & \searrow \partial_q & & \downarrow j_* \\
& & H_q(X^{q+1}) & & & & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \\
& & \downarrow j_* & & & & \\
& & 0 = H_q(X^{q+1}, X^q) & & & &
\end{array}$$

□

注 3.1.1. 观察上述证明，同构 $\Theta : H_q(C_q(X)) \rightarrow H_q(X)$ 实际上由 $i_* j_*^{-1}$ 给出，其中

$$H_q(X) = H_q(X^{q+1}) \xleftarrow{i_*} H_q(X^q) \xrightarrow{j_*} H_q(X^q, X^{q-1})$$

定义 3.1.11 (CW 链映射). 设 X, Y 是 CW 复形, $f : X \rightarrow Y$ 是 CW 映射, 则 $f_q^c : C_q(X) \rightarrow C_q(Y)$ 定义为

$$f_* : H_q(X^q, X^{q-1}) \rightarrow H_q(Y^q, Y^{q-1})$$

命题 3.1.7. $f_{\#}^c = \{f_q^c\} : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ 是链映射。

证明. 为了验证 $f_{\#}^c$ 是链映射, 根据定义 $C_q = H_q(X^q, X^{q-1})$, 实际上需要验证下图的交换性:

$$\begin{array}{ccc}
H_q(X^q, X^{q-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
H_q(Y^q, Y^{q-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(Y^{q-1}, Y^{q-2})
\end{array}$$

而上图的交换性是由同调序列的自然性导致的。

□

定理 3.1.3. 我们有交换图表:

$$\begin{array}{ccc}
H_*(C_*(X)) & \xrightarrow{f_*^c} & H_*(C_*(Y)) \\
\downarrow \Theta & & \downarrow \Theta \\
H_*(X) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y)
\end{array}$$

证明. 根据注 2.4.1 以及奇异同调的自然性, 可知我们构造的同构 Θ 也具有自然性。

□

推论 3.1.3. 设 X 是 CW 复形, 则

1. $H_q(X)$ 是有限生成阿贝尔群, 并且若 X 有 Λ_q 个 q -胞腔, 则 $H_q(X)$ 至多有 Λ_q 个生成元;
2. $H_q(X) = 0$, 若 X 没有 q -胞腔;
3. 若每相邻的维数中, 必有一个维数没有胞腔, 则 $H_q(X) = C_q(X) = \bigoplus_{\Lambda_q} \mathbb{Z}$ 。

证明. 对于 (1), 由于 $H_q(X) \cong H_q(C_*(X)) = Z_q(C_q(X))/B_q(C_q(X))$, 而 $C_q(X)$ 只有 Λ_q 个生成元, 因此 $H_q(X)$ 是有限生成的, 并且至多有 Λ_q 个生成元; (2) 显然是 (1) 的直接推论; \square

例 3.1.6. 复射影空间有如下的胞腔分解

$$\mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n-2} \cup e^{2n}$$

满足上述推论中的 (3), 即任何两个相邻的维数中一定有一个维数没有胞腔, 那么有

$$H_q(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q \text{ 是偶数} \\ 0, & q \text{ 是奇数} \end{cases}$$

例 3.1.7. $S^n \times S^n$, 由于 S^n 有胞腔分解 $S^n = e^0 \cup e^n$, 那么 $S^n \times S^n$ 自然有胞腔分解

$$S^n \times S^n = e^0 \cup e^n \cup e^n \cup e^{2n}$$

因此

$$H_q(S^n \times S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = n \\ \mathbb{Z}, & q = 2n \end{cases}$$

3.2 定向与映射度

回忆映射度, 我们在讲述微分同调时给出了许多种映射度的定义, 其中一种如下: 设 $f: S^n \rightarrow S^n$ 是连续函数, 则 $\deg f$ 由下面给出:

$$\begin{aligned} f_*: \tilde{H}_n(S^n) &\rightarrow \tilde{H}_n(S^n) \\ \xi &\mapsto \deg(f)\xi \end{aligned}$$

并且证明了如下命题, 这是我们之后计算映射度的主要工具:

命题 3.2.1. 设 f 光滑, 且对每个点 $y \in S^n$ 以及对任意 $x \in f^{-1}(y)$, f 在 x 点的 Jacobi 矩阵 $J_f(x)$ 非退化, 则

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} \det J_f(x)$$

3.2.1 定向理论

我们先看一下如何在 \mathbb{R}^n 上给出一个标准定向，利用切除定理以及同调群的同伦不变性，我们不难发现：

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_n(D^n, D^n \setminus \{0\}) \cong H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

即 $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 只由一个元素生成，下面我们尝试构造出一个生成元，并把它称为 \mathbb{R}^n 的一个标准定向。考虑单形 $\alpha_n : \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，定义为

$$\alpha_n : \begin{cases} e_0 \mapsto (-1, -1, \dots, -1) \\ e_1 \mapsto (1, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ e_n \mapsto (0, 0, \dots, 1) \end{cases}$$

我们断言 α_n 是 $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 的相对闭链，且代表 $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 中的一个生成元，称 $[\alpha_n]$ 为 \mathbb{R}^n 的标准定向，记为 \mathcal{E}^n 。

