同调论

刘博文

目录

0 前言

这篇讲义是于根据葛化彬老师在第十四期北京国际数学中心强化班上课时的板书整理而成。

1 奇异同调

1.1 范畴与函子

1.1.1 范畴

定义 1.1.1. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 是由以下要素组成：

1. 一类数学对象 $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$；
2. 对于每两个对象 X, Y，给定了一个集合 $\mathrm{Mor}(X,Y)$，其元素称为从 X 到 Y 的射，记 $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ 为 $f : X \to Y$；
3. 一个复合规则 $\mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z)$，记作 $(f,g) \mapsto g \circ f$，并且满足以下性质：
   (1) 结合律：对任意的 $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to W$，满足
   $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
   (2) 单位律：每个对象 X 有一个单位射 $\mathrm{id}_X : X \to X$，满足对任何 $f : Y \to X$ 有
   $$\mathrm{id}_X \circ f = f$$
   对于任何 $g : X \to Z$，满足
   $$g \circ \mathrm{id}_X = g$$

在下面的例子中，都以 {对象，射} 的形式展示：

例 1.1.1. 集合的范畴：{集合，函数}

例 1.1.2. 光滑流形的范畴：{光滑流形，光滑映射}

例 1.1.3. 拓扑空间的范畴：{拓扑空间，连续映射}

例 1.1.4. 单纯复形的范畴：{单纯复形，单纯映射}

例 1.1.5. 阿贝尔群的范畴：{阿贝尔群，群同态}

例 1.1.6. 群的范畴：{群，群同态}；环的范畴：{环，环同态}

例 1.1.7. 域 F 上线性空间的范畴：{F 线性空间，F 线性映射}

例 1.1.8. 域 F 上的代数的范畴：{F 代数，F 代数同态}

例 1.1.9. 拓扑空间的范畴：{拓扑空间，X 到 Y 映射的同伦类}

例 1.1.10. 带基点的拓扑空间的范畴：{带基点的拓扑空间，保持基点的连续映射}

例 1.1.11. 取定拓扑空间 X，考虑：{X 中的点，从点 a 到点 b 的道路的同伦类，其中 $a, b \in X$}

1.1.2 协变函子

定义 1.1.2. 假设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是两个范畴，一个协变函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个对应：

1. $\mathcal{C}$ 中的每个对象 X 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个对象 $F(X)$；
2. $\mathcal{C}$ 的每个射 $f:X\to Y$ 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个射 $F(f):F(X)\to F(Y)$，满足以下性质：

   (1) 复合律：对于射 $f:X\to Y, g:Y\to Z$，有

   $$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$$

   (2) 单位律：对于任意对象 X，有

   $$F(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{F(X)}$$

例 1.1.12. 遗忘函子：$\{$拓扑空间，映射$\}\to\{$集合，函数$\}$

例 1.1.13. 基本群函子 $\pi_1:\{$带基点的拓扑空间，保持基点的连续映射$\}\to\{$群，群同态$\}$

例 1.1.14. 单纯同调函子 $H_*:\{$单纯复形，单纯映射$\}\to\{$阿贝尔群，群同态$\}$

1.1.3 反变函子

定义 1.1.3. 假设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是两个范畴，一个反变函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个对应：

1. $\mathcal{C}$ 中的每个对象 X 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个对象 $F(X)$；
2. $\mathcal{C}$ 的每个射 $f:X\to Y$ 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个射 $F(f):F(Y)\to F(X)$，满足以下性质：

   (1) 复合律：对于射 $f:X\to Y, g:Y\to Z$，有

   $$F(g\circ f)=F(f)\circ F(g)$$

   (2) 单位律：对于任意对象 X，有

   $$F(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{F(X)}$$

例 1.1.15. 对偶函子:$\{$域 F 上的线性空间，F 线性映射$\}\to\{$对偶空间，映射的拉回$\}$

例 1.1.16. 给定拓扑空间 X，考虑 $C(X)=\{$连续函数 $X\to\mathbb{R}\}$，则有反变函子 $C^*:\{$拓扑空间，连续映射$\}\to\{$实代数，实代数同态$\}$

定义 1.1.4. 称一个射 $f : X \to Y$ 是可逆的，如果存在射 $g : Y \to X$，使得：

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

定义 1.1.5. 称两个对象是同构的，如果它们之间存在一对互逆的射。

命题 1.1.1. 协变（反变）函子总是把单位射变成单位射，把可逆射变成可逆射，把同构的对象变成同构的对象。

1.2 链复形与链映射

1.2.1 链复形及其同调群

定义 1.2.1. 一个链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 是一串阿贝尔群 C_q 以及一串群同态 $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$（称为 q 维边缘算子），满足 $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0, \forall q$，写法上有：

$$\cdots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \dots$$

定义 1.2.2. 链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 的 q 维闭链群定义为 $Z_q(C) = \mathrm{Ker}\, \partial_q$；$q$ 维边缘链群定义为 $B_q(C) = \mathrm{Im}\, \partial_{q+1}$

定义 1.2.3. 链复形 C 的 q 维同调群定义为 $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$，其元素称为 C 的 q 维同调类。

约定 1.2.1. 我们约定，$z_q \in Z_q(C)$ 所代表的同调类为 $[z_q] \in H_q(C)$，记 $H_*(C) = \{H_q(C)\}$，实际上，$H_*(C)$ 是一个分次群。

定义 1.2.4. 分次群指的是一个阿贝尔群序列 $G_* = \{G_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$，分次群同态 $\phi_* : G_* \to G'_*$ 指的是一个同态序列 $\{\phi_q : G_q \to G'_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$

定义 1.2.5. 设 C, D 是链复形，一个链映射 $f : C \to D$ 是一串同态 $f_q : C_q \to D_q$，满足：

$$\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q, \quad \forall q$$

即下面的图表交换[1]：

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial_q"] & D_{q-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

[1] 我们不在符号上区分不同链复形之间的边缘同态，一并记作 ∂_q，请读者留心。

1.2.2 链映射及其诱导同态

命题 1.2.1. 链映射 $f : C \to D$ 诱导出同调群的同态 $f_* : H_*(C) \to H_*(D)$，映射为 $f_*([z_q]) = [f_q(z_q)], \forall z_q \in Z_q(C)$

证明. 直接验证 □

至此，我们得到了一个新的范畴，即链复形的范畴 $\{$链复形，链映射$\}$，以及一个新的函子，同调函子：$\{$链复形，链映射$\} \to \{$分次群，分次群同态$\}$。

1.2.3 链同伦

定义 1.2.6. 两个链映射 $f, g : C \to D$ 称为是链同伦的，如果存在一串同态 $T = \{T_q : C_q \to D_{q+1}\}$，如下面图表：

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}-g_{q+1}"'] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q-g_q"] \arrow[dl, dashed, "T_q"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q-1}-g_{q-1}"] \arrow[dl, dashed, "T_{q-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial_q"] & D_{q-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

使得对任意 q 满足 $\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q$，称 T 为联结 f, g 得一个链同伦，记作 $f \simeq g : C \to D$ 或者 $T : f \simeq g : C \to D$

定理 1.2.1. 假设 $f \simeq g : C \to D$，则 $f_* = g_* : H_*(C) \to H_*(D)$，即链同伦的链映射诱导出相同的同调群同态。

证明. 直接验证 □

命题 1.2.2. 链映射之间的链同伦关系是一个等价关系。

证明. □

定义 1.2.7. 两个链复形 C, D 称为是链同伦等价的，如果存在链映射 $f : C \to D, g : D \to C$，使得 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_D, g \circ f \simeq \mathrm{id}_C$

命题 1.2.3. 链同伦等价诱导同调群的同构，因而链同伦等价的链复形有同构的同调群。

证明. 显然 □

1.3 奇异同调群

1.3.1 奇异单形

定义 1.3.1. q 维标准单形 $\Delta_q = \{(x_0, x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \le x_i \le 1, \sum_{i=0}^{q} x_i = 1\}$

定义 1.3.2. 拓扑空间 X 中的 q 维奇异单形指的是一个连续映射 $\sigma : \Delta_q \to X$

例 1.3.1. （线性奇异单形）C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集，$c_0, c_1, \dots, c_q \in C$，则有唯一的线性映射 $\Delta_q \to C$，把顶点 $e_0, \dots, e_q$ 映射成 $c_0, \dots, c_q$，记为 $(c_0 c_1 \dots c_q) : \Delta_q \to C$，定义为 $\sum_i x_i e_i \mapsto \sum_i x_i c_i$

在下面的讨论中，我们取定拓扑空间 X

定义 1.3.3. X 的 q 维奇异链群 $S_q(X)$ 定义为以 X 中所有 q 维奇异单形为基生成的自由阿贝尔群，其元素称为 q 维奇异链，具有形式

$$c_q = k_1 \sigma_q^{(1)} + \cdots + k_r \sigma_q^{(r)}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \sigma_q^{(i)} : \Delta_q \to X, q \geq 0$$

并且规定负维数的 $S_q(X) = 0$

定义 1.3.4. X 中 q 为奇异单形 $\sigma : \Delta_q \to X$ 的边缘定义为如下 $q-1$ 维奇异链

$$\partial \sigma = \partial(\sigma \circ (e_0 \dots e_q)) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \circ (e_0 \dots \hat{e_i} \dots e_q)$$

