

代数 1 H 课程讲义



Instructor: 余成龙
Notes Taker: 刘博文, 唐龙天

QiuZhen College, Tsinghua University
2022 Spring



课程信息:

- ◇ 授课人: 余成龙;
- ◇ 办公室: 近春园西楼 260;
- ◇ 邮箱: yuchenglong@mail.tsinghua.edu.cn;
- ◇ 成绩分布: 作业 (20%) + 期中 (30%) + 期末 (50%), 习题课讲题加分项;
- ◇ 参考书: M.Artin *Algebra*, 姚慕生 抽象代数学, S.Lang *Algebra*.

内容大纲:

- ◇ 群;
- ◇ 环 (交换环);
- ◇ 模 (环上的线性代数);
- ◇ 二次型.





目录

第一部分 群论	5
第一章 群的定义、例子与基本性质	6
1.1 群的定义与例子	6
1.2 子群与商群	9
1.3 群同态与群同构	11
1.4 作业一	15
第二章 群作用	17
2.1 群作用的定义与例子	17
2.2 轨道与计数公式	19
2.3 Sylow 定理	20
2.4 作业二	23
第三章 自由群与关系	25
3.1 自由群	25
3.2 S_n 的循环分解	26
3.3 作业三	26
3.4 S_n 的对换分解与 Coxeter 群	29
3.5 Coxeter–Todd 算法	30
3.6 作业四	35
第四章 单群	38
4.1 $\text{PSL}(2, F)$ 的单性	38
4.2 作业五	42
第二部分 交换环论	44
第五章 环与理想	45
5.1 环的定义与例子	45
5.2 环同态与理想	47
5.3 一些理想的例子	49
5.4 添加元素	51



5.5	极大理想	52
5.6	作业六	53
第六章 整环		55
6.1	整环与素理想	55
6.2	主理想整环与欧几里德整环	56
6.3	唯一分解整环	56
6.4	高斯引理	59
6.5	作业七	62
第七章 二次扩域的代数整数环		64
7.1	高斯整数环的素理想	64
7.2	二次扩张的代数整数环	65
7.3	虚二次数域代数整数环的单位	67
第八章 虚二次数域代数整数环的唯一分解性		68
8.1	\mathbb{R}^2 中的格	68
8.2	理想的乘积分解	70
8.3	理想类群	72
8.4	作业八	76
第三部分 模论		78
第九章 模的定义、例子与基本性质		79
9.1	模的定义与例子	79
9.2	模同态与同态基本定理	80
第十章 自由模		82
10.1	自由模的定义	82
10.2	主理想整环上的有限生成自由模的结构定理	85
10.3	若尔当标准型	91
10.4	作业九	93
10.5	作业十	95
第四部分 二次型		97
第十一章 双线性型		98
11.1	双线性型与格拉姆矩阵	98
11.2	对称、反对称双线性型与厄尔米特型	101
11.3	对称双线性型与厄尔米特型的分类	103
11.4	反对称双线性型的分类	106

11.5 作业十一	107
第十二章 内积空间上的线性算子	109
12.1 复内积空间上的自伴随算子与酉算子	109
12.2 实内积空间上的对称算子与正交算子	111
12.3 作业十二	113
12.4 作业十三	114
第十三章 Witt 理论	116
13.1 Witt 延拓定理	116
13.2 Grothendieck-Witt 群	120
13.3 不变量	121
13.4 一些 Witt 群的计算	122
13.5 作业十四	123



第一部分

群论



第一章 群的定义、例子与基本性质

1.1 群的定义与例子

定义 1.1.1. 群 (G, \cdot) 是指一个非空集合 G , 有一个“二元运算”. 这里运算是指映射

$$G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b =: ab.$$

输入一个有序对 (a, b) , 输出 $ab \in G$. 且 \cdot 满足

1. **结合律** (associativity): 对任意 $a, b, c \in G$ 有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. **单位元/恒等元** (identity element): 存在 $e \in G$ 使得对任意 $a \in G$ 有 $ae = ea = a$.
3. **逆** (inverse) 对任意 $a \in G$, 存在 $b \in G$ 使得 $ab = ba = e$.

注记. 结合律保证记号 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 无歧义.

例子. 我们有如下常见的例子:

- ◇ $(\mathbb{Z}, +)$, 0 是单位元;
- ◇ 对正整数 n , 模 n 同余类有群结构 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
- ◇ $(\mathbb{Q}, +)$ 和 $(\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ 是群.
- ◇ 对素数 p , $(\mathbb{F}_p^\times = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \times)$ 是群.

例子. 同样有许多反例:

- ◇ (奇数, $+$) 不是群, 因为“二元运算”不良定义;
- ◇ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 不是群, 因为不存在逆元;
- ◇ $(\mathbb{R}^3, \text{叉乘})$ 不是群, 因为没有结合律.

问题 1.1.2. 思考是否存在不满足结合律, 但有单位元和逆的结构?

命题 1.1.3. 单位元唯一, 即 $e_1, e_2 \in G$ 都是单位元, 则有 $e_1 = e_2$.

证明: 注意到 $e_1 = e_1 e_2 = e_2$. □

命题 1.1.4. 逆元唯一.

证明: 假设 b, c 都是 a 的逆元, 则有

$$c = ec = (ba)c = b(ac) = be = b.$$

□



注记. 由于逆元是唯一的, 我们现在可以记 a^{-1} 为 a 的逆元. 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, 令 $a^n = \underbrace{a \cdots a}_n$, 令 $a^{-n} = (a^{-1})^n$; 对 $n = 0$, 令 $a^0 = e$.

练习. 验证: $a^{-n} = (a^n)^{-1}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^m a^n = a^{m+n}$.

定义 1.1.5. $[n]$ 表示 n 元集合 $\{1, 2, \dots, n\}$, 则集合 $S_n = \{\sigma: [n] \rightarrow [n] \mid \sigma \text{ 双射}\}$ 上可以通过映射复合定义二元运算.

例子. 通常将置换记为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

也可以记为 $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$, 通常称为 $1, \dots, n$ 的排列.

命题 1.1.6. (S_n, \cdot) 是群, 称为 n 元置换群 (permutation group).

证明: 我们如下依次验证:

1. 二元运算良定义, 因为单射复合单射还是单射, 满射复合满射还是满射.
2. 结合性. 对任意 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$, 我们有

$$\begin{aligned} ((\sigma_1 \sigma_2) \sigma_3)(i) &= (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_3(i)) \\ &= \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(i))) \\ (\sigma_1(\sigma_2 \sigma_3))(i) &= \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(i))). \end{aligned}$$

从而有 $(\sigma_1 \sigma_2) \sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2 \sigma_3)$.

3. 存在恒等元. 定义 $e: [n] \rightarrow [n]$ 满足 $e(i) = i$. 验证知

$$\begin{aligned} \sigma e(i) &= \sigma(e(i)) = \sigma(i) \\ e \sigma(i) &= e(\sigma(i)) = \sigma(i) \end{aligned}$$

从而有 $e \sigma = \sigma e = \sigma$.

4. 存在逆元. σ 满射, 则对任意 $i \in [n]$, 存在 $j \in [n]$ 使得 $\sigma(j) = i$. 定义

$$\begin{aligned} \tau: [n] &\rightarrow [n] \\ i &\mapsto j \end{aligned}$$

由于 σ 是双射, 知 τ 也是双射. 且 $\sigma \tau(i) = \sigma(j) = i$. 利用结合律, 有

$$\sigma(\tau(\sigma(i))) = (\sigma \tau)(\sigma(i)) = \sigma(i).$$

又由于 σ 是双射, 则有 $\tau \sigma(i) = i$, 从而 $\tau \sigma = \sigma \tau = e$.

□

注记. 对于一般集合 X , 我们也可以定义其上的置换群, 是由全体 X 到 X 的双射组成的集合, 同样如上具有群结构.

练习. 当 $X = \mathbb{N}$ 的时候, 证明 S_X 不可数.

定义 1.1.7. 群 G 的元素个数称为**阶** (order), 记作 $|G|$.

命题 1.1.8. 对于置换群有 $|S_n| = n!$.

例子. 考虑 S_3 , 令

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算得

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (132), \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (213)$$

这告诉我们 $\sigma\tau \neq \tau\sigma$, 即 S_3 不是交换群. 我们也可以用另外一种看法, 即 σ 交换 1, 3 位置. 因此 $\sigma\tau = 213$. 而 τ 是向后平移次, 从而

$$\tau\sigma = \text{平移 } 321 = 132 \neq \sigma\tau.$$

定义 1.1.9. 群 (G, \cdot) 称为 **Abel 群**, 若满足对任意 $a, b \in G$ 都有 $ab = ba$. 此时通常将二元运算记作 $+$, 单位元记作 0.

命题 1.1.10. 对于 $n \geq 3$, S_n 不是 Abel 群.

例子. 考虑 $D_n = \{\text{二维平面上将正 } n \text{ 边形映到自身的旋转和反射, 包括恒等映射}\}$, 二元运算是映射的复合, D_n 构成群, 称为**二面体群** (dihedral group).



练习. 验证 D_n 是群.

例子. 对于 \mathbb{R} 线性空间 V , 定义

$$\text{GL}(V) = \{f: V \rightarrow V \mid f \text{ 是可逆线性变换}\},$$

二元运算是复合, $\text{GL}(V)$ 构成群, 称为**一般线性群** (general linear group). 特别地, $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ 是所有 $n \times n$ 可逆矩阵的群, 运算时矩阵乘法. 对于域 $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$, $\text{GL}(n; F)$ 只在 $n = 1$ 时是 Abel 群.

练习. 计算 $|\text{GL}(n; \mathbb{F}_p)|$.

定义 1.1.11. 对于群 (G_1, \cdot) 和 (G_2, \cdot) , 定义

$$G_1 \times G_2 = \{(a, b) \mid a \in G_1, b \in G_2\},$$

二元运算是逐分量乘法, 即

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2).$$

$(G_1 \times G_2, \cdot)$ 是群, 称为 G_1 与 G_2 的**积群** (product group).

1.2 子群与商群

定义 1.2.1. 对群 G 的子集 H , 若 H 在 G 的乘法下构成群, 称 H 为 G 的子群 (subgroup).

例子. 对 $G = S_n$, 我们令

$$H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\},$$

有 H 是 G 的子群. 我们只需验证 H 在 G 的运算下封闭, 并且对取逆封闭.

- 对 $\sigma, \tau \in H$, 有 $\sigma(\tau(n)) = \sigma(n) = n$, 即 $\sigma\tau \in H$;
- 若 $\sigma(n) = n$, 则有 $\sigma^{-1}(n) = \sigma^{-1}(\sigma(n)) = n$, 即 $\sigma^{-1} \in S_n$.

事实上, 我们还能证明 $H \simeq S_{n-1}$.

定理 1.2.2 (Lagrange). G 是有限群, 对任意子群 $H \subset G$ 都有 $|H|$ 整除 $|G|$.

为证明此定理, 我们引入陪集 (coset) 的概念. 这里考虑左陪集 (left coset).

定义 1.2.3. 对群 G , H 是正规子群. G 中形如 $gH = \{gh \mid h \in H\}$ 的子集称为 G 的左 H -陪集.

例子. $eH = H$ 是左 H -陪集.

例子. 考虑 $H = \{\sigma \mid \sigma(n) = n\} \subset S_n$. 左 H -陪集的分类如下

$$X_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

对任意给定 $g \in S_n$, 令 $i = g(n)$, 我们证明 $gH = X_i$. 首先对任意 $h \in H$, 有 $gh(n) = g(n) = i$, 即有 $gH \subset X_i$. 另一方面, 对任意 $\sigma \in X_i$, 有

$$\sigma = (g^{-1}g)\sigma = g(g^{-1}\sigma).$$

令 $h = g^{-1}\sigma$, 有 $h(n) = g^{-1}(i) = n$, 即 $h \in H$, 从而 $X_i \subset gH$. 因此有 $gH = X_i$.

定义 1.2.4. 定义集合 $G/H = \{gH \mid g \in G\}$, 每一个元素都是 G 的子集, 称为商集 (quotient set).

例子. 考虑 S_n , $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}$, 有 $S_n/H = \{X_1, \dots, X_n\}$.

定理 1.2.5. G 有左陪集分解

$$G = \coprod_{gH \in G/H} gH.$$

证明: 我们需要验证这些陪集之间是无交的, 并且它们的并是整个群 G .

1. 无交, 若有 $gH \cap g'H \neq \emptyset$, 即存在 $a \in gH \cap g'H$. 断言, 若 $a \in gH$, 则有 $aH = gH$. 设 $a = gh$, 对任意 $h' \in H$, 有

$$ah' = gh'h' = g(hh') \in gH,$$

即 $aH \subset gH$. 另一方面, 对任意 $h' \in H$, 有

$$gh' = ah^{-1}h' = a(h^{-1}h') \in aH,$$

即 $gH \subset aH$. 从而 $aH = gH$. 因此 $gH = g'H$.

2. 并, 因为 $g = ge \in gH$.

□

命题 1.2.6. $H \rightarrow gH: h \mapsto gh$ 是双射.

证明: 若 $gh = gh'$, 则有

$$h = g^{-1}gh = g^{-1}gh' = h'.$$

而满射由定义保证.

□

定理 1.2.2 证明. 由于 $|G| < \infty$, 因此我们有 $|H| = |gH|$. 利用左陪集分解

$$G = \coprod_{gH \in G/H} gH,$$

我们有 $|G| = |G/H| \cdot |H|$, 即得 $|H|$ 整除 $|G|$.

□

定义 1.2.7. 对集合 S , $X \subset S \times S$ 是子集. 若 $(a, b) \in X$, 记为 $a \sim b$. 若 \sim 满足

- (1) 传递性 (transitive): $\forall a, b, c \in S$, 若 $a \sim b, b \sim c$, 则有 $a \sim c$.
- (2) 对称性 (symmetric): 若 $a \sim b$, 则有 $b \sim a$.
- (3) 自反性 (reflexive): 对任意 a , 有 $a \sim a$.

则称 \sim 为 S 上的**等价关系** (equivalent relation).

注记. 把 S 分成非空子集的无交并称为 S 的一个**划分** (partition). 从等价关系我们可以自然诱导一个划分. 考虑 S 上的等价关系 \sim , 对任意 $a \in S$, 定义

$$C_a = \{b \in S \mid a \sim b\} \subset S.$$

令 $\bar{S} = \{C_a \mid a \in S\}$ 是所有等价类构成的集合. 我们有划分

$$S = \coprod_{C_a \in \bar{S}} C_a,$$

且有满射 $S \rightarrow \bar{S}: a \mapsto C_a$. 反过来, 从一个给定划分也可以定义等价关系, 即等价关系与划分是同一件事情.

设 $H \subset G$ 是子群, 我们可以定义等价关系, 即

$$a \sim g \text{ 当且仅当 } \exists h \in H, \text{ 使得 } a = gh.$$

有满射 $G \rightarrow G/H$, 称为**商映射** (quotient map). 一个自然的问题是 G/H 上是否有自然的群结构? 我们先尝试定义运算

$$\begin{aligned} G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (aH, bH) &\longmapsto abH \end{aligned}$$

我们希望这是良定义的, 即对

$$a' = ah_1, \quad b' = bh_2,$$

需要 $a'b'H = abH$. 注意到

$$\begin{aligned} a'b' &= ah_1bh_2 = abb^{-1}h_1bh_2 \\ &= ab(b^{-1}h_1b)h_2, \end{aligned}$$

因此只需要, 对任意 $b \in G$, $h \in H$ 有 $b^{-1}hb \in H$. 如果假设这一点, 我们容易发现 G/H 确实有群结构, 因为有单位元 eH 和逆元 $g^{-1}H$. 因此, 从中抽取出正规子群的概念.

定义 1.2.8. 若子群 $H \subset G$ 满足对任意 $h \in H$, $g \in G$ 都有 $ghg^{-1} \in H$, 则称 H 为正规子群 (normal subgroup). 此时 G/H 有群结构, 称为商群 (quotient group).

注记. 可以定价定义为, 对任意 $g \in G$, 有 $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\} = H$.

命题 1.2.9. *Abel* 群的子群都是正规子群.

证明: 对任意 $h \in H$, $g \in G$, 有 $ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H$. □

例子. 考虑加法群 $(\mathbb{Z}, +)$, $n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$ 是正规子群. 有商群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \dots, \overline{n-1}\}$, 其中 $\bar{i} = \{i + na \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

例子. 如下是一个非正规子群的例子: 考虑 $G = S_3$, $H = \{\sigma \in S_3 \mid \sigma(3) = 3\}$. 取

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

我们有 $(ghg^{-1})(3) = gh(2) = g(1) = 1$, 即 $ghg^{-1} \notin H$. 因此 H 不是正规子群.

1.3 群同态与群同构

定义 1.3.1. 群 G_1, G_2 , 映射 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 称为群同态 (group homomorphism), 若对任意 $a, b \in G_1$, 有 $f(ab) = f(a)f(b)$.

定义 1.3.2. 群 G_1, G_2 , 双射 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 称为群同构 (group isomorphism), 若对任意 $a, b \in G_1$ 都有 $f(ab) = f(a)f(b)$.

注记. 此时对于子群 $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} \subset S_n$, 我们知道有群同构 $H \simeq S_{n-1}$.

例子. H 是 G 正规子群, 商映射 $\pi: G \rightarrow G/H$ 是群同态. 因为

$$\pi(ab) = abH = (aH)(bH) = \pi(a)\pi(b).$$

实际上, 商集 G/H 上存在唯一一个群结构使得 π 是群同态, 反过来, 我们也可以用此来定义 G/H 的群结构.

命题 1.3.3. $f: G_1 \rightarrow G_2$ 是群同态, 则有

- (1) $f(e_{G_1}) = e_{G_2}$;
- (2) $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

证明: (1) 对任意 $g \in G_1$, 有

$$f(g) = g(e_{G_1}g) = f(e_{G_1})f(g).$$

两边同时乘以 $f(g)^{-1}$, 即得结论

(2) 对任意 $g \in G_1$, 有

$$f(g)f(g^{-1}) = f(e_{G_1}) = e_{G_2}$$

$$f(g^{-1})f(g) = f(e_{G_1}) = e_{G_2}.$$

□

例子. 对任意 $a \in G$, 有群同态

$$\mathbb{Z} \longrightarrow G$$

$$n \longmapsto a^n.$$

对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 商映射 $\mathbb{Z} \rightarrow n\mathbb{Z}$, $n \mapsto \bar{n}$ 也是群同态.

命题 1.3.4. 给定群同态 $f: G_1 \rightarrow G_2$.

(1) **像 (image)** $\text{im}(f) := \{f(g) \mid g \in G_1\}$ 是 G_2 的子群;

(2) **核 (kernel)** $\ker(f) := \{g \mid f(g) = e_{G_2}\}$ 是正规子群.

证明: (1) 对于任意 $g_1, g_2 \in G_1$, 按定义和命题 1.3.3 有

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2), \quad f(g_1)^{-1} = f(g_1^{-1}) \in \text{im } f,$$

因此 $\text{im } f$ 是 G_2 的子群.

(2) 和 (1) 一样可验证 $\ker(f)$ 是子群. 考虑任意 $g \in G_1$, $h \in \ker(f)$, 我们有

$$f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1} = f(g)f(g)^{-1} = e_{G_2},$$

从而 $ghg^{-1} \in \ker(f)$, 即 $\ker(f)$ 是正规子群.

□

回忆集合论里类似的“同构定理”, 对任意满射 $f: X \rightarrow Y$. 我们定义等价关系 \sim 如下:

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

等价类集合记作 \bar{X} , 从而我们可以将 f “典范”的分解为 $f = \bar{f} \circ \pi: X \rightarrow \bar{X} \rightarrow Y$.

定理 1.3.5 (第一同构定理 (first isomorphism theorem)). 对于满同态 $\varphi: G \rightarrow G'$, 令 $N = \ker \varphi$. 存在唯一群同构 $\bar{\varphi}: G/N \rightarrow G'$, 使得 $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$. 也即下图表交换

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\
 \searrow \pi & & \nearrow \bar{\varphi} \\
 & G/N &
 \end{array}$$

证明: 我们先验证, 对任意 $g \in G$, 均有

$$\varphi^{-1}(\{\varphi(g)\}) = gN.$$

对任意 $h \in \varphi^{-1}(\{\varphi(g)\})$, 有 $\varphi(h) = \varphi(g)$. 从而 $g^{-1}h \in N$, 即有 $h = g(g^{-1}h) \in gN$. 另一方面, 对任意 $h = ga$, $a \in N$, 我们有

$$\varphi(h) = \varphi(g)\varphi(a) = \varphi(g)e_{G'} = \varphi(g),$$

即有 $gN \subset \varphi^{-1}(\{\varphi(g)\})$.

因此, 这诱导了良定义的双射

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}: G/N &\longrightarrow G' \\ gN &\longmapsto \varphi(g).\end{aligned}$$

我们再说明这是群同态, 因为

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(g_1N \cdot g_2N) &= \varphi(g_1g_2) \\ &= \varphi(g_1)\varphi(g_2) \\ &= \bar{\varphi}(g_1N) \cdot \bar{\varphi}(g_2N).\end{aligned}$$

至此完成了证明. □

例子. 对任意 $a \in G$, 定义映射 f_n

$$\begin{aligned}f_n: \mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto a^n.\end{aligned}$$

有 $\text{im}(f_n) \subset G$ 是子群.

定义 1.3.6. 子群 $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 称为 G 中由 a 生成的子群, 记作 $\langle a \rangle$.

通过 Bézout 定理, 可知 \mathbb{Z} 的子群均形如 $n\mathbb{Z}$, 对某个 $n \geq 0$. 对任意 $a \in G$, 都存在 $n_a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

定义 1.3.7. 当 $n_a \geq 0$ 时, n_a 称为元素 a 的阶 (order). 当 $n_a = 0$, 定义 a 的阶为 ∞ .

注记. 事实上, 元素 a 的阶是使得 $a^n = e$ 的最小正整数 n .

定义 1.3.8. 若存在 $a \in G$, 使得 $G = \langle a \rangle$ 成立, 则称 G 为循环群 (cyclic group). 对于循环群, 我们有 $G \simeq \mathbb{Z}$ 或 $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

定理 1.3.9. 商同态 $f: G \rightarrow G/N$ 诱导了双射

$$\begin{aligned}\{G/N \text{ 的子群}\} &\xleftarrow{F} \{G \text{ 中包含 } N \text{ 的子群}\} \\ \bar{H} &\longmapsto f^{-1}(H).\end{aligned}$$

并且 F 将 G/N 的正规子群变为 G 中包含 N 的正规子群. 逆映射由

$$\{G \text{ 中包含 } N \text{ 的子群}\} \xrightarrow{F^{-1}} \{G/N \text{ 的子群}\}$$

$$H \mapsto H/N.$$

更一般地, 我们有 F 限制在 G/N 的正规子群上也是一一对应, 这是因为若 $H \subset G$ 正规, 则有

$$G/H \simeq (G/N)/(H/N).$$

证明: 考虑商映射 $\varphi: G \rightarrow G/N \rightarrow (G/N)/(H/N)$, 直接验证有 $\ker \varphi = H$, 从而有

$$G/H \simeq (G/N)/(H/N).$$

□

例子. 我们可以用对应定理分类循环群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的子群 ($n \geq 1$). 注意到 $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$ 当且仅当 $m|n$. 即

$$\{\mathbb{Z} \text{ 中包含 } n\mathbb{Z} \text{ 的子群}\} = \{m\mathbb{Z} \mid m|n, m \geq 1\}.$$

从而 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 中的子群形如 $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq d\mathbb{Z}$, 其中 $dm = n$.

命题 1.3.10. 对 n 阶循环群 G , 和整数 $d|n$, 存在唯一 d 阶子群.

注记. 反过来, 这一性质也刻画了循环群, 这个留作作业.

例子. (1) 考虑行列式映射 $\det: \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$, $A \mapsto \det A$, 这是群同态, 由第一同构定理, 有

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^\times.$$

(2) 考虑指数映射

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

$$z \mapsto e^z.$$

这是群同态.

我们回忆积群 $G_1 \times G_2$, 我们有正规子群 $G_1 \simeq G_1 \times G_1 \times \{e_{G_2}\}$, 以及 $G_2 \simeq \{e_{G_1}\} \times G_2$. 这是从两个群构造一个新的群. 反过来, 我们可以对给定群 G , 及其子群 $H, K \subset G$, 判断能否从 H, K 的结构还原 G 的结构

命题 1.3.11. H, K 是 G 的子群, 则

$$f: H \times K \longrightarrow G$$

$$(h, k) \mapsto hk$$

是群同构当且仅当以下三条同时成立.

- (1) $H \cap K = \{e\}$;
- (2) $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\} = G$



(3) H, K 为正规子群.

证明: “当” 部分: 先证明 $hk = kh$, 对任意 $h \in H, k \in K$ 成立. 我们考虑元素 $hkh^{-1}k^{-1}$, 由于 K 是正规子群, 有 $hkh^{-1} \in K$, 从而 $hkh^{-1}k^{-1} \in K$. 同理有 $hkh^{-1}k^{-1} \in H$, 由条件 (1) 知

$$hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = \{e\}.$$

从而 $hk = kh$ 对任意 $h \in H, k \in K$ 成立. 这保证了 f 是群同态.

条件 (2) 保证了 f 是满射, 下证 f 是单射. 考虑

$$\ker f = \{(h, k) \mid hk = e\} = \{(h, k) \mid h = k^{-1}\} = \{(e, e)\}.$$

最后一个单号用到了条件 (3).

“仅当” 部分: 我们只需注意到 $H \simeq (H, e_K) \subset H \times K$ 以及 $K \simeq (e_H, K) \subset H \times K$. □

例子. 将循环群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 记作 C_n , 我们证明 $C_6 \simeq C_2 \times C_3$. 除去直接验证, 我们来看一个更加 “内蕴” 的方法. 取 C_6 的 2 阶子群 $H \simeq C_2$, 以及 3 阶子群 $K \simeq C_3$. 我们有 $H \cap K = \{0\}$, 且它们均为正规子群, 这保证了

$$H \times K \rightarrow C_6$$

是单射. 而 $|H \times K| = 6 = |C_6|$ 保证了这是满射.

1.4 作业一

练习. 计算下列 S_6 中的元素的乘积. 其中 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

◇ $\sigma \cdot \tau$.

◇ $\sigma \cdot \tau \cdot \sigma^{-1}$.

练习. 列出 S_4 的所有子群, 并指出哪些是正规子群.

练习. 对群 G 中的任意元素 g, h , 证明 $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

练习. 分类 $(\mathbb{Z}, +)$ 的所有子群.

练习. 构造同构 $f: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

练习. D_n 是二面体群, 计算 $|D_n|$ 并判断 D_n 是否为 $Abel$ 群, 给出论证.

练习. 对给定素数 p , 群 $G = GL(n, \mathbb{F}_p)$. 考虑 G 的如下子集

◇ B 是 G 中上三角矩阵的全体.

◇ W 是每行每列有且仅有一个 1, 其余位置是 0 的方阵全体. (请说明为什么 W 是 G 的子集)

◇ H 是每行每列有且仅有一个位置非零, 其余位置是 0 的方阵全体. (请说明为什么 H 是 G 的子集)

◇ T 是 G 中的对角阵全体.

◇ U 是 G 中对角线都是 1 的上三角矩阵全体.



◇ D 是 G 中纯量矩阵全体, 即 $D = \{\lambda I_n \mid \lambda \neq 0\}$.

◇ $SL(n, \mathbb{F}_q)$ 是 G 中行列式等于 1 的矩阵全体.

请完成以下证明或者计算:

1. 证明以上子集都是 G 的子群.
2. 判断这些子群和 G 本身是不是 $Abel$ 群.
3. 求这些子群和 G 的阶数.
4. 判断哪些子群是 G 的正规子群.
5. 对于有严格包含关系的子群, 判断小的群是否是大的群的正规子群.

练习. 判断 $GL(2, \mathbb{F}_2)$ 是否与 S_3 同构, 给出论证.

练习. 对群 G , H 是其子群, 完成如下问题:

- ◇ 给出右 H -陪集的定义. 证明右 H -陪集数量等于左 H -陪集数量 (假设有限).
- ◇ 证明 H 是正规子群当且仅当对任意 $g \in G$ 都有 $gH = Hg$.
- ◇ 左 H -陪集的数量称为 H 在 G 中的指数 (*index*), 记作 $[G : H]$. 证明若 $[G : H] = 2$, 则 H 为正规子群.

我们下面需要用到所谓半群的概念. 集合 S 和运算 $\cdot : S \times S \rightarrow S$ 构成的对 (S, \cdot) 称为半群 (semi group), 若 $\cdot : S \times S \rightarrow S$ 满足结合律.

练习. G 是所有秩小于等于 r 的 $n \times n$ 矩阵构成的集合. 证明 G 关于矩阵乘法构成半群.

练习. 对半群 G , 假设:

1. 存在左单位. 即存在 $e \in G$ 对任意 $a \in G$, 都有 $ea = a$;
2. 存在左逆. 即对任意 $a \in G$, 存在 $a^{-1} \in G$ 使得 $a^{-1}a = e$.

练习. 令 $G = \{(a, b) \mid a \neq 0\}$, 定义运算

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) \cdot (c, d) &\longmapsto (ac, ad + b). \end{aligned}$$

证明 (G, \cdot) 是群.

练习. 设 G 是偶数阶群, 证明 $x^2 = e$ 的解数也是偶数.

练习. 对群 G , $a, b \in G$. 若有 $a^5 = e$, $a^3b = ba^3$, 求证 $ab = ba$.

练习. 证明 $(\mathbb{R}, +)$ 与 $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ 同构.

练习. 对有限群 G , $H \subsetneq G$ 是真子群. 证明

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

注记. 对于无限群, G 可能等于某个子群的全体共轭的并.

第二章 群作用

研究群的另一种方法是研究其在一些对象上的作用, 这也是群表示的观点.

2.1 群作用的定义与例子

定义 2.1.1. 对于集合 X , 群 G 在 X 上作用 (group action) 是指二元运算

$$\begin{aligned}\varphi: G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

满足下两条条件

1. 对任意 $g, h \in G$ 及 $x \in X$, 有 $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$;
2. 对于单位元 $e \in G$, 有 $e \cdot x = x$.

注记. 注意, 上面的作用有时也被称为是左作用, 类似的我们也可以定义右作用, 但实际上左作用和右作用是等价的.

例子. 最简单的例子是考虑 $X = G$, 此时群作用就是群 G 上的乘法. 这个作用被称为左乘作用. 类似的我们可以定义右乘作用

$$\begin{aligned}G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g * x = xg^{-1}.\end{aligned}$$

我们可以验证结合律, 即对任意 $g, h \in G$ 及 $x \in X$ 有

$$(gh) * x = x(gh)^{-1} = xh^{-1}g^{-1} = g * (xh^{-1}) = g * (h * x).$$

注记. 重要的一点是, 如果我们简单定义 $g * x = xg$, 此时作用没有“结合律”.

例子. 现有 $G \curvearrowright X$, 希望从中得到一些新的群作用.

- (1) 限制: $H \subset G$ 是子群, 则 $h = g_1 \in H \subset G$, 我们可定义

$$h \cdot x := g_1 \cdot x$$

作为 G 在 X 上的作用.

- (2) 定义幂集 $2^X = \{X \text{ 所有子集}\}$, 对任意 $A \subset X$, 即 $A \in 2^X$, 可定义

$$g \cdot A := \{ga \mid a \in A\}.$$

定义 2.1.2. 取 $X = G$, 共轭作用 (conjugation) 是群作用

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto gxg^{-1}. \end{aligned}$$

注记. 共轭作用的另一看法是 $G \times G$ 作用在 G 上, 然后限制在子群 $G \simeq \{(g, g) \mid g \in G\}$ 上得到的群作用.

例子. 考虑置换群 $G = S_n$, 集合 $X = [n] := \{1, 2, \dots, n\}$, 有群作用

$$\begin{aligned} S_n \times [n] &\longrightarrow [n] \\ (\sigma, i) &\longmapsto \sigma(i) \end{aligned}$$

对于更一般的集合 X , 我们也可以考虑类似的置换作用, 即 X 上的对称群.

定义 2.1.3. 令 $S_X = \{f: X \rightarrow X \text{ 双射}\}$, 在映射的复合下构成群. 有群作用

$$\begin{aligned} S_X \times X &\longrightarrow X \\ (f, x) &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

注记. 给定一个群作用 $G \curvearrowright X$, 可以定义映射

$$\begin{aligned} \varphi: G &\longmapsto S_X \\ g &\longmapsto (m_g: x \rightarrow g \cdot x) \end{aligned}$$

从 m_g 是双射 (因为有逆映射 $m_{g^{-1}}$) 知 φ 是良定义映射. 由群作用的结合律知 $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$, 由群作用的单位率知 $m_e = \text{Id}$. 反过来, 如果有群同态 $\varphi: G \rightarrow S_X$, 从而可以定义群作用

$$g \cdot x = (\varphi(g))x$$

定义 2.1.4. 对于域 F (F 通常是 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$), 设 X 为 F 上 n 维线性空间. G 作用于 X , 且满足对任意 $\lambda \in F, v, w \in X$ 有

1. $g(v + w) = g(v) + g(w)$;
- (2) $g(\lambda v) = \lambda g(v)$.

则 $\varphi: G \rightarrow S_X$, 有 $\text{im } \varphi \subset \text{GL}(X)$, 这样的作用称为 G 的线性表示 (linear representation).

例子. 考虑 $S_n \curvearrowright [n]$, 取 \mathbb{R}^n 上一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 我们可以定义

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_{\sigma(i)}.$$

我们有群同态 $\varphi: S_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$. 定义符号映射

$$\text{sgn}: S_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^\times,$$

有 $\text{im}(S_n) = \{\pm 1\}$, 定义交错群 (alternative group) $A_n := \ker(\text{sgn})$. 可以说明 A_n 是由所有偶置换构成的子群 (考虑置换矩阵的行列式).

2.2 轨道与计数公式

假设群 G 作用在集合 X 上, 我们可以定义自然的等价关系

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G, gx_1 = x_2.$$

此等价关系的等价类被称为 G 作用的**轨道** (orbit). 对任意 $x \in X$, 令 $O_x := \{gx \mid g \in G\}$. 记

$$G \backslash X = \{O_x \mid x \in X\}.$$

进而有分划

$$X = \coprod_{O_x \in G \backslash X} O_x.$$

当 $|X| < +\infty$ 时, 我们有 $|X| = |O_1| + \cdots + |O_n|$, 其中 $n = |G \backslash X|$.

定义 2.2.1. 群作用 $G \curvearrowright X$ 称为**可迁** (transitive), 若轨道数为 1.

例子. $H \subset G$ 是子群, 定义 $H \curvearrowright G$ 为 $h * g := gh^{-1}$. 对任意 $g \in G$, 有

$$O_g = \{h * g \mid h \in H\} = \{gh^{-1} \mid h \in H\} = gH.$$

即子群右作用 (这也解释为什么商要写在右边) 的轨道是左 H 陪集

$$G/H = \{g_1H, \dots, g_nH\}.$$

例子. 若 $H \subset G$ 是正规子群, 则 $G \curvearrowright G/H$ 的作用为

$$\begin{aligned} G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ g * (g'H) &\longmapsto (gg')H, \end{aligned}$$

这是一个可迁作用.

定义 2.2.2. 对 $G \curvearrowright X$, 任意 $x \in X$, 定义

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\},$$

称为 x 的**稳定化子** (stabilizer), 其是 G 的子群。

例子. $G \curvearrowright G/H$ 上 eH 的稳定化子为 H .

定理 2.2.3. 作用 $G \curvearrowright X$ 可迁, 则有 G 作用同构 (给定 x)

$$\begin{aligned} f: G/G_x &\longrightarrow X \\ gG_x &\longmapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

命题 2.2.4. 对任意 $g \in G, x \in X$ 有 $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.

回忆对于群作用 $G \curvearrowright X$, 我们有

(1) $X = \coprod_{O \in G \backslash X} O$, 其中 $G \backslash X = \{\text{轨道的集合}\}$;

(2) 可迁作用, 有 $G/G_x \xrightarrow{\sim} O$ (g 作用同构), $\forall x \in O$, 其中 $G_x = \{g \mid gx = g\}$ 是 x 的稳定化子.

(3) $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.

通过 (1) (2), 即 $X = \coprod_{i=1}^n O_i$, 我们能得到计数公式

$$|X| = |O_1| + \cdots + |O_n|$$

$$|O| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

例子. 考虑正四面体 $\Omega = ABCD$, 设

$$G = \{\mathbb{R}^3 \text{ 旋转反射, 将 } \Omega \text{ 映到 } \Omega\} = \Omega \text{ 的对称群}.$$

注意到 $G \curvearrowright \{A, B, C, D\}$ 作用可迁. 且对任意一个顶点, 稳定化子都是二面体群 D_3 , 从而有 $|G| = 4 \times 6 = 24$.

定义 2.2.5. 对于素数 p , 若群 G 满足 $|G| = p^s$, $s \geq 1$, 则称 G 为 p 群 (p -group).

命题 2.2.6. 对于 p 群 G , 我们有

(1) 若 $|G| = p$, 则对任意 $a \in G \setminus \{e\}$, 有 $G = \langle a \rangle$.

(2) 若 $|G| = p^2$, G 是交换群.

证明: 我们考虑 $G \curvearrowright X = G$ 是共轭作用, 有如下事实

(1) $ag = ga \Leftrightarrow g \in G_a$;

(2) a 与 G 中元素均交换 $\Leftrightarrow G_a = a \Leftrightarrow O_a = a$.

(3) 定义 $C := \{a \in G \mid ag = ga, \forall g \in G\}$, 称为群 G 的中心 (center).