由于流形在局部上同胚于 \mathbb{R}^n ，因此通过局部坐标卡，自然地可以将 \mathbb{R}^n 上的标准定向，过渡到流形上的局部定向。

设 M 是 n 维流形， $\phi : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ 是局部坐标卡，根据切除定理我们有 $H_n(U, U \setminus \{x\}) \cong H_n(M, M \setminus \{x\})$ ，并且局部坐标卡 ϕ 诱导了同构 $\phi_* : H_n(U, U \setminus \{x\}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ，则 $\phi_*^{-1}(\mathcal{E}^n)$ 称为 $x \in M$ 处由局部坐标卡 (U, ϕ) 决定的定向，称 $H_n(M, M \setminus \{x\})$ 的任意生成元是 x 处的局部定向。

注 3.2.1. 然而在学习微分拓扑时，也存在定向理论。一个流形是可定向的，如果存在一个图册，任取 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 是其中的两个坐标卡，以及 $p \in U \cap V$ ，满足 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 在 $\psi(p)$ 的 Jacobi 矩阵的行列式恒为正或恒为负。而下面的命题解释了代数拓扑与微分拓扑中定向的关联：

命题 3.2.2. $f : (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, b)$ 是光滑同胚， $J_f(a)$ 非退化，对于

$$f_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{b\})$$

当 $\det J_f(a) > 0$ 时， $f_*(\mathcal{E}^n) = \mathcal{E}^n$ ，当 $\det J_f(a) < 0$ 时， $f_*(\mathcal{E}^n) = -\mathcal{E}^n$

因此如果在每一处的转移函数 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵的行列式同号，则可以将流形上每一处的局部定向粘合起来，得到流形的定向，这与微分拓扑中的可定向的定义是兼容的。

注 3.2.2. “定向是同调群的一个生成元”这种观点，可以帮助你更好的理解什么是定向。

3.2.2 胞腔的定向

在讨论胞腔的定向之前，我们先给出 \mathbb{D}^n 的标准定向：包含映射诱导了同构

$$i_* : H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$$

用 i_* 拉回 \mathcal{E}^n ，并仍记为 \mathcal{E}^n ，称为 D^n 的标准定向。

设 X 是 CW 复形， e_i^q 是一个 q 维胞腔¹⁸，其特征映射给出了同构

$$(\varphi_i^q)_* : H_q(D^q, S^{q-1}) \rightarrow H_q(e_i^q, \dot{e}_i^q)$$

则称 $(\varphi_i^q)_*(\mathcal{E}^n)$ 为 q -胞腔 e_i^q 的自然定向。称取定上述定向的一个 q -胞腔 e_i^q 为一个有向胞腔，仍记为 e_i^q ¹⁹。

3.3 胞腔同调的计算

回忆：

$$\bigoplus_{i \in \Lambda_q} H_q(\overline{e_i^q}, \dot{e}_i^q) \cong \bigoplus_{i \in \Lambda_q} H_q(D_i^q, S_i^{q-1}) = H_q\left(\prod_{i \in \Lambda_q} (D_i^q, S_i^{q-1})\right) \xrightarrow{\varphi_*^q} H_q(X^q, X^{q-1}) = C_q(X)$$

其中 φ^q 是粘贴 q -胞腔的映射，其诱导的同调群之前的映射是同构。因此利用上述的同构， $C_q(X)$ 中元素 c_q 的一般形式为

$$c_q = \sum_{i \in \Lambda_q} \lambda_i e_i^q$$

这里 e_i^q 是指胞腔的自然定向，它是 $H_q(\overline{e_i^q}, \dot{e}_i^q)$ 的生成元。

如果我们想要使得胞腔同调可以计算，我们需要解决下面的问题：

1. 设 $f : X \rightarrow Y$ 是 CW 映射， $C_q(X)$ 的基为 $\{e_i^q\}_{i \in \Lambda_q}$ ， $C_q(Y)$ 中的基为 $\{f_j^q\}_{j \in \Lambda'_q}$ ，那么

$$f_{\#}^c(e_i^q) = \sum_{j \in \Lambda'_q} F_{ij}^q f_j^q$$

则如何求 F_{ij}^q ？

2. 对于边缘同态 ∂_q ，我们有

$$\partial_q(e_j^q) = \sum_j [e_i^q : e_j^{q-1}] e_j^{q-1}$$

其中 $[e_j^q, e_j^{q-1}]$ 被称为关联系数，构成的矩阵 $([e_j^q, e_j^{q-1}])$ 被称为关联矩阵，那么我们该如何求关联矩阵？

¹⁸我们默认凡提及一个胞腔，总是取好了一个特征映射 $\varphi_i^q : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (\overline{e_i^q}, \dot{e}_i^q)$

¹⁹这里我们可能会存在符号上的混用， e_i^q 会代指一个胞腔，一个有向胞腔或者 e_i^q 的自然定向，希望读者留心。

对于上面的两个问题，下面的这个命题是关键：

命题 3.3.1. 有向胞腔 $\{e_i^q\}$ 组成 $C_q(X)$ 的基，而一个 q 维胞腔链 c_q 在 e_i^q 上的系数可由下面的同态得出：

$$(\eta_i)_* : H_q(X^q, X^{q-1}) \rightarrow H_q(X^q, X^q \setminus e_j^q) \cong H_q(\overline{e_j^q}, \dot{e}_j^q)$$