做 $\mathbb{Z}$ 线性扩张得到

$$\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$$

是阿贝尔群同态。

命题 1.3.1. $S_*(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$ 是链复形。

证明. 即验证 $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$，由于 ∂ 是群同态，因此只需要在奇异单形上验证即可。先在标准单形上看：

$$\begin{aligned}
\partial_{q-1} \circ \partial_q (e_0 \dots e_q) &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_{q-1} (e_0 \dots \widehat{e_i} \dots e_q) \\
&= \sum_{i=0}^{q} \Big(\sum_{j<i} (-1)^j (e_0 \dots \widehat{e_j} \dots \widehat{e_i} \dots e_q) + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} (e_0 \dots \widehat{e_i} \dots \widehat{e_j} \dots e_q)\Big) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (e_0 \dots \widehat{e_j} \dots \widehat{e_i} \dots e_q) + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j-1} (e_0 \dots \widehat{e_i} \dots \widehat{e_j} \dots e_q) \\
&= 0
\end{aligned}$$

将上式用映射 $\sigma : \Delta_q \to X$ 复合就得到 $\partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) = 0$ □

1.3.2 奇异链复形与奇异同调群

定义 1.3.5. 链复形 $S_*(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$ 称为 X 的奇异链复形。由 X 的奇异链复形决定的同调群称为 X 的奇异同调群，记作 $H_*(X) := H_*(S_*(X))$

定义 1.3.6. 设 $f : X \to Y$ 是映射，它把 X 中的奇异单形 $\sigma : \Delta_q \to X$ 变成 Y 中的奇异单形 $f \circ \sigma$，记为 $f_\#(\sigma)$。通过线性扩张可以得到同态

$$f_\# : S_q(X) \to S_q(Y)$$

命题 1.3.2. $f_\#$ 与 ∂ 可交换，即 $f_\# : S_*(X) \to S_*(Y)$ 是链映射。

证明. 显然。 □

定义 1.3.7. 映射 $f : X \to Y$ 诱导的同调群的同态 $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ 指的是链映射 $f_\# : S_*(X) \to S_*(Y)$ 所诱导的同调群同态。

命题 1.3.3 (奇异同调群的拓扑不变性)**.** 同胚的拓扑空间有着同构的奇异同调群。

注 1.3.1. 协变函子 S_* 把拓扑空间范畴变到链复形范畴，同调函子把链复形范畴变成分次群范畴，将这两个协变函子复合得到协变函子称为奇异同调函子 H_*。因此用这种观点，命题 1.3.3 是直接的，因为函子是保同构的。

例 1.3.2. 单点空间的奇异同调群 $H_*(\mathrm{pt})$ 如下

$$H_*(\mathrm{pt}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

这是因为对于每一个维度, 都只有一个奇异单形 $\sigma : \Delta_q \to \{\mathrm{pt}\}$, 因此 $S_q(X) = \mathbb{Z}, \forall q$, 对于边缘同态 ∂_q 来说，我们有

$$\partial_q = \begin{cases} 1, & q = 2k+1 \\ 0, & q = 2k \end{cases}$$

因此我们有如下的链复形

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \dots$$

因此可以得到我们期待的结果。

定义 1.3.8. 克罗内克同态 $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$\varepsilon(k_1 a_1 + \cdots + k_r a_r) = k_1 + \cdots + k_r$$

注 1.3.2. $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ 诱导出满同态 $H_0(X) \to \mathbb{Z}$，因为 $S_0(X) = Z(X)$，并且每个 1 维奇异单形的边缘的克罗内克指标为零。

命题 1.3.4. 如果空间 X 道路连通，则 $\varepsilon : H_0(X) \to \mathbb{Z}$ 是同构。

证明. 任取基点 $p \in X$，任意 $c_0 = k_1a_1 + \cdots + k_ra_r \in \mathrm{Ker}(\varepsilon)$，则 $c_0 = c_0 - \varepsilon(c_0)b = k_1(a_1 - b) + \cdots + k_r(a_r - b)$，由于 X 道路连通，因此存在道路连接 a_i 和 b，对于每个 i 成立，记作 σ_i，因此

$$\partial(\sum_i k_i\sigma_i) = c_0$$

因此 c_0 是一个边缘链，因此 $\mathrm{Ker}\,\varepsilon = 0$，即 ε 是同构。 □

定义 1.3.9. 一族链复形 $\{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$，其中 $C_\lambda = \{C_{\lambda q}, \partial_{\lambda q}\}$ 这族链复形的直和定义为 $\bigoplus C_\lambda = \{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda q}, \bigoplus \partial_{\lambda q}\}$

命题 1.3.5.

$$H_*(\bigoplus_\lambda C_\lambda) = \bigoplus_\lambda H_*(C_\lambda)$$

证明. 我们具体写出链复形的直和如下:

$$\cdots \bigoplus_\lambda C_{\lambda q+1} \xrightarrow{\oplus_\lambda \partial_{\lambda q+1}} \bigoplus_\lambda C_{\lambda q} \xrightarrow{\oplus_\lambda \partial_{\lambda q}} \bigoplus_\lambda C_{\lambda q-1} \to \ldots$$

因此可以注意到

$$H_q(\bigoplus_\lambda C_\lambda) = \mathrm{Ker} \bigoplus_\lambda \partial_{\lambda q} / \mathrm{Im} \bigoplus_\lambda \partial_{\lambda q+1} = \bigoplus_\lambda \mathrm{Ker}\,\partial_{\lambda q} / \mathrm{Im}\,\partial_{\lambda q+1}$$

最后一个等式成立是因为核与像是可以与直和交换的，因此

$$H_q(\bigoplus_\lambda C_\lambda) = \bigoplus_\lambda H_q(C_\lambda)$$

□

定理 1.3.1. 设 $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 是 X 的道路连通分支分解，则有同调群的直和分解 $H_*(X) = \oplus_{\lambda\in\Lambda} H_*(X_\lambda)$

证明. 用 $\sum_X$ 记 X 中全体奇异单形的集合，则可以分解为 $\sum_X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \sum_{X_\lambda}$，从而有直和分解 $S_*(X) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_*(X_\lambda)$ □

推论 1.3.1. 拓扑空间 X 道路连通当且仅当 $H^0(X) = \mathbb{Z}$

1.3.3 简约奇异同调群

定义 1.3.10. 拓扑空间 X 的增广链复形 $\widetilde{S}_*(X) = \{\widetilde{S}_q(X), \widetilde{\partial}_q\}$ 定义为

$$\widetilde{S}_q(X) = \begin{cases} S_q(X), & q > -1 \\ \mathbb{Z}, & q = -1 \end{cases} \qquad \widetilde{\partial}_q = \begin{cases} \partial_q, & q > 0 \\ \varepsilon, & q = 0 \end{cases}$$

注 1.3.3. $f: X \to Y$ 诱导的 $f_\#: S_q(X) \to S_q(Y)$ 保持零维的克罗内克指数，因此 $f_\#: \widetilde{S}_*(X) \to \widetilde{S}_*(Y)$ 是链映射（$f_\#: \widetilde{S}_{-1}(X) \to \widetilde{S}_{-1}(Y)$ 规定为 id）

定义 1.3.11. 拓扑空间 X 的简约同调群定义为增广链复形 $\widetilde{S}_*(X)$ 对应的同调群，记作 $\widetilde{H}_*(X)$。$f: X \to Y$ 诱导的同态 $f_*: \widetilde{H}_*(X) \to \widetilde{H}_*(Y)$ 规定为链映射 $f_\#: \widetilde{S}_*(X) \to \widetilde{S}_*(Y)$ 所诱导的同调群同态

命题 1.3.6. 对于拓扑空间 X，简约同调群与同调群有如下关系

$$H_q(X) = \begin{cases} \widetilde{H}_q(X), & q \neq 0 \\ \widetilde{H}_q(X) \oplus \mathbb{Z}, & q = 0 \end{cases}$$

证明. 由于增广链复形与链复形相比只改变了链群 C_{-1} 以及 ∂_0，因此对于 $q > 0$ 时的同调群都是不改变的。

对于零维的情况，我们有

$$H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1, \quad \widetilde{H}_0(X) = \operatorname{Ker}\varepsilon/\operatorname{Im}\partial_1$$

而由于 ε 是满射，我们有

$$C_0(X)/\operatorname{Ker}\varepsilon \cong \mathbb{Z}$$

因此可以得到

$$H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$$

□

注 1.3.4. 后补：上面的证明利用了一个看似“显然”的结果：

$$C_0(X)/\operatorname{Ker}\varepsilon \cong \mathbb{Z} \implies C_0(X) \cong \operatorname{Ker}\varepsilon \oplus \mathbb{Z}$$

实际上是因为下述短正合列分裂的结果

$$0 \to \operatorname{Ker}\varepsilon \to C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

推论 1.3.2. 拓扑空间 X 是道路连通当且仅当 $\widetilde{H}_0(X) = 0$

1.3.4 奇异同调的同伦不变性

定义 1.3.12. 映射 $f: X \to Y, g: X \to Y$ 称为同伦的，如果存在映射 $F: X \times I \to Y$，使得 $F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x)$，记作 $f \cong g$

定义 1.3.13. 两个拓扑空间 X, Y 称为同伦等价，或者是有相同的同伦型，如果存在映射 $f: X \to Y, g: Y \to X$，使得 $f \circ g \cong \mathrm{id}_Y$，$g \circ f \cong \mathrm{id}_X$

定义 1.3.14. 拓扑空间 X 称为是可缩的，如果它与单点集有相同的同伦型。

定义 1.3.15. 拓扑空间 X 的子空间 A 称为是 X 的收缩形变核[2]，如果存在收缩 $r: X \to A$[3]，使得 $i \circ r$ 同伦于 id_X，并且同伦的过程中固定 A[4]，其中 $i: A \to X$ 是嵌入。

例 1.3.3. S^n 是 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 的收缩形变核。

定理 1.3.2 (同伦不变性)**.** 假定 $f \cong g$ 是同伦的映射，则 $f_{\#} \cong g_{\#}: S_*(X) \to S_*(Y)$ 是链同伦的，因而诱导相同的同调群同态。