注意到 $p \mid \sum_{i=1}^n |O_i|$, 且对任意 i , 有 $|O_i| = 1, p, p^2$. 不妨 $O_1 = \{e\}$, 则存在 $i \geq 2$ 使得 $|O_i| = 1$, 即 p 群 G 的中心非平凡. 从而 $|G/C| = 1$ 或 p , 使用如下引理即得结论. \square

引理 2.2.7. 若 C 是 G 的中心, 且 G/C 是循环群, 则有 $G = C$.

证明: 假设 $G = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} a^i C$, 对任意 $b, c \in C$, 我们有

$$(a^i b)(a^j c) = a^{i+j} bc = a^{i+j} cb = (a^j c)(a^i b)$$

从而知 $G = C$. \square

练习. 分类 p^3 阶群.

2.3 Sylow 定理

定义 2.3.1. 设 $|G| = p^s m$, 其中 $s \geq 1$ 且 $p \nmid m$. 若 H 是 G 的子群, 且 $|H| = p^s$, 称 H 是 Sylow p 子群 (Sylow p -subgroup).

定理 2.3.2 (Sylow 定理). 对于群 G

(1) 若 $p \mid |G|$, 则 G 中存在 Sylow p 子群, 且它们两两共轭;

(2) 若 H 是 G 的 p 子群, 则存在 Sylow p 子群 H' 满足 $H \subset H'$;

(3) 记 $a_p = \#\{\text{Sylow } p \text{ 子群}\}$, 有 $a_p | m$ 且 $a_p \equiv 1 \pmod{p}$.

例子. 考虑 \mathbb{F}_p 上的一般线性群 $\text{GL}(n, \mathbb{F}_p)$, 我们有

$$\begin{aligned} |G| &= (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}) \\ &= p^{\frac{n(n-1)}{2}} (p^n - 1) \cdots (p - 1). \end{aligned}$$

即 $|G| = p^{\frac{n(n-1)}{2}} m$, 其中 $p \nmid m$. 考虑 $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$ 是由对角线为 1 的上三角矩阵构成的子群, 满足 $|U| = p^{\frac{n(n-1)}{2}}$, 则 U 是 G 的 Sylow p 子群.

我们先证明如下引理

引理 2.3.3. $H \subset G$ 是子群, G 中有 Sylow p 子群 U . 则 $\exists g \in G$ 使得 $H \cap (gUg^{-1})$ 是 H 的 Sylow p 子群.

证明: 考虑群作用 $G \curvearrowright G/U =: X$, 记陪集中元素 U 为 x . 有此作用可迁并且 $G_x = U$, $G_{gx} = gUg^{-1}$. 考虑轨道分解

$$G = \coprod O_i \Leftrightarrow |X| = |O_1| + \cdots + |O_n|.$$

由于 U 是 Sylow p 子群, 则有 $p \nmid |X|$, 从而存在 i 使得 $p \nmid |O_i|$. 任取 $gU \in O_i$, 有

$$(1) \quad H_x = G_x \cap H = U \cap H;$$

$$(2) \quad H_{gx} = G_{gx} \cap H = (gUg^{-1}) \cap H.$$

我们有 $p \nmid |O_i| = \frac{|H|}{|H_{gU}|}$. 而 $|H_{gU}| | |U| = p^s$, 从而 H_{gU} 是 H 的 Sylow p 子群. □

注记. 可迁作用限制在子群上不一定可迁. 例如 $\mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$, 定义为 $a * b := a + b$. 限制在子群 $H = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 上, 不是可迁作用.

回忆上次课构造的 S_n 到 $\text{GL}(n, F)$ 的群同态. 对于一般的群 G , 我们也可以做类似的考虑 (正则表示 (regular representation)). 取线性空间

$$V = F \cdot G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in F \right\}.$$

作用 $G \curvearrowright V$ 定义为

$$h \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} a_g (hg).$$

定理 2.3.2 证明.

(1) 对于存在性, 考虑取 $F = \mathbb{F}_p$. 然后用上面的结果知 G 同构于 $\text{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ 的子群, 用引理及 $\text{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ 存在 Sylow p 子群, 知 G 有 Sylow p 子群. 对于共轭性, 在引理中取 H 是 G 的任意 Sylow p 子群, U 是另一个 Sylow p 子群, 由引理知 $H = gUg^{-1} \cap H$. 考虑元素个数即知 $H = gUg^{-1}$.

- (2) 在引理中取 H 为 p 子群, 再结合 Sylow p 子群的共轭还是 Sylow p 子群即得结论.
- (3) 设 $X = \{G \text{ 中所有 Sylow } p \text{ 子群}\}$. 考虑 $G \curvearrowright X$ 是共轭作用, 则由 (1) 这是可迁作用. 考虑 $x = U$, 则有 $G_x \supset U$, 知

$$a_p = |X| = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

结合

$$m = \frac{|G|}{|U|} = \frac{|G|}{|G_x|} \cdot \frac{|G_x|}{|U|}$$

知 $\frac{|G_x|}{|U|}$ 是整数. 设 $H \in X = \{H = H_1, \dots, H_{a_p}\}$, 我们将此共轭作用限制在 H 上. 利用下引理, 有如下事实, 从而得到 $a_p \equiv 1 \pmod{p}$

- ◇ $|X| = \sum_{i=1}^n |O_i|$, 且 $|O_i| \mid |H| = p^s$;
- ◇ $|O_i|$ 有且仅有 1 个为 1, 即 H 所在的轨道 $O = \{H\}$.

□

引理 2.3.4. 若 H 是 H' 的稳定化子 (即 H 的共轭作用不改变 H'), 且 H, H' 均为 G 的 Sylow p 子群, 则有 $H = H'$.

证明: 定义 H' 的正规化子 (normalizer) 为

$$N_{H'} := G_{H'} = \{g \in G \mid gH'g^{-1} = H'\} \text{ (也即共轭作用的稳定化子)}.$$

则有 H' 是 $N_{H'}$ 的正规子群. 则有 $H, H' \subset N_{H'}$ 均为 Sylow p 子群, 运用 Sylow 定理 (定理 2.3.2), 知 H 与 H' 在 $N_{H'}$ 中共轭, 则有 $H = H'$. □

例子. 考虑 15 阶群 G , 有 Sylow 3 子群 $H \simeq C_3$, 且 $a_3 = 1$. 有 Sylow 5 子群 $K \simeq C_5$, 且 $a_5 = 1$. 这保证了 H, K 均为正规子群. 更多地, 有 $H \cap K = \{e\}$, 我们有 $G \simeq C_3 \times C_5$.

例子. 考虑 21 阶群 G , 结果稍有不同. H 是 Sylow 3 子群, 但 $a_3 = 1$ 或 7; K 是 Sylow 7 子群, 是正规子群. 如果 $a_3 = 1$, 则有同构 $G \simeq C_3 \times C_7$. 若 $a_3 = 7$, 那 G 是什么? 答案是所谓的半直积 (semi-product), 若 G 存在, 则

- (1) $G = HK$;
- (2) $H \times K \rightarrow, (h, k) \mapsto hk$ 是双射 (不是群同态);
- (3) 构造群同态, 注意 $(h_1 k_1)(h_2 k_2) = h_1 h_2 (h_2^{-1} k_1 h_2) k_2$, 这与 H 在 K 上作用有关.

证明: 我们希望找到 G 中的乘法使得双射

$$\begin{aligned} \varphi: H \times K &\longrightarrow G \\ (h, k) &\longmapsto hk \end{aligned}$$

是群同构. 考虑 $g_1 = h_1 k_1, g_2 = h_2 k_2$, 此时有

$$g_1 g_2 = h_1 k_1 h_2 k_2 = h_1 h_2 (h_2^{-1} k_1 h_2) k_2.$$

由于 K 是 G 的正规子群, 我们知道 H 在 K 上有共轭作用, 即 $h * k = h k h^{-1}$. 这诱导了群同态 $H \rightarrow S_K$, 由此有群同态 $H \xrightarrow{\sigma} \text{Aut}(K) = \{f: K \rightarrow K \text{ 同构}\}$. 此时可以将 G 的群结构定义为

$$(h_1 k_1) \cdot (h_2 k_2) := (h_1 h_2) \cdot (\sigma(h_2^{-1})(k_1) k_2).$$

□



注记. 更一般地, 除了共轭作用 σ 可以这样定义乘法, 对于任意从 H 到 K 自同构群的同态 $\sigma: H \rightarrow \text{Aut}(K)$, 都能按照上式定义 $H \times K$ 的群结构. 这样得到的群记作 $H \rtimes_{\sigma} K$, 称为 H, K 关于 σ 的半直积.

2.4 作业二

练习. S_4 在 $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 有多少种不同的作用?

练习. 证明 S_6 不能传递地作用在 $[7]$ 上. (S_7 是否能传递地作用在 $[8]$ 上呢?)

练习. 假设取逆映射是群 G 的一个自同构, 证明 G 是交换群.

练习. 假设 G 是由实值函数 $f = \frac{1}{x}$ 和 $g = \frac{x-1}{x}$ 由函数复合生成的群, 证明 G 同构于 S_3 .

练习. 分类 $D_n, n \geq 3$ 时的所有子群与正规子群.

练习. 通过考虑 $G = \text{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ 在 $(\mathbb{F}_2)^2$ 上的作用来证明 G 同构于 S_3 .

练习 (第二同构定理). 令 H 是 G 的一个正规子群, K 是 G 的一个子群, 证明:

1. HK 是 G 的一个子群.
2. $H \cap K$ 是 K 的正规子群.
3. 有群同构 $HK/H \cong K/H \cap K$.

练习. 令 O_1, \dots, O_k 是有限群 G 的所有共轭类, 对于 $x_i \in O_i$ 定义中心化子 $C_i = \{g \in G \mid gx_i g^{-1} = x_i\}$. 记 $n_i = |C_i|$, 证明

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} = 1$$

练习. 如果定义 $P * A = PAP^t$, 这是否给出了 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ 在全体实 $n \times n$ 矩阵上的一个作用?

练习. 定义 $\text{PGL}(2, \mathbb{F}_3) = \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)/D$. 其中 $D = \{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{F}_3^\times\}$. 证明 $\text{PGL}(2, \mathbb{F}_3) \cong S_4$.

注记. 提示: 考虑 $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ 在 $(\mathbb{F}_3)^2$ 的所有一维子空间组成的集合上的作用.

练习. 令 G 是一个群, \mathbb{R}^\times 是 \mathbb{R} 中非零元素在域的乘法下组成的群. 考虑由 $G \rightarrow \mathbb{R}$ 的所有映射组成的 \mathbb{R} -线性空间 V . 假设 S 是由有限个 $G \rightarrow \mathbb{R}^\times$ 的群同态组成的集合. 证明 S 中的元素在 V 上线性无关.

练习. 证明有限群 G 是循环群当且仅当对任意正整数 n , G 至多只有一个阶数为 n 的子群.

练习 (半直积). 令 H, K 是两个群, $\phi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ 是群同态. 如下定义 $H \times K$ 上一个二元运算 $(h, k)(h', k') = (h\phi(k)(h'), kk')$. 验证这给出了 $H \times K$ 上的一个群结构, 证明 $\{e_H\} \times K$ 和 $H \times \{e_K\}$ 都是这个群的子群, 并且 $H \times \{e_K\}$ 是一个正规子群. 举出一个例子来说明 $\{e_H\} \times K$ 不是一个正规子群.

练习. 证明 $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ 同构于 $\text{GL}(2n, \mathbb{R})$ 的子群.

练习. 证明 \mathbb{C}^\times 同构于 \mathbb{C}/\mathbb{Z} . 其中 \mathbb{C}^\times 是 \mathbb{C} 中非零元素组成的乘法群. \mathbb{C} 和 \mathbb{Z} 是加法群.

练习 (思考题, 不用交). 证明 $\text{PGL}(2, \mathbb{F}_5) \cong S_5$.

练习 (思考题, 不用交, 在学完模论之后有更多工具可以做). 令 $G = \text{GL}(3, \mathbb{F}_2)$.

1. G 有多少共轭类?
2. 证明 G 只有两个大小为 24 的共轭类.



第三章 自由群与关系

3.1 自由群

定义 3.1.1. 集合 X , 由 X 生成的自由群 (free group) $F(X)$ 是集合

$$F(X) = \{e, x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid x_i \in X, a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \text{ 且相邻元素不同}\}.$$

其中 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ 称为以 X 为字母的单词 (word). 配备如下乘法

- (1) $e \cdot x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \cdot e = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$;
- (2) 对单词 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ 和 $y_1^{b_1} \cdots y_m^{b_m}$, 若 $x_n \neq y_1$, 则

$$(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}) \cdot (y_1^{b_1} \cdots y_m^{b_m}) := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \cdot y_1^{b_1} \cdots y_m^{b_m}.$$

若 $x_n = y_1$, 则 $x_n^{a_n} y_1^{b_1} = x_n^{a_n+b_1}$. 对 $n+m$ 使用归纳法定义.

例子. 若 $|X| = 1$, 则有 $F(X) \simeq \mathbb{Z}$. 若 $|X| \neq |Y|$, 则有 $F(X) \not\simeq F(Y)$.

命题 3.1.2. 自由群的子群是自由群.

定义 3.1.3. 群 G , 集合 $X \subset G$, 由 X 生成的子群 H 是所有包含 X 的子群的交. 具体来说, 是由元素和逆的乘积构成的集合.

定义 3.1.4. 群 G , 集合 $X \subset G$, 由 X 生成的正规子群 H 是所有包含 X 的子群的交. 具体来说, 是由元素和逆的共轭元的乘积的集合.

命题 3.1.5. 集合 X , 对任意映射 $f: X \rightarrow G$, 存在唯一群同态 $\bar{f}: F(X) \rightarrow G$, 使得如下图表交换

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & G \\
 & \searrow & \nearrow \bar{f} \\
 & F(X) &
 \end{array}$$

特别地, 若 X 为 G 的生成元集, 则有满同态 $F(X) \twoheadrightarrow G$. 我们有 $\ker \bar{f}$ 为 $F(X)$ 的正规子群, 若 R 为 $\ker \bar{f}$ 的生成元, 将 G 记作 $\langle X \mid R \rangle$, R 称为生成元 X 的关系 (relation).

例子. 对于二面体群 $D_n = \{n \text{ 个旋转}, n \text{ 个反射}\}$. 令 x 表示逆时针旋转 $\frac{2\pi}{n}$, y 表示沿任意一条对角线做反射. 则 $\{e, x, \cdots, x^{n-1}\}$ 是 n 个旋转, $\{y, xy, x^2y, \cdots, x^{n-1}y\}$ 是 n 个互不相同的. 考虑满射

$$f: F(\{x, y\}) \twoheadrightarrow G,$$

我们有 $\ker f \supset \{x^n, y^2, (yx)^2\}$ (因为可以直接验证 $xyx^{-1} = x^{-1}$, 即 $(yx)^2 = e$). $K = \langle x \rangle$ 是 n 阶正规子群, $H = \langle y \rangle$ 是 2 阶子群, 有 $HK = D_n$, $H \cap K = \{e\}$. 断言有

$$D_n = \langle x, y \mid x^n, y^2, (yx)^2 \rangle,$$

也可以写作 $D_n = \langle x, y \mid x^n = e, y^2 = e, yxy^{-1} = x^{n-1} \rangle$. 分为两步

◇ 由于 $\{x^n, y^2, (yx)^2\} \subset \ker f$, 因此有满射

$$f: D_n = \langle x, y \mid x^n, y^2, (yx)^2 \rangle \twoheadrightarrow D_n;$$

◇ 对任意单词 $g = x^{a_1}y^{b_1}\dots$, 使得 $f(g) = e$, 可以通过关系约化为 $g = x^{a_1}y^{b_1}$ (注意到 $yx = xy^{n-1}$, 因此可以一直交换). 要 $f(g) = e$, 只能 $n|a_1, 2|b_1$, 即证.

3.2 S_n 的循环分解

定义 3.2.1. 置换 $\sigma \in S_n$ 称为轮换 (cycle), 若存在 $\{i_1, \dots, i_m\} \subset [n]$ (此时 σ 记作 $\sigma = (i_1 \dots i_m)$) 使得

- ◇ $\sigma(i_j) = i_{j+1}, 1 \leq j \leq m-1$;
- ◇ $\sigma(i_m) = i_1$;
- ◇ $\sigma(i) = i$ 若 $i \notin \{i_1, \dots, i_m\}$.

我们称轮换 $\sigma = (i_1 \dots i_m)$ 和 $\tau = (j_1 \dots j_n)$ 不相交, 若 $\{i_1, \dots, i_m\} \cap \{j_1, \dots, j_n\} = \emptyset$. 有如下 S_n 的结构定理

定理 3.2.2. 任意 $\sigma \in S_n$, 存在互补相交的轮换 $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ 使得 $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$. 且 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ 由 σ 唯一决定.

例子. 对轮换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 有轮换分解 $\sigma = (2 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3)(1 \ 7)$. 从中看出, 这些分解事实上是 $\sigma \curvearrowright [n]$ 的轨道.

3.3 作业三

练习. 设 p 为素数, 求 $GL(n, \mathbb{F}_p)$ 中 Sylow- p 子群的个数.

练习. 如果 S_n 中元素 σ 的写成不相交的轮换的乘积 $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$, 其中长度为 m 的轮换个数为 λ_m . (这里 1-轮换 (i) 表示保持该元素 i 不变). 我们将 σ 的型记作 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}$, 并满足 $\sum_i i\lambda_i = n$. 请证明 S_n 中两个元素共轭当且仅当两者有相同的型

练习. 在 S_n 中, 计算具有型 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}$ 元素的个数, 并且证明如下公式:

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{\prod_{i=1}^n i^{\lambda_i} \lambda_i!} = 1$$

其中 λ 是多重指标 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = n, \lambda_i \geq 0$.



练习. 令 $n \geq 2$, 证明 (12) 和 $(123 \cdots n)$ 生成了 S_n .

练习. 令 $n \geq 3$. 证明 $(123), (124), \dots, (12n)$ 生成了 A_n .

练习. 证明 D_n 同构于由两个生成元 x, y 生成, 且满足如下关系的群。

$$x^n = y^2 = (xy)^2 = e$$

练习. 假设 p 和 q 是两个素数, 请分类 pq 阶的群。

练习. 请分类 12 阶群。

练习. G 在自身的共轭作用诱导了从 G 到 $\text{Aut } G$ 的群同态, 我们称这个群同态的像为内自同构. 证明内自同构群 $\text{Inn } G$ 是 $\text{Aut } G$ 的正规子群, 我们称商群 $\text{Out } G := \text{Aut } G / \text{Inn } G$ 为外自同构群。

注记. 注意: 有同学认为半直积的结构由到 H 到 $\text{Out}(G)$ 的 morphism 确定, 这个一般是不对的, 参见 <https://math.stackexchange.com/questions/1710620/do-homomorphisms-h-to-operatornameautk-that-coincide-at-the-level-of-o?rq=1>。

练习. 证明如果群 G 有有限指数的子群, 则 G 有有限指数的正规子群。

练习. 证明如果群 G 有两个有限指数的子群 H 和 K , 则 $H \cap K$ 也是 G 的有限指数子群。

练习. 循环群

1. 令 p 是一个素数, $G = \{x \in \mathbb{C} \mid \exists n \text{ 使得 } x^{p^n} = 1\}$. 则对于通常的乘法 G 构成了一个群, 并且 G 的每一个真子群都是有限阶循环群。
2. 证明 $(\mathbb{Q}, +)$ 不是循环群, 但是任何有限生成子群都是循环群。
3. 令 G 是一个非交换群, 证明 $\text{Aut}(G)$ 不是循环群, 特别的, 如果 $|\text{Aut}(G)|$ 是素数, 则 G 交换。

练习 (Burnside 引理). 假设有限群 G 作用在 S 上, 令 $F(g) = \{x \in S \mid gx = x\}$, 称作 g 的不动点集, 则轨道的个数为 $\frac{\sum_{g \in G} |F(g)|}{|G|}$.

练习. 假设 G 是一个 p -群, 其中 p 是素数, 证明 G 非正规子群的个数一定是 p 的倍数。

练习. 证明 $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ 没有指数有限的真子群。

练习. 令 G 是一个群, A 是其一个正规交换子群, 证明 G/A 可以通过共轭作用在 A 上, 从而得到 G/A 到 $\text{Aut } A$ 的群同态。

练习 (思考题, 不用交). 下面我们确定在正规子群和商群确定时如何分类群的结构。我们引入一些概念。

定义 3.3.1. 假设有群 G_1, G_2, G_3 的同态 $f: G_1 \rightarrow G_2, g: G_2 \rightarrow G_3$ 。我们称如下序列

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$$

在 G_2 处正合, 如果 $\text{Im}(f) = \ker(g)$ 。一个元素的群记作 1. 则称序列

$$1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \rightarrow 1$$

为短正合列, 如果序列在 G_1, G_2, G_3 处均正合, 即 f 是单同态, g 是满同态, 且 $\text{Im}(f) = \ker(g)$. 这个序列此时也称作 G_3 关于 G_1 的一个扩张. 另一个扩张

$$1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f'} G'_2 \xrightarrow{g'} G_3 \rightarrow 1$$

和已知的这个同构是指存在 $G_2 \rightarrow G'_2$ 的群同构 F , 使得有如下的图表中的每一个矩形都交换

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 & \xrightarrow{g} & G_3 & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow F & & \downarrow \text{id} & & \\ 1 & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{f'} & G'_2 & \xrightarrow{g'} & G_3 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

即 $f' = F \circ f$ 和 $g = g' \circ F$.

定义 3.3.2. 短正合列

$$1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \rightarrow 1$$

分裂是指存在同态 $i: G_3 \rightarrow G_2$ 使得 $g \circ i = \text{Id}_{G_3}$ 。

以下我们假设 G_1 是交换群, 其中的群运算记作 $+$, 单位元记作 0。则由以上习题知, 短正合列

$$1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \rightarrow 1$$

会诱导一个 G_3 在 G_1 上的共轭作用, 或者等价于有群同态 $\phi: G_3 \rightarrow \text{Aut}(G_1)$ 。我们现在分类这个同态 ϕ 给定的情况下的所有扩张。

1. 证明当短正合列分裂时, G_2 同构于 G_1 和 G_3 的半直积。
2. 取映射 $s: G_3 \rightarrow G_2$, 使得 $g \circ s = \text{Id}_{G_3}$ 。证明这样的 s 可以取到, 且若映射 $s': G_3 \rightarrow G_2$, 满足 $g \circ s' = \text{Id}_{G_3}$, 则存在映射 $y: G_3 \rightarrow G_1$, 使得 $s'(b) = y(b)s(b)$ 。我们称这样的 s 为截面。
3. 定义映射 $\alpha: G_1 \times G_3 \rightarrow G_2$ 为 $\alpha(a, b) = a \cdot s(b)$ 。证明这是一个双射。
4. 利用这一双射和 G_2 的群结构在集合 $G_1 \times G_3$ 上诱导一个群结构, 使得 α 是一个群同构。证明在这个群结构下存在映射 $c: G_3 \times G_3 \rightarrow G_1$ 使得 $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 + (\phi(b_1))(a_2) + c(b_1, b_2), b_1 b_2)$, 且 c 满足

$$(\phi(b_1))(c(b_2, b_3)) - c(b_1 b_2, b_3) + c(b_1, b_2 b_3) - c(b_1, b_2) = 0$$

对任意 $b_1, b_2, b_3 \in G_3$ 成立。

5. 假设给定 c 满足如上条件, 利用上述公式 $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 + (\phi(b_1))(a_2) + c(b_1, b_2), b_1 b_2)$ 在 $G_1 \times G_3$ 上定义运算, 证明这是一个群结构, 且做成 G_3 在 G_1 上的扩张。
6. 映射 $\{x: G_3 \times G_3 \rightarrow G_1\}$ 组成的集合有自然的交换群结构, 加法定义为 $(x_1 + x_2)(b_1, b_2) = x_1(b_1, b_2) + x_2(b_1, b_2)$ 。证明满足以上条件的 c 构成一个子群, 记作 $Z^2(G_3, G_1)$ 。



7. 不同的截面 s 的选取会对应 $Z^2(G_3, G_1)$ 的一个子群 $B^2(G_3, G_1)$. 具体来说, 请证明 s 换成 s' 时, 对应的 c' 满足 $c'(b_1, b_2) = c(b_1, b_2) + \phi(b_1)(y(b_2)) - y(b_1 b_2) + y(b_1)$. 证明形如 $x(b_1 b_2) = \phi(b_1)(y(b_2)) - y(b_1 b_2) + y(b_1)$ 的映射构成 $Z^2(G_3, G_1)$ 的一个子群, 记作 $B^2(G_3, G_1)$.
8. 证明 $Z^2(G_3, G_1)/B^2(G_3, G_1)$ 分类了所有固定 ϕ 的, G_3 关于 G_1 的扩张的同构类. 这个交换群记作 $H^2(G_3, G_1)$.
9. 证明如果 ϕ 平凡, 则 G_1 在 G_2 的中心里.
10. 假设 $G_1 = \mathbb{Z}$, $G_3 = C_p$ 是素数 p 阶循环群, ϕ 平凡. 证明 $H^2(C_p, \mathbb{Z}) \cong C_p$ 并找到对应的扩张.

3.4 S_n 的对换分解与 Coxeter 群

在上一节中, 我们看到 S_n 可以分解为不交轮换的复合, 事实上, 这与共轭类分类密切相关. 在这一节里面, 我们证明更强的结果, 即任意置换都能分解成若干“基础对换”的乘积.

例子. 考虑 S_3 中的元素 $(1\ 2\ 3)$ 和 $(1\ 3)$ (这是一个“非基础”对换), 我们有分解

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3) &= (1\ 3)(1\ 2) \\ (1\ 3) &= (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2) = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 3).\end{aligned}$$

定义 3.4.1. 对换 (2-轮换) $s_i = (i\ i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$ 被称为**基础对换**.

命题 3.4.2. 任意 $\sigma \in S_n$, 均可以写为 $\sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$.

证明有两种思路, 一是使用归纳法, 尝试多乘一些对换, 让 σ' 固定 n ; 二是考虑“逆序对”.

定义 3.4.3. 对 $\sigma \in S_n$, 集合 $\{(i, j) \in [n] \times [n] \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$ 中的元素称为逆序对. σ 的长度 $l(\sigma) =$ 逆序对的个数.

例子. 对于基础对换 S_i , 有 $l(S_i) = 1$.

命题 3.4.4. 对任意 $\sigma \in S_n$, 有 $l(\sigma) = l(\sigma^{-1})$.

$$\text{对 } w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ 我们有 } l(w) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

证明: 作业. □

命题 3.4.5. 对 $\sigma \in S_n$, 都有 $l(\sigma) + l(\sigma w) = \frac{n(n-1)}{2}$.

定理 3.4.6. 若 σ 的长度为 l , 则 $\sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$. 且若 $\sigma = s_{j_1} \cdots s_{j_m}$, 均有 $m \geq l$.

注记. 分解出的基础对换中, 可能有相同项, 且最短的分解不唯一, 参考前面的例子.

先证明如下引理:

引理 3.4.7. 对于 σs_k 的长度有

$$l(\sigma s_k) = \begin{cases} l(\sigma) + 1, & \sigma(k) < \sigma(k+1) \\ l(\sigma) - 1, & \sigma(k) > \sigma(k+1) \end{cases}$$

证明：只需注意到

$$\sigma s_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(k+1) & \sigma(k) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

□

定理 3.4.6 证明. 考虑对 $l = l(\sigma)$ 用归纳法, $l = 0$ 是成立. 假设对 $l(\sigma) = l$ 成立, 考虑 $l(\sigma) = l + 1 \geq 1$, 知存在 i 使得 $\sigma(i+1) > \sigma(i)$. 从而有 $l(\sigma s_i) = l + 1 - 1 = l$, 用归纳假设, 可设

$$\sigma s_i = s_{i_1} \cdots s_{i_l},$$

从而有 $\sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_l} s_i$.

□

可以发现基础对换满足一些关系:

- (1) 对 i , 有 $s_i^2 = e$;
- (2) 对 $|j - i| \geq 2$, 有 $s_i s_j = s_j s_i$;
- (3) 对 $|j - i| = 1$ 有 $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$, 也即 $(s_i s_j)^3 = e$.

事实上, 这也完全刻画了对称群.

定理 3.4.8. 对群 $G = \langle s_1, \cdots, s_n \mid s_i^2, (s_i s_j)^2, (s_i s_{i+1})^3 \rangle$, 有 $G \simeq S_n$.

有两种思路:

- ◇ 记 G 中生成元的关系为 R . 按定义, 我们有满射 $f: F(\{s_1, \cdots, s_{n-1}\}) \twoheadrightarrow S_n$, 我们想证明 $\ker f$ 由 R 中的元素生成. 即若 $s_{i_1} \cdots s_{i_k} = e$, 去证能通过关系 R 将左边调整为 e . 这个方法稍显繁琐;
- ◇ 使用下一节介绍一般的判断一组生成元和关系能否给出想要的群的算法.

3.5 Coxeter-Todd 算法

$G = \langle X \mid R \rangle$, 假设 $|X|, |R| < +\infty$ (称 G 有限表现 (finitely presented)). $H \subset G$ 是子群, 且 H 有限生成.

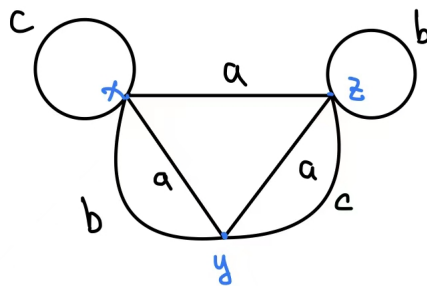
注记. 有限生成群的子群不一定有限生成. 例如考虑 $F(\{x, y\})$ 中 $x^n y x^{-n}$, $n \geq 1$ 生成的子群.

先研究 $G \curvearrowright G/H$, 我们希望从中反映出 G 的信息, 注意到

- (1) $G \curvearrowright G/H$ 的作用定义为“置换作用”, 即 $g(tH) = (gt)H$;
- (2) H 的生成元作用在陪集 eH 上是恒等元;
- (3) G 的关系 R 作用在 G/H 上是恒等元;
- (4) $G \curvearrowright G/H$ 可迁.

下面介绍 Coxeter-Todd 算法, 它通过 $G \curvearrowright G/H$ 的作用通过画点与点之间的路径表达, 来反映 $|G/H|$ 和 $G \rightarrow S_{G/H}$ 的信息. 我们从一例子来理解其中的思想.

例子. 取 $G = \langle a, b, c \mid a^3, b^2, c^2, cba \rangle$, 其子群 $H = \langle c \rangle$, 我们有 $|H| \leq 2$.



(参考上图理解) 考虑点 $x = eH$, 由于 $c \in eH$, 知 c 在 eH 上的作用就是映到自己. 设 $y = a \cdot (eH)$, $z = a^2 \cdot (eH)$, 我们知道有 $a \cdot z = x$ (由关系 $x^3 = e$). 令 $w = b \cdot y$, 由 $cba = e$ 知 $x = cba \cdot x = cb \cdot y = c \cdot w$, 则有 $w = c^{-1} \cdot x = x$, 即有 $x = by$.

令 $w' = cy$, 利用 $b = b^{-1}$ 有 $z = cba \cdot z = cb \cdot x = c \cdot y = w'$, 从而有 $z = c \cdot y$. 最后可得 $b \cdot z = z$. (这里其是应该画有向图更容易看清结构)

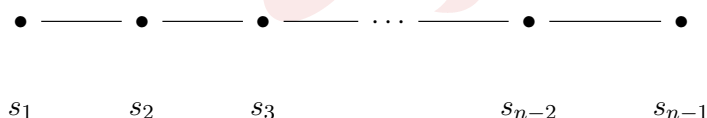
通过上述分析, 我们得到的有向图每个点都有进的 a, b, c -箭头, 也有出的 a, b, c -箭头, 从而 $G/H = \{x, y, z\}$, 即 $|G/H| = 3$. 且我们有群同态

$$\begin{aligned}
 \varphi: G &\longrightarrow S_3 \\
 a &\longmapsto (1\ 2\ 3) \\
 b &\longmapsto (1\ 2) \\
 c &\longmapsto (2\ 3).
 \end{aligned}$$

因此 $G \hookrightarrow S_3$, 而 $|G| = 3 \times 2$, 从而 $G \simeq S_3$.

下面考虑所谓的 **Coxeter 图** (Coxeter diagram) 定义的 Coxeter 群 (Coxeter 群), 我们证明

命题 3.5.1. 群 S_n 同构于由下图定义的群 G ,



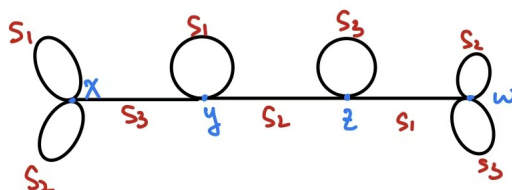
其中 $G = \langle s_i \mid s_i^2 = e, (s_i s_{i+1})^3 = e, (s_i s_j)^2 = e \rangle$.

证明: 使用数学归纳法. $n = 2$ 时, 有 $\langle s_1 \mid s_1^2 = e \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq S_2$.

考虑 $n \geq 3$, 假设对 $n-1$ 结论成立, 我们令 H 为 G 中由 s_1, \dots, s_{n-2} 生成的子群. 由于有满同态 $S_{n-1} \twoheadrightarrow H$, $G \twoheadrightarrow S_n$, 知 $|H| \leq (n-1)!$ 且 $|G| \geq n!$, 只需证 $|G/H| = n$. \square

我们以 S_4 为例操作一遍 Coxeter-Todd 算法.

例子. 令 $H = \langle s_1, s_2 \rangle$ 是 S_4 中有 $1, 2$ 基础对换生成的子群.



(参考上图) 则有 s_1, s_2 在 $x = eH$ 上是平凡作用, 我们令 $y = s_3 \cdot x, z = s_2 \cdot y, w = s_1 \cdot z$. 若设 $y' = s_1 y \Leftrightarrow y = s_1 y'$, 由条件知 $(s_3 s_1)^2 = e$, 从而

$$y' = s_3 s_1 s_3 s_1 y' = s_3 s_1 s_3 y = s_3 s_1 x = y.$$

类似由 $(s_3 s_2)^3 = e$ 可证 $s_3 = z$, 进而得到 $s_2 w = w = s_3 w$. 这告诉我们 G/H 恰好对应上图四个点 x, y, z, w , 即 $|G/H| = 4$.

我们总结一下 Coxeter-Todd 算法在做什么:

- (1) 从已知结点 i 出发, 对任意 $x \in X$, 通过群作用 $x \cdot i$ 及 $x^{-1} \cdot i$ 得到新的结点.
- (2) 由子群 H 和关系 R 得到某些结点相同.
- (3) 不会有新的结点, 即 R 作用平凡.
- (4) 得到 $S = \{\text{结点的集合}\}$, 有良定义群作用 $G \curvearrowright S$.

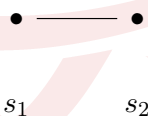
定理 3.5.2. 定义映射 $S \rightarrow G/H$, 将结点 s 映射到某条 e 到 s 的路径 $x_n x_{n-1} \cdots x_1 H$, 我们有该映射良定义且这是 G -集合的同构.

证明: 对于不同的路径 s_i, s_j , 得到的 G 在 G/H 上作用满足相同规律, 因此 $S \rightarrow G/H$ 良定义. G 在两边的作用均可迁, 令 $K = \text{Stab}_{eH}$, 有 $G/K \simeq S$ 且 $H \subset K$. 而由定义 $S \rightarrow G/H$ 是满射, 从而 $K = H$, 即有 G 作用同构

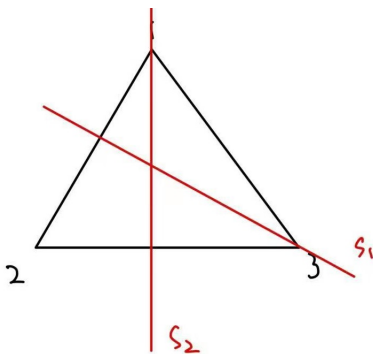
$$S \simeq G/H.$$

□

例子. 考虑 Coxeter 图



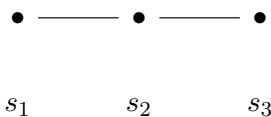
有 $G = S_3 \simeq D_3$. 我们想研究 s_1, s_2 在 D_3 中对应的是什么. 事实上, 它们均是固定一个点的反射.



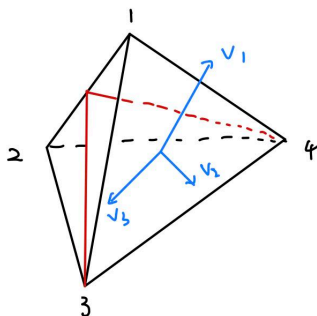
反射自然满足条件 $s_1^2 = s_2^2 = e$. 假设 s_1 与 s_2 对应反射轴的夹角为 θ , 则有 $s_1 s_2$ 等同于旋转角为 2θ 的旋转变换. 而此题中 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 因此有

$$(s_1 s_2)^3 = e.$$

对于更高阶的例子



我们有 $G = S_4$, S_4 是正四面体的对称群.



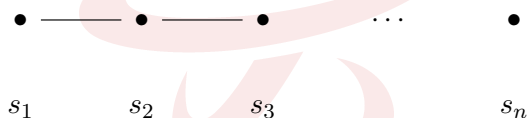
其中 s_1 映射到通过 3,4 和 1,2 中点的反射平面, s_2, s_3 类似. 我们假设 v_1, v_2, v_3 分别为其法向量, 有 $v_1 \parallel \vec{12}$, $v_2 \parallel \vec{23}$ 及 $v_3 \parallel \vec{34}$, 从而有

$$\angle(v_1, v_2) = \frac{\pi}{3}, \angle(v_2, v_3) = \frac{\pi}{3}, \angle(v_1, v_3) = \frac{\pi}{2}.$$

这恰好对应于 Coxeter 群中的关系 $(s_1 s_2)^3 = (s_2 s_3)^3 = e$ 以及 $(s_1 s_3)^2 = e$.