证明. 注意到下面映射的复合

$$H_q(\overline{e_i^q}, \dot{e}_i^q) \rightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda_q} H_q(\overline{e_i^q}, \dot{e}_i^q) \cong \bigoplus_{\Lambda_q} H_q(D^q, S^q) \rightarrow H_q(X^q, X^{q-1}) \rightarrow H_q(X^q, X^q \setminus e_j^q) \cong H_q(\overline{e_j^q}, \dot{e}_j^q)$$

当 $i = j$ 时是恒同，否则是零映射。

□

3.3.1 胞腔链映射的描述

考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q(D^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{(\varphi_i)_*} & H_q(X^q, X^{q-1}) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y^q, Y^{q-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_q(Y^q, Y^q \setminus f_j^q) & \xleftarrow{(\varphi_j')_*} & H_q(D^q, S^{q-1}) \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ \widetilde{H}_q(D^q/S^{q-1}) & \xrightarrow{(\overline{\varphi_i})_*} & \widetilde{H}_q(X^q/X^{q-1}) & \xrightarrow{\overline{f}_*} & \widetilde{H}_q(Y^q/Y^{q-1}) & \xrightarrow{\overline{i}_*} & \widetilde{H}_q(Y^q/Y^q \setminus f_j^q) & \xleftarrow{(\overline{\varphi_j'})_*} & \widetilde{H}_q(D^q/S^{q-1}) \end{array}$$

其中 φ_i 表示 e_i^q 的特征映射，而 $\overline{\varphi_i}$ 表示 φ_i 在商空间上诱导的映射，由于 CW 耦都是好配对，因此 π_* 都是同构。根据命题 3.3.1，系数 F_{ij}^q 由上面一行的同调群的复合同态给出，因此也应该由下面一行的复合同态给出，即：

命题 3.3.2. F_{ij}^q 等于下面复合映射的度

$$D^q/S^{q-1} \xrightarrow{\overline{\varphi_i}} X^q/X^{q-1} \xrightarrow{\overline{f}} Y^q/(Y^q \setminus f_j^q) \xleftarrow{\overline{\varphi_j'}} D^q/S^{q-1}$$

因此根据命题 3.2.1 中计算度的方法，我们有：

推论 3.3.1. 设 $b \in f_j^q$ ，若在每一个点 $x \in f^{-1}(b) \cap e_i^q$ 处， $f|_{e_i^q}$ 的 Jacobi 矩阵都非退化，则胞腔链映射 $f_{\#}^c$ 的系数为

$$F_{ij}^q = \sum_{x \in f^{-1}(b) \cap e_i^q} \text{sgn det } J_f(x)$$

3.3.2 胞腔边缘同态的描述

设 φ_i, φ_j 分别是胞腔 e_i^q, e_j^{q-1} 的特征映射， $\dot{\varphi}_i := \varphi_i|_{S^{q-1}} : S^{q-1} \rightarrow X^{q-1}$ 是 e_j^q 的粘贴映射，则考虑如下交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
H_q(D^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{(\varphi_i)_*} & H_q(X^q, X^{q-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(X^{q-1}, X^{q-2}) & \xrightarrow{i_*} & H_q(X^{q-1}, X^{q-1} \setminus e_j^{q-1}) \\
\downarrow \partial_* & & \downarrow \partial_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\
\tilde{H}_q(S^{q-1}) & \xrightarrow{(\varphi_i)_*} & \tilde{H}_q(X^{q-1}) & \xrightarrow{\bar{f}_*} & \tilde{H}_q(X^{q-1}/X^{q-2}) & \xrightarrow{\bar{i}_*} & \tilde{H}_q(X^{q-1}/X^{q-1} \setminus e_j^{q-1})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& \xleftarrow{(\varphi_j)_*} & H_{q-1}(D^{q-1}, S^{q-2}) \\
& & \downarrow \pi_* \\
& \xleftarrow{(\bar{\varphi}_j)_*} & \tilde{H}_{q-1}(D^{q-1}/S^{q-2})
\end{array}$$

同样根据命题 3.3.1 我们有

命题 3.3.3. 关联系数 $[e_i^q : e_j^{q-1}]$ 等于下面复合映射的度

$$S^{q-1} \xrightarrow{\dot{\varphi}_i} X^{q-1} \xrightarrow{\pi} X^{q-1}/X^{q-1} \setminus e_j^{q-1} \xleftarrow{\bar{\varphi}_j} D^{q-1}/S^{q-2}$$

推论 3.3.2. 假设 $b \in e_j^{q-1}$, 而 $\dot{\varphi}_i$ 在每一个 $x \in \dot{\varphi}_i^{-1}(b)$ 处的 Jacobi 都非退化, 则

$$[e_i^q, e_j^{q-1}] = \sum_{x \in \dot{\varphi}_i^{-1}(b)} \text{sgn det } J_{\dot{\varphi}_i}(x)$$

3.3.3 实射影空间 \mathbb{RP}^n 的同调群

我们以实射影空间的同调群来结束胞腔同调的计算。回忆 \mathbb{RP}^n 的胞腔结构, \mathbb{RP}^n 是向 \mathbb{RP}^{n-1} 上粘贴一个 n -胞腔 e^n 得到的, 粘贴映射为商掉对径点的商映射 $\pi_{(n-1)} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ 。并且在每一个维数只有一个胞腔, 因此 $C_q(\mathbb{RP}^n)$ 是由 e^q 生成的无限阶循环群。