推论 1.3.3 (同伦型不变性)**.** 设拓扑空间 X, Y 有相同的同伦型 $X \cong Y$，则它们的同调群同构。

推论 1.3.4. 设拓扑空间 X 的子空间 A 是 X 的收缩形变核，则嵌入映射 $i: A \to X$ 诱导了同调群的同构。

1.3.5 与基本群的关系

定义 1.3.16. X 是拓扑空间，$x_0 \in X$ 是取定的基点，则 X 的基本群为

$$\pi_1(X, x_0) = \{\gamma\text{的同伦类} \mid \gamma\text{是 } x_0 \text{ 处的闭路}\}$$

如果我们将 $[0,1]$ 等同于 1 维标准单形，则 X 中的每条道路都是 X 中的 1 维奇异单形，若 γ 是闭道路，则 γ 是闭链，因此 $H_1(X)$ 关心的也是 X 中的闭路的情况。以 $[\gamma]_h \in H_1(X)$ 表示 γ 代表的同调类，$[\gamma]$ 代表 γ 的同伦类。

易知

$$[\gamma\gamma']_h = [\gamma]_h + [\gamma']_h$$

故我们有同态：

$$h_*: \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$$

定义为 $[\gamma] \mapsto [\gamma]_h$，称为 *Hurewicz* 同态。

定理 1.3.3. 假设拓扑空间 X 道路连通，则 *Hurewicz* 同态是满同态，并且 $\operatorname{Ker} h_*$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的换位子群，即 $H_1(X)$ 就是 $\pi_1(X, x_0)$ 的交换化。

1.3.6 $\mathcal{U}$ 小奇异链

定义 1.3.17. X 是拓扑空间，$\mathcal{U}$ 是 X 的覆盖，奇异单形 $\sigma: \Delta_q \to X$ 被称为 $\mathcal{U}$-小的，如果 $\sigma(\Delta_q) \subset U \in \mathcal{U}$；记 $S_q^{\mathcal{U}}(X)$ 是由以所有 $\mathcal{U}$-小奇异单形为基生成的自由阿贝尔群，是 $S_*(X)$ 的子链复形。

定理 1.3.4. 假设 $\operatorname{Int}\mathcal{U} = \{\mathring{U} \mid U \in \mathcal{U}\}$ 是 X 的开覆盖，则存在链映射 $k: S_*(X) \to S_*^{\mathcal{U}}(X)$ 满足 $k \circ i = \mathrm{id}, i \circ k \cong \mathrm{id}$，从而含入映射诱导出同调群的同构。

[2]这里的定义有时也被称为强形变收缩核

[3]映射 $r: X \to A$ 被称为收缩，如果 $r \circ i = \mathrm{id}_A$

[4]这意味着同伦 $F: X \times I \to X$ 满足对于任意的 $t \in I, F(a,t) = a, \forall a \in A$

1.4 Mayer-Vietoris 序列

1.4.1 同调代数工具

定义 1.4.1. 阿贝尔群同态 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 在 B 处正合，如果 $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$；阿贝尔群同态序列 $\cdots \to G_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\phi_i} G_{i+1} \to \ldots$ 被称为正合列，如果在每一个 G_i 处都正合。

定理 1.4.1. 链复形和链映射的长正合列 $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ 诱导了同调群间的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C) \xrightarrow{f_*} H_q(D) \xrightarrow{g_*} H_q(E) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C) \to \ldots$$

证明. 首先 f_*, g_* 都是链复形的链映射自然的诱导的同调群之间的态射，下面我们定义 ∂_*，考虑下面的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & D_{q+1} \arrow[r, "g_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & E_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & D_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & E_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & D_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & E_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

任取 $z \in E_q$ 是一个闭链，由于 g_q 是满射因此可以考虑 $g_q^{-1}(z)$，并通过 ∂_q 映到 D_{q-1}，由于 $g_{q-1}\partial_q(g_q^{-1}(z)) = \partial_q(z) = 0$，因此 $\partial_q(g_q^{-1}(z)) \in \operatorname{Ker} g_{q-1} = \operatorname{Im} f_{q-1}$，并且由于

$$f_{q-2}\partial_{q-1}f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z) = \partial_{q-1}\partial_q g_q^{-1}(z) = 0$$

以及 f_{q-2} 是单射可知 $\partial_{q-1}f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z) = 0$，因此 $f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)$ 是 C_{q-1} 中的闭链，因此可以定义

$$\partial_*([z]) := [f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)]$$

在这里，我们需要小心验证以下的事实：

(1) 定义不依赖于 z 这个同调类代表元的选取；

(2) 定义不依赖于 $g_q^{-1}(z)$ 的选取；

我们依次如下验证：

(1) 如果将 z 改成 $z+\partial_{q+1}a, a\in E_{q+1}$，则

$$\partial_q g_q^{-1}(z+\partial_{q+1}a)=\partial_q g_q^{-1}(z)+\partial_q g_q^{-1}\partial_{q+1}(a)=\partial_q g_q^{-1}(z)+\partial_q\partial_{q+1}g_{q+1}^{-1}(a)=\partial_q g_q^{-1}(z)$$

即与同调类代表元选取无关。

(2) 由于 z 在 g_q^{-1} 下的任何两个原像只相差一个 $\operatorname{Im} f_q$ 中的元素，我们不妨假设将 $g_q^{-1}(z)$ 换成 $g_q^{-1}(z)+f(a), a\in C_q$，则

$$f_{q-1}^{-1}\partial_q(g_q^{-1}(z)+f_q(a))=f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)+f_{q-1}^{-1}\partial_q f_q(a)=f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)+\partial_q(a)$$

因此更换 $g_q^{-1}(z)$ 的原像将会得到落在同一个同调类中的元素，因此定义不依赖于 $g_q^{-1}(z)$ 的选取。

因此，∂_* 的定义是良好的。 □

定理 1.4.2 (同调序列的自然性). 设有链复形与链映射交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] & D' \arrow[r, "g'"] & E' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则有下面的交换图表

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_{q+1}(E) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_q(C) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_q(D) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_q(E) \arrow[r] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_{q+1}(E') \arrow[r, "\partial_*"] & H_q(C') \arrow[r, "f'_*"] & H_q(D') \arrow[r, "g'_*"] & H_q(E') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

引理 1.4.1 (五引理). 设有阿贝尔群的交换图表

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\phi_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\phi_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"] & B_3 \arrow[r, "\psi_3"] & B_4 \arrow[r, "\psi_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

其中两个横行都是正合列，如果 f_1, f_2, f_4, f_5 都是同构，则 f_3 也是同构。

证明. 图上追踪。 □

注 1.4.1. 实际上，只需要 f_1, f_2, f_4 是满射，$f_2.f_4, f_5$ 是单射。

定义 1.4.2. 阿贝尔群同态的正合列 $C\xrightarrow{f}D\xrightarrow{g}E$ 称为裂正合的，如果 $f(C)$ 是 D 的直和项，即 D 能分解成 $f(C)$ 和某个子群的直和。

注 1.4.2. 短正合列是列正合列的等价于 $D \cong C \oplus E$，因为如果 $D \cong C \oplus E$，由于 f 是单射自然有 $f(C)$ 是 D 的直和项；而如果 $f(C)$ 是 D 的直和项，那么我们不妨写成 $D = f(C) \oplus E'$，因此

$$E' \cong D/\operatorname{Im} f \cong D/\operatorname{Ker} g \cong E$$

即 $D \cong C \oplus E$.

命题 1.4.1. 对于阿贝尔群同态的短正合列 $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$，下列叙述等价：

1. 存在同态 $h : D \to C$，使得 $h \circ f = \mathrm{id}_C$

2. 存在同态 $k : E \to D$，使得 $g \circ k = \mathrm{id}_E$

3. 短正合列 $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ 是裂正合的。

特别的，若 E 是自由阿贝尔群[5]，则 $1, 2, 3$ 成立。

证明. 如果短正合列是正合的，那么 (1), (2) 是显然成立的，取 $C \oplus E$ 的到每个分量的投射即可。

下面证明 $(1) \to (3)$，首先注意到 $D = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} h$，这是因为任取 $x \in D$，我们有如下分解

$$x = (x - fh(x)) + fh(x)$$

后者显然在 $\operatorname{Im} f$ 中，然而前者在 $\operatorname{Ker} h$ 中只需要做如下验算

$$h(x - fh(x)) = h(x) - hfh(x) = h(x) - h(x) = 0$$

下面证明 $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} h = 0$，若存在 $c \in C$ 使得 $f(c) = d$ 以及 $h(d) = 0$，那么 $c = hf(c) = h(d) = 0$，因此 $D = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} h$，即该短正合列分裂。

下面证明 $(2) \to (3)$，论证的方式与上面类似，同样注意到 $D = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} k$，这是因为任取 $x \in D$，我们有如下的分解

$$x = (x - kg(x)) + kg(x)$$

后者显然在 $\operatorname{Im} k$ 中，然而前者在 $\operatorname{Ker} g$ 中只需要做如下验算

$$g(x - kg(x)) = g(x) - gkg(x) = g(x) - g(x) = 0$$

下面证明 $\operatorname{Im} k \cap \operatorname{Ker} g = 0$，若存在 $d \in D$ 使得 $d = k(e)$，并且满足 $g(d) = 0$，那么 $0 = g(d) = gk(e) = e$，因此交平凡，即 $D = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} k = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} k$，即该短正合列分裂。 □

[5]更一般的，E 是投射的，或 C 是内射的即可。

1.4.2 Mayer-Vietoris 序列

我们先来考虑下面的情况：X 是拓扑空间，X_1, X_2 是 X 的子空间，使得 $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$ 是 X 的一个覆盖，则