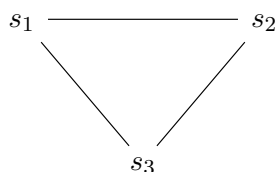
更高维的情形, 即 S_n , 我们也有类似的情况. 一般的 Coxeter 图思想也来源于此, 它考虑的是“反射生成的群”.

A_n 类型的图

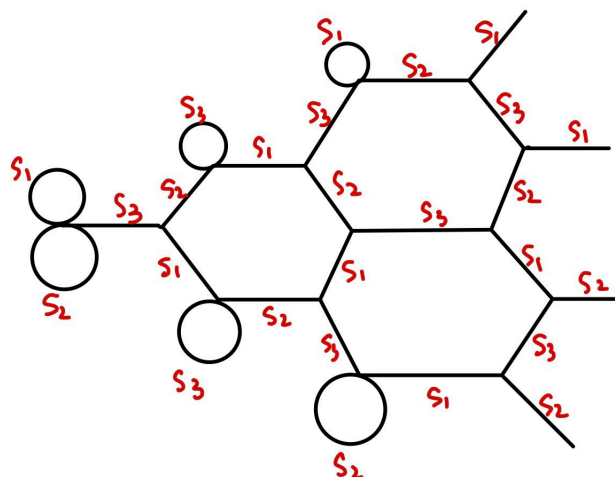


对应于置换群 S_{n+1} .

考虑如下 Coxeter 图



设其对应的 Coxeter 群 G , 取 $H = \langle s_1, s_2 \rangle$. 用 Coxeter-Todd 算法, 我们发现 $|G/H|$ 应该是无穷!



关于有限 Coxeter 群, 我们有如下分类结果: 其相应的 Coxeter 图只可能长成如下

- A_n ($n \geq 1$)



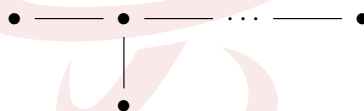
相应 Coxeter 群同构于置换群 S_{n+1} .

- BC_n ($n \geq 2$)

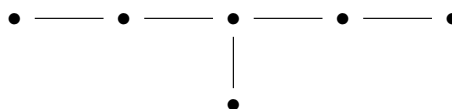


它是 n -正交形和 n -立方体的对称群.

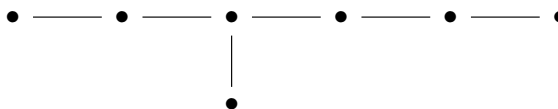
- D_n ($n \geq 4$)



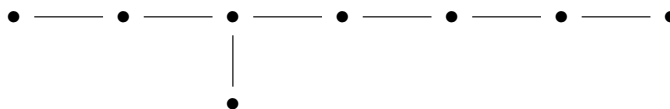
- E_6



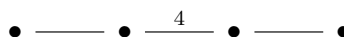
- E_7



- E_8

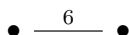


- F_4



它是正二十四胞体的对称群.

- G_2



它对应二面体群 D_6 , 或者说正六边形的对称群.

- H_3



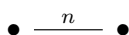
它对应正十二面体和正二十面体的对称群.

- H_4



它对应正一百二十胞体和正六百胞体的对称群.

- $I_2(n)$ ($n \neq 3, 4, 6, n \geq 5$)



它对应二面体群 D_n , 或者说正 n 边形的对称群.

3.6 作业四

练习. Artin Chapter 7, 11.4

练习. Artin Chapter 7, 11.5

练习. Artin Chapter 7, 11.6 任选一个小问做即可.

练习. 证明 $A_n, n \geq 5$ 是单群.

练习. 证明映射 $f: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$, 其中 $f(\sigma) = (-1)^{l(\sigma)}$ 是一个群同态, 并证明该群同态复合 $S_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{F})$ 的单嵌入就是行列式映射.

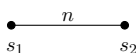
练习. 证明如下结论:

1. 将长度最长的 $\omega \in S_n$ 写做基础对换的乘积.
2. $l(\sigma) = l(\sigma^{-1})$
3. $l(\sigma) + l(\sigma\omega) = \binom{n}{2}$

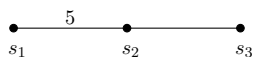
以下题目中 Coxeter diagram 定义的群是指由结点 s_i 生成的群, 满足如下关系

1. $s_i^2 = e$
2. $(s_i s_j)^2 = e$, 如果 s_i, s_j 之间没有连线
3. $(s_i s_j)^3 = e$, 如果 s_i, s_j 之间有连线, 且线上没有数字
4. $(s_i s_j)^m = e$, 如果 s_i, s_j 之间有连线, 且线上有数字 m .

练习. 考虑二面体群 D_n , 证明这个群和以下 $I_2(n)$ -diagram 定义的 Coxeter 群同构。即群 $D_n \cong \langle s_1, s_2 \mid s_1^2, s_2^2, (s_1 s_2)^n \rangle$.



练习. 考虑正十二面体的对称群。证明这个群和以下 H_3 diagram 定义出的 Coxeter 群同构。



试找出对应的三个反射的法向量。

练习. (对 $n = 3$ 是必做题, 对一般 n 是选做题, 可以不用写) \mathbb{R}^n 中的超立方体定义为 2^n 个点 $(\pm 1, \dots, \pm 1)$ 的凸包。令 $W(B_n)$ 是这个凸集的正交变换群。

1. $W(B_n)$ 的阶是多少?
2. 将 $W(B_n)$ 视作 S_{2n} 的如下子群: 令 $-[n] = \{-1, -2, -3, \dots, -n\}$. 那些 $-[n] \sqcup [n]$ 满足 $\sigma(-k) = -\sigma(k)$ 的变换组成的子群。
3. 证明 $W(B_n)$ 由 $s_n = (1, -1)$ and $s_i = (i, i+1)(-i, -i-1)$ for $1 \leq i \leq n-1$ 这 n 个阶为 2 的元素生成, 并且在表示 $\sigma \in W(B_n)$ 所需要最小的生成元的个数可以如下给出

$$\#\{(i, j) \in [n] \times [n] \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\} + \#\{(i, j) \in [n] \times [n] \mid i \leq j, \sigma(-i) > \sigma(j)\}$$

4. 证明生成元 s_i 满足 B_n 型图的 Coxeter 关系。



5. 证明由生成元 s_1, \dots, s_n 以及 B_n 型图中的关系给出的群同构于 $W(B_n)$ 。

练习 (自由积与 Ping-Pong 引理)。

定义 3.6.1 (自由积). 如果两个群 G 和 H 分别写成生成元和关系

$$G = \langle X \mid R \rangle, \quad H = \langle Y \mid S \rangle,$$

则 G 和 H 的自由积定义为 $G \star H = \langle X \sqcup Y \mid R \sqcup S \rangle$. 或者也可定义为 G 和 H 中元素组成的 words, 在定义 words 的乘法时类似于自由群的定义一样, 额外加入 G 和 H 中的乘法来消去相邻两个来自同一个群的元素。

1. 证明 Ping-Pong 引理. 设 G 有两个阶数不全为 2 的子群 H_1 和 H_2 , 且 H_1 和 H_2 生成群 G . 假设 G 在集合 A 上有作用, 且存在 A 的两个不相交的非空子集 A_1 和 A_2 , 使得 $\forall h_1 \in H_1 \setminus \{e\}, h_1(A_2) \subset A_1, \forall h_2 \in H_2 \setminus \{e\}, h_2(A_1) \subset A_2$. 则 G 同构于 $H_1 \star H_2$.
2. 证明由矩阵 $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 在 $SL(2, \mathbb{R})$ 中生成的子群同构于两个生成元的自由群. (提示: 考虑 \mathbb{R}^2 中子集 $\{(x, y) \mid |x| < |y|\}$ 以及 $\{(x, y) \mid |y| < |x|\}$)
3. 记 $SL(2, \mathbb{Z})$ 为行列式为 1 的 2 阶整数矩阵在矩阵乘法下组成的群, 定义 $PSL(2, \mathbb{Z})$ 为商群 $SL(2, \mathbb{Z})/\pm I$. 考虑元素 $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 来证明 $PSL(2, \mathbb{Z})$ 同构于 $C_3 \star C_2$. (提示: 考虑 $PSL(2, \mathbb{Z})$ 在 \mathbb{R}^2 中所有过原点的直线的集合上的作用, 分成斜率小于或等于零的部分以及其他。)

练习 (Affine Coxeter group, 选做题, 可以不交). 定义 \tilde{S}_n 如下. 考虑 $V = \{(x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i = 0\}$. 则 $V_{\mathbb{Z}} = V \cap \mathbb{Z}^n$ 在向量的加法下组成一个群. 对于 $\sigma \in S_n$ 和 $v = (v_1, \dots, v_n) \in V_{\mathbb{Z}}$. 考虑 V 上由变换 $T(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) + v$. 由这些变换在复合下组成的群记做 G .



1. 证明形如 $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) + v$ 的元素构成了 \tilde{S}_n 的一个同构于 $V_{\mathbb{Z}}$ 的正规子群. 形如 $T(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ 的元素构成了 \tilde{S}_n 的一个同构于 S_n 的子群. 证明 \tilde{S}_n 同构于 $V_{\mathbb{Z}}$ 和 S_n 的半直积.
2. 利用以上同构, 将 S_n 的生成元 s_1, \dots, s_{n-1} 作为 \tilde{S}_n 中的元素, 令 s_n 为如下变换 $s_n(x_1, \dots, x_n) = (x_n + 1, x_2, \dots, x_1 - 1)$. 证明 s_1, \dots, s_n 都是相对于某一仿射超平面的反射 (不一定过原点), 且是 \tilde{S}_n 的生成元. 利用法向量夹角找到这些反射之间的关系并画出对应的 *Coxeter diagram*. 记对应的 *Coxeter* 群为 G .
3. 证明对题目中给出的元素 T 写作以上生成元的最小个数为

$$l(T) = \sum_{\sigma(i) < \sigma(j)} |v_i - v_j| + \sum_{\sigma(i) > \sigma(j)} |v_i - v_j - 1|.$$

4. 考虑 $n = 3$ 和 \tilde{S}_3 在 V 上的作用. 证明 V 中有非平凡的稳定化子的点组成的集合是 V 上一些直线的并, 且这些直线的补集是不相交的等边三角形. 如果有两个三角形落在一条直线的两边, 则称这条直线将两个三角形分离. 取其中一个三角形 Δ , 证明 $l(T)$ 等于 Δ 与 $T(\Delta)$ 之间分离的直线的数目.
5. 对比 \tilde{S}_3 在这些三角形所在的集合上的作用, 以及 *Coxeter-Todd algorithm* 得到的 G 在 G 上的左乘作用, 证明 G 与 \tilde{S}_3 同构.

第四章 单群

4.1 $\mathrm{PSL}(2, F)$ 的单性

在这一节里 $\mathrm{PSL}(2, F)$ 的单性, 其中域 F 满足 $|F| \geq 4$.

命题 4.1.1.

$$C(\mathrm{GL}(2, F)) = \{\lambda I \mid \lambda \in F^\times\}$$

$$C(\mathrm{SL}(2, F)) = \{\pm I\}$$

在本节的最后, 我们将证明当 $|F| \geq 4$ 的时候, $\mathrm{SL}(2, F)$ 的正规子群要么形如 $C(\mathrm{SL}(2, F))$, 要么是 $\mathrm{SL}(2, F)$, 从而证明 $\mathrm{PSL}(2, F)$ 的单性. 为了证明我们的结果, 先介绍一些工具.

定义 4.1.2. 对于群 G , 其中 G 为 $\mathrm{GL}(2, F)$ 或 $\mathrm{SL}(2, F)$, 其形如

$$B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

的子群被称为 G 的波雷尔子群 (Borel subgroup).

定义 4.1.3. 对于 $\mathrm{GL}(2, F)$, 其外尔群 (Weyl group) 是如下两个元素组成的子群

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{I, w_0\}$$

类似的, 对于 $\mathrm{SL}(2, F)$, 其外尔群 (Weyl group) 是如下两个元素组成的子群

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{I, w_0\}$$

注记. 对于波雷尔子群 B , 我们通常记 $\bar{B} := w_0 B w_0^{-1}$, 经过计算不难发现其是形如

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

的子群.

命题 4.1.4. $\mathrm{SL}(2, F)$ 的波雷尔子群 B 其所有共轭子群的交是 $\mathrm{SL}(2, F)$ 的中心.

证明: 注意到

$$w_0 B w_0^{-1} \cap B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

并且

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a^{-1} - a \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

这意味着 $a = a^{-1}$, 即 $a = \pm 1$. □

命题 4.1.5 (Bruhat 分解). 对 $GL(2, F)$, 我们有如下分解:

$$GL(2, F) = \coprod_{w \in W} BwB = B \coprod Bw_0B$$

类似的, 对 $GL(2, F)$, 我们有如下分解

$$SL(2, F) = \coprod_{w \in W} BwB = B \coprod Bw_0B$$

证明: 这里我们对 $GL(2, F)$ 进行证明, $SL(2, F)$ 的情况类似. 任取 $A \in GL(2, F)$, 形如

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

如果 $c = 0$, 那么 $A \in B$, 这种情况是平凡的, 因此不妨假设 $c \neq 0$, 在这种情况下, 我们只需要寻找可逆的 $A_1, A_2 \in B$, 使得

$$A_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

即可. 然而我们知道左乘 (右乘) 一个可逆矩阵相当于是对其进行行 (列) 变换, 因此这实际上是在通过行列变换将 A 中的 a, d 两项消去, 这在 $c \neq 0$ 的情况下显然是可以做到的. □

推论 4.1.6. 对于群 G , 其中 G 为 $GL(2, F)$ 或 $SL(2, F)$, G 的波雷尔子群 B 是其极大子群.

证明: 任意 G 的子群 H 使得 B 真包含于 H , 那么存在 $A \in H \cap Bw_0B$, 即存在 $A_1, A_2 \in B$ 使得 $A = A_1w_0A_2 \in H$, 这意味着 $w_0 = A_1^{-1}AA_2^{-1} \in H$. 根据 Bruhat 分解我们可以直接得到 $G \subseteq H$, 从而任何真包含 B 的子群都是 G 自身, 即 B 是 G 的极大子群. □

下面再来考虑波雷尔子群的一类交换子群

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in F \right\} \subset B$$

显然我们有 $U \cong (F, +)$, 群同构由下面的映射给出

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$$

命题 4.1.7. U 是 B 的正规子群.

证明: 留作作业. □

命题 4.1.8. $Bw_0B = Bw_0U$, 且后一种写法唯一.

证明：存在性：我们只需要在 Bruhat 分解证明过程中行列变换最后一步将非零元化为 1 的时只进行行变换不进行列变换即可。

唯一性：如果 $A_1 w_0 A_2 = A_3 w_0 A_4$, 其中 $A_1, A_3 \in B, A_2, A_4 \in U$, 那么有

$$w_0^{-1} A_3^{-1} A_1 w_0 = A_4 A_2^{-1}$$

注意到左侧是一个下三角矩阵, 右侧是 U 中的元素, 即是主对角线全是 1 的上三角矩阵, 从而只能是单位阵. □

命题 4.1.9. $SL(2, F)$ 由如下元素生成

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \bar{U} = w_0 U w_0^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

证明：取 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, F)$. 我们分如下的一些情况考虑：

1. 假设 $b \neq 0$, 那么

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (d-1)/b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (a-1)/b & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 假设 $c \neq 0$, 那么

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (a-1)/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (d-1)/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 如果 $b = c = 0$, 那么 A 实际上形如 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$, 那么

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-a)/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

定义 4.1.10. 对于群 G , 其**交换子** (commutator)是指由形如 $aba^{-1}b^{-1}, a, b \in G$ 生成的子群, 被记做 $[G, G]$.

命题 4.1.11. 对于群 G 来说, $[G, G]$ 是其正规子群.

证明：注意到任取 $a, b, g \in G$, 我们有

$$g(aba^{-1}b^{-1})g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1} \in [G, G]$$

□

命题 4.1.12. 任取群同态 $\varphi: G \rightarrow H$, 如果 H 是交换群, 那么 φ 一定经过 $G/[G, G]$, 即存在 $\tilde{\varphi}: G/[G, G] \rightarrow H$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ & \searrow \pi \quad \nearrow \tilde{\varphi} & \\ & G/[G, G] & \end{array}$$

证明：只需要证明 $[G, G] \subseteq \ker \varphi$, 直接验证即可. \square

以上所有的结果我们都没有用到 $|F| \geq 4$, 从下面开始, 我们总是需要假设这个关键条件.

命题 4.1.13. 当 $|F| \geq 4$ 时, 我们有 $\mathrm{SL}(2, F) = [\mathrm{SL}(2, F), \mathrm{SL}(2, F)]$.

证明：由于 $\mathrm{SL}(2, F)$ 可以由 U, \bar{U} 生成, 所以只需要验证 $U \subset [\mathrm{SL}(2, F), \mathrm{SL}(2, F)]$ 即可. 注意到

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b(a^2 - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $|F| \geq 4$, 那么一定存在 a 使得 $a^2 \neq 1$, 从而

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset [\mathrm{SL}(2, F), \mathrm{SL}(2, F)]$$

并且由于 $[\mathrm{SL}(2, F), \mathrm{SL}(2, F)]$ 是正规子群, 从而 $\bar{U} \in [\mathrm{SL}(2, F), \mathrm{SL}(2, F)]$. \square

命题 4.1.14. 若 H 是 $\mathrm{SL}(2, F)$ 的正规子群, 其中 $|F| \geq 4$, 那么 $H \subset \{\pm I\}$ 或 $H = \mathrm{SL}(2, F)$.

证明：在证明中, 我们用 G 来指代 $\mathrm{SL}(2, F)$. 若 H 正规, 那么 $HB = BH$ 是 G 的包含 B 的子群, 而由于 B 是 G 的极大子群, 从而只有如下两种情况:

1. $HB = B$;
2. $HB = G$.

对于第一种情况, 我们可知 $H \subset B$, 并且由于 H 是正规子群, 那么 H 包含在 B 的所有共轭子群的交中, 从而 $H \subseteq \{\pm I\}$.

对于第二种情况, 此时我们断言 $HU = G$. 如果断言成立, 那么有:

$$\begin{aligned} G/H &\cong HU/H \\ &\cong U/H \cap U \end{aligned}$$

由于 U 是交换的, 从而根据上面的同构可知 G/H 也是交换的, 因此 $G = [G, G] \subset H$, 即 $G = H$.

现在我们在第二种情况的假设下证明 $HU = G$: 由于 G 由 U, \bar{U} 生成, 并且显然 $U \subset HU$, 所以只需要证明 $\bar{U} \subset HU$ 即可. 由 $HB = G$, 我们有 $w_0 \in HB$, 不妨记 $w_0 = hb, h \in H, b \in B$, 那么

$$\bar{U} = w_0 U w_0^{-1} = hb U b^{-1} h^{-1} \subset H U H = HU$$

\square

推论 4.1.15. 当 $|F| \geq 4$ 时, $\mathrm{PSL}(2, F)$ 是单群.

注记. 在习题中我们将考虑 $\mathrm{PSL}(n, F)$ 在 $n \geq 3$ 时的情况.



4.2 作业五

定义 4.2.1. 令 $G_1 = G/C(G)$ 以及 $G_{n+1} = G_n/C(G_n)$, 群 G 被称为幂零群 (nilpotent group), 如果存在 m 使得 G_m 为平凡群.

练习. 证明如下结论:

1. 证明 p -群有非平凡的中心, 从而是幂零的.
2. 证明有限群是幂零的当且仅当它是其 *syllow* 子群的直积.
3. 证明如果 G 是幂零的, 那么 G 的子群与商群也是幂零的.
4. U 是域 \mathbb{F} 上对角线是 1 的 $n \times n$ 上三角阵组成的群, 证明 U 是幂零的.
5. 证明有限群 G 是幂零的当且仅当它同构于 U 的某一个子群, 其中 U 的定义同上.
6. 证明如果 G 幂零并且 $[G, G] = G$, 则 G 是平凡群.

练习 ($\mathrm{PSL}(n, \mathbb{F})$ 的抛物子群). 令 $n \geq 3$ 以及 \mathbb{F} 是一个域, 记 $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$ 是所有行列式为 1 的矩阵.

1. 令 B 是 G 由上三角矩阵组成的子群, T 是 G 由对角矩阵组成的子群, N 是由每行每列只有一个非零元素的矩阵构成的子群, 证明
 - (a) 当 $|\mathbb{F}| \geq 3$ 的时候, T 是 N 的正规子群, 进而证明 N 是 T 的正规化子.
 - (b) G 由 B 和 N 生成.
2. 令 e_i 是 \mathbb{F}^n 中只有第 i 个分量为 1, 其他分量为 0 的列向量, 证明矩阵和向量的乘法诱导了群 $W = N/T$ 在集合 $\{\mathrm{span}(e_1), \dots, \mathrm{span}(e_n)\}$ 上的一个作用. 证明这个作用给出了 N/T 和 S_n 之间的一个同构 f .
3. 固定 $w \in S_n$, 取 $\tilde{w} \in N$ 是 $f^{-1}(w)$ 的一个代表元, 证明 $\tilde{w}B$, $B\tilde{w}$ and $B\tilde{w}B$ 不依赖于 \tilde{w} 的选取, 从而我们用 BwB 记 $B\tilde{w}B$. 证明如下分解:

$$G = \coprod_{w \in W} BwB.$$

4. $\pi = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ 是基本对换组成的集合, 证明 s_i 不在 B 的正规化子中, 并且 $s_i Bw \subset BwB \sqcup Bs_i wB$.
5. W_π 是 S_n 由 π 生成的子群, 证明

$$P_\pi = \coprod_{w \in W_\pi} BwB$$

是 G 的子群.

6. 证明 G 的任何一个包含 B 的子群 P 都是形如 P_π 的形式, 我们称其为抛物子群.
7. 计算双曲子群的个数.

练习. 假设 $n \geq 3$ 以及符号承上题, 令 U 是由对角线全为 1 的上三角矩阵组成的 G 的子群, 证明

1. 证明 G 的中心是

$$Z = \{\lambda I \mid \lambda^n = 1\}.$$

2. G 可以有所有于 U 共轭的子群生成.



3. $G = [G, G]$.
4. 所有与 B 共轭的子群的交是 G 的中心.
5. 令 H 是 G 的正规子群, 则 $H = Z$ 或 $HU = G$.
6. 令 H 是 G 的正规子群, 则要么 $H = Z$, 要么 $H = G$.
7. 证明 $\text{PSL}(n, \mathbb{F})$ 在 $n \geq 3$ 时是单的.

练习.

定义 4.2.2. 令 V 是域 \mathbb{F} 上的 n -维线性空间, 一个旗 (flag) 是如下 V 的子空间的链

$$F: \{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subseteq \cdots \subsetneq V_n = V$$

用 FL 记所有旗组成的集合.

定义 4.2.3. 令 $G = GL(V)$, 定义 G 在 FL 上的作用如下

$$g \cdot F: \{0\} = V_0 \subset g(V_1) \subset g(V_2) \cdots \subset V_n = V$$

对于旗 F , F 在上述作用下的稳定化子被记做 B , 称为 G 的波雷尔子群 (borel subgroup).

固定一个旗 F 以及其波雷尔子群 B , 证明有如下群同态:

$$B \rightarrow GL(V_n/V_{n-1}) \times GL(V_{n-1}/V_{n-2}) \cdots \times GL(V_1/V_0).$$

如果我们用 U 记如上群同态的核, 证明:

1. G 在 FL 上的作用是传递的, 因此不同的波雷尔子群之间是共轭的.
2. 将 G 在 FL 的作用限制到 B 上, 证明 B -轨道与 S_n 之间存在一一对应, 并且对于每个对应到 $w \in S_n$ 的轨道, 找到一个到 $\mathbb{F}^{l(w)}$ 的双射.
3. 证明 B 是 U 在 G 中的正规化子.
4. 证明 U 是幂零群.
5. U 是 B 的导出子群吗?
6. 定义偏旗是如下子空间的链

$$F: \{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \cdots \subsetneq V_m = V.$$

说明偏旗与抛物子群的关系.

练习. 令 \mathbb{F} 是一个域, 计算 $GL(n, \mathbb{F})$ 的导出子群.

第二部分

交换环论





第五章 环与理想

5.1 环的定义与例子

定义 5.1.1. 一个环 (ring), 是一个集合 R 有如下两种运算:

1. 加法运算 “+”, 使得 R 构成一个阿贝尔群 $(R, +)$, 其中的单位元被记做 0 ;
2. 乘法运算 “ \times ”, 使得 R 构成一个么半群, 即对于乘法运算存在单位元 1 以及满足结合律;
3. 乘法与加法运算之间存在分配律.

注记. 更严格的来说, 我们这里定义的是含有单位元的环, 这与一些教材上对环的定义不一样.

定义 5.1.2. 一个交换环 (commutative ring), 是指一个乘法运算交换的环.

注记. 在此之后, 当我们提及环时, 总指的是交换环.

例子. 一些交换环的例子:

- ◇ $(\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1)$;
- ◇ $(\mathbb{Q}, +, \times, 0, 1)$;
- ◇ 零环 $R = \{0\}$, 即只有一个元素组成的环.

命题 5.1.3. 在环 R 中, 有 $0 \times a = 0$ 对任意 $a \in R$ 成立.

证明: 首先由于 $0 + 0 = 0$, 那么任取 $a \in A$, 根据分配律可知

$$\begin{aligned} 0 \times a &= (0 + 0) \times a \\ &= 0 \times a + 0 \times a \end{aligned}$$

两侧同时加上 $-(0 \times a)$, 则有

$$0 = 0 \times a$$

□

命题 5.1.4. 如果在环 R 中满足 $1 = 0$, 那么 R 是零环.

证明: 任取 $a \in R$, 则 $a = 1 \times a = 0 \times a = 0$, 即 R 是零环.

□

定义 5.1.5. 一个环 R 中的元素 a 被称为单位 (unit), 如果 a 存在一个乘法逆 b , 即存在 $b \in R$ 使得 $ab = ba = 1$.

注记. 与处理群中的逆元类似, 不难证明一个元素 a 如果存在逆那么其逆一定唯一, 我们通常记做 a^{-1} .

定义 5.1.6. 给定一个环 R , 其上的一个**形式多项式** (formal polynomial), 是形如下式的元素

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0, a_i \in R, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

其中 x 被称为**单项式** (monomial), n 被称作多项式的次数, 记做 $\deg f$. 两个形式多项式

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 \end{aligned}$$

当且仅当 $m = n, a_i = b_i$ 对任意的 i 成立.

定义 5.1.7. 给定一个环 R , 其上的**多项式环** (polynomial ring)定义为

$$R[x] := \{f(x) \mid f(x) \text{ 是 } R \text{ 上的形式多项式}\}$$

其中给定 $f, g \in R[x]$, 加法乘法运算如下给出:

1. $f + g(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots;$
2. $fg(x) := a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_1 b_1 + a_2 b_0 + a_0 b_2)x^2 + \dots$

练习. 验证 $R[x]$ 构成了一个环.

注记. 如果在构造多项式环时取环 $R' = R[x]$, 其中 R 是一个环, 那么我们可以定义 R 上的二元多项式环 $R[x, y]$ 为 $R[x][y]$.

定义 5.1.8. 给定 $f(x), g(x) \in R[x]$, 如果存在 $q(x), r(x) \in R[x]$ 使得

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x)$$

其中 $\deg r < \deg f$, 那么我们称 $f(x)$ 带余式 $r(x)$ 除 $g(x)$, 这个过程被称为**带余除法** (division with remainder)

命题 5.1.9. 带余除法总可以进行, 只要除式 $f(x)$ 的首项 a_n 是 R 中的单位.

定义 5.1.10. 对于环 R , 如果 $R \setminus \{0\}$ 都是 R 中的单位, 那么 R 被称为一个**域** (field).

例子. 一些域的例子:

- ◇ \mathbb{Q} ;
- ◇ \mathbb{R} ;
- ◇ \mathbb{C} ;
- ◇ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 其中 p 是素数.

定义 5.1.11. 环 R 的一个**子环** (subring)指的是 R 的一个子集 R' , 满足对加、减、乘运算封闭, 并且环 R 的 $0, 1$ 在 R' 中.

5.2 环同态与理想

定义 5.2.1. 给定两个环 R_1, R_2 , 一个映射 $f : R_1 \rightarrow R_2$ 被称为**环同态** (ring homomorphism), 如果

1. f 保持加法乘法运算;
2. $f(1) = 1$.

注记. 注意, f 保持加法运算我们则一定有 $f(0) = 0$, 但是保持乘法运算不一定有 $f(1) = 1$ (为什么?), 因此我们需要在第二条中要求这件事情.

例子. 对于多项式环 $R[x]$, 我们定义其上的**赋值映射** (evaluation map) 为

$$\begin{aligned} e_s : R[x] &\rightarrow R \\ p(x) &\mapsto p(s) \end{aligned}$$

其中 $s \in R$.

命题 5.2.2 (替换准则 (substitution principle)). 给定环同态 $f : R_1 \rightarrow R_2$, 任取 $\alpha \in R_2$, 存在唯一的环同态

$$\Phi : R_1[x] \rightarrow R_2$$

使得 $\Phi(x) = \alpha$ 以及 $\Phi|_{R_1} = f$. 更一般地, 任取 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R_2$, 存在唯一的环同态 $\Phi : R_1[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow R_2$, 使得 $\Phi(x_i) = \alpha_i$ 以及 $\Phi|_{R_1} = f$

证明: 考虑如下的 Φ 即可

$$\begin{aligned} \Phi : R_1[x] &\rightarrow R_2 \\ a_n x^n + \dots + a_0 &\mapsto f(a_n) \alpha^n + \dots + f(a_0) \end{aligned}$$

□

定义 5.2.3. 一个环同态 f 被称为**环同构** (ring isomorphism), 如果其作为映射是双射.

定义 5.2.4. 给定环同态 $f : R_1 \rightarrow R_2$, 映射的**核** (kernel) 被定义为

$$\ker(f) = \{a \in R_1 \mid f(a) = 0_{R_2}\}$$

命题 5.2.5. 对于环同态 $f : R_1 \rightarrow R_2$ 的核 $\ker(f)$, 我们有如下性质:

1. $\ker(f)$ 对加法构成子群;
2. 任取 $s \in \ker(f), r \in R_1$, 有 $rs \in \ker(f)$;
3. 如果 f 是环同构, 那么 $\ker(f) = \{0_{R_1}\}$
4. 如果 $1_{R_1} \in \ker(f)$, 那么 $\ker(f) = R_1$.

证明: 显然.

□

注记. 上述命题表示 1 不一定在环同态 f 的核中, 即一般来说环同态的核不是子环, 这与我们在群的时候情况并不一样.

将环同态核的性质抽象出来, 我们如下的定义理想.

定义 5.2.6. 环 R 的一个子集 I 被称为 R 的**理想** (ideal), 如果

1. 对于加法 I 构成子群;
2. 任取 $s \in I, r \in R$, 有 $rs \in I$.

例子. 对于环 R 来说, 其存在两个平凡理想: R 本身与 $\{0\}$, 其他的理想被称为非平凡理想.

例子. 对环同态 $f: R_1 \rightarrow R_2$ 来说, $\ker(f)$ 是 R_1 的理想.

定义 5.2.7. 环 R 的一个理想 I 被称为**主理想** (principal ideal), 如果存在 $s \in R$, 使得

$$I = (s) := \{rs \mid r \in R\}$$

定义 5.2.8. 环 R 的一个理想 I 被称为**有限生成理想** (finitely generated ideal), 如果存在 $s_1, s_2, \dots, s_r \in R$, 使得

$$I = (s_1, \dots, s_r) := \left\{ \sum_{i=1}^r r_i s_i \mid r_i \in R \right\}$$

命题 5.2.9. 给定一个环 R 以及一个理想 I , 在集合 R/I 上存在唯一的环结构, 使得如下映射是环同态:

$$\begin{aligned} \pi: R &\rightarrow R/I \\ a &\mapsto a + I \end{aligned}$$

我们称 R/I 是一个**商环** (quotient ring).

证明: 首先如果只考虑 R 以及 I 上的加法结构, 显然 R/I 构成了一个商群, 因此我们只需要去定义 R/I 上的乘法结构即可. 注意到如果想要 π 是一个环同态, 我们只能如下定义我们的乘法结构: 任取 $a + I, b + I \in R/I$,

$$(a + I)(b + I) := ab + I$$

此时我们需要验证我们的定义不依赖于代表元的选取, 即如果

$$a_1 + I = a_2 + I$$

$$b_1 + I = b_2 + I$$

那么一定有

$$a_1 b_1 + I = a_2 b_2 + I$$

根据理想的定义, 我们有

$$(a_1 - a_2)b_1 \in I$$

$$a_2(b_1 - b_2) \in I$$

上面两式相加即有 $a_1 b_1 - a_2 b_2 \in I$, 即我们的乘法运算是良好定义的. □

定理 5.2.10 (第一同构定理). 如果 $f: R_1 \rightarrow R_2$ 是满的环同态, 那么 $R_1/I \cong R_2$, 其中 I 是 f 的核.



命题 5.2.11. 给定环同态 $f: R_1 \rightarrow R_2$ 以及 R_1 的一个理想 I , 我们记 $K = \ker(f)$, $\pi: R \rightarrow R/I$, 那么:

1. 如果 $I \subset K$, 那么存在唯一的映射 $\tilde{f}: \bar{R} := R_1/I \rightarrow R_2$, 使得 $\tilde{f} \circ \pi = f$.
2. $I = K$ 当且仅当上述映射 \tilde{f} 是一个同构.

例子. 考虑赋值映射 $e_2: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}$, 定义为 $e_2(p(x)) = p(2)$, $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$. 显然 $(x-2) \in \ker(e_2)$, 并且根据带余除法我们可知 $\mathbb{Q}[x]/(x-2) \cong \mathbb{Q}$, 从而由上述命题可知 $\ker(e_2) = (x-2)$ 是一个主理想.

定理 5.2.12 (对应定理). 给定满的环同态 $f: R_1 \rightarrow R_2$, 并记 $K = \ker(f)$, 那么我们有如下的一一对应:

$$\{R_1 \text{ 中包含 } K \text{ 的理想}\} \xrightarrow{1-1} \{R_2 \text{ 中的理想}\}$$

并且一一对应如下给出:

1. 如果 $K \subset I$, 那么其对应到 R_2 中的理想 $f(I)$;
2. 如果 \tilde{I} 是 R_2 中的理想, 那么 $f^{-1}(\tilde{I})$ 是 R_1 中包含 K 的理想.

5.3 一些理想的例子

例子. \mathbb{Z} 中所有的理想都是形如 $I = (a)$, $a \in \mathbb{Z}$ 的主理想. 假设 I 是 \mathbb{Z} 的一个理想, 我们选取 I 中有最小非零绝对值的元素 a , 那么任取 $b \in I$, 我们用 a 去对 b 做带余除法得到

$$b = am + r$$

其中 $|r| < a$, 然而由于 $b, am \in I$, 从而 $r \in I$, 根据我们对 a 的选取有 $r = 0$, 从而 $I = (a)$.

注记. 值得注意的是, 这里的证明成立只依赖于带余除法在 \mathbb{Z} 中成立这个事实, 因此在一个环中只要带余除法成立, 其所有的理想就一定是主理想.

例子. $\mathbb{C}[x]$ 中的所有的理想都是形如 $I = (f(x))$ 的主理想, 其中 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. 并且 $(f_1(x)) = (f_2(x))$ 当且仅当存在 $g(x), h(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x)g(x) \\ f_2(x) = f_1(x)h(x) \end{cases}$$

从上式我们可以看出 $g(x), h(x)$ 实际上是非零的零次多项式. 因此 $\mathbb{C}[x]$ 中所有不同的理想都形如 $(f(x))$, 其中 $f(x)$ 是首一多项式.

例子. 根据对应定理, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的所有理想一一对应于 \mathbb{Z} 中包含 (n) 的理想, 而 \mathbb{Z} 的一个理想 (a) 包含 (n) 当且仅当 $a \mid n$, 从而我们也分类了 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的所有理想.

例子. 考虑如下环同态:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C}[x, y] &\rightarrow \mathbb{C}[t] \\ x &\mapsto t \\ y &\mapsto t^2 \end{aligned}$$

并且 $\varphi|_{\mathbb{C}}$ 是恒同映射. 下面我们来确定由这个映射的核决定的理想 $\ker \varphi$. 首先我们注意到 $y - x^2 \in \ker \varphi$, 下面我们断言

$$\ker \varphi = (y - x^2)$$

任取 $g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, 将其视作 $\mathbb{C}[x][y]$ 中的元素, 用 $y - x^2$ 去对其做带余除法我们有¹

$$g(x, y) = (y - x^2)q(x, y) + r(x, y)$$

其中 $r(x, y)$ 视作 $\mathbb{C}[x][y]$ 中元素的次数小于一, 这意味着 $r(x, y) = r(x)$. 假设 $g(x, y) \in \ker \varphi$, 那么做带余除法之后得到的余式 $r(x)$ 也在 $\ker \varphi$ 中, 并且由于 $r(x)$ 只和 x 有关, 从而这意味着 $\varphi(r(x)) = \varphi(t) = 0$, 即 $r = 0$, 从而 $g(x, y) = (y - x^2)q(x, y)$, 这就证明了我们的断言.

注记. 根据对应定理, 我们可以直接看出 $\mathbb{C}[x, y]$ 中包含 $(y - x^2)$ 的所有不同理想都形如 $(y - x^2, f(x))$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{C}[x]$ 中的首一多项式. 之后我们会考虑 $\mathbb{C}[x, y]$ 中所有的理想的样子.