为了计算关联系数 $[e^q : e^{q-1}]$, 取 $b \in e^{q-1}$, 它在 $\pi_{(n-1)}$ 下的原像是 S^{q-1} 中的一对对径点 a, a' , 并且由于 S^{q-1} 上的对径映射的度为 $(-1)^q$, 因此不妨

因此有 $[e^q : e^{q-1}] = 1 + (-1)^q$, 因此有

$$\underbrace{\mathbb{Z}}_{0 \text{ 维}} \xleftarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{1 \text{ 维}} \xleftarrow{2} \cdots \xleftarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{奇数维}} \xleftarrow{2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{偶数维}} \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{1+(-1)^n} \underbrace{\mathbb{Z}}_{n \text{ 维}}$$

因此有

$$H_q(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \text{ 或 } q = n = \text{奇数} \\ \mathbb{Z}_2, & q \text{ 等于奇数且 } 0 < q < n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

但这样的对维数的讨论还是过于繁琐, 如果我们调整一下系数, 将会非常简洁。

给定一个阿贝尔群 G , 下面我们来介绍 G 系数的 CW 同调群, $C_q(X)$ 中的元素形如 $c_q = \sum \lambda_i e_i^q, \lambda_i \in \mathbb{Z}$, 把 $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ 改成 $\lambda_i \in G$, 形式上我们可以得到 $C_q(X; G) = C_q(X) \otimes G$, 则

$$\begin{aligned}\partial c_q &= \sum_{i \in \Lambda_q} \lambda_i \dot{e}_i^q \\ &= \sum_{i \in \Lambda_q} \lambda_i \sum_{j \in \Lambda_{q-1}} [e_i^q, e_j^{q-1}] e_j^{q-1} \\ &= \sum_{j \in \Lambda_{q-1}} \left(\sum_{i \in \Lambda_q} [e_i^q, e_j^{q-1}] \lambda_i \right) e_j^{q-1}\end{aligned}$$

则 $C_*(X; G) = \{C_q(X; G), \partial\}$ 是一个链复形, 其同调群 $H_*(X; G)$ 称为 G 系数的胞腔同调群。我们断言

$$H_*(X; G) \cong H_*(C_*(X; G))$$

例 3.3.1. 实射影空间 \mathbb{RP}^n 的 \mathbb{Z}_2 系数的同调群 $H_*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$, 因此

$$\mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2$$

因此

$$H_q(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & 0 \leq q \leq n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3.4 欧拉示性数与 Morse 不等式

3.4.1 有限阿贝尔群的结构

我们有着以下事实:

1. 任何有限生成的自由阿贝尔群 A 同构于 $\mathbb{Z}^r = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ 个}}$, 其中 r 称为 A 的秩;
2. 每个有限生成阿贝尔群总是某个有限生成自由阿贝尔群的商群;
3. A 是有限生成自由阿贝尔群, B 是 A 的子群, 则存在 A 的一组基 $\{a_1, \dots, a_r\}$ 以及存在自然数 $\{n_1, \dots, n_s\}, s \leq r$ 满足整除关系 $1 \leq n_1 | n_2 | \dots | n_s$, 使得 $\{n_1 a_1, \dots, n_s a_s\}$ 是 B 的基。

定理 3.4.1 (有限生成阿贝尔群的构造). 设 A 是有限生成阿贝尔群, A 决定了唯一的非负整数 r 以及一串大于 1 的整数, 并且满足整除关系 $n_1 | n_2 | \dots | n_t$, 使得

$$A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_t}$$

其中非负整数 r 称为 A 的秩, 记做 $r(A)$; n_1, \dots, n_r 称为 A 的挠系数。

推论 3.4.1. 设 A 是有限生成阿贝尔群, A 的有限阶元素全体组成 A 的一个有限子群 T_A , 称为 A 的挠子群, 并且 A/T_A 是秩为 r 的自由阿贝尔群, 称为 A 的自由部分。

定理 3.4.2. 阿贝尔群的短正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

若 A, B, C 皆有限生成, 则 $r(B) = r(A) + r(C)$

3.4.2 整系数的 Morse 不等式

定理 3.4.3. 设 X 是有限 CW 复形, 记 $\beta_q = r(H_q(X))$, 称为 X 的 q 维 Betti 数, 设 α_q 是 X 中 q 维胞腔的个数。定义 $Z[t]$ 中多项式

$$P_X(t) = \sum_q \beta_q t^q$$

$$Q_X(t) = \sum_q \alpha_q t^q$$

则必存在非负整系数多项式 $R(t)$, 使得

$$Q_X(t) - P_X(t) = (1+t)R(t)$$

证明. 在链复形 $\cdots \rightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \rightarrow \cdots$ 中有分解

$$0 \rightarrow Z_q \rightarrow C_q \rightarrow B_{q-1} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow B_q \rightarrow Z_q \rightarrow H_q \rightarrow 0$$

根据定理 2.6.2, 我们有

$$\sum_q r(C_q)t^q = \sum_q r(Z_q)t^q + t \sum_q r(B_q)t^q$$

$$\sum_q r(Z_q)t^q = \sum_q r(B_q)t^q + \sum_q r(H_q)t^q$$

两式相加则有

$$\sum_q r(C_q)t^q = \sum_q r(H_q)t^q + (1+t) \sum_q r(B_q)t^q$$

即为我们需要的结论。 □

推论 3.4.2. $\sum_q (-1)^q \alpha_q = \sum_q (-1)^q \beta_q = \chi(X)$, 称为 X 的欧拉示性数, 是 X 的同伦不变量