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(X_1) + S_*(X_2)$$

我们考虑下面的图表：

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
X_1 \cap X_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X_1 \cup X_2 \\
 & X_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

则可以得到链复形与链映射的短正合列

$$0 \to S_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_\#} S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \xrightarrow{k_\#} S_*(X_1) + S_*(X_2) \to 0$$

其中 $h_\#(x) := (i_{1\#}(x), -i_{2\#}(x)), k_\#(x) := j_{1\#}(y) + j_{2\#}(z)$

定义 1.4.3. 设 X_1, X_2 是 X 的子空间，满足含入映射 $i : S_*(X_1) + S_*(X_2) \to S_*(X_1 \cup X_2)$ 诱导了同调群的同构，则称 (X_1, X_2) 是一个 $\mathrm{Mayer} - \mathrm{Vietoris}$ 耦。

例 1.4.1. 若 $\mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2 = X$，则 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 $\mathrm{Mayer} - \mathrm{Vietoris}$ 耦。因为此时 $S_*(X_1) + S_*(X_2) = S_*^{\mathcal{U}}(X)$，根据定理 1.3.4，可知 $S_*^{\mathcal{U}}(X) \cong S_*(X) = S_*(X_1 \cup X_2)$

定理 1.4.3 (Mayer-Vietoris 序列)**.** 设 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 $\mathrm{Mayer} - \mathrm{Vietoris}$ 耦。则存在长正合列

$$\cdots \to H_q(X_1 \cap X_2) \stackrel{-}{\to} H_1(X_1) \oplus H_2(X_2) \stackrel{+}{\to} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \to \dots$$

证明. 短正合列诱导长正合列。 □

注 1.4.3. 对增广链复形，同样有短正合列

$$0 \to \widetilde{S}_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_\#} \widetilde{S}_*(X_1) \oplus \widetilde{S}_*(X_2) \xrightarrow{k_\#} \widetilde{S}_*(X_1) + \widetilde{S}_*(X_2) \to 0$$

因此也有简约同调群的 $\mathrm{Mayer} - \mathrm{Vietoris}$ 序列。

注 1.4.4. $\partial_* : H_q(X_1 \cup X_2) \to H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$ 的具体形式：任取 $[z] \in H_q(X_1 \cup X_2)$，由于 $\mathrm{Mayer} - \mathrm{Vietoris}$ 耦的原因，$[z]$ 一定有一个代表闭链可以写成 $x_1 + x_2$，其中 x_1 是 X_2 中的链，x_2 是 X_2 中的链。由于 $\partial z = \partial x_1 + \partial x_2 = 0$，则 $\partial x_1 = -\partial x_2$，记作 y，是 $X_1 \cap X_2$ 中的闭链，它代表了 $H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$ 中的同调类，即

$$\partial_*([z]) = [y]$$

定理 1.4.4 (Mayer-Vietoris 序列的自然性)**.** 设 $\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\}$ 是 X, Y 中的 $\mathrm{Mayer-Vietoris}$ 耦，映射 $f: X \to Y$ 满足 $f(X_1) \subset Y_1, f(X_2) \subset Y_2$，则有正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{q+1}(X_1 \cup X_2) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_q(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "-"] \arrow[d, "f_*"] & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \arrow[r, "+"] \arrow[d, "f*"] & H_q(X_1 \cup X_2) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \ldots \\
\cdots \arrow[r] & H_{q+1}(Y_1 \cup Y_2) \arrow[r, "\partial_*"] & H_q(Y_1 \cap Y_2) \arrow[r, "-"] & H_q(Y_1) \oplus H_q(Y_2) \arrow[r, "+'"] & H_q(Y_1 \cup Y_2) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

推论 1.4.1. 拓扑空间 X 是两个闭子空间 X_1, X_2 的并，若 $X_1 \cap X_2$ 是某个开邻域的形变收缩核，则 $\{X_1, X_2\}$ 是 $\mathrm{Mayer-Vietoris}$ 耦。

例 1.4.2. 当 $n \geq 0$ 时，有球面的同调群为

$$\widetilde{H_q}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. 令 $B_+ = \{(x_0, \ldots, x_n) \mid x_n \geq 0\}, B_- = \{(x_0, \ldots, x_n) \mid x_n \leq 0\}$，则 $B_+ \cap B_- = S^{n-1}$ 是其某个开邻域的收缩形变核，则 $\{B_+, B_-\}$ 是一个 $\mathrm{Mayer-Vietoris}$ 耦。而 B_+, B_- 都同胚与 D^{n-1}，是一个可缩空间，则其各个维数的简约同调群为零，利用简约同调群的 Mayer $-$ Vietoris 序列则有

$$\cdots \to 0 \overset{+}{\to} \widetilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \overset{-}{\to} 0 \overset{+}{\to} \widetilde{H}_{q-1}(S^n) \to \ldots$$

因此可以得到

$$\widetilde{H}_q(S^n) \cong \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \cong \ldots \cong \widetilde{H}_{q-n}(S^0)$$

利用两点空间的简约同调群可以得到我们期待的结果。 □

1.5 插曲：微分上同调

1.5.1 de Rham 上同调

在本节中[6]，为了简洁起见，仅从形式上的定义微分形式，而不深究其背后的原理。

[6]关于这部分材料，详见 GTM82

取开集 $D \subseteq \mathbb{R}^n$，并取坐标 $x = (x^1, \dots, x^n)$，则其上的微分形式如下

$$\begin{aligned}
\Omega^0(D) &= \{f \in C^\infty(D)\} \\
\Omega^1(D) &= \{\sum_{i=1}^n f_i \mathrm{d}x^i \mid f_i \in C^\infty(D)\} \\
\Omega^2(D) &= \{\sum_{1 \le i < j \le n} f_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \mid f_{ij} \in C^\infty(D)\} \\
&\vdots \\
\Omega^n(D) &= \{f \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \mid f \in C^\infty(D)\}
\end{aligned}$$

规定大于 n 次以及小于 0 次的微分形式都是零，并且

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$$

令 $\Omega^*(D) = \bigoplus_{i=1}^n \Omega^i(D)$，则 $(\Omega^*, \wedge)$ 构成了一个外代数。满足任取 $\omega \in \Omega^p(D), \eta \in \Omega^q(D)$，则

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$$

在微分形式上定义外微分运算 $d : \Omega^k(D) \to \Omega^{k+1}(D)$ 如下

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \\
\mathrm{d}(\sum_{i=1}^n f_i \mathrm{d}x^i) &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}x^i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

做 $\mathbb{R}$-线性扩张即可得到 $\Omega^k(D) \to \Omega^{k+1}(D)$ 的映射，并且容易验证，$\mathrm{d}^2 = 0$，因此得到了如下的微分复形

$$0 \to \Omega^0(D) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(D) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(D) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(D) \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots$$

并且可以定义该微分复形对应的上同调群[7]，记作 $H^*_{dR}(D, \mathbb{R})$ 有时也省略做 $H^*_{dR}(D)$，如果不强调系数。

例 1.5.1. 我们下面计算 $H^0_{dR}(D, \mathbb{R})$ 如下

$$\begin{aligned}
H^0_{dR}(D) &= \mathrm{Ker}(d : \Omega^0(D) \to \Omega^1(D)) \\
&= \{f \in C^\infty(D) \mid \mathrm{d}f = 0\}
\end{aligned}$$

因此

$$H^0_{dR}(D, \mathbb{R}) = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{D \text{ 的连通分支的个数}}$$

[7]由于随着边缘同态的作用指标在上升，因此这种同调群一般称作上同调群，以与之前的同调群作区分。

1.5.2 Stokes 公式

回忆在微积分中所学过的如下公式

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\partial D} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + Q\mathrm{d}z = \iint_D (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意到，如果我们记

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

那么根据外微分的运算则有

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y) = (\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}y = (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

类似上面的运算，可以发现后两个公式也有相同的结果，实际上，它们都是下面公式的特殊形式

定理 1.5.1 (Stokes 公式)**.** D 是 r 维边界分片光滑的区域，ω 是 $r-1$ 次微分形式，则

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega$$

注 1.5.1. 上面的等式也可以写成

$$\langle \partial D, \omega \rangle = \langle D, \mathrm{d}\omega \rangle$$

即 ∂ 与 d 构成对偶。

1.5.3 de Rham 上同调的函子性

取 $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n, D_2 \subseteq \mathbb{R}^m$，以及 D_1 的坐标 $(y^1, \ldots, y^n)$，D_2 的坐标 $(x^1, \ldots, x^m)$，我们定义切向量的推出

$$f_*(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

设 $\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_r} \varphi_{i_1\ldots i_r}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \mathrm{d}x^{i_r}$，则定义微分形式的拉回为

$$f^*(\omega) = \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_r} \varphi_{i_1\ldots i_r} \circ f \frac{\partial f^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \ldots \frac{\partial f^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_r}$$

并且我们断言 f^* 保持外积以及与外微分交换，即

$$\begin{cases} f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta) \\ f^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ f^* \end{cases}$$

因此微分形式的拉回

$$f^*:\Omega^*(D_2)\to\Omega^*(D_1)$$

诱导了 de Rham 上同调群之间的态射，即 H^*_{dR} 是一个反变函子。

1.5.4 de Rham 上同调中的 Mayer-Vietoris 序列

取 U_1,U_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$U=U_1\cup U_2$，则有

$$\begin{tikzcd}
 & U_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\
U_1\cap U_2 \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & & U_1\cup U_2=U \\
 & U_2 \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

命题 1.5.1. 根据上面的图表，对任意的 p，我们有下面的短正合列

$$0\to\Omega^p(U)\xrightarrow{I^p}\Omega^p(U_1)\oplus\Omega^p(U_2)\xrightarrow{J^p}\Omega^p(U_1\cap U_2)\to 0$$