命题 5.3.1. 给定环 R 以及 $a, b \in R$, π 为典范的商映射, 那么有

$$\begin{aligned} R/(a, b) &\cong \{R/(a)\}/(\pi(b)) \\ &\cong \{R/(b)\}/(\pi(a)) \end{aligned}$$

注记. 给定环 R 的一个理想 I , 上述命题有时可以给出确定商环 R/I 结构的一个好办法.

定义 5.3.2. 高斯整数环 (Gauss integer ring) $\mathbb{Z}[i]$ 定义为

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

其中 i 是纯虚数.

例子. 不难发现 $(i - 2)$ 是 $\mathbb{Z}[i]$ 的一个理想, 下面我们来尝试说明 $\mathbb{Z}[i]/(i - 2)$ 的结构. 首先我们断言

$$\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$$

这个同构由如下的环同态给出

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}[x] &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto i \end{aligned}$$

并且 $\varphi|_{\mathbb{C}}$ 是恒同. 因此

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[i]/(i - 2) &\cong \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1, x - 2) \\ &\cong \{\mathbb{Z}[x]/(x - 2)\}/(x^2 + 1 + (x - 2)) \\ &\cong \mathbb{Z}/(2^2 + 1) \\ &\cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \end{aligned}$$

¹这是可以进行的, 因为将 $y - x^2$ 视作 $\mathbb{C}[x][y]$ 中的元素, 其首项系数在 $\mathbb{C}[x]$ 中是单位.



5.4 添加元素

下面我们来考虑一种比较有趣的构造,即如何在一个环 R 中“添加”新的元素.特别地,考虑一个由 R 上多项式决定的方程,其在 R 上没有根,如何向 R 中添加新的元素,使得这个在更大的环中这个方程存在根.

例子. 给定域 \mathbb{R} 上的一个多项式 $x^2 + 1$, 容易发现 $x^2 + 1 = 0$ 在 \mathbb{R} 中没有根, 我们该如何去寻找一个更大的环 R , 使得 \mathbb{R} 自然地嵌入在 R 中, 并且使得 $x^2 + 1 = 0$ 在 R 中有根呢? 显然 \mathbb{C} 是我们的一个选择, 但是我们采取如下更一般的构造: 考虑如下自然的嵌入

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$$

那么显然 $x^2 + 1 = 0$ 在 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ 中存在根, 因为 $\bar{x} := x + (x^2 + 1) \in \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ 满足 $(\bar{x})^2 + 1 = \bar{0} \in \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$. 实际上, 利用带余除法我们可以给出 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ 的更加显式的表达:

$$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) = \{a + b\bar{x} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

利用这种观点, 可以发现实际上我们构造的 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ 就是 $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{C}\}$.

例子. 类似的, 考虑二元域 \mathbb{F}_2 以及其上的多项式 $x^2 + x + 1$, 我们可以构造 $\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ 使得 $x^2 + x + 1 = 0$ 在其中存在根, 并且给出如下具体的表达

$$\{0, 1, x, x + 1\}$$

并且不难发现 $\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ 构成了一个四个元素的域.

例子. 实际上, 给定一般的环 R 以及其上的首一多项式 $f(x)$, 我们都可以仿照上述的办法去找到一个更大的环 R' 使得 R 自然地嵌入到 R' 中, 并且 $f(x)$ 在 R' 中存在一个根, 即考虑 $R' = R[x]/(f(x))$, 不难发现 $\bar{x} := x + (f(x)) \in R'$ 满足 $f(\bar{x}) = \bar{0} \in R'$. 同样利用带余除法², 对于 R' 我们有如下的一组 R 基³:

$$1, \bar{x}, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^{n-1}$$

其中 $n = \deg f$.

注记. 如果 $f(x)$ 不是首一的, 我们通常得不到什么好的结果, 比如考虑一个糟糕的例子: 在 $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 中考虑 $3x - 1$, 你无法在 $R[x]/(3x - 1)$ 中找到 $3x - 1 = 0$ 的根.

一般来说, 我们通过上述操作得到的 $R[x]/(f(x))$ 不一定是一个域, 那么对于一个环 R 来说, 什么时候商环 R/I 会是一个域呢? 我们实际上有如下的判据:

命题 5.4.1. F 是域当且仅当 F 只有两个理想, 即 (0) 和 F 本身.

证明: 首先, 如果 I 是 F 的一个非零理想, 那么任取 $a \in I$, 我们有 $1 = aa^{-1} \in I$, 即 $I = F$. 另一方面, 任取 $a \in F, a \neq 0$, 考虑 $(a) \subseteq F$, 由于 F 只有两个理想, 且 $(a) \neq 0$, 那么 $(a) = F$, 从而存在 $b \in F$ 使得 $ab = 1$, 即 a 可逆. \square

²这里要求 f 是首一的, 目的是为了能够进行带余除法.

³之后在学习模论的时候我们会更严格地定义这件事情, 在这里你可以仿照线性空间的基去理解, 即任取 $x \in R'$, 存在唯一的表达式 $x = a_1 + a_2\bar{x} + \dots + a_{n-1}\bar{x}^{n-1}$, 其中 $a_i \in R, i = 1, 2, \dots, n-1$.

利用上面的判据, 以及在本节最初关于理想的刻画, 我们可以直接看出:

例子. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是域, 其中 p 是素数.

例子. $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ 是域.

5.5 极大理想

定义 5.5.1. 环 R 的一个真理想 I 被称为**极大理想** (maximal ideal), 如果任何包含 I 的理想都是 R .

为了说明极大理想总是存在的, 我们需要 Zorn 引理, 而为了陈述这个技术性的引理, 我们需要引入偏序集这个概念.

定义 5.5.2. 给定一个集合 S , 其上的一个**偏序** (partial order) 是一个关系 $R \subseteq S \times S$, 如果 $(a, b) \in R$, 我们记作 $a \leq b$, 并且 R 满足

1. $a \leq a$;
2. 如果 $a \leq b$ 并且 $b \leq a$, 那么 $a = b$;
3. 如果 $a \leq b$ 并且 $b \leq c$, 那么 $a \leq c$.

带有偏序关系的一个集合被称为**偏序集** (partially ordered set).

定义 5.5.3. 偏序集 S 的一个子集 C 被称为一个**链** (chain), 如果任取 $a, b \in C$, 我们有 $a \leq b$ 或者 $b \leq a$.

定义 5.5.4. 偏序集 S 的一个链 C 称为有上界, 如果存在 $c \in S$ 使得任意 $a \in C$ 都有 $a \leq c$.

引理 5.5.5 (Zorn 引理). 如果偏序集 S 的每一条链都有上界, 那么 S 存在至少一个极大元.

命题 5.5.6. 对于环 R 来说, 极大理想总是存在的.

证明: 考虑集合 S 是由环 R 所有真理想组成的集合, 显然 S 非空, 并且包含关系是 S 上的一个偏序关系. 为了证明极大理想的存在性, 根据 Zorn 引理只需要对每一条由真理想组成的链, 其都存在上界即可. 给定链 $C = \{I_i\}_{i \in I}$, 考虑 $\tilde{I} = \bigcup_{i \in I} I_i$, 我们有如下事实:

1. \tilde{I} 是一个理想;
2. $\tilde{I} \neq R$, 这是因为 $1 \notin \tilde{I}$, 以及一个理想 $I = R$ 当且仅当 $1 \in I$.

从而 \tilde{I} 是 C 的一个上界, 从而根据 Zorn 引理可知极大理想存在. \square

命题 5.5.7. I 是 R 的极大理想当且仅当 R/I 是域.

例子. 对于任意 $a \in \mathbb{C}$, 我们有 $(x - a) \subseteq \mathbb{C}[x]$ 是一个极大理想. 这个事实可以通过考虑如下映射来得到

$$\begin{aligned} e_a : \mathbb{C}[x] &\rightarrow \mathbb{C} \\ p(t) &\mapsto p(a) \end{aligned}$$

实际上你不难验证 $\mathbb{C}[x]$ 的所有极大理想都是形如 $(x - a)$, $a \in \mathbb{C}$ 的样子, 即在集合上有如下的对应:

$$\{\mathbb{C}[x] \text{ 的所有极大理想} \} \xrightarrow{1-1} \mathbb{C}$$



例子. 考虑实值连续函数环 $R = C((a, b), \mathbb{R})$, 其中 (a, b) 是开区间, 不难发现任取 $a \in \mathbb{R}$, 如下集合构成了 R 的一个极大理想

$$I_a = \{f \in R \mid f(a) = 0\}$$

问题 5.5.8. $C((a, b), \mathbb{R})$ 的所有极大理想都是形如 I_a 的样子吗? 如果换成闭区间 $[a, b]$ 呢?

例子. 更一般的, 我们有如下的一一对应

$$\{\mathbb{C}[x, y] \text{ 的所有极大理想} \} \xrightarrow{1-1} \mathbb{C}^2$$

这是一个更加困难的事实, 被称为希尔伯特零点定理 (Hilbert's Nullstellensatz)⁴. 如果承认这个事实, 回顾我们之前的一个例子, 环同态

$$\varphi: \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[t]$$

$$x \mapsto t$$

$$y \mapsto t^2$$

给出了同构 $\mathbb{C}[x, y]/(x - y^2) \cong \mathbb{C}[t]$, 从而有如下的一一对应

$$\{\mathbb{C}[x, y]/(x - y^2) \text{ 的所有极大理想} \} \xrightarrow{1-1} \{\mathbb{C}[t] \text{ 的所有极大理想} \}$$

并且根据对应我们知道 $\mathbb{C}[t]$ 的极大理想 $(t - a)$ 会对应到 $\mathbb{C}[x, y]/(x - y^2)$ 中的极大理想 $(x - a, y - a^2)$, 从而 $\mathbb{C}[x, y]/(x - y^2)$ 的极大理想与 \mathbb{C}^2 中的一条抛物线上的点一一对应. 这意味着去研究 \mathbb{C}^2 中的一条曲线与研究 $\mathbb{C}[x, y]/(x - y^2)$ 的极大理想在某些程度上是一样的, 这也是代数几何的最初的想法.

5.6 作业六

练习. 对任意环 R , 证明存在唯一的环同态 $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow R$, 假设 $\phi = (m)$, $m \neq 0$, 则 m 被称作是环的特征. 证明整环的特征一定是素数, 并且证明有限域中元素的个数一定是其特征的幂次.

练习 (形式幂级数). 令 F 是一个域, $F[[x]]$ 是形式幂级数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$, $a_i \in F$ 组成的集合, 其上的环结构的定义与多项式环的类似.

1. 证明 $F[[x]]$ 是一个欧几里德整环, 其中对于 $f \in F[[x]]$, $\sigma(f) = i$ 是使得 $a_i \neq 0$ 的最小的 x^i 的次数.
2. 找出 $F[[x]]$ 的单位.
3. 找出 $F[[x]]$ 的所有理想.
4. 令 $F((x))$ 是全体洛朗级数 $f(x) = \sum_{i \geq n} a_i x^i$, $a_i \in F$ 组成的集合, 其上也有类似定义的环结构. 证明 $F((x))$ 是一个域.

练习. Artin Chapter 11, 3.8

练习. Artin Chapter 11, 3.9

⁴对于希尔伯特零点定理的证明, 将会在下学期给出证明.



练习 (分式域). 令 R 是一个整环, 考虑集合 $X = \{(a, b) \mid a, b \in R, b \neq 0\}$, 定义 X 上的关系为 $(a, b) \sim (c, d)$ 当且仅当 $ad = bc$.

1. 证明这是一个等价关系.
2. 用 a/b 来记 (a, b) 所在的等价类, 称其为分式, 全体分式的集合记做 $\text{Frac}(R)$, 并且存在一个自然的映射 $f: R \rightarrow \text{Frac}(R)$, 定义为 $a \mapsto a/1$. 在 $\text{Frac}(R)$ 上定义一个域结构, 并且证明 f 是一个单的环同态. 此时 $\text{Frac}(R)$ 称为 R 的分式域.
3. 证明如果有一个单的环同态 $R \rightarrow F$, 其中 F 是一个域, 那么这个同态一定经过 $\text{Frac}(R)$.
4. 令 F 是一个域, 证明 $\text{Frac}(F[[x]])$ 同构于 $F((x))$.

练习. Artin Chapter 11, 4.3

练习. 分类 $\mathbb{R}[x]$ 的所有极大理想与素理想.

练习. 证明 $\mathbb{Z}[\omega]$ 是欧几里德整环, 其中 $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$.

练习. 证明 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 是欧几里德整环.

练习. 证明 $\mathbb{C}[x, y]$ 不是主理想整环.

练习. 令 R, R' 是环, 在积 $R \times R'$ 上存在环结构, 定义为 $(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b')$ 以及 $(a, a')(b, b') = (ab, a'b')$. 这被称为 R 和 R' 的环的乘积.

1. $R \times R'$ 的单位元是什么?
2. 环 S 的一个元素 e 被称为幂等元, 如果 $e^2 = e$. 证明对于幂等元 e , 主理想 (e) 本身是一个环, 其单位元为 e .
3. 如果 e 是一个幂等元, 则 $1 - e$ 也是.
4. 证明 $(1, 0)$ 是一个幂等元.
5. 如果 e 是环 S 的一个幂等元, 证明 S 同构于 $(e) \times (1 - e)$
6. 证明 $R \times R'$ 素理想组成的集合与 R 素理想与 R' 素理想无交并组成的集合之间有一一对应.

练习. Artin, Chapter 11, 6.8

练习. Artin Chapter 11, 5.1

练习. 利用希尔伯特零点定理去分类 $\mathbb{C}[x, y]/(xy)$ 的所有极大理想.

练习. $(\sqrt{-3} + 2)$ 是否是 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 的极大理想? 为什么?

练习. Artin Chapter 11, 8.3

练习. Artin Chapter 11, 9.13

练习. 令 X 记闭区间 $[0, 1]$, R 是其上实值连续函数环.

1. 令 f_1, \dots, f_n 是 X 上没有公共零点的连续函数, 证明这些函数生成的理想是整个环 R .
2. 建立起 R 的极大理想与 X 上点的一一对应.

第六章 整环

6.1 整环与素理想

定义 6.1.1. 环 R 被称为**整环** (domain), 如果对于任意 $a, b \in R$ 满足 $ab = 0$, 那么 a 和 b 中至少有一个为 0.

定义 6.1.2. 环 R 的理想 I 被称为**素理想** (prime ideal), 如果对任意 $a, b \notin I$, 一定有 $ab \notin I$.

命题 6.1.3. 对于环 R 的理想 I , R/I 是整环当且仅当 I 是素理想.

证明: 根据定义直接验证. □

命题 6.1.4. 极大理想一定是素理想

证明: 注意到域一定是整环. □

当环 R 是整环时, 我们有着相对良好的分解性质, 并且有些时候这种分解是非常重要的, 例如下面的例子.

例子. $\sqrt{2}$ 是无理数: 假设 $\sqrt{2}$ 不是无理数, 那么存在互素整数 p, q 使得 $\sqrt{2}q = p$, 即 $2q^2 = p^2$. 由于 p, q 互素从而根据整数的唯一分解性质有 $2 \mid p$, 不妨假设 $p = 2m$, 从而有 $q^2 = 2m^2$, 即 $2 \mid q$, 进而 $2 \mid \gcd(p, q) = 1$, 矛盾.

因此在本节接下来的内容中我们主要研究这件性质. 为了后续的需要, 我们来固定一些术语以及列出一些简单的事实, 其中涉及到的所有的元素都是在整环 R 中的:

1. u 是单位当且仅当 $(u) = R$;
2. a 整除 b ¹当且仅当 $(b) \subseteq (a)$;
3. a 是 b 的真因子²当且仅当 $(b) \subsetneq (a) \subsetneq R$;
4. a 和 b 相伴³当且仅当 $(a) = (b)$;
5. $a \neq 0$, a 不可约⁴当且仅当 $(a) \subseteq R$ 并且不存在主理想 (c) 使得 $(a) \subsetneq (c) \subsetneq R$;
6. p 是素元⁵当且仅当 (p) 是素理想.

¹即存在 c 使得 $b = ac$

²即 a 不是单位, 并且存在非单位的 c 使得 $b = ac$

³即存在某些单位 c 使得 $a = bc$

⁴即 a 不是单位并且 a 没有真因子

⁵ p 如果整除 ab , 那么 p 整除 a 或 p 整除 b



6.2 主理想整环与欧几里德整环

定义 6.2.1. 整环 R 被称为**主理想整环** (principal ideal domain), 如果 R 的每一个理想都是主理想.

定义 6.2.2. 整环 R 被称为**欧几里德整环** (Euclidean domain), 如果存在函数 $\sigma: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得任取 $a, b \in R, b \neq 0$, 存在 $q, r \in R$ 使得

$$a = bq + r$$

如果 $r \neq 0$, 则有 $\sigma(r) < \sigma(b)$.

命题 6.2.3. 欧几里德整环是主理想整环.

例子. $\mathbb{Z}[i]$ 是欧几里德环, 其中 $\sigma(a + bi) = |a + bi|^2$. 考虑 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$, 其中 $a \neq 0, b \neq 0$. 如果想要写成

$$z_2 = z_1 q + r, \quad r \neq 0$$

的形式, 并且满足 $\sigma(r) < \sigma(z_2)$, 我们可以感觉到应该选 q 尽可能的接近 z_1/z_2 . 我们先如下计算

$$\frac{z_1}{z_2} = (c + di) \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = m + ni, \quad m, n \in \mathbb{Q}$$

选取 $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\begin{cases} |m - m_0| \leq \frac{1}{2} \\ |n - n_0| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

我们记 $q = m_0 + n_0 i$, 那么

$$q - \frac{z_2}{z_1} = (m_0 - m) + (n_0 - n)i$$

并且满足

$$\left|q - \frac{z_2}{z_1}\right|^2 = (m_0 - m)^2 + (n_0 - n)^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

因此

$$|r|^2 = |z_2 - qz_1|^2 = |z_1 \left(\frac{z_2}{z_1} - q\right)|^2 < |z_1|^2$$

从而 $z_2 = qz_1 + r$ 满足 $\sigma(r) < \sigma(z_1)$.

6.3 唯一分解整环

给定整环 R , 以及非单位 $a \in R \setminus \{0\}$, 如果 a 不是不可约的, 那么 a 可以写成 $a = a_1 a_2$, 其中 a_1, a_2 都不是单位. 如果 a_1, a_2 中存在不是不可约的, 那么对其再进行类似的分解. 我们重复上述操作, 如果在有限次操作停止, 即得到的所有因子都是不可约的, 那么我们将 a 写成如下形式

$$a = a_1 \dots a_n$$

其中 a_1, \dots, a_n 是 R 中的不可约的元素. 此时我们称对 a 的分解终止 (factorization terminates), 并称 $a_1 \dots a_n$ 是 a 的一个不可约分解. 如果 a 有两个不可约分解

$$\begin{aligned} a &= p_1 \dots p_m \\ &= q_1 \dots q_n \end{aligned}$$

这两个不可约分解被称为相同的, 如果 $m = n$, 并且经过合适的顺序排列之后有 $(p_i) = (q_i)$.

例子. 在高斯整数环 $\mathbb{Z}[i]$ 中, 对 5 有如下分解

$$\begin{aligned} 5 &= (1 + 2i)(1 - 2i) \\ &= (2 + i)(2 - i) \end{aligned}$$

但是这两个分解是相同的, 因为 $(1 + 2i)i = (i - 2)$, 以及 i 是 $\mathbb{Z}[i]$ 的单位.

定义 6.3.1. 整环 R 被称为**唯一分解整环** (unique factorization ring), 如果任取非单位 $a \in R \setminus \{0\}$, 如果对 a 的分解终止, 并且得到的任何两个不可约分解是相同的.

引理 6.3.2. 在整环 R 中, 任何素元都是不可约元.

证明: 回忆:

1. p 是素元, 如果 $p \mid ab$ 可以推出 $p \mid a$ 或 $p \mid b$.
2. p 是不可约元, 如果 $p = ab$ 意味着 a 或 b 中一定有一个是单位.

下面我们来证明在整环中素元都是不可约元: 假设 p 是素元, 并且 $p = ab$, 那么不妨假设 $p \mid a$, 即 $a = pc$, 从而 $p = pcb$, 这意味着 $bc = 1$ (这里用到了整环的性质), 从而 b 是单位, 即 p 是不可约元. □

引理 6.3.3. 在主理想整环 R 中, 任何不可约元都是素元

证明: 假设 p 不可约的, 从而不存在主理想 (c) 使得

$$(p) \subsetneq (c) \subsetneq (1)$$

这意味着 (p) 是极大理想, 因为 R 是主理想整环, 从而 (p) 是一个素理想, 这意味着 p 是素元. □

引理 6.3.4. 给定整环 R , 以及如下两条等价:

1. 对任意非单位 $a \in R \setminus \{0\}$ 的分解终止;
2. R 不存在无穷严格上升的主理想链

$$(a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq \dots$$

证明: 对非单位 $a_1 \in R \setminus \{0\}$ 进行不可约分解

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 b_2 \\ &= a_2 a_3 b_3 \\ &= a_2 a_3 a_4 \dots \end{aligned}$$

我们可以得到一个严格上升的主理想链

$$(a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq (a_3) \subsetneq \dots$$

从这里可以观察出 (1) 与 (2) 的等价性. □

命题 6.3.5. 给定整环 R ,

1. 如果在 R 中对任何元素的分解都终止, 那么 R 是唯一分解整环当且仅当每个不可约元都是素元;
2. 主理想整环是唯一分解整环.

证明: (1). 我们先假设每个不可约元都是素元: 任取非单位 $a \in R \setminus \{0\}$, 有如下两个不可约分解

$$\begin{aligned} a &= p_1 \dots p_m \\ &= q_1 \dots q_n \end{aligned}$$

那么 p_1 是素元, 并且 $p_1 \mid q_1 \dots q_n$, 从而 $p_1 \mid q_i, 1 \leq i \leq n$, 然而 q_i 是不可约的, 从而 p_1 和 q_i 是相伴的. 经过合适的顺序调整以及系数条件, 我们不妨假设 $p_1 = q_1$, 从而有

$$q_2 \dots q_n = p_2 \dots p_m$$

利用归纳法即可证明 $m = n$ 并且这两个分解是相同的, 从而 R 是唯一分解整环. 另一方面, 我们假设 R 是唯一分解整环, 取 a 是一个不可约元, 假设 $a \mid bc$, 不妨写作 $ad = bc$, 对 b, c, d 进行唯一分解, 即

$$\begin{aligned} b &= p_1 \dots p_m \\ c &= q_1 \dots q_n \\ d &= r_1 \dots r_s \end{aligned}$$

那么由于唯一分解性, a 一定相伴于某个 p_i 或者 q_j , 即 $a \mid b$ 或 $a \mid c$.

(2). 由于在主理想整环中所有不可约元都是素元, 从而只需要证明任取非单位 $a \in R \setminus \{0\}$, 对 a 的分解终止即可, 根据之前的引理可知只需要证明任何严格包含的主理想链都会稳定即可, 考虑

$$(a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq (a_3) \subsetneq \dots$$

考虑 $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i)$, 由于 R 是主理想整环从而 $I = (a_j)$ 对某个 j 成立, 这意味着严格升链是有限长的. □

例子. 高斯整数环 $\mathbb{Z}[i]$ 是欧几里得整环, 从而是主理想整环, 从而是唯一分解整环.

例子. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 不是唯一分解整环: 考虑 6 我们有如下分解

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \times 3 \\ &= (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \end{aligned}$$

定义 6.3.6. 给定整环 R 以及 $a, b \in R$, 如果存在 $d \in R, d \mid a, d \mid b$ 满足对任意 $c \mid a, c \mid b$ 有 $c \mid d$, 那么称 d 是 a, b 的最大公因数, 记做 $\gcd(a, b)$.

注记. 在一般的整环 R 中最大公因数不一定存在, 但是在唯一分解整环中最大公因数总是存在的: 将 a, b 做唯一分解

$$a = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$$

$$b = p_1^{t_1} \cdots p_s^{t_s}$$

其中 $r_i, t_j \geq 0$. 不难发现最大公因子 d 为 $d = p_1^{\min\{r_1, t_1\}} \cdots p_s^{\min\{r_s, t_s\}}$.

我们来考虑多项式版本的费马大定理:

命题 6.3.7. 假设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{C}[x]$, 则当 $n \geq 3$ 时

$$f^n + g^n = h^n$$

不存在解满足 $\deg f \geq 1$ 并且 $\gcd(f, g) = 1$.

证明: 假设存在解, 我们不妨假设 (f, g, h) 是满足 $\deg f + \deg g + \deg h$ 最小的解. 那么

$$f^n = h^n - g^n$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} (h - \xi^k g)$$

其中 $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. 那么 $\gcd(h, g) = 1$ 意味着 $\gcd(h - \xi_k g, h - \xi_l g) = 1$, 其中 $k \neq l$. 由于 $\mathbb{C}[t]$ 是唯一分解整环, 那么

$$h - g = (x(t))^n$$

$$h - \xi g = (y(t))^n$$

$$h - \xi^2 g = (z(t))^n$$

并且由于 $n \geq 3$ 我们知道 $1, \xi, \xi^2$ 互不相同. 从而有

$$a(x(t))^n + b(y(t))^n = c(z(t))^n$$

其中 $a, b, c \neq 0$, 从而得到了一个次数更小的解, 相矛盾. □

6.4 高斯引理

一般来说, R 是主理想整环, 但 $R[x]$ 不一定是主理想整环, 例如考虑 $\mathbb{Z}[x]$ 的理想 $(2, x)$. 现在的目标是想要证明如果 R 是唯一分解整环, 那么 $R[x]$ 也是唯一分解整环. 我们以 $\mathbb{Z}[x]$ 为例去说明这件事情. 我们将用如下的两个同态去分析 $\mathbb{Z}[x]$:

$$\mathbb{Z}[x] \hookrightarrow \mathbb{Q}[x]$$

$$\varphi_p : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}/(p)[x] \cong \mathbb{F}_p[x]$$

其中 p 是素数.

定义 6.4.1. $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n \neq 0, n \geq 1$ 被称为**本元多项式** (primitive polynomial), 如果

$$\gcd(a_n, \dots, a_0) = 1$$

例子. $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$ 是本元多项式, $g(x) = 2x^2 + 4x + 6$ 不是本元多项式.

引理 6.4.2. 给定素数 p , 如下条件等价

1. $p \mid a_i, 1 \leq i \leq n$
2. $p \mid f$
3. $\varphi_p(f) = 0$

引理 6.4.3. 如下条件等价

1. f 是本元多项式;
2. 对任意素数 p 有 $p \nmid f$;
3. 对任意素数 p 有 $\varphi_p(f) \neq 0$.

引理 6.4.4. 整数 p 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中是素元当且仅当 p 是素数.

证明: 注意到

$$\mathbb{Z}[x]/(p) \cong \mathbb{Z}/(p)[x]$$

□

引理 6.4.5 (高斯引理). $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ 是本元多项式当且仅当 fg 是本元多项式.

证明: f, g 是本元多项式, 等价于对每个素数 p 有 $\varphi_p(f) \neq 0, \varphi_p(g) \neq 0$, 同样地, fg 是本元多项式等价于 $\varphi_p(fg) \neq 0$. 注意到 $\varphi_p(fg) = \varphi_p(f)\varphi_p(g)$, 从而 f, g 是本元多项式当且仅当 fg 是本元多项式, 因为 $\mathbb{F}_p[x]$ 是整环. □

引理 6.4.6. 任取 $f \in \mathbb{Q}[x]$, 存在分解 $f = cf_0(x)$, 其中 $c \in \mathbb{Q}, f_0(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是本元多项式, 并且 $f_0(x)$ 在相差 ± 1 的意义下是唯一的. 特别地, 当 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 时, $c \in \mathbb{Z}$.

证明: 存在性: 首先存在 $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 使得 $mf(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 取 d 是 $mf(x)$ 系数的最大公因数, 那么不难发现 $f_0(x) = \frac{m}{d}f(x)$ 是本元多项式, 并且 $c = \frac{d}{m}$. 特别地, 当 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 时, $m = 1$, 从而 $c \in \mathbb{Z}$.

唯一性: 假设有

$$f(x) = c_0 f_0(x) = \tilde{c} \tilde{f}_0(x)$$

那么存在 $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 使得

$$mf(x) = mc f_0 = m\tilde{c} \tilde{f}_0$$

其中 $mc, m\tilde{c} \in \mathbb{Z}$. 任取素数 $p \mid mc$, 那么 $p \mid mf(x)$, 从而 $p \mid m\tilde{c}$, 从而对 mc 不可约因子个数的归纳可以得到 f_0 在和 \tilde{f}_0 相差 ± 1 的意义下相同 □

注记. 在一般的环 R 中, f_0 和 \tilde{f}_0 在相差环 R 中的单位的意义下相同.

定理 6.4.7. 有如下结果:

1. f_0 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中是本元多项式, $g \in \mathbb{Z}[x]$, 如果在 $\mathbb{Q}[x]$ 中 $f_0 \mid g$, 那么在 $\mathbb{Z}[x]$ 中 $f_0 \mid g$;
2. 如果 f, g 是本元多项式, f, g 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中有最大公因子, 那么在 $\mathbb{Z}[x]$ 中也有最大公因子.

证明: (1). 假设 $g = f_0 h$, 其中 $h \in \mathbb{Q}[x]$. 假设

$$h = ch_0$$

$$g = c'g_0$$

其中 $c \in \mathbb{Q}, c' \in \mathbb{Z}$ 以及 h_0, g_0 是本元多项式. 根据高斯引理有 $h_0 f_0$ 是本元多项式, 从而 c 和 c' 之间只相差 ± 1 , 从而 $c \in \mathbb{Z}$, 从而 $h \in \mathbb{Z}[x]$, 即在 $\mathbb{Z}[x]$ 中 $f_0 \mid g$.

(2). 如果在 $\mathbb{Q}[x]$ 中 $h \mid f, h \mid g$, 那么将 h 写成 $h = ch_0$, 其中 h_0 是本元多项式, 从而在 $\mathbb{Q}[x]$ 中 $h_0 \mid f, h_0 \mid g$, 那么在 $\mathbb{Z}[x]$ 中 $h_0 \mid f, h_0 \mid g$, 从而 f, g 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中也有最大公因子. \square

定理 6.4.8. 如果 $f(x)$ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 上的不可约元, 那么 $f(x)$ 只有如下两种可能:

1. $f(x)$ 是 \mathbb{Z} 中的素数;
2. $f(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 上的不可约元.

证明: 如果 $\deg f = 0$, 那么此时 $f \in \mathbb{Z}$, 从而是 \mathbb{Z} 中的素元; 如果 $\deg f \geq 1$, 不妨记 $f = cf_0$, 由于本元多项式在 $\mathbb{Z}[x]$ 上的不可约性与在 $\mathbb{Q}[x]$ 上的不可约性是一样的, 从而 f_0 是 $\mathbb{Q}[x]$ 上的不可约元, 即 f 也是 $\mathbb{Q}[x]$ 上的不可约元. \square

定理 6.4.9. $\mathbb{Z}[x]$ 中的每个不可约元都是素元.

定理 6.4.10. $\mathbb{Z}[x]$ 是唯一分解整环.

证明: 任取 $f \in \mathbb{Z}[x]$, 将其写作 $f = cf_0$, 其中 $c \in \mathbb{Z}, f_0$ 是本元多项式. 对于 c 我们有如下不可约分解

$$c = c_1 c_2 \cdots c_p$$

而对于 f_0 我们在 $\mathbb{Q}[x]$ 中有如下不可约分解

$$f_0 = g_1 g_2 \cdots g_k$$

其中 g_i 都是本元的, 从而这也是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的分解. \square

推论 6.4.11. $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ 是唯一分解整环.

将 \mathbb{Z} 换成一般的唯一分解整环, \mathbb{Q} 换成 R 的分式域, 我们上述的论述依然成立, 即:

定理 6.4.12. 如果 R 是唯一分解整环, 则 $R[x_1, \dots, x_n]$ 是唯一分解整环.

命题 6.4.13. $f(x) \in \mathbb{Z}[x], f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, p \nmid a_n$. 如果 $\varphi_p(f(x)) = \bar{f}(x)$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中不可约, 那么 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

证明: 假设 $f(x)$ 可约, 那么 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 \square

例子. $f(x) = x^3 + x + 1$, 则通过直接列出 $\mathbb{F}_2[x]$ 中的不可约多项式不难发现 $\bar{f}(x)$ 在 $\mathbb{F}_2[x]$ 中不可约.

命题 6.4.14 (艾森斯坦判别法). $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是本元多项式, 如果存在素数 p 使得

1. $p \nmid a_n$;



2. $p \mid a_i, i = 0, 1, \dots, n-1;$

3. $p^2 \nmid a_0$

那么 f 是不可约的.

证明: 假设 $f(x) = h(x)g(x)$, 那么

$$\varphi_p(f(x)) = \bar{f}(x) = a_n x^n = \bar{g}(x)\bar{h}(x)$$

从而 $\bar{g}(x) = cx^m, \bar{h}(x) = dx^{n-m}$, 从而

$$g(x) = cx^m + \dots + c_0$$

$$h(x) = dx^{n-m} + \dots + d_0$$

并且 $p \mid c_0, p \mid d_0$, 从而 $p^2 \mid a_0 = c_0 d_0$, 相矛盾. \square

注记. 如果将 \mathbb{Z} 换成一般的唯一分解整环 R , 艾森斯坦判别法此时依然成立, 只需要将素数换成素元即可.

例子. $f(x) = x^5 + 20x^4 + 5x^3 + 15$, 取 $p = 5$ 即可

例子. 给定素数 p , p 次分圆多项式 (cyclotomic polynomial) 定义为

$$\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

我们现在来证明分圆多项式的不可约性. 由于 $\Phi_p(x)(x-1) = x^p - 1$, 我们令 $y = x - 1$ 则有

$$\begin{aligned} \Phi_p(y+1) &= \frac{(y+1)^p - 1}{y} \\ &= y^{p-1} + py^{p-2} + \dots + \binom{p}{i} y^{p-i-1} + \dots + p \end{aligned}$$

注意到对于 $1 \leq i \leq p-1$, 有 $p \mid \binom{p}{i}$, 从而对素数 p 利用艾森斯坦判别法可知 $\Phi_p(y+1)$ 不可约, 从而 $\Phi_p(x)$ 也是不可约的.

6.5 作业七

练习. 证明 $\mathbb{Z}[i]/(3)$ 是一个域.

练习. 给出 \mathbb{F}_3 中一个 2 次不可约多项式的例子, 用这个例子去构造一个九元域.

练习. $x^4 + 6x^3 + 9x + 3$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 是否可约?

练习. 分别在 $\mathbb{F}_2[x], \mathbb{F}_3[x]$ 和 $\mathbb{Q}[x]$ 中分解 $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x + 5$.

练习. Artin Chapter 12, 2.9

练习. 假设 $x \in \mathbb{Q}$ 是某一个首一整系数多项式的根, 则 x 是整数.

练习. 假设 D 是一个正整数.

1. 验证 $\mathbb{Z}[\sqrt{-D}] = \{a + b\sqrt{-D} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 是一个 \mathbb{C} 的子环.



2. 求 $\mathbb{Z}[\sqrt{-D}]$ 的乘法可逆元全体.
3. 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 中验证 $2, 3, 1 \pm \sqrt{-5}$ 是不可约元. 请指出哪些是素元, 为什么?
4. 证明 $\mathbb{Z}[\sqrt{-D}]$ 中的非零素理想都是极大理想.

练习. 证明一个素数 p 可以被写成 $p = m^2 + 2n^2$, 其中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 当且仅当 $x^2 + 2$ 在 \mathbb{F}_p 中有根.

练习. 求一组多项式方程 $f^2 + g^2 = h^2$ 在 $\mathbb{C}[t]$ 上的非平凡解, 即 $f, g, h \in \mathbb{C}[t]$ 满足 $\deg f, \deg g, \deg h \geq 1$ 且 $\gcd(f, g, h) = 1$. (所有解可以是什么形式?)

练习. 尝试描述 $\mathbb{C}[x, y]$ 的所有素理想.

练习. 令 F 是一个域, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in F[x]$. 定义 f 的形式导数 $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$. 对于 $f(x), g(x) \in F[x]$, 证明

1. $(fg)' = fg' + f'g$.
2. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'$.
3. $\gcd(f, f') = 1$ 当且仅当 f 没有重根.

练习. 令 p 是一个素数, 通过以下步骤证明 $f(x) = x^p - x - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ 不可约.

1. 验证 $f(x+1) = f(x)$.
2. 如果 $g(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ 并且 $1 \leq \deg g \leq p-1$, 那么 $g(x+1) \neq g(x)$.
3. 令 $f = g_1 \cdots g_k$ 是 f 的首一不可约分解, 证明 g_i 都不相同.
4. 令 $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 证明 $a \cdot g_i(x) = g_i(x+a)$ 定义了 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 在集合 $\{g_1 \cdots g_k\}$ 上的作用.
5. 利用群作用的枚举公式证明 $f(x)$ 不可约.

注记. 事实上, 对 $n \geq 2$, $x^n - x - 1$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中是不可约的.

第七章 二次扩域的代数整数环

7.1 高斯整数环的素理想

为了确定高斯整环 $\mathbb{Z}[i]$ 的所有素理想, 注意到它是欧几里德整环, 从而是主理想整环, 因此只需要确定所有的素元 (不可约元即可).

命题 7.1.1. 如下三条等价:

1. 素数 p 在 $\mathbb{Z}[i]$ 中可约;
2. $p = m^2 + n^2, m, n \in \mathbb{Z}$;
3. $p = 2$ 或 $p \equiv 1 \pmod{4}$.