证明. 令 $t = -1$ 即可。 □

注 3.4.1. X 的欧拉示性数与 X 的 CW 剖分结构无关。

推论 3.4.3 (第一组 Morse 不等式). 对任意的 q , 我们有 $\alpha_q \geq \beta_q$

推论 3.4.4 (第二组 Morse 不等式). 对任意的 q , 我们有

$$\alpha_q - \alpha_{q-1} + \cdots + (-1)^q \alpha_0 \geq \beta_q - \beta_{q-1} + \cdots + (-1)^q \beta_0$$

推论 3.4.5 (空缺原理). 如果对所有的 q 都有 $\alpha_q \alpha_{q+1} = 0$, 则对任意的 q 都有 $\beta_q = \alpha_q$.

下面我们来看域系数的

假定 X 是有限 CW 复形, 设 $\beta_q^{\mathbb{F}} = \dim_{\mathbb{F}} H_q(X, \mathbb{F})$, 称为 X 的 \mathbb{F} 系数的 q 维 Betti 数, 定义 X 的域 \mathbb{F} 系数的 Poincaré 多项式如下:

$$P_X^{\mathbb{F}}(t) = \sum_q \beta_q^{\mathbb{F}} t^q$$

定理 3.4.4. 存在非负系数多项式 $R(t)$ 使得

$$Q_X(t) - P_X^{\mathbb{F}}(t) = (1+t)R(t)$$

证明. 同 \mathbb{Z} 系数。 □

推论 3.4.6. $\chi(X) = \sum_q (-1)^q \beta_q^{\mathbb{F}}$

例 3.4.1. 计算实射影空间的欧拉示性数 $\chi(\mathbb{RP}^n)$: 如果我们使用整系数的同调群, 其同调群和维数关系很大, 讨论起来相对复杂, 而如果我们使用 \mathbb{Z}_2 系数的同调群, 我们有 $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_q(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2) = 1$, 因此

$$\chi(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 是偶数} \\ 0, & n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

推论 3.4.7 (第一组 Morse 不等式). 对任意的 q , 有 $\alpha_q \geq \beta_q^{\mathbb{F}}$

推论 3.4.8 (第二组 Morse 不等式). 对任意的 q , 有 $\alpha_q - \alpha_{q-1} + \cdots + (-1)^q \alpha_0 \geq \beta_q^{\mathbb{F}} - \beta_{q-1}^{\mathbb{F}} + \cdots + (-1)^q \beta_0^{\mathbb{F}}$

那么我们自然想问, β_q 和 $\beta_q^{\mathbb{F}}$ 是否相同呢? 实际上之后万有系数定理会告诉我们:

$$\beta_q^{\mathbb{F}}(X) = \begin{cases} \beta_q(X), & \text{char } F = 0 \\ \beta_q(X) + r_p(H_q(X)) + r_p(H_{q-1}(X)) \end{cases}$$

其中 r_p 是有限生成阿贝尔群的 p 秩。有关 p 秩我们如下定义:

定义 3.4.1 (p 分量). 给定有限生成阿贝尔群 A , p 是素数, A 中阶为 p 的方幂的元素组成 A 的子群, 记作 $A(p)$, 称为 A 的 p 分量。

定义 3.4.2 (p 秩). 给定有限生成阿贝尔群 A , p 是素数, $A(p)$ 的循环群分解为 $\mathbb{Z}_{p^{m_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{m_{t(p)}}}$ 的长度 $t(p)$ 被称为 A 的 p 秩。

注 3.4.2. 显然, 如果 A 中不存在 p 阶元, 则其 p 秩为零。

定理 3.4.5 (有限阿贝尔群的 p 分量分解). 设 A 是有限生成阿贝尔群, 则 A 是其 p 分量的直和, 其中 p 为素数, 即

$$A = \bigoplus_{p \text{ 为素数}} A(p)$$

注 3.4.3. 如果 A 的标准分解式为 $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$, 其中 $2 \leq n_1 | n_2 | \cdots | n_k$, 则有 t 是 A 的 p 秩的最大值, 即 $t = \max_p r_p(A)$ 。

3.5 Morse 临界点理论

定义 3.5.1 (临界点). 设 M 是光滑流形, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $p \in M$ 称为 f 的临界点, 如果 $df|_p = 0$ 。

定义 3.5.2 (非退化临界点). 光滑函数 f 的临界点 p 被称为非退化的, 如果在 p 处的 Hesse 矩阵 $H_p = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ 是非退化的。

注 3.5.1. 我们一般只关心临界点处的 Hesse 矩阵, 因为此时的 Hesse 矩阵是对称矩阵。并且微分拓扑的结论告诉我们在对于一个光滑流形上的光滑函数, 其非退化临界点是存在的。

定义 3.5.3 (指标). 光滑函数 f 在非退化临界点 p 处的指标定义为 H_p 的负特征值的个数。

引理 3.5.1 (Morse 引理). 若 p 是光滑函数 f 的非退化临界点, 其在 p 处的指标为 λ , 则存在 p 点的某个邻域内有以 p 为原点的局部坐标 (y_1, \dots, y_n) , 使得

$$f(x) = f(p) - y_1^2 - \cdots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \cdots + y_n^2$$