其中

$$I^p(\omega)=(i_1^*(\omega),i_2^*(\omega))$$
$$J^p(\omega_1,\omega_2)=j_1^*(\omega_1)-j_2^*(\omega_2)$$

证明. 关键证明 J^p 是满射，不妨考虑 $p=0$ 的情形，其余情况类似。取从属于 $\{U_1,U_2\}$ 的单位分解 $\{\rho_1,\rho_2\}$，则任取 $f\in C^\infty(U_1\cap U_2)$，考虑 $f_1=\rho_2 f\in C^\infty(U_1),-\rho_1 f\in C^\infty(U_2)$[8]，则

$$f=\rho_2 f-(-\rho_1 f)=(\rho_1+\rho_2)f=f$$

□

推论 1.5.1. 上述微分复形的短正合列诱导了 de Rham 上同调群的长正合列，即 Mayer − Vietoris 序列。

$$\cdots\to H^p_{dR}(U)\xrightarrow{+}H^p_{dR}(U_1)\oplus H^p_{dR}(U_2)\xrightarrow{-}H^q_{dR}(U_1\cap U_2)\xrightarrow{\mathrm{d}^*}H^{q+1}_{dR}(U)\to\dots$$

注 1.5.2. 这里我们搞明白 d^* 对理解是十分有帮助的[9]，具体来说：

$$\mathrm{d}^*([\omega])=\begin{cases}-\mathrm{d}(\rho_V\omega), & \text{在 } U \text{ 上}\\ \mathrm{d}(\rho_U\omega), & \text{在 } V \text{ 上}\end{cases}$$

注 1.5.3. 关于单位分解，我们做如下补充：

[8] 思考：为什么不选取 $f_1=\rho_1 f, f_2=-\rho_2 f$?

[9] One of hallmarks of a topologist is a sound intuition of d^*

定义 1.5.1 (光滑单位分解)**.** 设 M 是 n 维光滑流形[10]，$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的局部有限的开覆盖[11]，则存在从属于 $\{U_i\}$ 的光滑单位分解，即存在 $\varphi_i \in U_i, 0 \le \varphi_i \le 1$，满足 $\operatorname{supp}\varphi_i \subset U_i, \forall i \in I$.

定义 1.5.2 (紧支的光滑单位分解)**.** 设 M 是 n 维光滑流形，$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的开覆盖，则存在 $\{V_j\}$ 是 $\{U_i\}$ 的一个局部有限的加细，以及从属于 $\{V_j\}$ 的光滑单位分解 $\{\phi_j\}$，使得 ϕ_j 的支集是 V_j 的紧子集。

例 1.5.2. 证明 $H^2_{dR}(\mathbb{R}^2) = 0$

证明. 这实际是 Poincaré 引理的特殊结果，我们对于这个例子进行具体的构造：任取 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 中的一个闭的 2-形式 $\omega = g\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，我们直接构造一个 1-形式 $\eta = f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y$，使得 $\omega = \mathrm{d}\eta$.

由于：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\eta &= \mathrm{d}(f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y)\\ &= ((f_2)_x - (f_1)_y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\end{aligned}$$

即我们需要构造 f_1, f_2 使得

$$(f_2)_x - (f_1)_y = g$$

而这是非常容易的，只需令 $f_1 \equiv 0$，以及

$$f_2 = \int_a^x g(t, y)\mathrm{d}t$$

即可。 □

命题 1.5.2. 开子集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 可以被有限个凸开子集覆盖，则 $H^*_{dR}(U)$ 是有限维的。

证明. 对 U 的凸开子集的个数 r 进行归纳，当 $r = 1$ 时根据 Poincaré 引理即可。假设 $r < k$ 时都成立，那么考虑 $r = k$ 时，假设 $\{U_1, \ldots, U_k\}$ 是 U 的一个凸开覆盖，考虑 $V = \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i$，则 $U = V \cup U_n$。根据 Mayer – Vietoris 序列，我们有

$$\cdots \to H^{q-1}(V \cap U_n) \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H^p(U) \to H^p(V) \oplus H^p(U_n) \to \ldots$$

而根据归纳假设，$H^{q-1}(V \cap U_n), H^p(V), H^p(U_n)$ 都是有限维的，再根据正合性可知 $H^p(U)$ 是有限维的，即归纳成立。 □

在上面的过程中，我们实际上都是在处理欧式空间中的对象，更一般的来说，可以考虑光滑流形上的 de Rham 上同调。

由于光滑流形 M 在局部上微分同胚与欧式空间中的开集，因此我们可以在 M 的坐标卡上定义微分形式，并且要求其与坐标卡相容得到整体上的微分形式。同样

[10]当我们提及流形时，总要求它是 T_2 并且可数的。

[11]即任取 $x \in M$，x 只包含在有限多个 U_i 中，我们对流形的要求已经足够强，使得这样的开覆盖总是存在的。

其上存在一个外微分算子 d，与微分形式一起组成了一个 de Rham 复形，因此可以定义 M 上的 de Rham 上同调群。

并且光滑流形之间的光滑映射会诱导微分形式的拉回，并且与外微分算子交换，就如同在局部时一样。因此将会诱导了 de Rham 复形之间的链映射，进而诱导上同调群之间的映射，因而 de Rham 上同调仍然具有函子性。

推论 1.5.2. 微分同胚的光滑流形具有同构的 de Rham 上同调群。

下面我们将定义上同调群的卡积，这是上同调优于同调的一个具体体现[12]

定义 1.5.3 (卡积)**.** 我们定义

$$\begin{aligned} H^r_{dR}(M) \times H^s_{dR}(M) &\to H^{r+s}_{dR}(M) \\ ([\xi],[\eta]) &\mapsto [\xi \wedge \eta] \end{aligned}$$

注 1.5.4. 上述定义确实是良定义的，因为设 $\xi' = \xi + \mathrm{d}\zeta$，则

$$\xi' \wedge \eta - \xi \wedge \eta = (\xi' - \xi) \wedge \eta = \mathrm{d}\zeta \wedge \eta = \mathrm{d}(\zeta \wedge \eta)$$

注 1.5.5. 对于卡积来说，其满足交换律

$$[\xi] \cup [\eta] = (-1)^{rs}[\eta] \cup [\xi]$$

这实际上源于 $\xi \wedge \eta = (-1)^{rs}\eta \wedge \xi$。

卡积赋予了上同调群更加丰富的结构，即使得分次群上增加了乘法运算，使得其称为分次环

定义 1.5.4 (分次环)**.** 一个分次环 $R_* = \{R_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ 是一个分次群 R_*，以及一系列双线性乘法 $\mu_{p,q} : R_p \times R_q \to R_{p+q}, \forall p,q \in \mathbb{Z}$，简记作 $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$，并且满足结合率以及存在单位元。

定义 1.5.5 (交换分次环)**.** 分次环 R_* 被称为交换的，如果

$$\alpha \cdot \beta = (-1)^{pq}\beta \cdot \alpha$$

定义 1.5.6 (分次环同态)**.** 分次环同态是指一个分次群同态，并且保持乘法以及乘法单位元。

例 1.5.3. de Rham 上同调群 $H^*_{dR}(M)$ 构成了一个交换分次环。光滑流形间的光滑映射诱导的上同调群之间的态射是分次环的同态。

推论 1.5.3. 微分同胚的光滑流形具有同构的上同调环结构。

[12]这将给出我们更多的信息，如果两个光滑流形微分同胚，那么它们的 de Rham 上同调群不仅要同构，而且我们将要赋予的环结构，也应该是相同的。

1.5.5 de Rham 上同调的同伦不变性

引理 1.5.1. 记 $i_t : M \to M \times I$ 定义为 $x \mapsto (x,t)$，显然有 i_0 同伦于 i_1，则它们诱导的链复形之间的链映射 i_0^*, i_1^* 是链同伦的。即存在 $T_p : \Omega^p(M \times I) \to \Omega^{p-1}(M), \forall p$，使得

$$T_{p-1}\mathrm{d} + \mathrm{d}T_p = i_1^* - i_0^*$$

证明. 任取 $x \in M$，以及任取 $\omega \in \Omega^p(M \times I)$，定义

$$(T_p\omega)_x(X_1, \dots, X_{p-1}) := \int_0^1 \iota_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega(X_1, \dots, X_{p-1})\mathrm{d}t = \int_0^1 \omega(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{p-1})\mathrm{d}t$$

下面我们验证这就是我们需要的链同伦：

注意到 $\omega \in \Omega^p(M \times I)$ 一定可以写成形如 $f(x,t)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}}$ 与 $g(x,t)\mathrm{d}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$ 的线性和，则只需要对这两种形式的 ω 验证即可。

当 $\omega = f(x,t)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}}$ 时，则计算：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(T_p\omega) &= \mathrm{d}((\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}}) \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}(\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}} \\
&= \sum_j (\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}} \\
T_{p+1}(\mathrm{d}\omega) &= T_{p+1}(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}}) \\
&= -\sum_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}} \\
&= -\mathrm{d}(T_p\omega)
\end{aligned}$$

而 $i_0^*\omega = i_1^*\omega = 0$，因此对于第一种情况是成立的。

当 $\omega = f(x,t)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$，则 $\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega = 0$，因此 $\mathrm{d}(T_p\omega) = 0$；

而另一方面：

$$\begin{aligned}
T_{p+1}(\mathrm{d}\omega) &= T_{p+1}(\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} + \dots) \\
&= (\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \\
&= (f(x,1) - f(x,0))\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \\
&= i_1^*\omega - i_0^*\omega
\end{aligned}$$