证明: (1) 与 (2) 等价: 如果 $p = m^2 + n^2$, 那么 $p = (m + in)(m - in)$. 反之, 如果 $p = (a + bi)(c + di)$, 那么有

$$p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

从而有 $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

(1) 与 (3) 等价:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[i]/(p) &\cong \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1, p) \\ &\cong \mathbb{F}_p[x]/(x^2 + 1)\end{aligned}$$

从而 p 在 $\mathbb{Z}[i]$ 中可约当且仅当 $x^2 + 1$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中可约, 这等价于 $x^2 + 1 = 0$ 在 \mathbb{F}_p 中有根.

1. 如果 $p = 2$, $x^2 + 1 = 0$ 在 \mathbb{F}_2 中显然有根 $x = 1$;
2. 如果 $p \neq 2$, $x^2 + 1 = 0$ 意味着 x 在循环群 \mathbb{F}_p^\times 中是 4 阶元, $p - 1$ 阶循环群中 4 阶元存在当且仅当 $4 \mid p - 1$, 即 $p \equiv 1 \pmod{4}$.

□

命题 7.1.2. $\mathbb{Z}[i]$ 中的素理想 $I = (a + bi)$ 如下:

1. 如果 $ab = 0$, 那么 $I = (p)$, 其中 $p \equiv 3 \pmod{4}$;
2. 如果 $ab \neq 0$, 那么 $a^2 + b^2 = p$, 其中素数 $p = 2$ 或 $p \equiv 1 \pmod{4}$.

证明: $ab = 0$ 的情况我们已经确定了. 若 $(a + bi), ab \neq 0$ 是素理想, 那么考虑 $a^2 + b^2$ 的如下分解

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$$

这个分解是不可约的, 因为 $a + bi, a - bi$ 都是素元. 另一方面在 \mathbb{Z} 中我们可以将 $a^2 + b^2$ 分解成 $p_1 p_2 \dots p_n$, 注意到 $1 \leq n \leq 2$, 这是因为任何一个 p_i 都至少会在 $\mathbb{Z}[i]$ 中分解出一个因子.

1. 如果 $n = 1$, 那么 $a^2 + b^2 = (a - bi)(a + bi) = p$, 即 $p = 2$ 或 $p \equiv 1 \pmod{4}$.

2. 如果 $n = 2$, 那么不妨记 $a + bi$ 与某个素数 p 相伴, 此时与 $ab \neq 0$ 矛盾.
另一方面, 任取 $a^2 + b^2 = p, a, b \in \mathbb{Z}$, 则 $a + bi$ 是素元:

$$(a + bi) = (c + di)(m + ni)$$

从而

$$p = a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)(m^2 + n^2)$$

这意味着 $c + di$ 或 $m + ni$ 中有一个是单位. □

7.2 二次扩张的代数整数环

下面我们想要去研究一般二次扩张中的整数环. 给定一个无平方因子的整数 d , 即 \mathbb{C} 的如下子域

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

中的整数环.

定义 7.2.1. \mathbb{C} 中的**代数整数** (algebraic integer) 定义为

$$A = \{x \in \mathbb{C} \mid \text{存在 } \mathbb{Z}[x] \text{ 中的首一多项式 } f(x) \text{ 使得 } f(x) = 0\}$$

实际上, A 构成了 \mathbb{C} 的一个子环, 也就是我们想要去研究的代数整数环, 为了证明这个事实, 我们需要如下引理:

引理 7.2.2. $a \in A$ 当且仅当 a 是某一个 $M \in M_n(\mathbb{Z})$ 的特征值.

证明: 如果 a 是某个矩阵 $A \in M_n(\mathbb{Z})$ 的特征值显然它是代数整数, 因为它满足特征多项式; 另一方面给定 $\mathbb{Z}[x]$ 中的首一多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, 考虑其友阵

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

则友阵的特征值恰好是 $f(x)$ 的根, 即

$$\det(\lambda I - M) = f(\lambda)$$

□

引理 7.2.3. 给定两个矩阵 B, C , 其特征值分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 和 μ_1, \dots, μ_n , 则 $B \otimes C$ 的特征值为 $\lambda_i \mu_j, 1 \leq i, j \leq n$.

命题 7.2.4. A 是 \mathbb{C} 的一个子环.

证明: 根据上面的两个引理即可. □

练习. $A \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

命题 7.2.5.

$$R := A \cap \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}[\frac{\sqrt{d}+1}{2}] & d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

证明: 取 $a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, 我们不妨假设 $b \neq 0$ (因为如果 $b = 0$ 那么 $a \in A \cap \mathbb{Q}$ 意味着 $a \in \mathbb{Z}$). 不难发现 $a + b\sqrt{d}$ 满足

$$x^2 - 2ax + b^2d - a^2 = 0$$

因此 $a + b\sqrt{d} \in A$ 当且仅当

$$\begin{cases} 2a \in \mathbb{Z} \\ b^2d - a^2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

我们分如下的情况考虑:

1. 如果 $a \in \mathbb{Z}$, 那么 $b^2d \in \mathbb{Z}$, 由于 d 是无平方因子的, 从而 $b \in \mathbb{Z}$;
2. 如果 $a \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, 假设 $a = \frac{1}{2} + m, m \in \mathbb{Z}$, 从而

$$b^2d = n + m^2 + m + \frac{1}{4}$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$, 从而 $4b^2d \in \mathbb{Z}$, 即同样由于 d 无平方因子可知 $2b \in \mathbb{Z}$. 如果令 $m = 2a, n = 2b$, 那么我们一定有 $m, n \in \mathbb{Z}$, 并且 $4 \mid m^2 - dn^2$.

1. 如果 $d \equiv 2 \pmod{4}$, 那么

$$0 \equiv m^2 - dn^2 \equiv m^2 + 2n^2 \pmod{4}$$

而这只有 m, n 都是偶数的时候才可能发生, 即此时 a, b 都是整数;

2. 如果 $d \equiv 3 \pmod{4}$, 分析同上;
3. 如果 $d \equiv 1 \pmod{4}$, 那么

$$0 \equiv m^2 - dn^2 \equiv m^2 - n^2 \pmod{4}$$

但是 $4 \mid m^2 - n^2$ 当且仅当 $m \equiv n \pmod{2}$, 从而此时

$$R = \left\{ \frac{m + n\sqrt{d}}{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \equiv n \pmod{2} \right\}$$

注意到

$$\frac{m + n\sqrt{d}}{2} = \frac{m + n}{2} + n\left(\frac{-1 + \sqrt{d}}{2}\right), \quad \frac{m + n}{2} \in \mathbb{Z}$$

从而此时 $R = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$.

□



7.3 虚二次域代数整数环的单位

在代数数论中给定了一个代数整数环后, 第一个问题就是去研究这个代数整数环中的单位是哪些, 在这里如果我们考虑 $d < 0$ 的情况, 即虚二次域 $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ 的代数整数环 $R = A \cap \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, 我们有如下的刻画: 考虑如下映射

$$\begin{aligned} N : R &\rightarrow \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{d} &\mapsto a^2 - b^2d \end{aligned}$$

不难发现其满足 $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

命题 7.3.1. $\alpha \in R$ 是单位当且仅当 $N(\alpha) = 1$

例子. $d = -1$, 即 R 是高斯整数时, 单位是 $\{\pm 1, \pm i\}$

例子. $d = -3$ 时, R 的单位是 $\{\pm 1, e^{\frac{\pi}{3}}, e^{\frac{2\pi}{3}}, e^{-\frac{\pi}{3}}, e^{-\frac{2\pi}{3}}\}$

例子. 当 $d < 0, d \neq -1, -3$ 时, R 的单位只有 $\{\pm 1\}$



第八章 虚二次域代数整数环的唯一分解性

在本章中, 如不加特殊说明, R 总指的是虚二次域的代数整数环, 而一个有趣的问题是 R 什么时候是唯一分解的呢?

例子. $d \equiv 3 \pmod{4}, d < 0, d \neq -1$ 时, 我们可以做如下分解

$$\begin{aligned} 1 - d &= 2 \frac{1 - d}{2} \\ &= (1 - \sqrt{d})(1 + \sqrt{d}) \end{aligned}$$

从而不是唯一分解的. 对 $d \equiv 2 \pmod{4}, d \neq -2$ 的时候你可以做类似的事情证明这个时候 R 也不是唯一分解的.

我们有如下重要的结果

定理 8.0.1. $\mathbb{Q}[\sqrt{d}], d < 0$ 的代数整数环 R 是唯一分解整环当且仅当

$$d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$$

本章的最终目的在于去验证对于这些 d 其代数整数环 R 真的是唯一分解的. 主要的想法是我们将说明, 对于虚二次域的代数整数环 R , 其为唯一分解整环当且仅当其为主理想整环, 并通过计算 d 为上述情况时候的类群来说明这些情况都是唯一分解的.

8.1 \mathbb{R}^2 中的格

引理 8.1.1. \mathbb{R}^2 中的离散子群只有如下三种

1. $\{0\}$;
2. $\mathbb{Z}a$;
3. $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$, 其中 a, b 在 \mathbb{R} 上线性无关, 这个时候称为是 \mathbb{R}^2 的一个格 (lattice).

命题 8.1.2. 如果 I 是 R 的一个非零理想, 那么 I 是 \mathbb{R}^2 的一个格.

证明: 不妨考虑 $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ 的情况, 另一种情况同理: 此时 $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$ 是 \mathbb{R}^2 的一个格, 从而 I 也是 \mathbb{R}^2 的一个离散子群. 如果其非零, 那么任取 $0 \neq \alpha \in I$, 不难发现 $\alpha, \alpha\sqrt{d}$ 在 \mathbb{R} 上线性无关, 从而 I 是 \mathbb{R}^2 的一个格. \square

命题 8.1.3. $I \subset R$ 是 \mathbb{R}^2 中的一个格, 那么 I 是一个理想的当且仅当

1. $\sqrt{d}I \subset I, d \equiv 2, 3 \pmod{4}$;

2. $\frac{\sqrt{d}+1}{2}I \subset I, d \equiv 1 \pmod{4}$.

证明：对于第一种情况

$$R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$$

所以 I 是 R 的理想当且仅当 $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d})I \subset I$, 这也当且仅当 $\sqrt{d}I \subset I$, 对于第二种情况来说同理. \square

在考虑更一般的情况之前, 我们先来看一下 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 中的理想是什么样的. 我们有如下的结果:

定理 8.1.4. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, I 是 R 的一个非零理想, α 是 I 中有极小范数的元素, 那么只有如下两种可能:

1. $(\alpha, \alpha\sqrt{-5})$ 是 I 作为格的基, 此时 I 是主理想 (α) ;
2. $(\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \alpha\sqrt{-5}))$ 是 I 作为格的基, 此时 I 不是主理想.

为了证明这个结果, 我们需要下面的引理:

引理 8.1.5. $L \subset \mathbb{R}^2$ 是一个格, $r = \min\{|z| \mid z \in L \setminus \{0\}\}$. 对于 $\gamma \in L$ 定义

$$D(\frac{1}{n}\gamma, \frac{1}{n}r) = \{z \mid |z - \frac{1}{n}\gamma| < \frac{1}{n}r\}$$

那么如果 $D(\frac{1}{n}\gamma, \frac{1}{n}r) \cap L \neq \emptyset$, 则有

$$D(\frac{1}{n}\gamma, \frac{1}{n}r) \cap L = \{\frac{1}{n}\gamma\}$$

证明: 假设 $\beta \in D(\frac{1}{n}\gamma, \frac{1}{n}r)$, 即 $|\beta - \frac{1}{n}\gamma| < \frac{1}{n}r$, 这等价于 $|n\beta - \gamma| < r$. 并且 $n\beta - \gamma \in L$, 从而根据 r 的选择可知 $n\beta - \gamma = 0$, 即 $\beta = \frac{1}{n}\gamma$. \square

定理 8.1.4 证明. 给定 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 的一个理想 I , 以及 α 是 I 中有极小范数的元素, 由于 I 包含 α , 从而 I 包含 (α) , 如果此时 $I = (\alpha)$, 我们即得到了第一种情况. 现假设存在 $\beta \in I$ 并且 $\beta \notin (\alpha)$, 由于 (α) 作为格的基为 $(\alpha, \alpha\sqrt{-5})$, 因此我们不妨假设 β 落在由如下关系生成的平行四边形内部

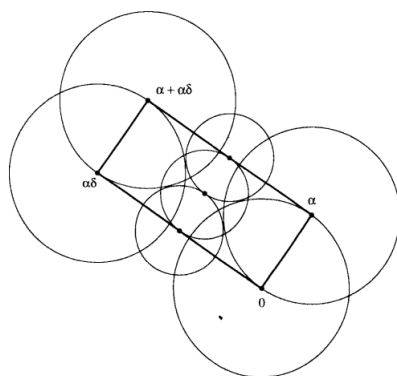
$$\Pi = \{r\alpha + s\alpha\sqrt{-5} \mid 0 \leq r, s \leq 1\}$$

对于这个平行四边形 Π , 我们有如下刻画:

1. Π 实际上是一个长方形, 因为 $\sqrt{-5}$ 是纯虚数;
2. Π 的边长比为 $1 : \sqrt{5}$;
3. 我们不知道 Π 具体在 \mathbb{R}^2 中的位置, 这取决于 α .

如果可以证明 β 正好是这个平行四边形的中心, 我们就得出了我们的结论. 考虑下图¹中的七个圆盘

¹图源 Artin's algebra



不难看出这七个圆盘覆盖了整个平行四边形, 并且根据引理8.1.5可知, I 中的元素只可能是这些圆盘的圆心, 并且由于 $\beta \notin (\alpha)$, β 只有如下三种可能

1. $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha\sqrt{-5})$;
2. $\beta = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{-5}$;
3. $\beta = \alpha + \frac{1}{2}\alpha\sqrt{-5}$.

并且不难发现第二三种情况是一样的, 因为 $\alpha \in I$. 假设第二种情况发生, 那么根据命题8.1.3可知 $\frac{1}{2}\alpha(\sqrt{-5})^2 = -\frac{5}{2}\alpha \in I$, 从而 $\frac{1}{2}\alpha \in I$, 这与 α 的选取矛盾. \square

8.2 理想的乘积分解

定义 8.2.1. 给定环 R 以及两个理想 I, J , 乘积理想 IJ 定义为

$$IJ := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J \right\}$$

例子. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, 以及素理想

$$I = (2, 1 - \sqrt{-5}), \bar{I} = (2, 1 + \sqrt{-5})$$

$$J = (3, 1 + \sqrt{-5}), \bar{J} = (3, 1 - \sqrt{-5})$$

直接验证则有

$$I\bar{I} = (4, 2(1 + \sqrt{-5}), 2(1 - \sqrt{-5}), 6) = (2)$$

$$J\bar{J} = (3)$$

从而

$$(6) = (2)(3) = I\bar{I}J\bar{J}$$

上面的事情告诉我们, 虽然 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 不是唯一分解整环, 但是其理想仍然有某种唯一分解成素理想的性质. 实际上, 对于一般的虚二次数域的代数整数环都有如此的性质, 即

定理 8.2.2. R 是某个虚二次数域的代数整数环, R 的每个真理想都可以分解成素理想的乘积, 并且在除去排序的意义下唯一.

如果证明了上面的事实, 并且加上如下事实

命题 8.2.3. R 是某个虚二次数域的代数整数环, I 是 R 的素理想当且仅当其为极大理想.

那么

定理 8.2.4. 如果 R 是某个虚二次域的代数整数环, 那么 R 是唯一分解整环当且仅当 R 是主理想整环.

证明: 只需要证明如果 R 是唯一分解整环则 R 是主理想整环: 根据定理 8.2.2, R 的每个真理想都是素理想的乘积, 并且主理想的乘积仍然是主理想, 因此只需要证明素理想都是主理想即可. 给定 R 的一个素理想 P , $0 \neq \alpha \in P$, 那么由于 R 是唯一分解整环, α 可以分解成不可约元的乘积, 并且它们也是素元. 由于 P 是素理想, 从而 P 包含 α 的某一个素因子 π , 即 P 包含素理想 (π) , 并且根据命题 8.2.3, (π) 是极大理想, 从而 $P = (\pi)$. \square

因此, 下面的目的则在于证明定理 8.2.2 以及命题 8.2.3.

引理 8.2.5. 如果 R 是某个虚二次域的代数整数环, 任何 R 的非零理想 I 都有如下的性质

$$I\bar{I} = (n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

证明: 由于 I 是 \mathbb{R}^2 中的格, 那么不妨记 $I = (\alpha, \beta)$, 那么则有

$$I\bar{I} = (\alpha\bar{\alpha}, \alpha\bar{\beta}, \bar{\alpha}\beta, \bar{\alpha}\bar{\beta})$$

其中 $\alpha\bar{\alpha}, \beta\bar{\beta}, \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta \in \mathbb{Z}$. 取 $n = \gcd(\alpha\bar{\alpha}, \beta\bar{\beta}, \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)$, 那么我们断言

$$\alpha\bar{\beta}, \bar{\alpha}\beta \in (n)$$

首先 $\frac{\alpha\bar{\beta}}{n}, \frac{\bar{\alpha}\beta}{n} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, 并且 $\frac{\alpha\bar{\beta}}{n}, \frac{\bar{\alpha}\beta}{n}$ 满足

$$x^2 + ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

从而有

$$\frac{\alpha\bar{\beta}}{n}, \frac{\bar{\alpha}\beta}{n} \in R$$

即 $I\bar{I} = (n), n \in \mathbb{Z}$. \square

推论 8.2.6. 在虚二次域的代数整数环 R 中:

1. 如果 $I_1 J = I_2 J, J \neq (0)$, 那么 $I_1 = I_2$;
2. 如果 $I \supset J \neq (0)$, 那么存在理想 I' 使得 $J = II'$.

证明: (1). 对 $I_1 J = I_2 J$ 两侧同乘 \bar{J} 即可.

(2). 如果 $I = (n)$ 是主理想, 那么任取 $a \in J, a = nb, b \in R$, 从而

$$I' := \frac{J}{n} = \left\{ \frac{a}{n} \mid a \in J \right\}$$

构成了 R 的一个理想, 并且满足 $J = II'$. 如果 I 不是主理想, 那么 $(I\bar{I}) \supset \bar{I}J$, 这意味着

$$\bar{I}J = \bar{I}I'$$

同时消去 \bar{I} 即可. \square

注记. 在虚二次域的代数整数环 R 中, $I \mid J$ (即 $J = II'$) 等价于 $I \supset J$.

命题 8.2.7. 在虚二次域的代数整数环 R 中, P 是 R 的素理想, 那么 $P \mid IJ$ 意味着 $P \mid I$ 或 $P \mid J$.

证明: 根据上述推论, $P \mid IJ$ 等价于 $IJ \subset P$, 由于 P 是素理想, $IJ \subset P$ 意味着 $I \subset P$ 或 $J \subset P$, 再次利用上述推论可知这等价于 $P \mid I$ 或者 $P \mid J$. \square

命题 8.2.8. 在虚二次域的代数整数环 R 中, 如果 I 是 R 的一个理想, 则 R/I 有限.

证明: 由于 $I\bar{I} \subset I$, 因此只需要证明 $R/I\bar{I}$ 有限即可, 而根据引理 8.2.5 可知 $I\bar{I} = (n)$, 注意到

$$\begin{aligned} R/(n) &\cong \mathbb{Z}[x]/(x^2 + d, n) \\ &\cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]/(x^2 + d) \end{aligned}$$

从而可知 $|R/(n)| = n^2 < \infty$. \square

推论 8.2.9. 在虚二次域的代数整数环 R 中, $(0) \neq I \subset R$ 是一个理想, 那么 R 中包含 I 的理想只有有限多个.

命题 8.2.3 证明. 给定虚二次域代数整数环 R 的一个素理想 I , 那么 R/I 是一个有限整环, 从而是域, 即 I 是极大理想. \square

定理 8.2.2 证明. 如果 $(0) \neq I$ 不是极大理想, 那么一定可以写成

$$I = P_1 I'$$

其中 P_1 是包含 I 的一个 (素) 极大理想, 并且由于包含 I 的理想只有有限多个, 从而分解会在有限步停止. \square

注记. 利用相同的论证可以证明任何一个维数是 1 的环其为唯一分解整环当且仅当其为主理想整环.

8.3 理想类群

我们已经证明了对于虚二次域的代数整数环 R 其为唯一分解整环当且仅当其为主理想整环, 并且我们也用格的想法去研究了 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 中的理想的形式. 对于一般的情况, 我们需要有一种办法来刻画这个环距离主理想整环的差距, 即接下来要引入理想类群这件事情.

定义 8.3.1. 给定虚二次域的代数整数环 R , R 的类群 (class group) 定义为

$$\mathcal{C}(R) := \{I \neq 0, I \text{ 是 } R \text{ 的理想}\} / \sim$$

其中非零理想 $I \sim I'$ 当且仅当存在 $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ 使得 $I = \alpha I'$. 对于理想 I 我们用 $[I]$ 去记其在类群中的等价类.

注记. 现在 $\mathcal{C}(R)$ 只是一个等价类组成的集合, 我们还没有给它赋予群结构.

引理 8.3.2. 平凡理想 R 的等价类 $[R]$ 是由全体主理想组成.

证明: 根据定义, 对于 R 的理想 I , $[I] = [R]$ 当且仅当 $I = \alpha R$, 其中 $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]^2$, 这也当且仅当 I 是主理想 (α) . \square

命题 8.3.3. 虚二次域的代数整数环 R 的类群 $\mathcal{C}(R)$ 构成了一个阿贝尔群, 其中群结构由理想的乘法给出, 即对于非零理想 A, B , $[AB] := [A][B]$.

证明: 我们如下依次验证:

1. 假设 $[A] = [A'], [B] = [B']$, 即 $A = \alpha A', B = \beta B'$, 那么 $AB = \alpha\beta A'B'$, 从而 $[AB] = [A'B']$, 即群运算是良好定义的;
2. 群运算具有结合律和交换律, 这是因为理想的乘法具有结合律和交换律;
3. $[R]$ 是类群中的单位元, 因为 $[R][A] = [RA] = [A]$;
4. $[\bar{A}]$ 是 $[A]$ 的逆元, 因为根据引理 8.2.5, 可知 $A\bar{A}$ 是主理想, 从而 $[A][\bar{A}] = [R]$.

\square

推论 8.3.4. 虚二次域的代数整数环 R 是唯一分解整环当且仅当类群 $\mathcal{C}(R)$ 是平凡群.

由于虚二次域的代数整数环 R 的任何理想都可以写成素理想的乘积, 因此 $\mathcal{C}(R)$ 可以由素理想对应的等价类生成, 但是这依然是一个无法验证的事情, 下面我们的目的在于通过证明类群可以由某些“有限”大小的素理想生成, 从而证明 $|\mathcal{C}(R)| < \infty$, 并且给了我们一种可计算的方法.

定理 8.3.5. 在虚二次域的代数整数环 R 中, 素理想 $0 \neq P$ 只有如下两种形式:

1. $P = (p)$, 其中 $p \in \mathbb{Z}$ 是素数;
2. $P\bar{P} = (p)$, 其中 $p \in \mathbb{Z}$ 是素数.

证明: 首先根据引理 8.2.5, 我们总有 $P\bar{P} = (n)$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$, 并且在 \mathbb{Z} 中分解 n , 只有如下两种可能:

1. $n = p_1 p_2$, 其中 p_1, p_2 是素数;
2. $n = p$, 其中 p 是素数

不难发现这两种情形分别对应我们需要的两种情形. \square

定理 8.3.6. 在虚二次域的代数整数环 R 中, 一个素数 p 生成了 R 中的一个素理想当且仅当:

1. $x^2 - d$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中不可约, 如果 $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$;
2. $x^2 - x - h$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中不可约, 其中 $h = \frac{1}{4}(1 - d)$, 如果 $d \equiv 1 \pmod{4}$.

证明: 假设 $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, 则 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 同构于 $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - d)$, 素数 p 在 R 中生成素理想当且仅当 $R/(p)$ 是域, 这当且仅当 $x^2 - d$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中不可约, 另一种情况的证明类似. \square

引理 8.3.7. 给定虚二次域代数整数环 R 的非零理想 I, J_1, J_2 , 其中 $J_1 \subset J_2$, 如果记 $[J_1 : J_2] := |J_1/J_2|$, 那么有

$$[IJ_1 : IJ_2] = [J_1 : J_2]$$

²此时 α 不仅仅在 $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ 中, 它也在 R 中.

证明: 如果 I 是主理想 (n) , 那么不难发现 $[nJ_1 : nJ_2] = [J_1 : J_2]$. 由于 R 中的任何理想都可以分解成素理想的乘积, 那么我们不妨假设 I 是素理想, 并且不是主理想, 根据定理 8.3.5, 我们知道存在素数 p 使得 $I\bar{I} = (p)$. 注意到

$$p^2 = [J_1 : I\bar{I}J_1] = [J_1 : IJ_1][IJ_1 : I\bar{I}J_1]$$

并且根据消去性以及 $I \neq R$, 我们可知 $[J_1 : IJ_1] > 1, [IJ_1 : I\bar{I}J_1] > 1$, 从而有 $[J_1 : IJ_1] = p$, 同样可以证明 $[J_2 : IJ_2] = p$. 根据指数的传递性有

$$[J_1 : J_2][J_2 : IJ_2] = [J_1 : IJ_1][IJ_1 : IJ_2]$$

即

$$[J_1 : J_2] = [IJ_1 : IJ_2]$$

□

回忆在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 的时候, 给定非零理想 I , 如果 α 是在 I 中有极小范数的元素, 那么 $I/(\alpha)$ 可以给出一种刻画 I 距离主理想差距到底有多大的量, 这是我们的直观感觉. 下面我们要去严格的说明给定 R 的两个理想, 我们该如何去比较它们.

首先给定 \mathbb{R}^2 的两个格 $L_1 \supset L_2$, 其中 α, β 是 L_1 的基, a, b 是 L_2 的基. 那么存在整系数矩阵 M 满足

$$(a, b) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

我们不妨假设 M 是对角矩阵, 因为我们总可以通过选取合适的基做到这件事, 即 $m_2 = m_3 = 0$, 那么则有

$$\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta/\mathbb{Z}(m_1\alpha) + \mathbb{Z}/(m_4\beta) \cong (\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m_4\mathbb{Z})$$

从而有 $\Delta(L_1)/\Delta(L_2) = |L_1/L_2| = |m_1m_4| = |\det M|$, 其中 $\Delta(L)$ 表示格 L 的面积.

定义 8.3.8. 给定虚二次域的代数整数环 R 的一个理想 I , 其范数 $N(I)$ 定义为 n , 其中 $I\bar{I} = (n)$.

命题 8.3.9. 对于理想的范数, 我们有如下的性质:

1. $N(IJ) = N(I)N(J)$;
2. 如果 $I = (\alpha)$ 是主理想, 那么 $N(I) = N(\alpha)$.

证明: (1). 假设 $N(I) = m, N(J) = n$, 那么 $I\bar{I} = (m), J\bar{J} = (n)$, 从而

$$(IJ)(\bar{I}\bar{J}) = (m)(n) = (mn)$$

即 $N(IJ) = N(I)N(J)$.

(2). 假设 $I = (\alpha)$, 并且用 n 记 α 的范数 $\alpha\bar{\alpha}$, 那么

$$I\bar{I} = (\alpha)(\bar{\alpha}) = (\alpha\bar{\alpha}) = (n)$$

即 $N(I) = n = N(\alpha)$.

□

因此给定虚二次域的代数整数环 R 中的非零理想 I , 一方面我们可以谈它的范数 $N(I)$, 它有很好的可乘性; 另一方面, 我们可以将其视作 \mathbb{R}^2 中的格, 并且有 $|R/I| = \Delta(R)/\Delta(I)$.

命题 8.3.10. 给定虚二次域的代数整数环 R , I 是其非零理想, 那么:

$$N(I) = |R/I| = \Delta(R)/\Delta(I)$$

证明: 假设 $N(I) = n$, 即 $I\bar{I} = (n)$, 那么有

$$n^2 = |R/(n)| = |R/I\bar{I}| = [R:I][I:I\bar{I}]$$

然而根据引理 8.3.7, 有 $[I:I\bar{I}] = [R:\bar{I}] = [R:I]$, 从而 $|R/I| = n$. □

如果我们取 α 是非零理想 I 中最小范数的元素, 由于自然地有包含关系 $(\alpha) \subset I$, 从而有 $N(\alpha) \geq N(I)$, 另一方面, 我们有如下的界:

命题 8.3.11. $N(\alpha) \leq \mu N(I)$, 其中

$$\mu = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{|d|}{3}}, & d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \sqrt{\frac{|d|}{3}}, & d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

是一个不依赖于 I 的数.

证明: 由于 α 是 I 中范数最小的元素, 从而 $\Delta(L) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} N(\alpha)$, 而 $N(I) = \Delta(R)/\Delta(I)$, 从而有

$$N(\alpha) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta(I) = \frac{2}{\sqrt{3}} N(I) \Delta(R)$$

但是根据命题 7.2.5

$$\Delta(R) = \begin{cases} \sqrt{|d|}, & d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{2}\sqrt{|d|}, & d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

从而得到我们想要的结果. □

定理 8.3.12. 给定虚二次域的代数整数环 R , 我们有如下结果:

1. 对于任意 $[I] \in \mathcal{C}(R)$, 存在 $I' \in [I]$ 使得 $N(I') \leq \mu$;
2. 类群 $\mathcal{C}(R)$ 由那些范数是素数 p , 并且小于等于 μ 的素理想生成;
3. $|\mathcal{C}(R)| < \infty$.

证明: (1). 取 I 的有最小范数的元素 α , 根据推论 8.2.6, $(\alpha) \subset I$ 意味着存在理想 J 使得 $(\alpha) = IJ$, 从而

$$(\alpha)\bar{J} = IJ\bar{J} = I(n) \implies I = \frac{\alpha}{n}\bar{J}$$

这意味着 $\bar{J} \in [I]$, 并且

$$N(\alpha) = N(I)N(J) \implies N(\bar{J}) = N(J) \leq \mu$$

那么 \bar{J} 就是我们想要找的 I' .



(2). 任取 $[I] \in \mathcal{C}(R)$, 我们不妨假设 $N(I) \leq \mu$, 对 I 做素理想分解则有 $I = P_1 \dots P_k$, 那么 $N(I) = N(P_1) \dots N(P_k)$, 从而 $N(P_i) \leq \mu, 1 \leq i \leq k$, 因此范数小于等于 μ 的素理想可以生成 $\mathcal{C}(R)$. 根据定理 8.3.5, 素理想 P 的范数要么是 p , 要么是 p^2 , 其中 p 是素数, 并且是后者时 P 是主理想, 从而对应于类群中的单位元, 因此我们可以认为范数是素数 p , 并且小于等于 μ 的素理想对应的等价类生成了整个类群 $\mathcal{C}(R)$.

(3). 由 (2) 即得. □

如上定理即给了我们一个可计算的条件, 根据上述定理, 我们只需要考虑虚二次域的代数整数环 R 中有限多种素理想, 如果它们都是主理想的话, 此时我们就得到了类群 $\mathcal{C}(R)$ 是平凡群, 我们将通过这种办法去进行计算.

例子. $d = -163$ 时, 注意到 $-163 \equiv 1 \pmod{4}$, 则 $R = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$, 并且 $[\mu] = 8$, 因此我们需要考虑那些范数为 $2, 3, 5, 7$ 的素理想 P , 这样的素理想存在当且仅当 $p = 2, 3, 5, 7$ 在 R 中没有生成素理想, 而是分裂成 $P\bar{P}$ 的情形. 对于 $p = 2, 3, 5, 7$ 来说, $x^2 - x + 41$ 模 p 总是不可约的, 从而 $p = 2, 3, 5, 7$ 在 R 中总是生成素理想, 即此时类群平凡.

注记. 用同样的办法, 给定任何 $d < 0$, 你都可以去计算此时的类群是平凡群或不是平凡群, 从而达到了我们最初的目的.

8.4 作业八

练习. 记 R 是 $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ 的代数整数环.

1. 高斯证明了对以下的

$$d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$$

R 是 UFD . 请挑选除了 $d = -1, -2, -3, -163$ 以外的某一个值证明高斯的结论.

2. (选做, 不用交) 高斯还证明了对

$$-d = 5, 6, 10, 13, 15, 22, 35, 37, 51, 58, 91, 115, 123, 187, 235, 267, 403, 427,$$

R 的类数 (通常记作 $h(d)$) 是 2. 请挑选除了 $d = -5$ 以外的一个例子证明高斯的结论. (高斯至少对较小的 $h(d) \leq 5$ 都列出来了 $d < 0$ 的列表, 并猜测这些是对应类数的所有可能的 d . 最终问题的解决是上世纪七八十年代由 Goldfeld-Gross-Zagier 完成的, 与 L 函数有很大关系, 最终对每一个类数 h 可以转化成检验有限种情形的计算.)

练习 (PID 不是 ED). 根据期中试题, 我们知道欧几里德环 R 的 $size$ 函数 $s: R - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 可以选做额外满足条件

$$\text{当非零元素 } a \mid b, \text{ 有 } s(a) \leq s(b) \quad (8.4.1)$$

请证明

1. 证明 $s(a) \geq s(1)$.
2. 当非零元素 a 是 b 的真因子的时候, 有 $s(a) < s(b)$.
3. 证明 $s(a) = s(1)$ 当且仅当 a 是乘法可逆元.



4. 假设 R 不是域. 取 a 是非单位元中使得 $s(a)$ 最小的元素, 则 a 不可约且 $R/(a)$ 的每个陪集的代表元都可选做 0 或者乘法可逆元.
5. 证明 $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ 不是 ED. (提示: 用 $|R/(a)| = N(a)$ 来比较与 $|R^\times|$ 的大小.) 类似的可以证明 $-d = 19, 43, 67, 163$ 时对应的代数整数环不是 ED, 其余几个是 PID 的虚二次域代数整数环是 ED.

练习. Artin Chapter 13, 5.2

练习. Artin Chapter 13, 6.7

练习. 1. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 中证明素理想 $I = (2, 1 + \sqrt{-5})$ 满足 $I = \bar{I}$.

2. 在 $\mathbb{Z}[i]$ 和 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 中, 找到所有满足 $P = \bar{P}$ 的素理想 P .

3. 对一般的无平方因子的负整数 d , 考虑 $R = \mathbb{Z}[a]$ 是 $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ 的代数整数环. 证明 R 中的素理想 $P = \bar{P}$ 当且仅当

(a) $P = (p)$, p 是素数, 且在 R 仍是素元.

(b) $P\bar{P} = (p)$, p 是素数, 且整除 a 满足的二次首一多项式的判别式. (称为 p 在 R 中分歧)

练习 (丢番图问题中的应用). 证明素数 $p \neq 2, 5$ 时, -5 在 \mathbb{F}_p 中是某一个元素的平方 (也称 -5 是模 p 的二次剩余) 等价于存在整数 a, b , 使得 $p = a^2 + 5b^2$ 或者 $2p = a^2 + 5b^2$. (提示: 利用前一题, 以及 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 类群的结构.) 二次剩余的理论能推出来此时 $p \equiv 1, 3, 7, 9 \pmod{20}$.

第三部分

模论





第九章 模的定义、例子与基本性质

9.1 模的定义与例子

定义 9.1.1. 给定环 R , 一个 R -模 (R -module) 是一个阿贝尔群 $(M, +)$ 以及一个 R 的作用 $R \times M \rightarrow M$, 记做 $(r, m) \mapsto rm$, 满足如下公理:

1. $1v = v$;
2. $(rs)m = r(sm)$;
3. $(r + s)m = rm + sm$;
4. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$.

其中 $r, s \in R$ 以及 $m_1, m_2 \in M$.

例子. 域 \mathbb{F} 上的线性空间 V 是 \mathbb{F} -模.

例子. 任意阿贝尔群都是 \mathbb{Z} -模.

例子. 给定域 \mathbb{F} , \mathbb{F} -线性空间 V 以及一个线性变换 $T: V \rightarrow V$, 此时 V 上具有一个 $\mathbb{F}[x]$ -模结构, 如下给出:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}[x] \times V &\rightarrow V \\ (f(x), v) &\mapsto f(T)v\end{aligned}$$

例子. 给定环 R , 我们有如下 R -模:

1. 环 R 可以看成是一个 R -模, 其中 $R \times R \rightarrow R$ 由 R 自身的乘法给出;
2. 环 R 的任何理想 I 可以看出一个 R -模;
3. $R^n = R \times \cdots \times R$, 也可以看成是 R -模, 被称为自由 R -模.

定义 9.1.2. 给定 R -模 M , M 的子模 (submodule) 是 M 的一个阿贝尔群子群 N , 并且对 R 的作用封闭.

命题 9.1.3. 环 R 的一个子集 I 是 R 作为 R -模的子模当且仅当 I 是 R 的理想.

证明: 直接根据定义. □

定义 9.1.4. 给定 R -模 M 以及 M 的子模 N , 商群 M/N 上有一个自然的 R -模结构, 由如下给出:

$$\begin{aligned}R \times M/N &\rightarrow M/N \\ (r, m + N) &\rightarrow rm + N\end{aligned}$$

如此得到的 R -模 M/N 称为商模 (quotient module)

定义 9.1.5. 给定 R -模 M_1, M_2 , 阿贝尔群的外直和 $M_1 \oplus M_2$ 上有自然的 R -模结构, 由如下给出:

$$\begin{aligned}
 R \times M_1 \oplus M_2 &\rightarrow M_1 \oplus M_2 \\
 (r, (m_1, m_2)) &\rightarrow (rm_1, rm_2)
 \end{aligned}$$

9.2 模同态与同态基本定理

定义 9.2.1. 给定 R -模 M_1, M_2 , R -模同态 (R -module homomorphism) 是一个阿贝尔群 $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ 之间的群同态, 并且满足

$$r\varphi(m) = \varphi(rm)$$

对任意 $r \in R, m \in M_1$ 成立.