推论 3.5.1. 非退化的临界点是孤立的。

定义 3.5.4 (Morse 函数). 光滑函数 f 被称为 Morse 函数, 如果其所有的临界点都非退化。

Morse 理论的关键则在于, 将 Morse 函数与 CW 同调联系了起来: 设 f 是光滑函数, 定义

$$M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}, \quad M_a^b = \{x \in M \mid a \leq f(x) \leq b\}$$

引理 3.5.2. 设 M_a^b 中无临界点, 则 M^a 与 M^b 微分同胚, 并且 M^a 是 M^b 的形变收缩核。

引理 3.5.3. 设 M_a^b 中只有一个非退化临界点, 其指数为 λ , 则有同胚 $M^b \cong M^a \cup_{\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}} D^\lambda \times D^{n-\lambda}$, 因而 M^b 同伦等价于 M^a 上贴一个 λ 维胞腔, 即 $M^b \simeq M^a \cup e^\lambda$ 。

定理 3.5.1. 设 M 是 n 维光滑流形, f 是 M 上任意一个 Morse 函数, 则

1. M 同伦等价于一个有限 CW 复形, 其 q 维胞腔一一对应于 f 指数为 q 的临界点, 其关联系数也可由 f 决定;
2. 设 μ_q 是 f 指数为 q 的临界点的个数, 定义 $Q_f(t) = \sum_q \mu_q t^q$, 称为 f 的 Morse 多项式, 则存在非负整系数多项式 $R(t)$, 使得

$$Q_f(t) - P_X(t) = (1+t)R(t)$$

注 3.5.2. 之前关于 q 维胞腔个数 α_q 的不等式都可以改写成 Morse 函数临界点个数 μ_q 的不等式。

例 3.5.1. $\mathbb{R}P^n$ 上的 Morse 函数至少有 $n+1$ 个临界点。

证明. 对于与 $\mathbb{R}P^n$ 同伦等价的任何有限 CW 复形 W , W 的 q 维 \mathbb{Z}_2 系数的 Betti 数都是 1, 因此由第一组 Morse 不等式, 有 $\alpha_q \geq \beta_q^{\mathbb{Z}_2} = 1$ 。从而任取 $0 \leq q \leq n$, f 都至少存在一个指数为 q 的临界点, 因此至少有 $n+1$ 个临界点。□

4 万有系数定理

4.1 朴素形式

定义 4.1.1 (自由链复形). 链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 中每个 C_q 都是自由阿贝尔群, 则称为自由链复形。

定理 4.1.1. 设 C 和 C' 都是自由链复形, 那么 C 和 C' 链同伦等价的充要条件是它们的同调群同构。

推论 4.1.1. 设 C 和 C' 都是自由链复形, 并且 $H_*(C) \cong H_*(C')$, 则对任意系数群 G , 都有

$$H_*(C; G) \cong H_*(C'; G), \quad H^*(C; G) \cong H^*(C'; G)$$

证明. 如果 C 同伦等价于 C' , 那么 $C \otimes G$ 同伦等价于 $C' \otimes G$, $\text{Hom}(C, G)$ 同伦等价于 $\text{Hom}(C', G)$ 。□

由于拓扑空间 X 的奇异链复形以及胞腔链复形都是自由链复形, 因此:

推论 4.1.2. 对于空间 X 和空间偶 (X, A) ，其整系数的奇异同调完全决定其任意系数的奇异同调和上同调。

推论 4.1.3. 对于 CW 复形 X 和复形偶 (X, A) ，其任意系数的奇异同调与上同调都可以通过胞腔链复形来计算。

那么问题在于，怎么通过 $H_*(X)$ 导出 $H_*(X; G)$ 以及 $H^*(X; G)$ ，下面是一个具体的例子：

例 4.1.1. 设有限胞腔复形 X 的同调群为 $H_0(X) = \mathbb{Z}, H_1(X) = \mathbb{Z}_3$ ，其他的同调群都为零，则我们可以计算 $H_*(X, \mathbb{Z}_2), H_*(X, \mathbb{Z}_3)$ 如下：

取一个自由链复形 C ，使得 $H_*(C) = H_*(X)$ 。这样的 C 也是容易构造的，先取 C' 为

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{0\text{维}} \rightarrow 0$$

显然此时 $H_0(C') = \mathbb{Z}, H_q(C') = 0, q \neq 0$ ；再取 C'' 如下

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{2\text{维}} \xrightarrow{3} \underbrace{\mathbb{Z}}_{1\text{维}} \rightarrow 0$$

此时有 $H_1(C'') = \mathbb{Z}_3, H_q(C'') = 0, q \neq 1$ ；将 C' 与 C'' 做直和，我们有

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{2\text{维}} \xrightarrow{3} \underbrace{\mathbb{Z}}_{1\text{维}} \xrightarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{0\text{维}} \rightarrow 0$$

显然 C 是自由链复形，且 $H_*(C) \cong H_*(X)$ ，从而 C 与 X 的奇异链复形同伦等价，我们将链复形张量 \mathbb{Z}_2 后依然同伦等价，即有 $H_q(X; \mathbb{Z}_2) \cong H_q(C; \mathbb{Z}_2) = H_q(C'; \mathbb{Z}_2) \oplus H_q(C''; \mathbb{Z}_2)$ ，而分别计算这两个是容易的：

$$\begin{aligned} C' \otimes \mathbb{Z}_2 : \quad & 0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{0\text{维}} \rightarrow 0 \\ C'' \otimes \mathbb{Z}_2 : \quad & 0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{2\text{维}} \xrightarrow{1} \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{1\text{维}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