□

命题 1.5.3. f, g 是光滑流形 $M \to N$ 的光滑同伦,则 $f^* = g^*$ 是相同的从 $H_{dR}^*(M) \to H_{dR}^*(N)$ 的映射。

证明. 只需证明 f^* 与 g^* 是链同伦的链映射即可。设 $H : M \times I \to N$ 是 f 和 g 的光滑同伦，即 $H \circ i_0 = f, H \circ i_1 = g$，则

$$f^* = i_0^* \circ H^*$$
$$g^* = i_1^* \circ H^*$$

而 $i_0^* \cong i_1^*$，两式消去即有 $f^* \cong g^*$。 □

定义 1.5.7. 设 $f : M \to N$ 是连续函数，任取[13]光滑函数 $F : M \to N$，使得 f 连续同伦于 F，我们定义

$$f^* := F^* : H_{dR}^*(N) \to H_{dR}^*(M)$$

注 1.5.6. 我们要说明 f^* 不依赖于 F 的选取，而这是显然的，因为任取 G 是光滑映射，使得 f 同伦于 G，那么显然 F 同伦于 G，那么实际上有 F 光滑同伦于 G，这实际上是下面的引理。因此 f^* 不依赖于 F 的选取。

引理 1.5.2. 如果 F, G 是两个光滑函数，并且 F 与 G 连续同伦，那么必然有 F 与 G 光滑同伦。

命题 1.5.4 (de Rham 上同调的同伦不变性)**.** 有相同伦型的光滑流形有着相同的 de Rham 上同调群。

推论 1.5.4 (Poincaré 引理)**.** 若 M 可缩，则有

$$H_{dR}^p = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R}, & p = 0 \end{cases}$$

证明. 注意到 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 有相同的伦型，因此有

$$H_{dR}^p(\mathbb{R}^n) = H_{dR}^p(\mathbb{R}^{n-1}) = \cdots = H_{dR}^p(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R}, & p = 0 \end{cases}$$

□

推论 1.5.5. 同胚的光滑流形有着相同的 de Rham 上同调群。

证明. 同胚的光滑流形自然有相同的伦型。 □

[13]这样的光滑函数确确实实是存在的，这就是逼近定理

例 1.5.4. 计算 $H_{dR}^*(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\})$ 如下：我们取 $U_1=\mathbb{R}^2\backslash[0,+\infty), U_2=\mathbb{R}^2\backslash(-\infty,0]$。则

$$H_{dR}^q(U_1\cap U_2)=\begin{cases}0, & p>0\\ \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}, & q=0\end{cases}, \quad H_{dR}^q(U_1)\oplus H_{dR}^q(U_2)=\begin{cases}0, & p>0\\ \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}, & q=0\end{cases}$$

因此根据 Mayer − Vietoris 序列，当 $p>0$ 时有

$$0\to H_{dR}^p(U_1\cap U_2)\to H_{dR}^{p+1}(U_1\cup U_2)\to 0$$

即 $p\geq 2$ 时，有 $H_{dR}^q(U_1\cup U_2)=0$

而当 $p=0$ 时，有

$$0\to H_{dR}^0(U_1\cup U_2)\overset{I^*}{\to} H_{dR}^0(U_1)\oplus H_{dR}^0(U_2)\overset{J^*}{\to} H_{dR}^0(U_1\cap U_2)\overset{\mathrm{d}^*}{\to} H_{dR}^1(U_1\cup U_2)\to 0$$

我们可以直接计算

$$H_{dR}^1(U_1\cup U_2)=H_{dR}^0(U_1\cap U_2)/\operatorname{Im} J^*=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}/\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

例 1.5.5. 计算 S^n 的 de Rham 上同调群。

证明. 注意到 S^n 与 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0,\ldots,0\}$ 有相同的伦型，而 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 的上同调群可以利用与上例完全一致的证明方式来证明。 □

例 1.5.6. 当 $m\neq n$ 时，$\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 不同胚。

证明. 根据 Poincaré 引理得到它们的 de Rham 上同调群的结果即可。 □

定义 1.5.8 (good cover)**.** 光滑流形 M 的一个开覆盖 $\{U_i\}$ 被称为一个好覆盖[14]，如果任意有限交那么空，要么同胚于 $\mathbb{R}^n$。

命题 1.5.5. 若光滑流形 M 存在一个有限的好覆盖，则 $H_{dR}^*(M)$ 是有限维的。

证明. 同命题 2.4.2 □

定理 1.5.2 (Poincaré 对偶)**.** M 是 n 维可定向紧流形，则有同构

$$H_{dR}^k(M)\cong H_{dR}^{n-k}(M),\quad \forall 0\leq k\leq n$$

证明. 由于 M 上存在好覆盖，则 $H_{dR}^*(M)$ 都是有限维的。我们考虑下面的配对

$$\begin{aligned}H_{dR}^k(M)\times H_{dR}^{n-k}(M)&\to\mathbb{R}\\ ([\xi],[\eta])&\mapsto\int_M\xi\wedge\eta\end{aligned}$$

这个配对是良定义的非退化的双线性型，这样的双线性型直接导致了 Poincaré 对偶。 □

[14]这样的覆盖总是存在的，需要借助一些黎曼几何的工具，在其上赋予一个黎曼度量，再考虑测地凸邻域。

推论 1.5.6. $\dim H_{dR}^k(M) = \dim H_{dR}^{n-k}(M), 0 \le k \le n$，即 M 的第 k 个 Betti 数和第 $n-k$ 个 Betti 数是相同的。

定义 1.5.9 (Euler 示性数)**.** M 的欧拉示性数定义为

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H_{dR}^i(M)$$

推论 1.5.7. M 是奇数维可定向紧流形，则 $\chi(M) = 0$

推论 1.5.8. M 是连通的 n 维可定向紧流形，则 $H_{dR}^n(M) = \mathbb{R}$

1.5.6 微分上同调的一些应用

本节中，为了符号的简洁，省略 de Rham 上同调群 $H_{dR}^*(X)$ 的下标，简记作 $H^*(X)$。

定理 1.5.3. 记 $\mathbb{R}\cdot 1$ 是常值函数全体，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意真闭子集 A，有同构

$$\begin{aligned} H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) &= H^p(\mathbb{R}^n\backslash A), \quad \forall p \ge 1 \\ H^1(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) &= H^0(\mathbb{R}\backslash A)/\mathbb{R}\cdot 1 \\ H^0(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

证明. 令 $U_1 = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \cup (\mathbb{R}^n\backslash A) \times (-1, +\infty)$，以及 U_2 是 U_1 关于 $\mathbb{R}^n$ 的对称，则 $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1}\backslash A$，以及 $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n\backslash A) \times (-1, 1)$，则显然有下面的结果：

1. U_1, U_2 可缩；

2. $U_1 \cap U_2$ 同伦等价于 $\mathbb{R}^n\backslash A$

利用 dR Rham 上同调的 Mayer − Vietoris 序列即可得到需要的结果。 □

推论 1.5.9. 当 $n \ge 2$ 时，我们有

$$H^p(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, n-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. 取 $A = \{0\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的真闭子集。 □

利用上面的结果，实际上可以得到许多非常深刻的定理。第一个重要的应用则是 Brouwer 不动点定理。

定理 1.5.4 (Brouwer 不动点定理)**.** 若 $f: D^n \to D^n$ 是连续函数，其中 $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$，则 f 必存在不动点。

证明. 设 $f(x) \neq x, \forall x \in D^n$，则构造 $g(x) : D^n \to S^n$，其中 $g(x)$ 为从 $f(x)$ 连接 x 的射线与 S^n 的交点，显然 $g(x)$ 连续，并且 $g(x)|_{S^n} = \mathrm{id}_{S^n}$，考虑

$$S^{n-1} \xhookrightarrow{i} D^n \xrightarrow{g} S^{n-1}$$

则有 $g \circ i = \mathrm{id}_{S^n}$，则 $i^* \circ g^* : H^{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{g^*} H^{n-1}(D^n) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(S^{n-1})$ 诱导了上同调群间的同构，但是 $H^{n-1}(D^n) = 0$，矛盾。 □

另一个有趣的应用则是毛球定理,在后面我们将看到,毛球定理实际上是 Poincaré – Hopf 定理的一个简单推论。

定理 1.5.5 (毛球定理)**.** S^n 上存在连续的处处非零切向量场当且仅当 n 是奇数。

在证明之前，我们先看如何构造奇数维的球面上一个连续的处处非零的切向量的一个例子：

例 1.5.7. S^{2n+1} 上的处处非零的切向量场可以如下定义：$(x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1})$ 处的非零切向量可以定义为 $(-x_1, x_0, \ldots, -x_{2n+1}, x_{2n})$。

下面我们给出毛球定理的证明

证明. 假设 S^n 上有一个连续的处处非零的切向量场 $v(x), x \in S^n$，下面我们只需要说明 n 是奇数。构造 $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ 上的一个连续切向量场为

$$w(x) = v(\frac{x}{\|x\|}), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$$

那么令 $F(x,t) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t) w(x)$，实现了 $F(x, 0) = \mathrm{id}$ 与 $F(x, 1) = -\mathrm{id}$ 的同伦，因此

$$\mathrm{id}^* = f_1^* : H^n(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to H^n(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\})$$

但是对于 f_1^* 来说，我们可以写成其具体的形式如下：

$$\begin{aligned} f_1^* : H^n(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) &\to H^n(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) \\ [\xi] &\mapsto (-1)^{n+1}[\xi] \end{aligned}$$

因此 $n+1$ 是偶数，即 n 是奇数。 □

最后一步 f_1^* 的具体形式是由下面的引理保证的，因为 f_1 可以看成是线性变换 $-\mathrm{I}_{n+1}$。

引理 1.5.3. 如果 $n \geq 2$，并且 $A \in \mathrm{GL}(n)$，记 $f_A : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 定义为 $x \mapsto Ax$，则 $f_A^* = \mathrm{sgn}\,|A|$