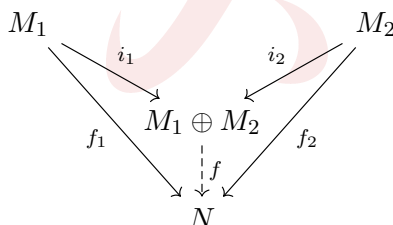
注记. R -模同态 φ 是单 (满, 同构, 自同构) 的, 如果 φ 作为群同态是单 (满, 同构, 自同构) 的. R -模同态的核 (像) 定义为它作为群同态的核 (像).

例子. 给定 R -模 M 以及 M 的子模 N , 如果考虑 M/N 上自然的 R -模结构, 此时投影映射 $\pi : M \rightarrow M/N$ 是 R -模同态.

例子. 给定 R -模 M_1, M_2 以及 R -模同态 φ , 此时 $\ker \varphi$ 是 M_1 的子模, $\text{im } \varphi$ 是 M_2 的子模.

我们有如下与群论/环论中平行的结果:

命题 9.2.2. 给定 R -模同态 $f_1 : M_1 \rightarrow N, f_2 : M_2 \rightarrow N$, 那么存在唯一的 R -模同态 $f : M_1 \oplus M_2 \rightarrow N$ 使得下图交换:



命题 9.2.3. 给定 R -模 M_1, M_2 以及 R -模同态 $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$.

1. 如果 R -模 N 满足 $N \subset \ker \varphi$, 那么存在唯一的 R -模同态 $\bar{\varphi}$ 使得下图交换:
2. $M_1 / \ker \varphi \cong \text{im } \varphi$
3. (对应定理) 如果 φ 此时是满 R -模同态, 那么 M_1 包含 $\ker \varphi$ 的子模与 M_2 的子模一一对应.

定义 9.2.4. 给定 R -模 M 的子模 M_1, M_2 , M 称为 M_1, M_2 的内直和, 如果满足

1. M_1, M_2 生成 M ;
2. $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

命题 9.2.5. 如果 R -模 M 是子模 M_1, M_2 的内直和, 那么有 R -模同构 $M \cong M_1 \oplus M_2$.



定义 9.2.6. 给定 R -模 M_1, M_2, M_3 以及 R -模同态 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2, \psi: M_2 \rightarrow M_3$, 如下序列被称为在 M_2 处**正合** (exact)

$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$$

如果 $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$.

例子. $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是满射当且仅当 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \rightarrow 0$ 在 M_2 处正合; $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是单射当且仅当 $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$ 在 M_1 处正合.

例子. 下述 R -模序列被称为一个**短正合列** (short exact sequence), 如果下列序列在 $M_i, i = 1, 2, 3$ 处都正合:

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \rightarrow 0$$



第十章 自由模

10.1 自由模的定义

定义 10.1.1. 给定集合 X 以及环 R , 定义

$$R^X := \left\{ \sum_{x \in X} a_x x \mid a_x \in R, \text{ 只有有限多个 } a_x \text{ 非零.} \right\}$$

并且如下定义其上的 R -模结构:

$$\begin{cases} (\sum_{x \in X} a_x x) + (\sum_{x \in X} b_x x) = \sum_{x \in X} (a_x + b_x) x \\ r(\sum_{x \in X} a_x x) = \sum_{x \in X} (ra_x) x \end{cases}$$

命题 10.1.2. 任何集合间的映射 $\varphi: X \rightarrow M$ 给出了一个 R -模映射 $\tilde{\varphi}: R^X \rightarrow M$.

证明: 考虑

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: R^X &\rightarrow M \\ \sum_{x \in X} a_x x &\mapsto \sum_{x \in X} a_x \varphi(x) \end{aligned}$$

□

定义 10.1.3. R -模 M 被称为自由模 (free module), 如果存在某个集合 X 使得 $M \cong R^X$ 作为 R -模同构. 特别地, M 被称为有限生成自由模 (finitely generated free module), 如果 X 是有限集.

定义 10.1.4. 给定 R -模 M , M 的子集 B 称为 M 的基, 如果:

1. M 由 B 生成, 即任取 $m \in M, m = \sum_{b \in B} r_b b$, 其中 $r_b \in R$ 并且只有有限多个 b 不是零;
2. B 是 R -线性无关的, 即如果 $0 = \sum_{b \in B} r_b b$, 则 $r_b = 0$.

命题 10.1.5. 给定 R -模 M 以及其的基 B , 那么有如下同构

$$\begin{aligned} R^B &\rightarrow M \\ b &\mapsto b \end{aligned}$$

特别地如果 $|B| = n$, 那么 $M \cong R^n$.

证明: 基的第一个条件保证了满射, 第二个条件保证了单射. □

注记. 上面的命题告诉我们, R -模 M 是自由模当且仅当其存在一组基; R -模 M 是有限生成自由模当且仅当其存在一组有限基.

当 R 是域的时候不难看出此时有限生成自由 R -模就是有限维线性空间, 并且我们知道对于有限维线性空间来说其维数就已经完全决定了它本身. 那么现在一个自然的问题就是, 对于有限生成自由模来说, 如果 B, C 都是它的基, 那么我们是否有 $|B| = |C|$ 呢? 为了解决这个问题, 我们需要借助取值在一般环上的矩阵, 并借助这个工具来研究我们的问题.

环 R 上的矩阵定义为

$$M_{m \times n}(R) := (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

其中 $a_{ij} \in R$, 为了方便我们记 $M_{n \times n}(R)$ 为 $M_n(R)$. 与域上的矩阵类似, 我们有如下的事情:

1. 矩阵乘法与之前相同, 并且此时矩阵乘法也具有结合律, 因为我们的环 R 具有结合律;
2. 我们可以同样地定义行列式映射

$$\det : M_n(R) \rightarrow R$$

并且也满足 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ 对任意 $A, B \in M_n(R)$ 成立;

3. 对于 $A \in M_n(R)$, 我们可以同样地定义伴随矩阵 A^* , 并且满足 $A^*A = AA^* = \det A \cdot I_n$.

定义 10.1.6. 矩阵 $A \in M_{m \times n}(R)$ 被称为可逆 (invertible), 如果存在 $B \in M_{n \times m}(R)$ 使得 $AB = I_m$ 以及存在 $C \in M_{m \times n}(R)$ 使得 $CA = I_n$.

命题 10.1.7. 如果 $A \in M_{m \times n}(R)$ 可逆, 此时一定有 $m = n$, 并且 A 可逆当且仅当 $\det A \in R^\times$, 此时 $B = C = (\det A)^{-1}A^*$.

证明: 取 R 的一个极大理想 I , 此时 R/I 是一个域. 对 $AB = I_m, CA = I_n$ 中的分量做商, 在 R/I 中考虑等式

$$\overline{AB} = I_m, \quad \overline{CA} = I_n$$

根据线性空间的结果我们可知 $m = n$.

现在假设 $A \in M_n(R)$ 是可逆的, 则 $1 = \det I_n = \det A \cdot \det B$ 意味着 $\det A \in R^\times$; 另一方面, 对 $B = C = (\det A)^{-1}A^*$ 直接验证 $AB = CA = I_n$. \square

定义 10.1.8. 环 R 上的一般线性群定义为 $GL_n(R) := \{A \in M_n(R) \mid A \text{ 可逆}\}$.

定义 10.1.9. 给定有限生成自由 R -模 M 以及其一组基 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, 由于任意 $v \in M$ 可以被唯一写成 $v = \sum_{i=1}^n v_i b_i$, 我们称如下列向量为 v 在基 B 下的坐标:

$$[v]_B := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

现在假设 M 的任何一个有限子集 $C = \{c_1, \dots, c_m\}$, 以及 B 是 M 的一组基, 我们有:

命题 10.1.10. $([c_1]_B, \dots, [c_m]_B) = P$ 可逆当且仅当 C 是 M 的一组基. 特别地, M 的任何两组基有相同的元素个数.

证明: 为了方便起见我们用 $(b_1, \dots, b_n)[c_i]_B$ 去记:

$$c_i = \sum_{j=1}^n [c_i]_B^j b_j$$

其中 $[c_i]_B^j$ 是 $[c_i]_B$ 的第 j -行. 利用这种记号, 我们可以记 $(c_1, \dots, c_m) = (b_1, \dots, b_n)P$.

假设 P 可逆, 即此时 $m = n$, 并且存在 $Q \in M_n(R)$ 使得 $PQ = I_n$, 那么:

$$\begin{aligned}(c_1, \dots, c_n)Q &= ((b_1, \dots, b_n)P)Q \\ &= (b_1, \dots, b_n)(PQ) \\ &= (b_1, \dots, b_n)\end{aligned}$$

从而:

1. 任取 $v \in M$, $v = (b_1, \dots, b_n)[v]_B = (c_1, \dots, c_n)(Q[v]_B)$, 即 M 可由 C 生成;
2. $0 = (b_1, \dots, b_n)[0]_B = (c_1, \dots, c_n)(Q[0]_B)$, 由于 $[0]_B$ 是全零组成的列向量, 从而 $Q[0]_B$ 也是.

综上所述 C 此时是 M 的一组基.

假设 B, C 都是 M 的基, 那么

$$\begin{aligned}(c_1, \dots, c_m) &= (b_1, \dots, b_n) = P \\ (b_1, \dots, b_n) &= (c_1, \dots, c_m) = Q\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}(c_1, \dots, c_m) &= (c_1, \dots, c_m)QP \\ (b_1, \dots, b_n) &= (b_1, \dots, b_n)PQ\end{aligned}$$

从而 $QP = I_m, PQ = I_n$, 从而此时 P, Q 可逆, 并且 $m = n$. □

上面的结果告诉我们有限生成自由模的基的大小是良定义的, 即如果 $R^m \cong R^n$, 那么一定有 $m = n$. 我们利用的工具是 R 上的矩阵, 这与线性空间情形我们所做的事情几乎完全一致. 实际上, 我们完全可以通过一些约化将这个问题重新回归到线性代数的情形.

给定环 R 的一个理想 I 以及一个 R -模 M , 那么

$$IM := \left\{ \sum_{i=1}^n r_i m_i \mid r_i \in I, m_i \in M \right\}$$

是 M 的一个子模. 特别地, 如果 I 是一个主理想 (a) , 此时 $IM = aM = \{am \mid m \in M\}$. 在 M/IM 上有一个自然的 R/I -模结构, 并且不难发现作为 R/I -模我们有如下同构:

$$(M_1 \oplus M_2)/I(M_1 \oplus M_2) \cong M_1/IM_1 \oplus M_2/IM_2$$

其中 M_1, M_2 是 R -模.

推论 10.1.11. 给定环 R , 如果 $R^m \cong R^n$, 那么 $m = n$.

证明: 取 R 的极大理想 I , 那么有作为 R/I -模我们有

$$(R/I)^n \cong R^n/IR^n \cong R^m/IR^m \cong (R/I)^m$$

然而 R/I 是一个域, 从而

$$(R/I)^n \cong (R/I)^m$$

是作为线性空间的同构, 从而 $m = n$. □

总而言之, 有限生成自由模的结构总是简单的. 事实上, 我们更关心那些有限生成模的结构, 这也是下一节的关心内容.

10.2 主理想整环上的有限生成自由模的结构定理

定义 10.2.1. R -模 M 被称为是有限生成的 (finitely generated), 如果存在一个有限生成模 R^n 以及如下满同态

$$R^n \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

即 $M \cong R^n / \ker \varphi$.

注意到有限生成自由模的子模并不一定有限生成, 从而 $\ker \varphi$ 一般来说可能会很复杂. 现在我们期待一个比较好的条件, 使得此时的 $\ker \varphi$ 都是有限生成模.

命题 10.2.2. 对于环 R 来说, 如下条件等价:

1. 没有严格递增的理想序列

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \dots$$

其中 I_i 都是 R 的理想;

2. R 的任何理想都是有限生成的;

3. 任何有限生成 R -模的子模都是有限生成的.

满足上述条件之一的环被称为诺特环 (noetherian ring).

证明: (1) 到 (2). 假设 I 不是有限生成的, 任取 $a_1 \in I$, 则 $(a_1) \subsetneq I$, 取 $a_2 \in I \setminus (a_1)$, 从而 $(a_1) \subsetneq (a_1, a_2) \subsetneq I$. 不断重复上述操作则可以得到一个理想的严格升链.

(2) 到 (1). 任给一个理想序列 $I_1 \subset I_2 \subset \dots$, 考虑 $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, 由于 I 是有限生成的, 这意味着存在 $a_1, \dots, a_n \in I$ 使得 $I = (a_1, \dots, a_n)$. 并且不难发现存在足够大的 N 使得 $a_1, \dots, a_n \in I_N$, 这意味着这个理想升链到 I_N 时已经稳定, 即不是严格上升.

(3) 到 (2). 注意到 R 作为 R -模的子模恰是 R 的理想;

(2) 到 (3). 首先我们有如下观察:

1. 对于正合列 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \rightarrow 0$, 如果 M_1 是有限生成的, 那么 M_2 也是. 这是显然的, 因为 M_1 是有限生成的等价于存在满射 $R^n \rightarrow M_1$, 只需要复合 φ 即可得到 R^n 到 M_2 的满射;
2. 对于短正合列 $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \rightarrow 0$, 如果 M_1, M_3 都是有限生成的, 那么 M_2 也是. 假设 M_3 由 v_1, \dots, v_n 生成, 那么选取 $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ 使得 $\psi(\bar{v}_i) = v_i, 1 \leq i \leq n$. 假设 M_1 由 w_1, \dots, w_m 生成, 并且记 $\tilde{w}_i = \varphi(w_i)$. 任取 $\tilde{v} \in M_2$, 记 $\psi(\tilde{v}) = \sum_{i=1}^n r_i v_i$, 那么

$$\psi(\tilde{v} - \sum_{i=1}^n r_i \tilde{v}_i) = 0$$

从而 $\tilde{v} - \sum_{i=1}^n r_i \tilde{v}_i \in \ker \psi = \text{im } \varphi$, 即 $\tilde{v} - \sum_{i=1}^n r_i \tilde{v}_i = \sum_{j=1}^m s_j \tilde{w}_j$. 即 M_2 可由 $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m$ 生成.

根据上述观察, 我们做以下约化:

1. 根据对应定理以及观察 (1), 我们只需要对有限生成自由模 R^n 证明其所有的子模都是有限生成的即可.
2. 注意到我们有如下的短正合列:

$$0 \rightarrow R^{n-1} \rightarrow R^n \rightarrow R \rightarrow 0$$

3. 利用归纳, 我们只需要证明 R 作为 R -模的子模都是有限生成的即可, 然而这恰是 (2).

□

命题 10.2.3. 如果 R 是诺特环, 则对任意理想 I 有 R/I 是诺特环.

定理 10.2.4. 如果 R 是诺特环, 则 $R[x]$ 是诺特环.

例子. R 是主理想整环, 则 R 是诺特环.

现在如果 R 是诺特环, M 是有限生成 R -模, 即存在如下正合列:

$$\ker \varphi \rightarrow R^n \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

并且此时 $\ker \varphi$ 是有限生成的, 从而存在满态射 $R^m \rightarrow \ker \varphi$, 即我们可以写作正合列:

$$R^m \xrightarrow{\psi} R^n \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

并且 $M \cong R^n / \text{im } \psi$. 如果我们能对态射 ψ 有很好的刻画, 那么我们就可以对诺特环上的有限生成模有一个较好的刻画.

给定 R^n 的一组基 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ 以及 R^m 的一组基 $C = \{c_1, \dots, c_m\}$, 我们可以将 ψ 写成矩阵的形式, 即:

$$(\psi(c_1), \dots, \psi(c_m)) = (b_1, \dots, b_n)A$$

其中 $A = (a_{ij})$ 由如下关系给出:

$$\psi(c_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$$

为了表示 A 对于基 B, C 的依赖性, 我们通常也记做 $[\psi]_B^C := A$. 如果我们能够选取 R^n, R^m 合适的基 B, C , 使得矩阵 $[\psi]_B^C$ 有尽可能简单的形式, 从而我们可以得到我们期待的结果. 幸运的是, 当 R 是主理想整环的时候, 确实有如此好的事情.

注记. 由于 $\psi \circ \varphi = 0$, 从而

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \psi(b_i) = 0$$

并且由于 $\{\psi(b_1), \dots, \psi(b_n)\}$ 生成了 M , 因此我们可以将 M 视作是由 $\{\psi(b_1), \dots, \psi(b_n)\}$ 生成, 并且满足上述关系.

从现在开始到本节结束, 除非特殊说明, 我们总假设 R 是指主理想整环.

定理 10.2.5. 给定 R -模同态 $\psi: R^m \rightarrow R^n$, 我们可以选出 R^m, R^n 的基使得 ψ 在这些基下的表达式为

$$[\psi]_B^C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_s & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]_{n \times m}$$

其中 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$.

推论 10.2.6. 如果 M 是有限生成 R -模, 则

$$M \cong R/(d_1) \oplus R/(d_2) \oplus \cdots \oplus R/(d_s) \oplus R^{n-s}$$

其中 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$.

定理 10.2.7. 给定有限生成 R -模 M , 如果 $(d_1) \neq R$, 我们有 d_1, \dots, d_s 被 M 完全决定. 此时 (d_1, \dots, d_s) 称为 M 的不变因子组.

例子. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, 即此时 $d_1 = 6$.

例子. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, 此时 $d_1 = 3, d_2 = 18$.

定理 10.2.5 的证明. 首先给定 R^n, R^m 的基 B, C , 并且令 $B' = BP, C' = CQ$, 那么有

$$[\psi]_{B'}^{C'} = P^{-1}[\psi]_B^C Q$$

这是 ψ 在基变换下的变换公式. 回忆我们在线性空间的时候, 我们可以通过初等行列变换来得到矩阵的相抵标准型, 这里我们要做类似的事情. 给定矩阵非零矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

首先我们假设 R 是欧几里德整环, 其上的带有的函数记做 σ .

1. 第一步: 通过变换行与列, 我们可以选取 a_{11} 使得 $\sigma(a_{11}) = \min_{i,j} \{\sigma(a_{ij}) \mid a_{ij} \neq 0\}$
2. 第二步: 通过带余除法, 我们可以做到 $\sigma(a_{1i}) < \sigma(a_{11}), \sigma(a_{1j}) < \sigma(a_{11})$, 对任意的 $i = 2, \dots, m, j = 2, \dots, n$.
3. 此时再重复上述一、二两个步骤, 经过有限次行列变换之后, 我们可以得到 $a_{11} \neq 0, a_{1i} = a_{1j} = 0$, 对任意的 $i = 2, \dots, m, j = 2, \dots, n$ 成立. 即此时有:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

4. 第三步: 此时我们需要 a_{11} 可以整除右下角的 $(n-1) \times (m-1)$ 阶的子矩阵中每一个元素. 如果不然, 不妨假设 $a_{11} \nmid a_{i2}$, 我们不妨将第 i 行加到第一行得到

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

此时再重复第一、二步即可.

5. 通过归纳假设, 我们可以得到经过有限次行列变换之后, A 的相抵标准型为我们期待的结果.

对于 R 是主理想整环的时候, 我们不能再进行辗转相除法, 但是整体上的思路是几乎一致的:

1. 第一步: 通过变换行与列, 我们可以选取 $a_{11} \neq 0$.
2. 第二步: 当 $i \geq 2$ 时, 我们考虑如下两种情况:
 - (a) 如果 $(a_{1i}) \subset (a_{11})$, 那么直接通过行列变换将 a_{1i} 消去;
 - (b) 如果 $(a_{1i}) \not\subset (a_{11})$, 那么考虑 (a_{11}, a_{1i}) 生成的主理想 (d) , 此时有

$$d = ka_{11} + la_{1i}$$

$$a_{11} = md$$

$$a_{1i} = nd$$

其中 $k, l, m, n \in R$. 考虑 A 右乘 B , 其中 B 是 $(1, 1), (1, i), (i, 1), (i, i)$ 元分别为 $k, -n, l, m$, $j \neq 2$ 的时候 (j, j) 元为 1, 其余都为零的可逆矩阵. 如果用 A' 去记这个新得到的矩阵, 即 $a'_{11} = d$, 那么我们有 $(a'_{11}) \supseteq (a_{11})$. 如果还存在 $i \geq 2$ 使得 $(a'_{1i}) \not\subset (a'_{11})$, 则不断重复上述操作, 由于升链总会稳定, 因此在有限步行列变换之后我们一定可以得到一个矩阵, 使得第一行除了 $(1, 1)$ 元以外都是零; 同样的可以对列做同样的事情, 最终可以得到

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

3. 第三步: 同之前.

□

注记. 在主理想整环证明的情形, 我们实际上也可以找一个函数来替代欧几里德整环情形下的 σ : 给定 $r \in R$, 我们用 $\sigma(r)$ 记 r 的素因子分解中的素因子个数. 此时我们需要一个类似辗转相除的操作来使得进行这个操作后得到的元素满足函数 σ 在其上的值严格小于操作前. 这实际上是在第二步 (b) 中的操作: 假设 $(a_{1i}) \not\subset (a_{11})$, 我们可以找到一个可逆矩阵 B' 使得 AB' 的 $(1, i)$ 元为 a_{1i}, a_{11} 的最大公因子 d , 显然 d 的素因子分解的素因子个数严格小于 a_{1i} , 这便达成了我们的要求.

定义 10.2.8. 如果 R 是一个整环, 给定 R -模 M , 其**挠子模** (torsion submodule) 定义为:

$$M_{\text{tor}} := \{m \in M \mid \text{存在 } r \in R \setminus \{0\} \text{ 使得 } rm = 0\}$$

注记. 可以根据定义直接验证 M_{tor} 是一个子模.

给定一个有限生成 R -模 M , 首先我们可以将其分解为

$$M = R/(d_1) \oplus \cdots \oplus R/(d_s) \oplus R^{n-s}$$

我们现在的目的在于说明如果 $(d_1) \neq R$, d_1, \dots, d_s 是被 M 唯一决定的. 首先从上述同构可以看出 $M_{\text{tor}} \cong R/(d_1) \oplus \cdots \oplus R/(d_s)$, 即我们有如下短正合列:

$$0 \rightarrow M_{\text{tor}} \rightarrow M \rightarrow R^{n-s} \rightarrow 0$$

此时我们有 s 是内蕴的, 即 s 由 M 唯一决定. 为了想要进一步说明 d_1, \dots, d_s 都由 M 决定, 我们需要考虑更精细的结构.

定义 10.2.9. 给定一般的环 R , R -模 M 被称为**循环模** (cyclic module), 如果存在下述正合列:

$$R \rightarrow M \rightarrow 0$$

命题 10.2.10. 假设 R -模 M 是循环模, 则有如下分解

$$M \cong R/(p_1^{n_1}) \oplus \cdots \oplus R/(p_k^{n_k})$$

其中 p_1, \dots, p_k 是互不相同的素元.

证明: 由于 R -模 M 是循环模, R 是主理想整环, 从而 $M \cong R/(d)$, $d \neq 0$, 将 d 做如下分解:

$$d = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

其中 p_1, \dots, p_k 是不同的素元, 再利用中国剩余定理即可. □

现在回到我们的情况, 假设 R -模 M 有如下同构

$$M \cong R/(d_1) \oplus \cdots \oplus R/(d_s)$$

我们可以对 d_s 做如下分解:

$$d_s = p_1^{n_{1,s}} \cdots p_k^{n_{k,s}}$$

其中 $n_{i,s} \geq 1, 1 \leq i \leq k$. 由于有整除关系, 我们可知对任意的 $1 \leq r \leq s$, 我们有

$$d_r = p_1^{n_{1,r}} \cdots p_k^{n_{k,r}}$$

其中 $0 \leq n_{i,1} \leq \cdots \leq n_{i,r} \leq \cdots \leq n_{i,s}, 1 \leq i \leq k$. 从而我们有如下分解

$$\begin{aligned} M \cong & R/(p_1^{n_{1,1}}) \oplus \cdots \oplus R/(p_k^{n_{k,1}}) \\ & \oplus R/(p_1^{n_{1,2}}) \oplus \cdots \oplus R/(p_k^{n_{k,2}}) \\ & \cdots \\ & \oplus R/(p_1^{n_{1,s}}) \oplus \cdots \oplus R/(p_k^{n_{k,s}}) \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

我们称 $\{p_i^{n_{i,r}} \mid n_{i,r} \geq 1\}$ 为 M 的初等因子.

命题 10.2.11. 给定 R -模 M , 其初等因子组与不变因子组之间可以相互决定.

证明: 与线性代数的时候情形相同. □

定义 10.2.12. R 是一个整环, 给定环 R 的一个素元 p 以及 R -模 M , 其 p -**挠子模** (p -torsion submodule) 定义为:

$$M_{(p)} := \{m \in M \mid \text{存在 } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ 使得 } p^n m = 0\}$$

注记. 可以根据定义直接验证 $M_{(p)}$ 是一个子模.

命题 10.2.13. 分解 10.2.1 可以被写成

$$M \cong M_{(p_1)} \oplus \cdots \oplus M_{(p_s)}$$

证明: 任取 $m = m_1 + \cdots + m_s$, 其中 $m_i \in R/(p_i^{n_{i,1}}) \oplus \cdots \oplus R/(p_i^{n_{i,s}})$. 如果 $m \in M_{(p_1)}$, 那么存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 使得

$$p_1^n m = 0$$

这意味着 $p_1^n m_i = 0$ 对每一个 i 都成立. 现在假设 $i \geq 2$, 我们把 m_i 更详细的写成 $m_i = m_{i,1} + \cdots + m_{i,s}$, 其中 $m_{i,r} \in R/(p_i^{n_{i,r}})$. 那么有

$$p_1^n (m_{i,1} + \cdots + m_{i,s}) = 0$$

意味着 $p_1^n m_{i,r} = 0$ 对 $1 \leq r \leq s$ 都成立. 由于 p_1 和 $p_i, i \geq 2$ 互素可知 $m_{i,r} = 0$, 即此时有 $m \in R/(p_1^{n_{1,1}}) \oplus \cdots \oplus R/(p_1^{n_{1,s}})$, 即

$$M_{(p_1)} \subseteq R/(p_1^{n_{1,1}}) \oplus \cdots \oplus R/(p_1^{n_{1,s}})$$

反包含关系是显然的, 从而我们有

$$M_{(p_1)} = R/(p_1^{n_{1,1}}) \oplus \cdots \oplus R/(p_1^{n_{1,s}})$$

即

$$M \cong M_{(p_1)} \oplus \cdots \oplus M_{(p_s)}$$

□

上述结果表明 M 的初等因子组可以由 $M_{(p_i)}$ 的分解来决定, 那么问题在于我们如何确定出每一个 $M_{(p_i)}$ 该如何分解呢?

例如我们先考虑下述简单的例子:

$$M \cong \mathbb{Z}/(p^2) \oplus \mathbb{Z}/(p) \oplus \mathbb{Z}/(p)$$

其中 p 是一个素数. 我们现在想定义一个内蕴的量来区分 p 和 p^2 , 自然的想法如下:

定义 10.2.14. R 是一个一般的环, p 是 R 的一个素元, M 是一个 R -模, 我们定义如下子模

$$M[p] := \{m \in M \mid pm = 0\}$$

并且不难发现 $M[p]$ 上存在 $R/(p)$ -模结构.

特别地, 当 R 是主理想整环, p 是 R 的素元时, $R/(p)$ 是一个域, 即此时 $M[p]$ 是一个线性空间, 并且

$$\dim_{R/(p)} M[p]$$

完全由 M 本身决定, 例如在上面的例子中, 可以直接看出 $M[p] = \mathbb{Z}/(p) \oplus \mathbb{Z}/(p) \oplus \mathbb{Z}/(p)$, 此时 $M[p]$ 作为 $\mathbb{Z}/(p)$ -线性空间的维数为 3.

命题 10.2.15. 假设 R -模 M 同构于

$$M \cong R/(p^{n_1}) \oplus \dots R/(p^{n_s})$$

其中 p 是 R 的素元, $n_1 \leq \dots \leq n_s$, 那么 $M[p] \cong (R/(p))^{\oplus s}$.

到这里实际上我们几乎已经解决了我们的问题. 类似地我们可以定义 $M[p^2]$ 等等, 从 $M \cong \mathbb{Z}/(p^2) \oplus \mathbb{Z}/(p) \oplus \mathbb{Z}/(p)$ 我们可以看出 $\dim_{\mathbb{Z}/(p)} M$ 确定了 ≥ 1 的 n_r 的个数, 同样的 $\dim_{\mathbb{Z}/(p^2)} M$ 确定了 ≥ 2 的 n_r 的个数.

因此对于 R -模 M , 如果我们想要确定其初等因子组 $\{p_i^{n_{i,r}} \mid n_{i,r} \geq 1\}$, 我们只要对每一个可能的 p_i 不断计算 $M[p_i], M[p_i^2], \dots$ 的维数, 我们就可以从 M 确定其初等因子组. 再由于初等因子组可以唯一确定不变因子组, 至此我们证明了定理 10.2.7.

定义 10.2.16. 如果 R 是一个整环, R -模 M 被称为**无挠的**, 如果 $M_{\text{tor}} = 0$.

推论 10.2.17. M 是有限生成 R -模, R 是主理想整环¹, 则 M 无挠等价于 M 自由.

推论 10.2.18 (有限阿贝尔群的结构定理). M 是有限生成阿贝尔群, 则有

$$M \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^l$$

其中 $2 \leq d_1 \mid \dots \mid d_s, l \geq 0$, 并且这些数由 M 唯一决定.

10.3 若尔当标准型

另一个主理想整环上有限生成模的结构定理的重要的应用, 就是用这个观点重新看我们在线性代数中所学过的事情. \mathbb{F} 是一个域, 给定有限维 \mathbb{F} -线性空间 V 以及其上的线性变换 T , 我们如下给 V 一个 $\mathbb{F}[\lambda]$ -模结构:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[\lambda] \times V &\rightarrow V \\ (f(x), v) &\mapsto f(T)v \end{aligned}$$

记做 (V, T) . 此时 V 作为 $\mathbb{F}[\lambda]$ -模也是有限生成的. 对于另一个线性变换 T' , 称 (V, T) 和 (V, T') 是等价的, 如果他们作为 $\mathbb{F}[\lambda]$ -模是同构的.

命题 10.3.1. 如果记 T, T' 在 V 的一组基 B 下的矩阵表示分别为 $[T]_B, [T']_B$, 那么 (V, T) 于 (V, T') 等价当且仅当 $[T]_B$ 和 $[T']_B$ 相似.

证明: 根据定义直接验证. □

推论 10.3.2. 我们有如下对应:

$$\{\text{域 } \mathbb{F} \text{ 上 } n \text{ 阶矩阵的相似类}\} \xleftrightarrow{1-1} \{\dim_{\mathbb{F}} V = n, V \text{ 上 } \mathbb{F}[\lambda]\text{-模结构的同构类}\}$$

¹虽然在本节开头已经声明如无特殊声明 R 都是主理想整环, 但在这里我们还是依然强调这个事实.

现在我们只需要应用我们的结构定理去给出 $\mathbb{F}[\lambda]$ -模同构类的情况, 从而给出 n 阶矩阵相似类的情况. 先给定 V 的一组基 $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, 并用矩阵 $[T]_B$ 来记 T 在这组基下的矩阵. 由于作为 \mathbb{F} -模, V 可以由 B 生成, 从而作为 $\mathbb{F}[\lambda]$ -模, V 也可以由 B 生成. 由于

$$\lambda \cdot (v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_n) [T]_B$$

从而我们有

$$(\lambda I - [T]_B^t) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0 \quad (10.3.1)$$

其中 $[T]_B^t$ 表示 $[T]_B$ 的转置, 这是 V 作为 $\mathbb{F}[\lambda]$ -模生成元所满足的关系. 现在我们可以得到我们的第一个结论.

推论 10.3.3 (Cayley-Hamilton). 给定线性空间 V 上的线性变换 T , 并且 T 在基 B 下的矩阵表示为 $[T]_B$, T 的特征多项式 $f(\lambda)$ 定义为 $\det(\lambda I - [T]_B)$, 那么 $f([T]_B) = 0$

证明: 将式 (10.3.1) 左乘 $(\lambda I - [T]_B^t)$ 的伴随矩阵 $(\lambda I - [T]_B^t)^*$, 则有

$$(\det(\lambda I - A^t)) I \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0$$

这意味着 $(\det(\lambda I - [T]_B^t))v_i = 0$ 对任意的 $i = 1, \dots, n$ 都成立, 即任取 $v \in V$, 有 $(\det(\lambda I - [T]_B^t))v = 0$, 从而 $\det(\lambda I - [T]_B^t) = 0$. 再由于行列式在转置下不变, 则有 $f([T]_B) = 0$. \square

另一方面, 根据注记 10.2, 可知只要将 $(\lambda I - [T]_B^t)$ 通过行列变换化为

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_s & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]_{n \times n}$$

的形式, 则有 V 作为 $\mathbb{F}[\lambda]$ -模同构于

$$\mathbb{F}[\lambda]/(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}[\lambda]/(d_s) \oplus (\mathbb{F}[\lambda])^{n-s}$$

其中 $d_1 | \cdots | d_s$ 是首一多项式. 由于 $\mathbb{F}[\lambda]$ 作为 \mathbb{F} -线性空间是无穷维的, 而 V 作为 \mathbb{F} -线性空间是有限维的, 从而一定有 $n = s$. 即作为 $\mathbb{F}[\lambda]$ -模有如下同构

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F}[\lambda]/(d_i)$$

并且可以发现 T 的特征多项式 $f(\lambda)$ 等于 $\prod_{i=1}^n d_i$. 注意到任取 $v \in V$, $d_n([T]_B)v = 0$, 从而 $f([T]_B) = 0$, 这便又给出了 Cayley-Hamilton 定理的另一个证明. 这些 $\{d_i\}_{i=1}^n$ 就是在线性代数中所学到的线性变换 T 的不变因子组, 并且 d_n 叫做 T 的极小多项式.

命题 10.3.4.

$$\{f \in \mathbb{F}[\lambda] \mid f(T) = 0\} = (d_n)$$

证明: 从上述分解即得. □

由于不变因子组 $\{d_n\}_{i=1}^n$ 可能存在常多项式, 不妨假设从 $i \geq k$ 开始 d_i 不是常多项式, 并且假设 $d_i = x^{n_i} + a_{n_i-1}x^{n_i-1} + \cdots + a_0$, 那么 $\mathbb{F}[\lambda]/(d_i)$ 视作 \mathbb{F} -线性空间有一组基 $\{1, x, \dots, x^{n_i-1}\}$, 并且

$$T(1, x, \dots, x^{n_i-1}) = (1, x, \dots, x^{n_i-1}) A_i$$

其中 A_i 是 d_i 的友阵. 因此我们可以找到 V 的一组基使得 T 在这组基下的矩阵为分块对角矩阵 $\text{diag}\{A_k, \dots, A_n\}$, 其中 A_i 是 d_i 的友阵, 这叫作 T 的有理标准型.

如果此时我们考虑域 \mathbb{F} 是复数域 \mathbb{C} , 那么我们不妨记 $d_i = \prod_{j=1}^l p_j^{n_{ij}}$, 其中 $p_j^{n_{ij}} = (\lambda - \lambda_j)^{n_{ij}}$. 那么我们则有

$$\mathbb{C}[\lambda]/(d_i) = \bigoplus_{j=1}^l \mathbb{C}[\lambda]/(\lambda - \lambda_j)^{n_{ij}}$$

对于每一个因子 $\mathbb{C}[\lambda]/(\lambda - \lambda_j)^{n_{ij}}$ 来说, 其有如下的一组 \mathbb{C} -基,

$$1, \lambda - \lambda_j, \dots, (\lambda - \lambda_j)^{n_{ij}-1}$$

并且不难发现

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - \lambda_j \\ \vdots \\ (\lambda - \lambda_j)^{n_{ij}-1} \end{pmatrix} = J_{\lambda_j}(n_{ij}) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - \lambda_j \\ \vdots \\ (\lambda - \lambda_j)^{n_{ij}-1} \end{pmatrix}$$

其中

$$J_{\lambda_j}(n_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{pmatrix}_{n_{ij} \times n_{ij}}$$

被称为 Jordan 块, 并且从这里可以直接看出 λ_j 是 T 的一个特征值. 并且我们可以找到一组基, 使得 T 在这组基下的矩阵为分块对角矩阵, 并且每一个分块都是 Jordan 块, 这就是在线性代数中所学过的 Jordan 分解. 并且注意到 T 是可对角化的当且仅当每一个 $n_{ij} = 1$, 即 d_n 没有重根.

推论 10.3.5. 线性变换 T 可对角化当且仅当其极小多项式没有重根.

10.4 作业九

练习. 证明在 R -模 M 中 $(-1)m = -m$.

练习. 证明一个环的理想在环的乘法下做成环上的模.



练习. Artin, Chapter 14, 1.2

练习. Artin, Chapter 14, 1.4

练习. Artin, Chapter 14, 2.1

练习. Artin, Chapter 14, 2.2

练习. Artin, Chapter 14, 2.4

练习. 假设 Cayley-Hamilton theorem 对任意域成立, 证明 Cayley-Hamilton theorem 对任意环 R 成立. 即对于 $A \in M_n(R)$, 以及其特征多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \lambda^n + s_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + s_0 \in R[\lambda]$. 证明 $f(A) = 0$.

练习. 特征多项式的系数可以定义函数 $s_i: M_n(R) \rightarrow R$. 证明 s_i satisfies $s_i(AB) = s_i(BA)$.

练习. Artin, Chapter 14, 6.1

练习. Artin, Chapter 14, 6.2

练习. 假设 $A \in M_3(\mathbb{Q})$, 并且 $A^5 = I$, 找出所有可能的 A .