直接计算可知：

$$H_q(C'; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases} \quad H_q(C''; \mathbb{Z}_2) = 0, \forall p \geq 0$$

从而

$$H_q(C; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases}$$

同理可以计算 $H_*(X; \mathbb{Z}_3)$ ，唯一不同的地方在于 $\times 3$ 这个映射在 \mathbb{Z}_3 是零映射而不是单位映射。

定义 4.1.2 (初等链复形). 我们定义如下的链复形为初等链复形:

$$E(\mathbb{Z}, n): 0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{n\text{维}} \rightarrow 0$$

$$E(\mathbb{Z}_k, n): 0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{n+1\text{维}} \xrightarrow{k} \underbrace{\mathbb{Z}}_{n\text{维}} \rightarrow 0$$

注 4.1.1. 很容易计算得到:

$$H_q(E(\mathbb{Z}, n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & q \neq n \end{cases}, \quad H_q(E(\mathbb{Z}_k, n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_k, & q = n \\ 0, & q \neq n \end{cases}$$

约定 4.1.1. 我们用记号 G_k 表示映射 $G \xrightarrow{k} G$ 的余核, 用 ${}_k G$ 表示映射 $G \xrightarrow{k} G$ 的核, 则有下列的正合列:

$$0 \rightarrow {}_k G \rightarrow G \xrightarrow{k} G_k \rightarrow 0$$

直接计算, 我们可以发现

$$H_q(E(\mathbb{Z}, n); G) = H^q(E(\mathbb{Z}, n); G) = \begin{cases} G, & q = n \\ 0, & q \neq n \end{cases}$$

以及

$$H_q(E(\mathbb{Z}_k, n); G) = \begin{cases} G_k, & q = n \\ {}_k G, & q = n+1 \\ 0, & q \neq n, n+1 \end{cases}, \quad H^q(E(\mathbb{Z}_k, n); G) = \begin{cases} {}_k G, & q = n \\ G_k, & q = n+1 \\ 0, & q \neq n, n+1 \end{cases}$$

定理 4.1.2 (万有系数定理的朴素形式). 设 X 是有限 CW 复形, 如果 $H_q(X) = \bigoplus_{i=1}^{\beta_q} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\gamma_q} \mathbb{Z}_{k_i}$, 其中 β_q 是 q 维 Betti 数, $\gamma_q \geq 0$, 且当 $\gamma_q \geq 1$ 时 $k_i^{(q)} \geq 2$ 。则我们有

$$H_q(X; G) = \bigoplus_{i=1}^{\beta_q} G \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\gamma_q} G_{k_i^{(q)}} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\gamma_{q-1}} G_{k_i^{(q-1)}} \right)$$

$$H^q(X; G) = \bigoplus_{i=1}^{\beta_q} G \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\gamma_q} {}_{k_i^{(q)}} G \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\gamma_{q-1}} {}_{k_i^{(q-1)}} G \right)$$

证明. 利用初等链复形, 我们可以构造如下的自由链复形:

$$D = \bigoplus_q \left(\bigoplus_{i=1}^{\beta_q} E(\mathbb{Z}, q) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\gamma_q} E(\mathbb{Z}_{k_i^{(q)}}, q) \right)$$

显然我们有 $H_*(D) = H_*(X)$, 因此由定理 4.1.1, 我们可以用 D 代替 X 的奇异链复形来计算同调群与上同调群。再利用注 4.1.1 关于初等链复形同调群与上同调群的计算则可以得到我们需要的结果。□

注意到 ${}_k\mathbb{Z} = 0$, 则有下列的结果:

推论 4.1.4. 设 X 是有限 CW 复形, $H_q(X) = \mathbb{Z}^{\beta_q} \oplus T_q$, 其中 T_q 是挠子群, 则

$$H^q(X) = \mathbb{Z}^{\beta_q} \oplus T_{q-1}$$

推论 4.1.5. 设 \mathbb{F} 是特征为 p 的域, 其中 $p = 0$ 或素数, X 是有限 CW 复形, β_q 是 q 维 Betti 数。当 p 是素数时, 记 $\gamma_q^{(p)}$ 是 $H_q(X)$ 的 p 秩。则

1. $H_q(X; \mathbb{F})$ 与 $H^q(X; \mathbb{F})$ 作为 \mathbb{F} 上的向量空间有相同的维数, 记作 $\beta_q^{(p)}$;

2.

$$\beta_q^{(p)} = \begin{cases} \beta_q, & p = 0 \\ \beta_q + \gamma_q^{(p)} + \gamma_{q-1}^{(p)}, & p \neq 0 \end{cases}$$

4.2 Ext 与 Tor 函子

定义 4.2.1 (自由预解). 给定阿贝尔群 H , 以及自由阿贝尔群 F_0, F_1, \dots , 使得有下列的正合列:

$$\cdots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow H \rightarrow 0$$

称为 H 的自由预解。

定义 4.2.2 (Tor). 给定阿贝尔群 H, G , 定义 $\text{Tor}(H, G)$ 如下: 任取 H 的一个自由预解 $\cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0$, 用 G 去张量这个正合列得到

$$(F; G): \cdots \rightarrow F_2 \otimes G \xrightarrow{f_2 \otimes \text{id}_G} F_1 \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes \text{id}_G} F_0 \otimes G \xrightarrow{f_0 \otimes \text{id}_G} H \otimes G \rightarrow 0$$