证明. 对 A 进行初等变换得到 $B=(I+cE_{r,s})A, c\in\mathbb{R}$，则有同伦 $f_A\cong f_B$，因此 $f_A^*=f_B^*$，经过有限次初等变换后可以得到 $A=\operatorname{diag}(1,1,\ldots,\operatorname{sgn}|A|\}$，因此可知 $f_A^*=\operatorname{sgn}|A|$。 □

第三个应用则是分离定理，特别地，当 $n=2$ 时，就是 Jordan 闭曲线定理。

定理 1.5.6 (Jordan-Brouwer 分离定理). 取 $\sum$ 同胚于 $S^{n-1}, \sum\subset\mathbb{R}^n$，则 $\mathbb{R}^n\backslash\sum$ 有两个连通分支 U_1, U_2，且其中 U_1 有界，U_2 无界，并且 $\partial U_1=\partial U_2=\sum$，并称 U_1 是 $\sum$ 的内部，U_2 是 $\sum$ 的外部。

为了证明这个定理，我们先做一些准备工作，下面的延拓定理是一个重要的工具，使得我们可以将闭子集上的同胚延拓到全空间上，因为 S^n 和与其同胚的 $\sum$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集。

引理 1.5.4 (Urysohn-Tietze 引理). A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集，$f: A\to\mathbb{R}^m$ 是连续函数，则存在连续延拓 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，使得 $g|_A=f$。

证明. 标准的点集拓扑结论。 □

引理 1.5.5. $A\subset\mathbb{R}^n, B\subset\mathbb{R}^m$，是闭子集，且 $\phi: A\to B$ 是同胚，则存在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 到自身的同胚 h 使得 $h(x,0)=(0,\phi(x)), \forall x\in A$。

证明. 先将 ϕ 延拓成连续映射 $f_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，并且定义

$$\begin{aligned} h_1: \mathbb{R}^{m+n} &\to \mathbb{R}^{m+n} \\ (x,y) &\mapsto (x, y+f_1(x)) \end{aligned}$$

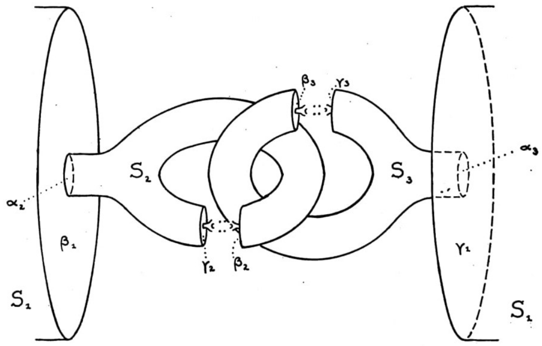
同理可以延拓 f^{-1} 成 $f_2:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$，类似的定义

$$\begin{aligned} h_2: \mathbb{R}^{m+n} &\to \mathbb{R}^{m+n} \\ (x,y) &\mapsto (x+f_2(y), y) \end{aligned}$$

则定义 $h=h_2^{-1}\circ h_1$ 即可。 □

推论 1.5.10. A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集，$\phi: A\to B$ 是同胚，则 ϕ 可以扩张为同胚 $\widetilde{\phi}:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$。

注 1.5.7. 上面的引理意味着 $\widetilde{\phi}:\mathbb{R}^{2n}\backslash A\to\mathbb{R}^{2n}\backslash B$ 是同胚！但一般而言，$\mathbb{R}^n\backslash A$ 与 $\mathbb{R}^n\backslash B$ 是不同胚的，例如 Alexander's 角球（见下图）在 $\mathbb{R}^3$ 中同胚与 S^2，但是它们的补是不同胚的。



虽然补不一定同胚，但是我们有下面的结论：

定理 1.5.7. A, B 都是 $\mathbb{R}^n$ 的真闭子集，A, B 同胚，则 $H^k(\mathbb{R}^n\backslash A) = H^k(\mathbb{R}^n\backslash B), 0 \leq k \leq n$。

证明. 对 m 进行归纳可知对任意 $m \geq 1$，有

$$H^{k+m}(\mathbb{R}^{n+m}\backslash A) \cong H^k(\mathbb{R}\backslash A)$$
$$H^m(\mathbb{R}^{n+m}\backslash A) \cong H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)/\mathbb{R}\cdot 1$$

由于 $\mathbb{R}^{2n}\backslash A$ 与 $\mathbb{R}^{2n}\backslash B$ 同胚，从而有

$$H^k(\mathbb{R}\backslash A) \cong H^{k+n}(\mathbb{R}^{2n}\backslash A) \cong H^{k+n}(\mathbb{R}^{2n}\backslash B) \cong H^k(\mathbb{R}^n\backslash B), \quad k \geq 0$$

□

推论 1.5.11. A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 的真闭子集，则它们的补有相同的连通分支个数。

有了上面的准备，我们可以证明 Jordan-Brouwer 分离定理

证明. 由于 $\mathbb{R}^n\backslash S^{n-1}$ 有两个连通分支，因此 $\mathbb{R}^n\backslash\sum$ 也有两个连通分支。记 $\mathbb{R}^n\backslash S^{n-1}$ 的两个连通分支为 $\mathring{D}^n, W = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x\| > 1\}$，取 $r = \max_{x\in\Sigma}\|x\|$，则 rW 连通，必含在 $\mathbb{R}^n\backslash\sum$ 的某个连通分支中，记作 U_2，则另一个连通分支必有界，记作 U_1。

下面证明 U_1, U_2 的边界都是 $\sum$，即证明任取 $p \in \sum$，对任意 p 的开邻域 V，V 中既存在 U_1 中的点也存在 U_2 中的点。定义 $A = \sum\backslash(\sum\cap V)$，则 A 是闭的，则 A 同胚于 S^{n-1} 的某个闭子集 B，则 $\mathbb{R}^n\backslash B$ 是连通的，从而 $\mathbb{R}^n\backslash A$ 连通。取 $p_1 \in U_1, p_2 \in U_2$，以及连接 p_1, p_2 的连续曲线 γ，由第一部分的结果 γ 与 $\sum$ 必相交，即 $\gamma^{-1}(\sum)$ 非空，闭子集 $\gamma^{-1}(\sum)$ 必有第一个以及最后一个元素 c_1 和 c_2。$\gamma(c_1) \in \sum\cap V, \gamma(c_2) \in \sum\cap V$，那么存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\gamma(c_1 - \varepsilon) \in V \cap U_1, \gamma(c_2 + \varepsilon) \in V \cap U_2$。 □

推论 1.5.12. $A \subset \mathbb{R}^n$，且 A 同胚于 $D^k, 0 \leq k \leq n$，则 $\mathbb{R}^n\backslash A$ 连通。

定理 1.5.8 (Brouwer)**.** V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$f : U \to \mathbb{R}^n$ 是连续单射，则 $f(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集，从而 f 是 U 到 $f(U)$ 的同胚。

证明. 任取 $f(x) \in f(U), x \in U$，取 x 的开邻域 V 使得其闭包 $\overline{V} \subset U$，$\overline{V} \cong D^n$ 且 $\partial V \cong S^{n=1}$。由于 $\overline{V}$ 是紧集，其上的单映射是同胚，因此 $h(\overline{V}) \cong \overline{V} \cong D^n$，根据推论 1.5.12，有 $\mathbb{R}^n \backslash h(\overline{V})$ 是连通的，而显然 $h(V)$ 也是连通的，则观察分解

$$\mathbb{R}^n \backslash h(\partial V) = (\mathbb{R}^n \backslash h(\overline{V})) \cup h(V)$$

将 $\mathbb{R}^n \backslash h(\partial V$ 分解成了两个连通的部分，根据分离定理的结果，这两个连通分支一定是开集，因此 $h(V)$ 是开集，从而 $h(x)$ 是内点。由于 $h(U)$ 的每一个点都是内点从而 $h(U)$ 是开集。 □

推论 1.5.13 (区域不变性原理)**.** $V \subset \mathbb{R}^n$，且 V 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的某个开子集，则 V 是开子集。

推论 1.5.14 (维数不变性原理)**.** $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ 都是非空开子集，并且 U 同胚于 V，则 $m = n$。

例 1.5.8. $\mathbb{R}^3$ 中的纽结 K 指的是 $K \cong S^1$，则有

$$H^k(\mathbb{R}^3 \backslash K) = \begin{cases} \mathbb{R}, & 0 \leq k \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. 只需要考虑 $\mathbb{R}^3 \backslash S^1$ 即可，而

$$H^k(\mathbb{R}^2 \backslash S^1) = H^k(\mathring{D}^n) \oplus H^k(\mathbb{R}^2 \backslash D^2)$$

再利用

$$H^k(\mathbb{R}^2 \backslash S^1) \cong H^{k+1}(\mathbb{R}^3 \backslash S^1), \quad \forall k$$

即可 □

1.5.7 奇异上同调与 de Rham 定理

回顾奇异同调，我们定义了奇异链复形 $S_*(X) = \{S_q(X) \mid q \in \mathbb{Z}\}$ 以及其上的边界算子 $\partial : S_q \to S_{q-1}$。实际上 $S_*(X)$ 可以被视作 $S_*(X; \mathbb{Z})$，进而对于任何一个群 G，我们都可以定义带 G 系数的奇异链复形 $S_*(X; G)$，以及带 G 系数的奇异同调群 $H_*(X; G)$[15]。

而如果想要定义奇异上同调，我们就需要定义一些上链复形以及其上的边界算子，如何从一个链复形自然的得到一个上链复形呢？一个很好的办法就是利用反变函子 $\mathrm{Hom}(-, G)$。