练习. 对于 $A \in M_n(F)$, 用 $D \subset M_n(F)$ 记所有与 A 交换的矩阵.

1. 对 A 的初等因子提什么条件, 有 D 仅由 A 的多项式组成? 找出一个充分必要条件.
2. 对 A 的初等因子提什么条件, 任何非零的 $B \in D$ 都可逆? 找出一个充分必要条件.

练习. (丘赛 2011) 令 V 是一个有限维 \mathbb{R} 线性空间, $T: V \rightarrow V$ 是一个线性变换, 满足

1. T 的极小多项式不可约.
2. 存在 $v \in V$ 使得 $\{T^i v \mid i \geq 0\}$ 张成 V .

证明 V 不含有非平凡的 T -不变子空间.

练习. 令 T 是线性空间 V 上的线性变换, 对其初等因子提什么要求, 可以使得对任何 T 不变子空间 W , 存在 T 不变子空间 W' 满足 $W \oplus W' = V$.

练习. (Harvard Qualifying exam 1996) 令 $M \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个复矩阵, 并且相似于其共轭, 即存在 $g \in GL_n(\mathbb{C})$ 使得 $\bar{M} = gMg^{-1}$. 证明 M 相似于一个实矩阵.

练习. 证明两个 \mathbb{Q} 上的矩阵 A, B 在 $M_n(\mathbb{Q})$ 中相似当且仅当它们在 $M_n(\mathbb{C})$ 中相似.

练习. 1. 证明如果 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 可逆, 则其平方根存在.

2. 对于 $n \geq 2$, 给出一个例子 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 使得其平方根不存在.

练习. 令 $A \in M_n(F)$, 其中 F 是一个域, 证明 A 与 A 的转置相似.

练习. 证明 \mathbb{Q}/\mathbb{Z} 作为 \mathbb{Z} -模不是有限生成的, 对于 $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}[t]$ 作为 $\mathbb{C}[t]$ -模呢?

练习. 令 M 是一个 R -模, $N \subset M$ 是其子模. 证明 $M \cong N \oplus (M/N)$, 如果 M/N 是一个自由 R -模.

练习. 给出一个非诺特环的例子.

练习. 令 R 是虚二次数域的代数整数环, 如果一个 R -模由 n 个元素生成, 那么它的子模需要多少生成元? 尝试去给出最少需要生成元个数的估计.

练习. Artin, Chapter 14, M.8

练习. 一个模被称为循环模, 如果其由一个元素生成. 分类所有循环 $\mathbb{R}[x]$ -模.



10.5 作业十

练习. Artin, Chapter 14, 7.3

练习. Artin, Chapter 14, 7.7

练习. Artin, Chapter 14, 7.8

练习. Artin, Chapter 14, 7.9

练习. 令 G 是一个有限阿贝尔群, d 是其元素的最大阶数. 证明 G 中所有元素的阶都整除 d . 利用这个事实去证明域 F 的乘法群 F^\times 的任何有限子群都是循环的.

练习. Artin, Chapter 14, 8.1

练习. Artin, Chapter 14, 8.2

练习. Artin, Chapter 14, 8.4. (注意, 这里表示矩阵 (presentation matrix) 是将生成元的每条关系的系数按行向量排在一起的矩阵, 如果是 n 个生成元, m 条关系, 则该矩阵为 $m \times n$ 矩阵.)

练习. Artin, Chapter 14, 8.6

练习. 令 $G = \text{GL}(3, \mathbb{F}_2)$.

1. G 有多少共轭类?
2. 证明 G 只有两个大小为 24 的共轭类.

练习. 证明对于有限生成 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ -模, 无挠不等价于自由.

练习. 找出 $\mathbb{Z}/27 \times (\mathbb{Z}/9)^2 \times (\mathbb{Z}/3)^3$ 阶为 27 的子群的个数.

练习. 1. 对于 \mathbb{Z} -模 $M \cong \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$, 找出满足 $M_1 \cong \mathbb{Z}/9, M_2 \cong \mathbb{Z}/3, M_3 \cong \mathbb{Z}/3$ 使得 $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$, 这样三元组的个数.

2. (思考题, 比较复杂, 学有余力且觉得这个问题有趣时选做) 对于一般主理想整环上的模 M , 我们知道 M 同构于循环模 $R/(p_i^{n_{ij}})$ 的直和, 其中 $p_i^{n_{ij}}$ 是初等因子, 那么有多少组 M 的循环子模实现了这种直和? 例如对有限阿贝尔群的情形做一般的计算.

练习. 1. 证明欧几里德整环上的任何可逆矩阵都是初等矩阵的乘积.

2. (思考题, 比较复杂, 学有余力且觉得这个问题有趣时选做) 证明第一条对 $R = \mathbb{Z}[\frac{\sqrt{-19}+1}{2}]$ 不成立. 见: Cohn, P. M. (1966). On the structure of the GL_2 of a ring. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 30, 5-53.

练习.

定义 10.5.1. 令 R 是一个主理想整环, $A \in M_{m \times n}(R)$. 第 i_1, i_2, \dots, i_k 行和第 j_1, j_2, \dots, j_k 列组成的子矩阵的行列式被称为 A 的一个 $k \times k$ 子式. 所有 $k \times k$ 子式的最大公因子被称为行列式因子 a_k .

1. 当 R 是欧几里德整环时, 证明 a_k 不随着 A 左乘或右乘可逆矩阵而改变.
2. (选做, 不用交) 证明上述论断对 R 是主理想整环时也成立.

3. 证明行列式因子与不变因子彼此决定.

练习. 一个模被称为半单的如果它是一些单模的直和. 令 R 是一个主理想整环, 分类所有的有限生成半单 R -模. 并且证明任何半单模的子模都是半单的.

练习 (选做题, 比较复杂, 学有余力且觉得这个问题有趣时选做). 试分类 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 上的有限生成模.



第四部分

二次型



第十一章 双线性型

现在我们开始研究域上的双线性型. 如果不加特殊说明, 在本部分中我们总是假设 \mathbb{F} 是特征不为 2 的域, V, W 是 \mathbb{F} -线性空间.

11.1 双线性型与格拉姆矩阵

定义 11.1.1. \mathbb{F} -线性空间 V 的对偶空间 (dual space) 定义为

$$V^* := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F}) = \{f : V \rightarrow \mathbb{F} \text{ 是 } \mathbb{F}\text{-线性映射}\}$$

我们有如下自然的配对:

$$\begin{aligned} g : V^* \times V &\rightarrow \mathbb{F} \\ (f, v) &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

并且这个配对是双线性的, 即

1. 固定 $f \in V^*$, 任取 $v_1, v_2 \in V$ 有 $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$; 任取 $\lambda \in \mathbb{F}, v \in V$, 有 $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.
2. 固定 $v \in V$, 任取 $f_1, f_2 \in V^*$ 有 $(f_1 + f_2)v = f_1(v) + f_2(v)$; 任取 $\lambda \in \mathbb{F}, f \in V^*$, 有 $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

命题 11.1.2. 我们有如下典范的同构

$$(V^*)^* \cong V$$

证明: 考虑配对 $g : V^* \times V \rightarrow \mathbb{F}$ 给出的如下同构

$$\begin{aligned} l_g : V &\rightarrow (V^*)^* \\ v &\mapsto g(v, -) \end{aligned}$$

□

定义 11.1.3. 给定 \mathbb{F} -线性空间 V, W , 映射 $f : V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ 被称为**双线性**的 (bilinear), 如果

1. $f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$ 对任意的 $v_1, v_2 \in V, w \in W$ 成立.
2. $f(\lambda v, w) = \lambda f(v, w)$ 对任意的 $v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{F}$ 成立.
3. $f(v, w_1 + w_2) = f(v, w_1) + f(v, w_2)$ 对任意的 $v \in V, w_1, w_2 \in W$ 成立.
4. $f(v, \lambda w) = \lambda f(v, w)$ 对任意的 $v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{F}$ 成立.

给定一个双线性映射 $f: V \times W \rightarrow \mathbb{F}$, 固定 $w \in W$, 则可以得到线性映射

$$\begin{aligned} f_w: V &\rightarrow \mathbb{F} \\ v &\mapsto f(v, w) \end{aligned}$$

即 $f_w \in V^*$, 从而有如下线性映射

$$\begin{aligned} W &\rightarrow V^* \\ w &\mapsto f_w \end{aligned}$$

推论 11.1.4. 我们有如下一一对应:

$$\{\text{双线性映射 } f: V \times W \rightarrow \mathbb{F}\} \xLeftrightarrow{1-1} \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V^*)$$

证明: 给定 $\varphi: W \rightarrow V^*$ 是线性映射, 考虑如下映射即可

$$f(v, w) := (\varphi(w))(v)$$

□

定义 11.1.5. \mathbb{F} -线性空间 V 上的一个**双线性型** (bilinear form)指的是双线性映射 $f: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$.

由于 V 上的一个双线性型等价于 $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V^*)$ 中的一个元素, 因此我们可以通过取定 V, V^* 的基来研究双线性型对应的矩阵来研究双线性型. 考虑如下的基: 给定 V 一族基 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 考虑 V^* 中的元素 e_1^*, \dots, e_n^* , 定义为

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

我们断言 $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ 构成了 V^* 的一组基, 称做 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的对偶基.

1. $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ 张成 V^* : 任取 $f: V \rightarrow \mathbb{F}$, 令 $a_i = f(e_i)$, 则 $f = \sum_{i=1}^n a_i e_i^*$, 因为对任意的 e_j 我们都有

$$(f - \sum_{i=1}^n a_i e_i^*)(e_j) = a_j - a_j = 0$$

2. $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ 线性无关: 假设 $\sum_{i=1}^n a_i e_i^* = 0$, 那么对任意的 j 有

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i e_i^*(e_j) = a_j$$

现在我们要看一下对偶基在基变换下的表现: 假设 $\{e_1, \dots, e_n\}, \{v_1, \dots, v_n\}$ 是 V 的两组基, 并且

$$(e_1, \dots, e_n) = (v_1, \dots, v_n)P$$

其中 P 是 $n \times n$ 矩阵.

命题 11.1.6.

$$(e_1^*, \dots, e_n^*) = (v_1^*, \dots, v_n^*)(P^t)^{-1}$$

证明: 注意到 v_i 是 $(e_1, \dots, e_n)P^{-1}$ 的第 i 个列向量, 从而

$$v_i = \sum_{k=1}^n (P^{-1})_{ki} e_k$$

即 $e_j^*(v_i) = (P^{-1})_{ji}$. 因此

$$e_j^* = \sum_{i=1}^n (P^{-1})_{ji} v_i^*$$

即

$$(e_1^*, \dots, e_n^*) = (v_1^*, \dots, v_n^*)(P^t)^{-1}$$

□

定义 11.1.7. 假设 $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ 是 V 的一组基, V 上双线性型 g 对于基 B 的格拉姆矩阵 (gram matrix) 定义为

$$G_B = (g(v_i, v_j))_{n \times n}$$

命题 11.1.8. \mathbb{F} -线性空间 V 上的双线性型一一对应于 $M_n(\mathbb{F})$, 其中对应由格拉姆矩阵给出.

证明: 给定双线性型 g , 显然它的格拉姆矩阵是 $n \times n$ 矩阵; 另一方面, 给定 $n \times n$ 矩阵 $(g(v_i, v_j))$, 任取 $v, w \in V$, 写作

$$v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

$$w = \sum_{j=1}^n y_j v_j$$

那么定义双线性型 g 如下

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i g(v_i, v_j) y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n) G_B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

并且不难看出这个对应是个双射.

□

命题 11.1.9. 若 $(e_1, \dots, e_n) = (v_1, \dots, v_n)P$, 那么

$$G_{B'} = P^t G_B P$$

证明: 注意到

$$\begin{aligned} (G_{B'})_{ij} &= g(e_i, e_j) \\ &= g\left(\sum_{k=1}^n p_{ik} v_k, \sum_{l=1}^n p_{jl} v_l\right) \\ &= \sum_{k,l=1}^n p_{ik} p_{jl} g(v_k, v_l) \\ &= (P^t G_B P)_{ij} \end{aligned}$$

□

命题 11.1.10. 给定 \mathbb{F} -线性空间 V 上的双线性型 g , 我们用如下符号去记如下两个线性映射:

$$\begin{aligned}
 l_g : V &\rightarrow V^* & r_g : V &\rightarrow V^* \\
 v &\mapsto g(v, -) & v &\mapsto g(-, v)
 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 [l_g]_B^{B^*} &= G_B^t \\
 [r_g]_B^{B^*} &= G_B
 \end{aligned}$$

证明: 直接验证则有

$$\begin{aligned}
 (l_g(v_i))(v_j) &= g_{v_j, v_i} = (G_B)_{ji} \\
 (r_g(v_i))(v_j) &= g_{v_i, v_j} = (G_B)_{ij}
 \end{aligned}$$

□

11.2 对称、反对称双线性型与厄尔米特型

我们之后将主要关心如下三种双线性型.

定义 11.2.1. 双线性型 g 被称为是**对称的** (symmetric), 如果 $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$, 对任意的 $v_1, v_2 \in V$ 成立.

定义 11.2.2. 双线性型 g 被称为是**反对称的** (skew-symmetric), 如果 $g(v_1, v_2) = -g(v_2, v_1)$, 对任意的 $v_1, v_2 \in V$ 成立.

定义 11.2.3. 如果 \mathbb{F} 上带有如下自同构:

$$\begin{aligned}
 \sigma : \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{F} \\
 a &\mapsto \bar{a}
 \end{aligned}$$

满足 $\sigma^2 = \text{id}$. V 上的一个双线性型 g 被称为一个**厄尔米特型** (Hermitian form), 如果 g 对第一个分量线性, 对第二个分量 σ 线性.

注记. 上述三种双线性型可以用格拉姆矩阵如下刻画:

1. g 是对称双线性型当且仅当格拉姆矩阵是对称矩阵;
2. g 是反对称双线性型当且仅当格拉姆矩阵是反对称矩阵;
3. g 是厄尔米特型当且仅当格拉姆矩阵 G_B 满足 $G_B = \overline{G_B^t}$.

命题 11.2.4. 对于双线性型 g , 如下三条等价:

1. G_B 是可逆的;
2. r_g 是同构;
3. l_g 是同构.

满足这样条件的 g 被称为**非退化的** (non-degenerate).

而对于一般的情况, 我们需要有一种量来刻画 g 与非退化情况相差的程度.

命题 11.2.5. 对于双线性型 g , 我们有

$$\ker r_g = \ker l_g$$

证明: 直接如下验证:

$$\begin{aligned} \ker r_g &= \{v \in V \mid r_g(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid g(-, v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid g(w, v) = 0, \forall w \in V\} \\ &= \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \forall w \in V\} \\ &= \{v \in V \mid g(v, -) = 0\} \\ &= \ker l_g \end{aligned}$$

□

定义 11.2.6. 对于双线性型 g , 其核定义为

$$\ker g := \ker r_g = \ker l_g$$

注记. 对于双线性型 g , 其可以诱导如下的双线性型

$$\begin{aligned} \bar{g} : V/\ker g \times V/\ker g &\rightarrow \mathbb{F} \\ g(\bar{v}_1, \bar{v}_2) &\mapsto g(v_1, v_2) \end{aligned}$$

不难发现双线性型 \bar{g} 是非退化的.

定义 11.2.7. 给定 V 的一个子空间 W , W 在双线性型 g 下的正交补 (orthogonal complement) 定义为

$$W^\perp := \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

定义 11.2.8. 给定 V 的两个子空间 V_1, V_2 , 称 V 是 V_1, V_2 在双线性型 g 下正交直和, 记做 $V = V_1 \perp V_2$, 如果

1. $V = V_1 \oplus V_2$;
2. $g(v_1, v_2) = 0$ 对任意的 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ 成立.

命题 11.2.9. g 是 V 上的双线性型, W 是 V 的子空间, 则如下叙述等价:

1. $V = W \perp W^\perp$;
2. $g|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{F}$ 非退化;
3. $g|_{W^\perp} : W^\perp \times W^\perp \rightarrow \mathbb{F}$ 非退化.

证明: 我们首先断言如果 g 非退化, 则

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W$$

因为当 g 非退化时, $l_g : V \rightarrow V^*$ 是一个同构. 并且嵌入 $i : W \rightarrow V$ 给出了满射 $i^* : W^* \rightarrow V^*$, 从而有如下满射:

$$V \xrightarrow{r_g} V^* \xrightarrow{i^*} W^*$$

注意到 $\ker(i^*r_g) = W^\perp$, 从而有

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W^* = \dim V - \dim W$$

并且由于 W, W^\perp 已经自然满足正交直和的第二个条件, 所以 $V = W \perp W^\perp$ 等价于 $V = W \oplus W^\perp$, 这等价于 $W \cap W^\perp = \{0\}$. 并且注意到 $\ker(r_g|_W) = W \cap W^\perp$, 因此 $W \cap W^\perp = \{0\}$ 等价于 $r_g|_W$ 是同构, 即 $g|_W$ 上是非退化的; 用一样的论断可以 $W \cap W^\perp = \{0\}$ 等价于 $r_g|_{W^\perp}$ 是同构. \square

注记. 对一般的双线性型 g 来说, 我们只有 $W \subset (W^\perp)^\perp$.

11.3 对称双线性型与厄尔米特型的分类

本节的目的在于对特殊的 \mathbb{F} 去分类 \mathbb{F} -线性空间 V 上的对称双线性型以及厄尔米特型, 对于更一般的情形将在之后 Witt 理论的部分讲述. 当然, 分类是在如下等距同构的意义下.

定义 11.3.1. 给定 $(V_1, g_1), (V_2, g_2)$, 一个等距同构 (isometry) 指的是一个线性同构 $f: V_1 \rightarrow V_2$, 满足

$$g_2(f(v), f(w)) = g_1(v, w)$$

对任意 $v, w \in V_1$.

注记. 如果 V 对于双线性型 g 可以写成正交直和分解 $V = V_1 \perp V_2$, 那么实际上我们有如下的等距同构

$$(V, g) \cong (V_1 \oplus V_2, g_1 \oplus g_2)$$

其中 $g_i, i = 1, 2$ 是 g 限制在 V_i 上得到的.

根据命题 11.2.9, 如果我们可以找到 V 的一个子空间 W , 使得 g 限制在其上是非退化的, 那么我们就可以将 V 进行正交直和分解 $V = W \perp W^\perp$, 即我们可以把 g 写成两个双线性型直和的形式, 这可以帮助我们进行分类.

V 最简单的 (非平凡) 子空间当然是一维的子空间, 任取 $v \in V$ 考虑 $W = \text{span}\{v\}$, 那么 $g|_W$ 是否非退化取决于 $g(v, v)$ 是否为零.

定义 11.3.2. $q: V \rightarrow \mathbb{F}$ 是一个线性函数, q 被称为一个二次型 (quadratic form), 如果存在一个对称双线性型 g 使得 $q(v) = g(v, v)$.

命题 11.3.3. 对于对称双线性型 g , 有

$$g(v+w, v+w) - g(v, v) - g(w, w) = 2g(v, w)$$

证明: 显然. \square

推论 11.3.4. 二次型 q 如下决定了一个双线性型

$$g(v, w) := \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$$

定义 11.3.5. (V, g) 的一组基 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 被称为是正交基, 如果对任意 $i \neq j$ 有 $g(v_i, v_j) = 0$.

定理 11.3.6. 如果 V 是一个 \mathbb{F} -线性空间, g 是其上的一个对称双线性型, 那么 (V, g) 存在正交基.

证明: 我们不妨假设 g 是非退化的, 那么一定存在 $v \in V$ 使得 $g(v, v) \neq 0$, 否则 g 对应的二次型 q 恒为零, 再根据推论 11.3.4, 可知 g 恒为零. 那么如果记 $W = \text{span}\{v\}$, 则有 $g|_W$ 是非退化的, 即

$$V = W \perp W^\perp$$

再对 V 的维数利用归纳法即可. □

推论 11.3.7. 如果 g 是非退化的对称双线性型, 任取 $v \in V$ 使得 $g(v, v) \neq 0$, 则 v 可以被延拓成 V 的一组正交基.

注记. 需要注意的是, 即便是你给出了一些相互正交的向量, 它们也不一定可以延拓成一组正交基.

在一组正交基下 $\{v_1, \dots, v_n\}$, 对称双线性 g 的格拉姆矩阵是一个对角阵, 这实际上我们已经完全分类了 g , 因为 g 完全可以由这些对角线上的元素所刻画. 在 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 的时候, 我们可以做的更加具体.

定理 11.3.8 (惯性定理). V 是一个 \mathbb{R} -线性空间, g 是其上的对称双线性型, 那么存在一组正交基 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 使得

1. $g(v_1, v_1) = \dots = g(v_p, v_p) = 1$;
2. $g(v_{p+1}, v_{p+1}) = \dots = g(v_{p+q}, v_{p+q}) = -1$;
3. $g(v_{p+q+1}, v_{p+q+1}) = \dots = g(v_n, v_n) = 0$.

其中 $(p, q, n - p - q)$ 由 g 决定.

证明: 存在性是容易的, 因为对于 \mathbb{R} -线性空间上的对称双线性型 g , 我们总可以找到正交基, 那么只需要调整正交基的模长以及顺序即可.

唯一性: 首先 $n - p - q$ 由 g 决定是显然的, 因为 $n - p - q = \dim(\ker g)$. 为了证明 p 和 q 的唯一性, 我们需要再引入一些概念. □

定义 11.3.9. \mathbb{R} -线性空间上的对称双线性型 g 被称为

1. **正定的** (positive definite), 如果 $g(v, v) > 0$ 对任意的 $v \neq 0$ 成立, 记做 $g > 0$.
2. **负定的** (negative definite), 如果 $g(v, v) < 0$ 对任意的 $v \neq 0$ 成立, 记做 $g < 0$.
3. **半正定的** (semi-positive definite), 如果 $g(v, v) \geq 0$ 对任意的 $v \neq 0$ 成立, 记做 $g \geq 0$.
4. **半负定的** (semi-negative definite), 如果 $g(v, v) \leq 0$ 对任意的 $v \neq 0$ 成立, 记做 $g \leq 0$.

命题 11.3.10. $g > 0$ 当且仅当对任意的正交基 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 有 $g(v_i, v_i) > 0$.

证明: 显然. □

下面的命题将完成定理 11.3.8 的证明.

命题 11.3.11.

$$p = \max\{\dim W : W \text{ 是 } V \text{ 的子空间, 并且 } g|_W > 0\}$$

证明: 我们记 $p' = \max\{\dim W \mid W \text{ 是 } V \text{ 的子空间, 并且 } g|_W > 0\}$. 首先取 $W = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$, 由于 $g|_W > 0$, 那么有 $p \leq p'$. 假设 $p' > p + 1$, 那么存在 W 使得 $W \cap \{v_{p+1}, \dots, v_n\} \neq \{0\}$, 取 $0 \neq v \in W \cap \{v_{p+1}, \dots, v_n\}$, 那么

$$g(v, v) \leq 0$$

矛盾. □

定义 11.3.12. 由 \mathbb{R} -线性空间 V 上的对称双线性型 g 确定的 $(p, q, n - p - q)$ 称为 g 的符号 (signature).

注记. 给定 \mathbb{R} -线性空间 V 上的一组基 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 以及一个对称正定双线性型 g , 我们可以通过如下的办法得到一组标准正交基 $\{w_1, \dots, w_n\}$, 即 $g(w_i, w_j) = \delta_{ij}$. 这被称为格拉姆-施密特正交化 (Gram-Schmidt process). 为了符号上的简洁, 我们记 $\|v\| = \sqrt{g(v, v)}$.

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ w_2 &= \frac{v_2 - g(v_2, w_1)w_1}{\|v_2 - g(v_2, w_1)w_1\|} \\ w_3 &= \frac{v_3 - g(v_3, w_1)w_1 - g(v_3, w_2)w_2}{\|v_3 - g(v_3, w_1)w_1 - g(v_3, w_2)w_2\|} \\ &\vdots \\ w_n &= \frac{v_n - \sum_{i=1}^{n-1} g(v_n, w_i)w_i}{\|v_n - \sum_{i=1}^{n-1} g(v_n, w_i)w_i\|} \end{aligned}$$

可以直接验证这样得到的是 V 的一组标准正交基.

命题 11.3.13. 任取 \mathbb{R} -线性空间 V 的一组基 $\{v_1, \dots, v_n\}$, 给定 V 上的一个对称正定双线性型 g , 存在一组标准正交基 $\{w_1, \dots, w_n\}$ 使得

$$(w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_n)A$$

其中 A 是对角线全部大于零的上三角矩阵.

证明: 这就是格拉姆-施密特正交化. □

推论 11.3.14 (可逆矩阵的 QR 分解). 给定 n 阶可逆矩阵 M , 存在正交矩阵 Q 以及对角线大于零的上三角矩阵 R , 使得 $M = QR$.

对于 \mathbb{F} -线性空间 V 上的厄尔米特型 g , 由于它和对称双线性型非常类似, 都满足某种对称性, 实际上我们可以用上节类似的办法来进行分类. 回忆此时 \mathbb{F} 带有一个阶为 2 的自同构 σ , 我们记

$$\mathbb{F}^\sigma = \{\lambda \in \mathbb{F} \mid \sigma(\lambda) = \lambda\}$$

定义厄尔米特型 g 对应的二次型 q 如下

$$q(v) := g(v, v)$$

它是一个从 V 到 \mathbb{F}^σ 的线性函数, 因为 $\overline{g(v, v)} = g(v, v)$.

命题 11.3.15. $q = 0$ 当且仅当 $g = 0$

证明: 显然 $g = 0$ 意味着 $q = 0$. 另一方面, 由于 $\sigma \neq \text{id}$, 存在 $a \in \mathbb{F}$ 使得 $\sigma(a) \neq a$, 即 $b = \sigma(a) - a \neq 0$. 并且 b 满足 $\sigma(b) = -b$. 则考虑

$$\begin{aligned} g(v + bw, v + bw) &= g(v, v) + b\bar{b}g(w, w) + bg(w, v) + \bar{b}g(v, w) \\ &= g(v, v) - b^2g(w, w) + b(g(w, v) - g(v, w)) \\ g(v + w, v + w) &= g(v, v) + g(w, w) + g(w, v) + g(v, w) \end{aligned}$$

从而 $q = 0$ 意味着

$$\begin{aligned} g(w, v) - g(v, w) &= 0 \\ g(w, v) + g(v, w) &= 0 \end{aligned}$$

从而有 $g = 0$. □

从而利用与上节完全相同的办法, 有

定理 11.3.16. 如果 V 是一个 \mathbb{F} -线性空间, g 是其上的一个厄尔米特型, 那么 (V, g) 存在正交基.

和 \mathbb{R} -线性空间不同的是, 在 \mathbb{C} 中 -1 可以开平方, 从而一定存在一组标准正交基 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 使得

1. $g(v_1, v_1) = \dots = g(v_p, v_p) = 1$;
2. $g(v_{p+1}, v_{p+1}) = \dots = g(v_n, v_n) = 0$.

其中 $n - p$ 是 $\ker g$ 的维数.

11.4 反对称双线性型的分类

对于域 \mathbb{F} 上线性空间 V 的反对称双线性型 g , 我们有如下的结果.

命题 11.4.1. 存在一组 V 的基使得 g 对于这组基的格拉姆矩阵为如下分块对角矩阵

$$\text{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0\right\}$$

证明: 不妨假设 g 是非退化的. 任取 $0 \neq v \in V$, 存在 $w \in V$ 使得 $g(v, w) \neq 0$, 显然这样的 w 和 v 是线性无关的, 因为 $g(v, v) = 0$. 对 w 进行一些标准化处理我们不妨假设 $g(v, w) = 1$, 那么 $g(w, v) = -1$. 考虑由 $\{v, w\}$ 张成的二维子空间 W , 则有 $g|_W$ 的格拉姆矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

是非退化的, 从而 $V = W \perp W^\perp$, 再利用归纳即可. □

注记. 从上面的结果来看, 反对称双线性型 g 的结构相对简单, 并且不依赖于基域的选取 (在作业中已经看到过对于对称双线性型来说, 对一般的域即便是 $\dim V = 1$ 的情形双线性型也有非常丰富的结构).

推论 11.4.2. 对任意反对称矩阵 A , 存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^T A P = \text{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0\right\}$$

对于反对称矩阵来说, 还有一个有趣的事情可以通过上述标准型来解释. 注意到当矩阵阶数为奇数的时候, $\det A$ 总是零, 所以我们更关心偶数阶的反对称矩阵的行列式应该是什么样子, 经过如下计算

例子.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

此时 $\det A = a^2$.

例子.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

此时 $\det A = (af - be + dc)^2$.

对于一般的偶数 $2n$, 由于 $\det(P^T A P) = 1$, 我们总有 $\det A$ 是某一个数的平方, 这个数被称为 A 的**普法夫值** (Pfaffian), 记做 $\text{pf } A$. 上面的计算结果说明这个数还是矩阵 A 中分量的组合, 这并非是一个巧合, 我们现在来证明这件事.

我们将反对称矩阵 $A = (t_{ij})$ 看成是环 $R = \mathbb{Z}[t_{ij}], 1 \leq i < j \leq 2n$ 上的 $2n$ 阶矩阵, 那么自然也可以看成是其分式域 $K(R)$ 上的矩阵, 从而有

$$\det A = |\det(P^{-1})|^2 \in K(R)$$

再利用下面的引理即可:

引理 11.4.3. 如果 R 是唯一分解整环, $r \in R$ 是 $K(R)$ 中的平方, 那么 r 也是 R 中的平方.

11.5 作业十一

练习. 令 g 是实线性空间 V 上的双线性型, 证明如果 g 满足 $g(x, y) = 0$ 当且仅当 $g(y, x) = 0$, 则 g 要么是对称的, 要么是反对称的.

练习. Artin chapter 8 1.1.

练习. 令 F 是一个特征不为 2 的域, 并且其上带有一个阶为 2 的自同构, 记做 $\sigma(z) = \bar{z}$. 域论的结果¹告诉我们存在 $a \in F$ 使得 $\sigma(a) = -a$. 令 g 是 F -线性空间 V 上的一个反对称厄尔米特型, 即 $B(v, w) = -\overline{B(w, v)}$, 证明 $a \cdot g$ 是一个厄尔米特型.

¹这里我们先承认, 如果你感兴趣的话可以自己尝试证明.



练习. 令 V 是有限维复线性空间

1. 如果 h 是 V 的一个厄尔米特型, 如果记

$$h(x, y) = g(x, y) + i\omega(x, y)$$

其中 g, ω 是实值的. 证明 g, ω 是 \mathbb{R} -双线性的, 并且 g 是对称的, ω 是反对称的.

2. 如果 $g : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ 是 \mathbb{R} -双线性的. 假设对任意的 $x \in E$, 映射 $y \mapsto g(x, y)$ 是 \mathbb{C} -线性的, 并且 R -双线性型

$$f(x, y) = g(x, y) - g(y, x)$$

是实值的. 证明存在 V 上的厄尔米特型 h 和对称 \mathbb{C} -双线性型 ψ on E 使得 $2ig = h + \psi$, 并且 h 和 ψ 都是唯一的.



第十二章 内积空间上的线性算子

12.1 复内积空间上的自伴随算子与酉算子

定义 12.1.1. 一个带有正定的厄尔米特型 g 的 \mathbb{C} -线性空间 V 被称为一个复内积空间, 记做 (V, g) .

注记. 为了方便起见, 我们记 $\langle v, w \rangle := g(v, w), v, w \in V$.

12.1.1 自伴随算子

定义 12.1.2. 给定 V 上的线性变换 T , 任取 $w \in V$, $\langle T-, w \rangle$ 确定了 V 上的一个线性函数, 那么存在唯一的 $w^* \in V$, 使得

$$\langle T-, w \rangle = \langle -, w^* \rangle$$

定义 T 的伴随 (adjoint) 算子 $T^* : V \rightarrow V$ 为 $w \mapsto w^*$.

注记. 如果 g 非退化, 那么

$$\begin{aligned} r_g : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto \langle -, v \rangle \end{aligned}$$

给出了一个同构. 从而任取 $w \in V$, 我们可以找到 $w^* \in V$, 使得线性函数 $\langle T-, w \rangle = \langle -, w^* \rangle$, 这就保证了 w^* 的存在性.

命题 12.1.3. 如上定义的 T^* 是一个线性映射, 并有如下的性质:

1. $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$;
2. $(T^*)^* = T$;
3. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$;
4. $(T_1 T_2)^* = (T_2)^* (T_1)^*$;

定义 12.1.4. 如果线性变换 T 满足 $T = T^*$, 那么称 T 是自伴随的 (self-adjoint).

注记. 如果用格拉姆矩阵的语言来说, T 是自伴随算子当且仅当其格拉姆矩阵是厄尔米特矩阵.

命题 12.1.5. T 是自伴随算子当且仅当 $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$ 对任意的 $v \in V$ 成立.

证明: 如果 T 是自伴随算子, 那么任取 $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle &= \langle v, T^* v \rangle \\ &= \langle v, Tv \rangle \\ &= \overline{\langle Tv, v \rangle} \end{aligned}$$

如果 $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$, 那么任取 $v \in V$

$$\begin{aligned}\langle Tv, v \rangle &= \overline{\langle Tv, v \rangle} \\ &= \langle v, Tv \rangle \\ &= \langle T^*v, v \rangle\end{aligned}$$

即对任意 $v \in V$ 有 $\langle (T - T^*)v, v \rangle = 0$. 为了证明 $T - T^* = 0$, 我们需要用到之前用过的一个技巧, 即极化恒等式: 对于任意的线性变换 A , 我们有

$$\begin{aligned}\langle A(v+w), A(v+w) \rangle &= \langle Av, v \rangle + \langle Aw, w \rangle + \langle Av, w \rangle + \langle v, Aw \rangle \\ \langle A(v+iw), A(v+iw) \rangle &= \langle Av, v \rangle - \langle Aw, w \rangle - i\langle Av, w \rangle + i\langle v, Aw \rangle\end{aligned}$$

从而

$$\langle Av, w \rangle = \frac{1}{2}\langle A(v+w), A(v+w) \rangle + \frac{i}{2}\langle A(v+iw), A(v+iw) \rangle$$

根据上述观察从而有 $\langle (T - T^*)v, w \rangle = 0$ 对任意 $v, w \in V$ 成立, 从而有 $T = T^*$, 因为 g 是非退化的. \square

命题 12.1.6. 如果 T 是自伴随算子, $W \subset V$ 是 T 不变子空间, 那么 W^\perp 也是 T 不变子空间.

证明: 任取 $v \in W^\perp, w \in W$, 那么

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle = \langle v, Tw \rangle = 0$$

从而有 $Tv \in W^\perp$. \square

推论 12.1.7. 如果 T 是自伴随算子, 那么存在一组 V 的标准正交基 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 使得 $T(v_i) = \lambda_i v_i, i = 1, \dots, n$.

证明: 任取 T 的一个特征值 λ 以及对应的单位长度的特征向量 v , 那么 $W = \text{span}\{v\}$ 是 T 不变子空间, 从而有 W^\perp 也是 T 不变子空间, 从而做归纳即可. \square

推论 12.1.8. 如果 T 是自伴随算子, 那么 T 可对角化, 特征值全为实数, 并且不同特征值对应的特征子空间是相互正交的.

证明: 只需要证明特征值全为实数: 任取 T 的特征值 λ_i , 以及对应的特征向量 v_i , 那么

$$\begin{aligned}\overline{\lambda_i} \langle v_i, v_i \rangle &= \langle v_i, T^*v_i \rangle \\ &= \langle Tv_i, v_i \rangle \\ &= \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle\end{aligned}$$

\square

12.1.2 酉算子

定义 12.1.9. 如果线性变换 T 满足 $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ 对任意的 $v, w \in V$ 成立, 那么称 T 为酉算子 (unitary).

注记. 用伴随算子的语言来说, T 是酉算子当且仅当 TT^* 是恒等, 即酉算子总是可逆的, 其逆为其伴随算子.

命题 12.1.10. 如果 T 是酉算子, $W \subset V$ 是 T 不变子空间, 那么 W^\perp 也是 T 不变子空间.

证明: 任取 $v \in W^\perp, w \in W$, 那么

$$\langle Tv, w \rangle = \langle Tv, TT^{-1}w \rangle = \langle v, T^{-1}w \rangle = 0$$

从而有 $Tv \in W^\perp$. □

推论 12.1.11. 如果 T 是酉算子, 那么 T 可对角化, 特征值满足 $\bar{\lambda}\lambda = 1$, 并且不同特征值对应的特征子空间是相互正交的.

注记. 实际上, 上述定理被称为谱定理, 并且对正规算子都成立, 其中正规算子的定义如下:

定义 12.1.12. 算子 T 被称为正规算子 (normal operator), 如果 $TT^* = T^*T$.

12.2 实内积空间上的对称算子与正交算子

这次我们来考虑 V 是 \mathbb{R} -线性空间, g 是正定对称双线性型的情况. 任给 V 上的线性变换 A , 同样¹的我们可以定义其转置算子 A^t , 定义由下述方式给出

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^t w \rangle$$

其中 $v, w \in V$. 并且用格拉姆矩阵的语言来说, 如果 B 是 V 的一组标准正交基, 那么

$$[A]_B^t = [A^t]_B$$

定义 12.2.1. 线性变换 $A: V \rightarrow V$ 被称为对称算子, 如果 $A = A^t$.

定义 12.2.2. 线性变换 $A: V \rightarrow V$ 被称为正交算子, 如果 $A^{-1} = A^t$.

命题 12.2.3. 如果 A 是对称算子或正交算子, 那么任取 V 的 A -不变子空间 W , W^\perp 也是 A -不变子空间.