则定义 $\text{Tor}(G, H) = H_1(F; G) = \ker f_1 \otimes \text{id}_G / \text{Im } f_2 \otimes \text{id}_G$

注 4.2.1. Tor 的定义与自由预解的选取实际上是无关系的, 即选取不同的自由预解得到的 $\text{Tor}(G, H)$ 是同构的, 这实际上是由下面的引理保证的:

引理 4.2.1. 给定 H 的自由预解 F 和 F' , 任给同态 $\alpha: H \rightarrow H$, 则 α 可以延拓成链映射 $F \rightarrow F'$, 即:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \longrightarrow & F'_1 & \longrightarrow & F'_0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

并且任何两个不同的 $\alpha, \alpha': H \rightarrow H$ 延拓成的链映射是同伦的。

注 4.2.2. 我们还可以定义 $\text{Tor}_n(H, G)$ 为 $H_n(F; G), n \geq 1$, 但实际上有效的信息只有 Tor_1 , 这是因为对于任何一个阿贝尔群, 其一定存在如下的自由预解:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0$$

从而 $\text{Tor}_n(H, G) = H_n(F; G) = 0$ 。

定义 4.2.3 (Ext). 给定阿贝尔群 H, G , 定义 $\text{Ext}_1(H, G)$ 如下: 任取 H 的一个自由预解 $\cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0$, 用 $\text{Hom}(-, G)$ 作用这个正合列得到

$$(F; G): \cdots \leftarrow \text{Hom}(F_2, G) \xleftarrow{\text{Hom}(f_2, G)} \text{Hom}(F_1, G) \xleftarrow{\text{Hom}(f_1, G)} \text{Hom}(F_0, G) \xleftarrow{\text{Hom}(f_0, G)} \text{Hom}(H, G) \leftarrow 0$$

则定义 $\text{Ext}_1(G, H) = H^1(F; G) = \ker \text{Hom}(f_2, G) / \text{Im } \text{Hom}(f_1, G)$

命题 4.2.1 (Ext 的性质). 对于 Ext, 我们有以下性质:

1. $\text{Ext}(H \oplus H', G) = \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G)$;
2. 当 H 自由时, $\text{Ext}(H, G) = 0$

命题 4.2.2 (Tor 的性质). 对于 Tor, 我们有以下性质:

1. $\text{Tor}(A, B) = \text{Tor}(B, A)$;
2. $\text{Tor}(A_1 \oplus A_2, B) = \text{Tor}(A_1, B) \oplus \text{Tor}(A_2, B)$;
3. 当 A 或 B 自由时, $\text{Tor}(A, B) = 0$;
4. $\text{Tor}(A, B) = \text{Tor}(T_A, B)$, 其中 T_A 是 A 的挠子群;
5. $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, B) = {}_n B$

定理 4.2.1 (万有系数定理). 设 C 是自由链复形, 则有裂正合列

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \rightarrow H_n(C; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C); G) \rightarrow 0$$

证明. 考虑裂正合的链正合列:

$$0 \rightarrow Z_* \rightarrow C_* \rightarrow B_{*-1} \rightarrow 0$$

进而有链正合列:

$$0 \rightarrow Z_* \otimes G \rightarrow C_* \otimes G \rightarrow B_{*-1} \otimes G \rightarrow 0$$

其诱导出长正合列

$$\cdots \rightarrow B_n \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes \text{id}_G} Z_n \otimes G \rightarrow H_n(C; G) \rightarrow B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{i_{n-1} \otimes \text{id}_G} Z_{n-1} \otimes G \rightarrow \cdots$$

从中我们可以提取出短正合列:

$$0 \rightarrow \text{coker}(i_n \otimes \text{id}_G) \rightarrow H_n(C; G) \rightarrow \ker(i_{n-1} \otimes \text{id}_G) \rightarrow 0$$

因此我们只需要搞清楚映射 $i_n \otimes \text{id}_G$ 的核与余核即可:

首先考虑如下的正合列:

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n(C) \rightarrow 0$$

由于张量函子是右正合的，因此张量 G 可以得到如下的正合列：

$$B_n \otimes G \rightarrow Z_n \otimes G \rightarrow H_n \otimes G \rightarrow 0$$

从而 $\text{coker}(i_n \otimes \text{id}_G) = H_n(C) \otimes G$ 。

另一方面，考虑 $H_{n-1}(C)$ 如下的一个自由预解

$$0 \rightarrow B_{n-1} \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow H_{n-1}(C) \rightarrow 0$$

做张量后得到：

$$0 \rightarrow B_{n-1} \otimes G \rightarrow Z_{n-1} \otimes G \rightarrow H_{n-1}(C) \otimes G \rightarrow 0$$

从而 $\ker(i_{n-1} \otimes \text{id}_G) = \text{Tor}(H_{n-1}(C), G)$ 。

□

推论 4.2.1 (拓扑形式). 设 X 是拓扑空间，则有裂正合列：

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_n(X) \otimes G \rightarrow H_n(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X), G) \rightarrow 0 \\ 0 \leftarrow \text{Hom}(H_n(X), G) \leftarrow H^n(X; G) \leftarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X), G) \leftarrow 0 \end{aligned}$$