证明: 同之前. □

回忆证明自伴随算子和酉算子可对角化时, 关键的步骤则是利用上述命题加上一维不变子空间的存在性来做归纳, 但是对于实线性空间上的线性变换, 其不总是存在一维不变子空间, 这是实线性空间与复线性空间的一个很大区别.

但幸运的是, 事情没有十分糟糕, 实线性空间上的线性变换总是存在不变子空间的, 并且维数最多是 2, 即

引理 12.2.4. $A: V \rightarrow V$ 是线性变换, 那么 V 存在一个 A 不变子空间 W , 其中 $\dim_{\mathbb{R}} W = 1, 2$.

¹因为在之前的情形, 定义伴随算子的时候我们只用到了 g 是非退化的, 所以这里我们依然可以利用 g 的非退化性去定义 A^t .

证明：这依赖于 $\mathbb{R}[x]$ 上的不可约多项式最高只有二次。 □

因此，我们只需要搞清楚在 $\dim V = 1, 2$ 的时候对称算子以及正交算子的分类，那么对一般的情况只需要写成这些情况的分块即可。

例子. 假设 A 是对称算子。

1. 当 $\dim V = 1$ 时， V 上的任何线性变换都是对称算子；
2. 当 $\dim V = 2$ 时，不妨取 V 的一组基将 A 写作是 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ，那么其特征多项式为

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$$

计算其判别式可以发现

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$$

即其总是存在一个特征值，从而 A 存在一个一维的不变子空间。

推论 12.2.5. 如果 A 是对称算子，则 A 总可以对角化。

例子. 假设 A 是正交算子。

1. 当 $\dim V = 1$ 时， V 上的正交算子只有 $\pm I$ ；
2. 当 $\dim V = 2$ 时，不妨取 V 的一组基将 A 写作是 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，那么 A 是正交算子当且仅当

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

由于 $\det A = \pm 1$ ，那么

(a) 当 $\det A = 1$ 时， $d = a, b = -c, a^2 + b^2 = 1$

(b) 当 $\det A = -1$ 时， $d = -a, b = c, a^2 + b^2 = 1$ 。

从而 A 有如下两种可能：

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

注意后者可以被视作是反射，总存在一维不变子空间，而前者不存在一维不变子空间当且仅当 $\theta \neq 0, \pi \pmod{2\pi}$ 。

推论 12.2.6. 如果 A 是正交算子，则存在 V 的一组标准正交基，使得 A 在这组基下的矩阵为分块对角矩阵

$$\text{diag}\{R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, -1, \dots, -1, 1, \dots, 1\}$$

其中 $\theta_i \neq 0, \pi \pmod{2\pi}$ 。

注记. 正交算子以及酉算子组成的集合构成了群，但是对称算子以及自伴随算子组成的集合不构成群。



定义 12.2.7. 给定 $0 \neq v \in V$, 关于以 v 为法向量平面的反射 T 定义为

$$T(w) = w - 2 \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

命题 12.2.8. 我们有如下性质:

1. T 是正交算子;
2. T 有如下特征子空间分解

$$V = W \perp W^\perp$$

其中 $W = \text{span}\{v\}$.

证明: 直接验证即可. □

命题 12.2.9. 假设 A 是正交算子, 那么 A 可以写成不超过 n 个反射的复合, 其中 $n = \dim V$.

注记. 上述结果对一般的特征非零的域上的线性空间 V , 以及一般的对称双线性型 g 的情形也是成立的, 在下一节对的 Witt 定理将证明这件事情.

12.3 作业十二

练习. 证明可对角化的线性变换在任何不变子空间上也是可对角化的.

练习. 请分类 \mathbb{Q} 上的一维对称双线性型的同构类。

练习. 请证明 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 做为 Gram 矩阵定义在 \mathbb{Q}^2 上的两个对称双线性型不同构。

练习. Artin Chapter 8, 4.12.

练习. Artin Chapter 8, 4.13.

练习. Artin Chapter 8, 6.8.

练习. Artin Chapter 8, 6.12.

练习. Artin Chapter 8, 6.19.

练习. (V, g) 是一个复内积空间.

1. 证明 V 上的自伴随算子 T 通过 $h(v, w) = \langle Tv, w \rangle, v, w \in V$ 定义了一个厄尔米特型.
2. 证明 h 是正定的当且仅当 T 的所有特征值都是正数, 此时我们称自伴随算子 T 是正定的.
3. 证明 h 是正定的当且仅当存在正定的自伴随算子 P 使得 $T = P^2$, 并且这样的 P 被 T 唯一决定, 我们记 $P = T^{\frac{1}{2}}$.
4. 证明任何 V 上的可逆线性算子 Q , 算子 $T = Q^*Q$ 是厄尔米特的, 并且是正定的.
5. 符号承上, 证明 $U = QP^{-1}$ 是一个酉算子. 即对于可逆算子 Q , 可以写成 $Q = UP$, 其中 P 是正定自伴随的, U 是酉算子, 并且 U, P 由 Q 唯一决定, 这对可逆算子 Q 证明了极分解 (polar decomposition).



练习 (Courant-Fischer-Weyl min-max principle). 设 (V, g) 是一个复内积空间, 假设 T 是一个厄尔米特算子, 有实特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. 证明其特征值可以由如下方法给出.

$$\lambda_k = \min \left\{ \max \{ \langle T(x), x \rangle : x \perp W_k, |x| = 1 \} : W_k \subset E \text{ 子空间}, \dim W_k = k - 1 \right\}$$

这里先固定 $k - 1$ 维子空间 W_k , 取出对应的最大值

$$\max \{ \langle T(x), x \rangle : x \perp W_k, |x| = 1 \}.$$

然后让 W_k 取遍 $k - 1$ 维子空间, 取出这些值中的最小值。

练习 (Cauchy's interlace theorem). 令 A 是一个 $n \times n$ 的厄尔米特矩阵, B 是其 $m \times m$ 顺序主子式, 其中 $m < n$. 如果 A 的特征值是 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, 以及 B 的特征值是 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_m$, 那么对于任意的 $1 \leq i \leq m$, 有

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+n-m}.$$

提示: 使用上一个习题.

练习 (Sylvester's criterion). 证明一个厄尔米特矩阵是正定的当且仅当其顺序主子式都是正定的. 提示: 使用上一个习题.

练习. Lang Chapter XV, exercise 5

练习. Lang Chapter XV, exercise 6

练习. Lang Chapter XV, exercise 7

12.4 作业十三

练习 (Hermann Weyl's question). 令 A, B 是两个 2×2 阶的厄尔米特矩阵, 其特征值分别为 $\lambda_1 \leq \lambda_2$ 和 $\mu_1 \leq \mu_2$. 找出 $A + B$ 特征值可能的范围, 并用 λ_i, μ_i 表示².

练习. 令 A_i 是三维欧式空间中固定原点的旋转角为 θ_i 的旋转. 证明 $A_1 A_2$ 仍然是旋转, 记其旋转角为 α , 尝试用 θ_1, θ_2 来表示 α .

练习. 用 G 表示 V 上非退化双线性型的格拉姆矩阵, 证明 $g \mapsto \det G \in F^\times / (F^\times)^2$ 只依赖于 g .

练习. 令 F 是一个特征不为 2 的域, V 是其上的线性空间, g 是 V 上的非退化对称双线性型. 证明 (V, g) 和 $(V, -g)$ 的正交直和等距同构于双曲空间.

练习. 令 F 是一个特征不为 2 的域, V 是其上的二维线性空间, g 是 V 上的对称双线性型. 证明 (V, g) 等距同构于双曲空间当且仅当 $\det g = -1 \in F^\times / (F^\times)^2$.

练习. 令 p 是一个奇素数, 分类所有 $(\mathbb{F}_p)^2$ 上的对称双线性型.

练习. 证明 (V, g) 的极大迷向子空间的维数是个定值.

²—一般情况见: <https://www.ams.org/notices/200102/fea-knutson.pdf>

练习. 证明 (V, g) , 其中 V 是线性空间, g 是非退化的对称双线性型, 是双曲空间以及非迷向的 W 的正交直和, 并且 W 在相差等距同构的意义下由 (V, g) 完全决定.

练习. 在 $W = V \oplus V^*$ 上如下定义一个反对称型 $\omega((v_1, f_1), (v_2, f_2)) = f_1(v_2) - f_2(v_1)$ for any $v_i \in V, f_i \in V^*$. 用 $\text{Sp}(W)$ 记 (W, ω) 的正交变换群.

1. 证明 V 的线性同构诱导了 (W, ω) 上的等距同构, 进而去找出一个从 $\text{GL}(V)$ 到 $\text{Sp}(W)$ 的单同态.
2. 证明当 W 的维数为 2 时, 有同构 $\text{SL}(W) \cong \text{Sp}(W)$.
3. 令 $W^* = (V \oplus V^*)^* = V^* \oplus V$, 并且通过同构 $(V^*)^* = V$ 赋予其上类似的反对称双线性型. 证明如果 $F \in \text{Sp}(W)$, 则 $F^* \in \text{Sp}(W^*)$.
4. 令 $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ 以及 $\text{Sp}(2n, F) = \{A \in \text{GL}(2n, F) \mid A^T J A = J\}$. 证明如果 $A \in \text{Sp}(2n, F)$, 那么 A^T 也是.
5. 找出 (W, ω) 所有的极大迷向子空间, 这样的子空间被称为拉格朗日子空间.

练习. 证明如下有关普法夫值的等式

$$\begin{aligned}\text{pf}(A^T) &= (-1)^n \text{pf}(A) \\ \text{pf}(\lambda A) &= \lambda^n \text{pf}(A) \\ \text{pf}(A^{2m+1}) &= (-1)^{nm} \text{pf}(A)^{2m+1}\end{aligned}$$

其中 A 是 $2n \times 2n$ 反对称矩阵, λ 属于基域. 证明普法夫值是一个定义在反对称矩阵函数组成的空间上的关于正交群作用不变的函数³.

练习. Artin Chapter 8, 5.4

练习. Artin Chapter 8, 6.4

练习. Artin Chapter 8, 8.1

练习. Artin Chapter 8, 8.3

³感兴趣同学可以思考, 不用交, 所有关于反对称矩阵元素的多项式函数, 如果在 $\text{O}(2n)$ 作用下不变, 则一定是写作特征多项式的系数以及 Pfaffian 的多项式. 对奇数维呢?

第十三章 Witt 理论

如无特殊说明, \mathbb{F} 仍然是特征不为 2 的域. 为了方便起见, 给定 \mathbb{F} -线性空间 V 以及其上的非退化对称双线性型 g , 我们称 (V, g) 是一个内积空间.

13.1 Witt 延拓定理

定理 13.1.1 (Witt 延拓定理). 给定内积空间 (V, g) , W 是 V 的一个子空间, 如果 $f: W \rightarrow V$ 是 W 到 $f(W)$ 上的等距同构, 那么存在等距同构 $F: V \rightarrow V$ 使得 $F|_W = f$.

定理 13.1.2 (Witt 消去定理). $W_i, V_i, i = 1, 2$ 都是带有对称双线性型的线性空间, 并且 W_1, W_2 上的双线性型非退化. 如果 $W_1 \perp V_1 \cong W_2 \perp V_2$ 是等距同构, 并且 W_1 等距同构于 W_2 , 那么 $V_1 \cong V_2$ 也是等距同构.

我们下面用 Witt 延拓定理来证明 Witt 消去定理.

证明: 用 f_1 去记 $W_1 \perp V_1$ 到 $W_2 \perp V_2$ 的等距同构, f_2 去记 W_1 到 W_2 的等距同构, 则

$$f: W_1 \xrightarrow{f_2} W_2 \hookrightarrow W_2 \perp V_2 \xrightarrow{f_1^{-1}} W_1 \perp V_1$$

是一个到其像上的等距同构. 则根据 Witt 延拓定理我们有等距同构 $F: W_1 \perp V_1 \rightarrow W_1 \perp V_1$, 满足 $F(W_1) = f_1^{-1}(W_2)$. 考虑等距同构 $T = f_1 \circ F: W_1 \perp V_1 \rightarrow W_2 \perp V_2$, 那么 $T(W_1) = W_2$, 从而

$$T(W_1^\perp) = W_2^\perp$$

由于 W_1, W_2 上的双线性型是非退化的, 从而 $W_1^\perp = V_1, W_2^\perp = V_2$. 即 $T|_{V_1}$ 上给出了 V_1 到 V_2 的等距同构. \square

注记. 用矩阵来说, 给定

$$G_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

如果 A_1, A_2 非退化, 并且 A_1 合同于 A_2 , G_1 合同于 G_2 , 那么 B_1 合同于 B_2 .

下面我们的目的在于证明 Witt 延拓定理, 在此过程中, 我们会介绍许多有用的工具.

定义 13.1.3. 给定带有双线性型的线性空间 (V, g) , $0 \neq v \in V$ 被称为迷向的 (isotropic), 如果 $g(v, v) = 0$. 并且

1. 如果 V 包含一个迷向向量, 则称 V 是迷向的.

2. 如果 V 不包含迷向向量, 则称 V 是非迷向的 (anisotropic).
3. 子空间 W 被称为全迷向的 (totally isotropic), 如果 $g|_W = 0$.

定义 13.1.4. V 是 n 维 \mathbb{F} -线性空间, 定义 $\mathbb{H}(V) = V \oplus V^*$ 以及其上的双线性型如下:

$$h: \mathbb{H}(V) \times \mathbb{H}(V) \rightarrow \mathbb{F}$$

$$((v_1, f_1), (v_2, f_2)) \mapsto f_2(v_1) + f_1(v_2)$$

$(\mathbb{H}(V), h)$ 被称为双曲空间 (hyperbolic space).

命题 13.1.5. 对于双曲空间 $(\mathbb{H}(V), h)$, 我们有如下性质:

1. V, V^* 都是 $\mathbb{H}(V)$ 的全迷向子空间.
2. 给定 V 的一组基 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 以及其对偶基 $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$, 这两者并起来给出了 $\mathbb{H}(V)$ 的一组基, 在这组基下 h 的格拉姆矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

特别地, h 是非退化的.

命题 13.1.6. 如果 $f: V_1 \rightarrow V_2$ 是线性同构, 那么

$$f \oplus (f^*)^{-1}: V_1 \oplus V_1^* \rightarrow V_2 \oplus V_2^*$$

是双曲空间 $(\mathbb{H}(V_1), h_1), (\mathbb{H}(V_2), h_2)$ 之间的等距同构, 并且限制在 V_1 上就是 f .

命题 13.1.7. V 是 $2n$ 维线性空间, g 是其上非退化的对称双线性型, 则如下叙述等价.

1. (V, g) 等距同构于 $\mathbb{H}(W)$, 其中 W 是 V 的子空间;
2. V 有一个全迷向的 n 维子空间 W ;
3. g 有格拉姆矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & B \end{pmatrix}$$

4. g 有格拉姆矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

5. g 有格拉姆矩阵

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

6. g 有格拉姆矩阵

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

证明: 我们在这里只证明 1,2,3,4 的等价性, 其中 $1 \implies 2 \implies 3$ 以及 $4 \implies 1$ 是显然的. 对于 $3 \implies 4$, 我们注意到由于 g 非退化从而 A 可逆, 因此

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{-1})^t & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & B' \end{pmatrix}$$

其中 B' 是对称矩阵, 那么

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{2}B' & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}B' \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

□

命题 13.1.8. 给定线性空间 V 以及其上非退化的对称双线性型 g , 如果 W 是全迷向的子空间, 那么存在 V 的子空间 V' 使得 $V' \cong \mathbb{H}(W)$.

证明: 嵌入 $i: W \rightarrow V$ 诱导了满射 $i^*: V^* \rightarrow W^*$, 并且由于 g 是非退化的, $\alpha = l_g = r_g: V \rightarrow V^*$ 是同构, 考虑如下满射

$$V \xrightarrow{\alpha} V^* \xrightarrow{i^*} W^*$$

那么存在 V 的子空间 W' 使得 $i^*\alpha$ 限制在 W' 上是到 W^* 的同构.

注意到任取 $w \in W, w' \in W'$

$$\begin{aligned} g(w, w') &= (\alpha(w'))(w) \\ &= (i^*\alpha(w'))(w) \\ &= h_W(w, i^*\alpha(w')) \end{aligned}$$

这意味着存在 $W \oplus W'$ 的一组基使得 g 在其下的格拉姆矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & B \end{pmatrix}$$

再利用上述命题即可知如果令 $V' = W \oplus W'$, 那么 $(V', g|_{V'})$ 等距同构于 $\mathbb{H}(W)$. □

下面我们来证明如下略微加强版本的 Witt 延拓定理.

定理 13.1.9 (Witt 延拓定理). 给定内积空间 (V, g) , W 是 V 的一个子空间, 如果 $f: W \rightarrow V$ 是 W 到 $f(W)$ 上的等距同构, 那么 f 可以被延拓成若干个反射的乘积.

证明: 我们先考虑一个简单情况: $\dim W = 1$, 由 w 生成, 并且 $g(w, w) \neq 0$. 如果 $f: W \rightarrow V$ 是 W 到 $f(W)$ 上的等距同构, 不妨记 $f(w) = v$, 此时 v 也不是迷向向量, 因为 w 不是迷向向量并且 f 是等距. 由于

$$g(v - w, v - w) + g(v + w, v + w) = 4g(v, v) \neq 0$$

从而 $v - w$ 和 $v + w$ 中至少存在一个不是迷向向量.

1. 如果 $v - w$ 不是迷向向量, 考虑关于 $v - w$ 的反射, 定义如下

$$r_{v-w}(v') = v' - \frac{g(v', v - w)}{g(v - w, v - w)}(v - w)$$

此时 $r_{v-w}(w) = v$. 这是延拓了 f 的反射.

2. 如果 $v + w$ 不是迷向向量, 那么

$$r_v r_{v+w}(w) = v$$

这是延拓了 f 的反射.

下面我们对 $m(W) := \dim W + 2 \dim W \cap W^\perp$ 做归纳. 当 $m = 0$ 的时候是显然的. 现在假设 $m > 0$, 如果 W 不是全迷向的, 那么存在 $w \in W$ 使得 $g(w, w) \neq 0$. 令 $W_1 = (\mathbb{F}w)^\perp \cap W$, 那么则有

$$W = \mathbb{F}w \perp W_1$$

此时我们知道 $\dim W_1 = \dim W - 1$, 并且注意到

$$W^\perp = (\mathbb{F}w)^\perp \cap W_1^\perp$$

从而

$$W \cap W^\perp = W \cap (\mathbb{F}w)^\perp \cap W_1^\perp = W_1 \cap W_1^\perp$$

即 $m(W_1) < m(W)$, 对 W_1 以及 $f_1 = f|_{W_1}$ 使用归纳假设, 我们得到了一系列反射的复合, 记做 F_1 , 使得 $F_1|_{W_1} = f_1$. 下面我们断言 $(F_1)^{-1}f(w) = v \in W_1^\perp$: 任取 $x \in W_1$, 计算有

$$\begin{aligned} g((F_1)^{-1}f(w), x) &= g(f(w), F_1(x)) \\ &= g(f(w), f(x)) \\ &= g(w, x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

考虑 $\text{span}\{w, v\} \subset W_1^\perp$, 那么根据我们最初处理的简单情况, 存在反射 F_2 限制在 W_1 上是恒等, 并且满足 $F_2(w) = v$, 那么

$$F_1 F_2(w) = F_1 v = F_1 (F_1)^{-1} f(w) = f(w)$$

从而 $F_1 F_2$ 是我们需要的反射.

我们最后来处理 W 是全迷向的情况: 首先根据命题13.1.8, 存在 V 的子空间 W' 使得 $(W \oplus W', g|_{W \oplus W'})$ 等距同构于双曲空间. 根据命题13.1.6, f 可以延拓到 $W \oplus W'$ 上. 最后注意到

$$m(W \oplus W') = 2 \dim W < 3 \dim W = m(W)$$

利用归纳假设即可. □

推论 13.1.10. 给定内积空间 (V, g) , 则其极大全迷向子空间的维数是被 (V, g) 唯一确定的.

证明: 假设 W, W' 都是 V 的极大的全迷向子空间, 不妨假设 $\dim W \leq \dim W'$, 那么 $W \rightarrow W'$ 存在一个单的线性映射, 并且由于它们都是全迷向子空间, 这个单射是 W 到其像上的等距同构, 从而可以延拓成定义在 V 上的等距同构 F , 那么 $W \subset F^{-1}(W')$, 再利用极大性则有 $F^{-1}(W') = W$, 即它们维数相同. □

定义 13.1.11. 给定内积空间 (V, g) , 则其极大全迷向子空间的维数是被 (V, g) 被称为 Witt 指标 (Witt index), 记做 $\text{ind}(V, g)$.

推论 13.1.12 (Witt 分解). 给定内积空间 (V, g) , 以及 $m = \text{ind}(V, g)$, 则存在如下分解

$$V = \mathbb{H}(W) \perp V_1$$

其中 V_1 是非迷向的, 完全由 V 决定, 并且

$$\mathbb{H}(W) \cong H_1 \perp H_2 \perp \cdots \perp H_m$$

其中 H_i 是 2 维的双曲空间.

13.2 Grothendieck-Witt 群

从上一节最后的 Witt 分解定理可以看出, 只有非迷向的内积空间是值得我们关心的, 因为一般的内积空间总可以分解成非迷向的与一些标准双曲空间的正交直和. 在本节中我们将去寻找一种找出所有非迷向内积空间的办法, 这就是通过 Grothendieck-Witt 群.

考虑域 \mathbb{F} 上内积空间 (V, g) 全体等距同构类组成的集合, 记做 $\widehat{W}^+(\mathbb{F})$, 其对于正交直和 \perp 运算构成了一个半群. 并且根据 Witt 消去定理, 它具有消去律. 对于这样的一个半群, 我们可以对其使用 Grothendieck 构造, 得到一个群, 使得这个半群嵌入在其中.

例子. 给定自然数 \mathbb{N} , 我们该如何去定义整数 \mathbb{Z} ? 我们应该去在 \mathbb{N} 上构造减法, 我们可以将这件事情视作是一个等价关系. 我们考虑如下的关系: 给定 $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b) \sim (a', b')$ 当且仅当 $a + b' = a' + b$. 不难验证这是一个等价关系, 并且 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 商掉这个等价关系得到的就是 \mathbb{Z} . 我们有如下自然的嵌入

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ a &\mapsto (a, 0) \end{aligned}$$

上述构造被称为 Grothendieck 构造.

如果我们对 $\widehat{W}^+(\mathbb{F})$ 使用如上的 Grothendieck 构造, 得到的结果被称作是 **Grothendieck-Witt 群** (Grothendieck-Witt group). 即是二元组 $((V_1, g_1), (V_2, g_2)) \in \widehat{W}^+(\mathbb{F}) \times \widehat{W}^+(\mathbb{F})$ 组成的集合商掉等价关系, 其中 $((V_1, g_1), (V_2, g_2))$ 等价于 $((V'_1, g'_1), (V'_2, g'_2))$ 当且仅当

$$V_1 \perp V'_2 \cong V'_1 \perp V_2$$

我们用 $GW(\mathbb{F})$ 去记 Grothendieck-Witt 群.

注记. 实际上 $\widehat{W}^+(\mathbb{F})$ 上还具有乘法运算, 使其构成一个半环 (即一个半群上带有一个乘法结构), 对一个半环使用 Grothendieck 构造实际上可以得到一个环, 即我们的 $GW(\mathbb{F})$ 上实际具有环结构.

定义 13.2.1. $GW(\mathbb{F})$ 商掉全体双曲空间生成的子群得到的商群称作 **Witt 群** (Witt group), 记做 $W(\mathbb{F})$.

我们引入 Grothendieck-Witt 群的关键在于:

命题 13.2.2. $W(\mathbb{F})$ 与非迷向的内积空间 (V, g) 的等距同构类有一一对应.

证明: 我们给出如下对应

$$\begin{aligned} \rho: \{(V, g) \mid V \text{是非迷向的}\} &\rightarrow W(\mathbb{F}) \\ (V, g) &\mapsto ((V, g), 0) \end{aligned}$$

下面来验证这个对应是单射: 如果 $\rho((V_1, g_1)) = \rho((V_2, g_2))$, 也就是说在 $GW(\mathbb{F})$ 中 $((V_1, g_1), 0)$ 和 $((V_2, g_2), 0)$ 相差一些双曲空间落在等价类里, 即存在 $W_i, W'_i, i = 1, 2$ 使得 $((V_1, g_1) \perp \mathbb{H}(W_1), \mathbb{H}(W'_1))$ 与 $((V_2, g_2) \perp \mathbb{H}(W_2), \mathbb{H}(W'_2))$ 在 $GW(\mathbb{F})$ 中等价, 利用 $GW(\mathbb{F})$ 中等价的定义整理得到如下等距同构

$$V_1 \cong V_2 \perp \mathbb{H}(W)$$

其中 W 是 V 的某个子空间. 而由于 V_1 是非迷向的, 从而 W 一定是零空间, 即 V_1 等距同构于 V_2 .

下面验证这个对应是满射: 实际上只需要去 $(0, (V, g))$ 的原像即可, 注意到在 $W(\mathbb{F})$ 中, $(0, (V, g)) = -((V, g), 0) = ((V, -g), 0)$, 而最后一个等式成立是因为

$$(V, g) \perp (V, -g) \cong \mathbb{H}(W)$$

这留作习题. □

13.3 不变量

去计算 Grothendieck-Witt 群的主要办法是去寻找一些不变量: 即去寻找内积空间的一些等距同构不变量, 使得它们尽可能的被这些不变量所完全决定.

一个显然的不变量是维数, 我们有如下的群同态:

$$\begin{aligned} \dim : GW(\mathbb{F}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ ((V_1, g_1), (V_2, g_2)) &\mapsto \dim V_1 - \dim V_2 \end{aligned}$$

由于双曲空间的维数总是偶数, 从而上述群同态还诱导了到 Witt 群上的群同态 $e : W(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 称为**维数指标** (dimension index).

另一个重要的不变量是行列式: 对于内积空间 (V, g) , 如果我们记 G 是 g 的格拉姆矩阵, 则 $\det G \in \mathbb{F}^*$, 然而格拉姆矩阵和基的选取有关, 并且不同基下的格拉姆矩阵相差某个可逆矩阵 P 的行列式的平方, 从而我们可以考虑如下的映射

$$\begin{aligned} \det : GW(\mathbb{F}) &\rightarrow \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2 \\ ((V_1, g_1), (V_2, g_2)) &\mapsto \det(G_1)/\det(G_2) \end{aligned}$$

其中 $G_i, i = 1, 2$ 是 g_i 在某组基下的格拉姆矩阵. 然而上述映射不能够直接的过渡到 $W(\mathbb{F})$ 上去, 因为双曲空间的格拉姆矩阵的行列式是 ± 1 , 而在一般的 \mathbb{F} 上 -1 不一定是一个平方数, 从而双曲空间的格拉姆矩阵行列式不一定平凡.

为了解决这个问题, 我们如下定义内积空间 (V, g) 的行列式映射 d 为 $(-1)^n \det G$, 其中 G 是 g 的格拉姆矩阵, $\dim V = 2n, 2n + 1$. 这时双曲空间的行列式就是平凡的, 从而可以过渡到 Witt 群 $W(\mathbb{F})$ 上去.

另一个糟糕的问题是行列式映射不是 Witt 群到 $\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$ 的一个群同态, 为了解决这个问题, 我们在集合

$$Q(\mathbb{F}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$$

上如下定义群结构:

$$(0, \alpha) + (0, \beta) = (0, \alpha\beta)$$

$$(1, \alpha) + (0, \beta) = (1, \alpha\beta)$$

$$(1, \alpha) + (1, \beta) = (0, -\alpha\beta)$$

可以直接验证

$$(e, d) : W(\mathbb{F}) \rightarrow Q(\mathbb{F})$$

是一个群同态.

13.4 一些 Witt 群的计算

例子. 当 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 时, 由之前的结果可知对于非退化的对称双线性型 g 一定存在一组基使得其对于这组基的格拉姆矩阵为

$$\text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_{p\text{个}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q\text{个}}\}$$

不妨假设 $p \geq q$, 则 g 在消去若干个标准双曲空间之后等距同构于

$$\text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_{p-q\text{个}}\}$$

从而可以发现符号差映射

$$\begin{aligned} \text{sign} : W(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (V, g) &\mapsto p - q \end{aligned}$$

是一个同构.

例子. 当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时, 根据同上面类似的论断, 不难发现 $W(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

注记. \mathbb{F} 的任何数都是平方数当且仅当 \mathbb{F} 上任何 2 维的内积空间都是迷向的.

定理 13.4.1. 假设域 \mathbb{F} 上任何 3 维内积空间都是迷向的, 则对于 \mathbb{F} 上的任意内积空间 (V, g) , 都存在 V 的一组基使得 g 对于这组基的格拉姆矩阵 G 为

$$\text{diag}\{\delta, 1, \dots, 1\}$$

其中 $\delta = \det G$. 特别地, 任何两个内积空间是等距同构的当且仅当它们有相同的维数和行列式, 即

$$W(\mathbb{F}) \cong Q(\mathbb{F})$$

注记. 任意对角矩阵 $\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$, 其可以给出 n 维线性空间 V 上的一个对称双线性型, 为了方便起见, 我们之后用 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ 记这个对称双线性型.

证明: 任取 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}^*$, 考虑 3 维线性空间上非退化双线性型 $\langle \alpha, \beta, -1 \rangle$, 由于它是迷向的, 从而可以分裂出一个标准双曲空间, 从而其等距同构于 $\langle \gamma, 1, -1 \rangle$, 再利用消去定理可知 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 等距同构于 $\langle \gamma, 1 \rangle$, 并且通过计算行列式不难发现 $\gamma = \alpha\beta$.

由于任何内积空间 (V, g) 都存在一组基使得 g 对应的格拉姆矩阵是对角矩阵 $\text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, 从而利用归纳法即有想要证明的事情. \square



下面来解决本节最为关心的问题. 从现在开始我们假设 $q = p^n$ 以及 p 是一个奇素数, 我们要搞清楚 $W(\mathbb{F}_q)$ 的结构. 首先我们需要下面的一些有关有限域的基本的结果.

引理 13.4.2. $\mathbb{F}_q^*/(\mathbb{F}_q^*)^2$ 只有两个元素.

引理 13.4.3. \mathbb{F}_q 的任何元素都是两个平方数的和.

定理 13.4.4. 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$, 则 \mathbb{F} 上任何 3 维内积空间都是迷向的.

证明: 假设 $1, \varepsilon$ 是 $\mathbb{F}_q^*/(\mathbb{F}_q^*)^2$ 中的两个元素, 由于 \mathbb{F}_q 中任何元素都是二平方和, 从而 ε 可以被 $\langle 1, 1 \rangle$ 表示, 即存在非零的向量 v 使得 $\langle 1, 1 \rangle$ 对应的对称双线性型 g 满足 $g(v, v) = \varepsilon$, 通过考虑 v 生成的一维子空间的正交补, 可以得到 $\langle 1, 1 \rangle$ 等距同构于 $\langle \varepsilon, \varepsilon' \rangle$, 再通过比较行列式我们有 $\langle 1, 1 \rangle$ 等距同构于 $\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle$, 从而 \mathbb{F} 上的 3 维内积空间只能等距同构于 $\langle 1, 1, 1 \rangle$ 或 $\langle 1, 1, \varepsilon \rangle$. 我们考虑如下两种情况:

1. 如果 -1 是一个平方数, 那么 $\langle 1, 1 \rangle$ 等距同构于 $\langle 1, -1 \rangle$, 从而上面两种可能的情况都是迷向的;
2. 如果 -1 不是一个平方数, 那么我们可以选 $\varepsilon = -1$, 从而 $\langle 1, 1, 1 \rangle \cong \langle 1, -1, -1 \rangle$ 以及 $\langle 1, 1, \varepsilon \rangle = \langle 1, 1, -1 \rangle$ 都是迷向的.

□

推论 13.4.5. $W(\mathbb{F}_q) \cong Q(\mathbb{F}_q)$.

注记. 注意到 $Q(\mathbb{F}_q)$ 作为集合是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 更具体的来说, 作为群有如下的同构.

$$Q(\mathbb{F}_q) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & p \equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

证明留作作业.

13.5 作业十四

在下面习题中, K 是一个特征不为 2 的域, V 是一个有限维 K -线性空间, g 是其上一个非退化的对称双线性型.

练习. 证明 $Q(K)$ 上的乘积结构定义了一个交换群.

练习. 证明注记 13.4, 并找出具体的 (V, g) 来代表 $W(\mathbb{F}_p)$ 中的四个元素.

练习. 对于有限域 \mathbb{F}_p 上的 (V, g) , 是否对于每个元素 $a \in \mathbb{F}_p$, 都存在非零的 $v \in V$ 使得 $g(v, v) = a$? 找出所有具有这种性质的 g 以及不具有这些性质的.

练习. 如果 K 是 F 的一个子域, 我们可以将 K 上的对称矩阵视作 F 上的对称矩阵, 证明这诱导了群同态 $GW(K) \rightarrow GW(F)$ 以及 $W(K) \rightarrow W(F)$. 找出例子是的这些同态是

1. 同构;
2. 不是单射;
3. 不是满射.

练习. 如果任何二维的 (V, g) 都是迷向的, 证明任何 $a \in K$ 都是平方数, 并且在这种情况下计算 $GW(K)$ 和 $W(K)$.



索引

- R -模, R -module, 79
 R -模同态, R -module homomorphism, 80
 p -挠子模, p -torsion submodule, 89
 Abel 群, abelian group, 8
 Coxeter 图, Coxeter diagram, 31
 Coxeter 群, Coxeter group, 31
 Grothendieck-Witt 群, Grothendieck-Witt group, 120
 Sylow p 子群, Sylow p -subgroup, 20
 Witt 指标, Witt index, 119
 Witt 群, Witt group, 120
 一般线性群, general linear group, 8
 中心, center, 20
 主理想, principal ideal, 48
 主理想整环, principal ideal domain, 56
 二次型, quadratic form, 103
 二面体群, dihedral group, 8
 交换子, commutator, 40
 交换环, communicative ring, 45
 交错群, alternative group, 18
 代数整数, algebraic integer, 65
 伴随算子, adjoint operator, 109
 偏序, partial order, 52
 偏序集, partially ordered set, 52
 像, image, 12
 全迷向子空间, totally isotropic subspace, 117
 共轭作用, conjugation, 18
 关系, relation, 25
 分圆多项式, cyclotomic polynomial, 62
 划分, partition, 10
 半正定双线性型, semi-positive definite bilinear form, 104
 半直积, semi-product, 22
 半群, semi group, 16
 半负定双线性型, semi-negative definite bilinear form, 104
 单位, unit, 45
 单词, word, 25
 单项式, monomial, 46
 厄尔米特型, Hermitian form, 101
 双曲空间, hyperbolic space, 117
 双线性型, bilinear form, 99
 反对称双线性型, skew-symmetric bilinear form, 101
 可迁, transitive, 19
 唯一分解整环, unique factorization, 57
 商映射 quotient map, 10
 商模, quotient module, 79
 商环, quotient ring, 48
 商群, quotient group, 11
 商集, quotient set, 9
 域, field, 46
 外尔群, Weyl group, 38
 多项式环, polynomial ring, 46
 子模, submodule, 79
 子环, subring, 46
 子群, subgroup, 9



- 对偶空间, dual space, 98
- 对称双线性型, symmetric bilinear form, 101
- 带余除法, division with remainder, 46
- 幂零群, nilpotent group, 42
- 形式多项式, formal polynomial, 46
- 循环模, cyclic module, 89
- 循环群, cyclic group, 13
- 指数, index, 16
- 挠子模, torsion submodule, 88
- 整环, domain, 55
- 旗, flag, 43
- 有限生成, finitely generated, 85
- 有限生成理想, finitely generated ideal, 48
- 有限生成自由模, finitely generated free module, 82
- 有限表现, finitely presented, 30
- 本元多项式, primitive polynomial, 59
- 极分解, polar decomposition, 113
- 极大理想, maximal ideal, 52
- 核, kernel, 12, 47
- 格, lattice, 68
- 格拉姆-施密特正交化, Gram-Schmidt process, 105
- 格拉姆矩阵, gram matrix, 100
- 欧几里得整环, Euclidean domain, 56
- 正交补, orthogonal complement, 102
- 正则表示, regular representation, 21
- 正合, exact, 81
- 正定双线性型, positive definite bilinear form, 104
- 正规化子, normalizer, 22
- 正规子群, normal subgroup, 11
- 正规算子, normal operator, 111
- 波雷尔子群, Borel subgroup, 38
- 波雷尔子群, borel subgroup, 43
- 环, ring, 45
- 环同态, ring homomorphism, 47
- 环同构, ring isomorphism, 47
- 理想, ideal, 48
- 短正合列, short exact sequence, 81
- 积群, product group, 8
- 第一同构定理, first isomorphism theorem, 12
- 等价关系, equivalent relation, 10
- 等距同构, isometry, 103
- 类群, class group, 72
- 素理想, prime ideal, 55
- 线性表示, linear representation, 18
- 维数指标, dimension index, 121
- 置换群, permutation group, 7
- 群作用, group action, 17
- 群同态, group homomorphism, 11
- 群同构, group isomorphism, 11
- 自伴随算子, self-adjoint operator, 109
- 自由模, free module, 82
- 自由群, free group, 25
- 诺特环, noetherian ring, 85
- 负定双线性型, negative definite bilinear form, 104
- 赋值映射, evaluation map, 47
- 轨道, orbit, 19
- 轮换, cycle, 26
- 迷向向量, isotropic vector, 116
- 酉算子, unitary operator, 110
- 阶, order, 8, 13
- 陪集, coset, 9
- 非退化双线性型, non-degenerate bilinear form., 101
- 高斯整数环, Gauss integer ring, 50