固定阿贝尔群 G 和拓扑空间 X，我们定义上 G 系数的奇异上链复形为

$$S^q(X; G) := \mathrm{Hom}(S_q(X), G)$$

[15]这里我们采用记号 $H_*(X; G)$ 而不是 $H_*(X, G)$，以免与之后要定义的相对同调群混淆。

以及边缘算子

$$\begin{aligned} \delta : S^q(X;G) &\to S^{q+1}(X;G) \\ f &\mapsto f \circ \partial \end{aligned}$$

利用下面的图表可以更好的理解 δ 的定义以及为什么 $\delta^2 = 0$:

$$\begin{tikzcd}
S_{q+1} \arrow[d, "\partial"] \arrow[ddr, "\delta^2(f)"] & \\
S_q \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\delta(f)"] & \\
S_{q-1} \arrow[r, "f"] & G
\end{tikzcd}$$

因此我们得到了一个新的上链复形 $\{S^*(X;G), \delta\}$，从而可以定义其同调群，称为 G 系数的奇异上同调群 $H^*(X;G)$

并且带 G 系数的奇异上同调群仍然具有函子性，实际上，可以看作是反变函子 $\mathrm{Hom}(-,G)$ 与奇异同调函子的复合。因此，它继承了奇异同调许多重要的性质，如:

命题 1.5.6 (同伦不变性). 如果 $f \cong g : X \to Y$ 是同伦的映射，则

$$f^* = g^* : H^*(Y;G) \to H^*(X;G)$$

由于上下同调群之间构成对偶关系，因此我们可以自然的在上下同调群之间构造一个配对，我们先在一般的阿贝尔群上叙述：如果 A, B 是阿贝尔群，定义

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(A,B) \times A &\xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} B \\ (\phi, a) &\mapsto \phi(a) \end{aligned}$$

记作 $\langle \phi, a \rangle := \phi(a), a \in A, \phi \in \mathrm{Hom}(A,B)$。

对于任意的链复形 $C = \{C_q, \partial\}$，通过 $\mathrm{Hom}(-,G)$ 函子可以得到一个上链复形 $\mathrm{Hom}(C,G) = \{\mathrm{Hom}(C_q,G), \delta\}$，下面定义上链复形 $\mathrm{Hom}(C,G)$ 与 C 的 Kronecker 乘积如下

$$\langle \sigma^p, \sigma_q \rangle = \begin{cases} \langle \sigma^p, \sigma_p \rangle, & p = q \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这可以过渡到同调群之间的 Kronecker 乘积：

$$\begin{aligned} H^q(X;G) \times H_q(X;G) &\xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} G \\ \langle [z^q], [z_q] \rangle &= \langle z^q, z_q \rangle = z^q(z_q) \end{aligned}$$

定理 1.5.9 (de Rham 定理). 设 M 是紧的光滑流形，则其 de Rham 上同调群同构于带 $\mathbb{R}$ 系数的奇异上同调群。

证明.（概要）我们用 $S_q^{smooth}(X;\mathbb{R})$ 来记以光滑[16]奇异单形 $\sigma:\Delta_q\to X$ 为基生成的 $\mathbb{R}$ 向量空间。我们定义如下的双线性的函数

$$\begin{aligned}\Omega^q(X)\times S_q^{smooth}(X;\mathbb{R})&\to\mathbb{R}\\ (\omega,\sigma)&\mapsto\int_\sigma\omega\end{aligned}$$

并且 Stokes 公式表明：

$$\int_{\partial\sigma}\omega=\int_\sigma \mathrm{d}\omega$$

即边界算子 ∂ 与外微分算子 d 对偶，并且可以诱导到同调群上。从而有上链映射：

$$\Omega^*(X)\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(S_*^{smooth}(X;\mathbb{R}),\mathbb{R})=S^*_{smooth}(X;\mathbb{R})$$

它是一个上链同伦等价。因此有 de Rham 上同调群 $H^*_{dR}(X)$ 与 $H^*(S^*_{smooth}(X;\mathbb{R}))$ 的同构。并且我们断言含入链映射

$$S_*^{smooth}(X;\mathbb{R})\to S_*(X;\mathbb{R})$$

也是一个链同伦等价。因而它们的 Kronecker 对偶 $S^*(X;\mathbb{R})\to S^*_{smooth}(X;\mathbb{R})$ 是一个链同伦等价。因此，de Rham 定理实际上归结于这两个链同伦等价的证明。 □

1.5.8 Künneth 公式

Künneth 公式给出了我们如何通过单个空间的同调群来计算乘积空间同调群的一个办法，即如何去计算 $H^*(X\times Y)$。

定义 1.5.10 (分次群的张量积)**.** 分次群 $A=\{A_p:p\in\mathbb{Z}\}$ 以 $B=\{B_q:q\in\mathbb{Z}\}$，$A\otimes$，$A\otimes B$ 也是一个分次群，定义为

$$(A\otimes B)_n=\bigoplus_{p+q=n}(A_p\otimes B_q)$$

定理 1.5.10 (Künneth 公式)**.** 设 M,N 是紧的光滑流形，则有

$$H^*(M\times N)=H^*(M)\otimes H^*(N)$$

例 1.5.9. 由于 $T^2=S^1\times S^1$，显然 $H^0(T^2)=H^2(T^2)=\mathbb{R}$。关键在于计算 $H^1(T^2)$，根据 Künneth 公式有

$$\begin{aligned}H^1(T^2)&=(H^0(S^1)\otimes H^1(S^1))\oplus(H^1(S^1)\otimes H^0(S^1))\\&=(\mathbb{R}\otimes\mathbb{R})\oplus(\mathbb{R}\otimes\mathbb{R})\\&=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\end{aligned}$$

[16] $\sigma:\Delta_q\to X$ 光滑指的是 σ 可以延拓成某个包含 Δ_q 的某开集到 X 的光滑函数。

1.5.9 映射度

设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射，其中 M, N 可定向的紧致光滑流形，并且 N 是连通的。对任意 $\omega \in \Omega^n(N)$，f 的度 $\deg(f)$ 定义为

$$\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega$$

$\deg(f)$ 的存在性可以通过下面的交换图得到：

$$\begin{array}{ccc} H^n(N) & \xrightarrow{f} & H^n(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\deg(f)} & \mathbb{R} \end{array}$$

而对于一个连续函数 f，想要定义 f 的度我们任取一个与其连续同伦的光滑函数 $\widetilde{f}$，定义 $\deg(f) := \deg(\widetilde{f})$，这种想法我们之前已经使用过。

命题 1.5.7. 对于映射度，我们有以下基本的结论

1. $\deg(\mathrm{id}_M) = 1$
2. $\deg(\text{常值}) = 0$
3. $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$
4. 设 M 的连通分支为 $M_1, \ldots, M_n$，则 $\deg(f) = \sum_{i=1}^n \deg(f|_{M_i})$

命题 1.5.8. 设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射，其中 M, N 可定向的紧致光滑流形，并且 N 是连通的，则对于任意正则值 $q \in N$，有

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{ind}_p(f)$$

我们先回顾一下相关的定义，对于任意光滑流形间的光滑映射 $f: M^m \to N^n$，$q \in N$ 被称为是 f 的正则值，如果任取 $p \in f^{-1}(q)$，有 $D_pf = T_pM \to T_pN$ 是满秩。当 $m = n$ 时，D_pf 是一个可逆矩阵，我们定义

$$\mathrm{ind}_p(f) = \begin{cases} 1, & \det D_pf > 0 \\ -1, & \det D_pf < 0 \end{cases}$$

命题的证明极大的依赖于下面的正则值原像定理

定理 1.5.11. 假定 M, N 都是紧致的光滑流形，f 是光滑映射，$q \in N$ 是 f 的正则值，假定 $\{p_1, \ldots, p_r\} = f^{-1}(q)$，则存在 q 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^r V_i$，其中 $\{V_i\}$ 是互不相交的，且对每个 i 有 $f|_{V_i}: V_i \to V$ 是微分同胚，$p_i \in V_i$。

下面给出定理的证明

证明. 由正则值原像定理，$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^r V_i$。任取 $\omega \in A^n(N)$，使得 $\operatorname{supp}\omega \subset V$ 并且 $\int_N \omega = 1$，则 $f^*\omega \in A^n(M)$，其支撑集 $\operatorname{supp}(f^*\omega) \subset \bigcup_{i=1}^r V_i$，则

$$f^*\omega = \sum_{i=1}^r \omega_i, \quad \operatorname{supp}\omega_i \subset V_i$$

则

$$\begin{aligned}
\deg(f) = \deg(f)\int_N \omega = \int_M f^*\omega = \int_M \sum_{i=1}^r \omega_i \\
&= \sum_{i=1}^r \int_{V_i} (f|_{V_i})^*\omega \\
&= \sum_{i=1}^r \operatorname{ind}_{p_i}(f) \int_V \omega \\
&= \sum_{i=1}^r \operatorname{ind}_{p_i}(f)
\end{aligned}$$

□

推论 1.5.15. 若 $\deg(f) \neq 0$，则 f 是满射。

一个和映射度紧密相关的定理就是有名的 Poincaré – Hopf 定理

定理 1.5.12 (Poincaré-Hopf 定理)**.** M 是 n 维紧致光滑流形，X 是 M 上的光滑向量场，并且其零点集孤立，则

$$\sum_p \operatorname{ind}_p(X) = \chi(M)$$

同样的，我们需要回顾一下向量场指数 $\operatorname{ind}_p(X)$ 的定义，任取以 p 点为中心的局部坐标 (U,φ)，取 B_δ 是以原点为中心，δ 为半径的球，使得 $B_\delta \subset \varphi(U)$，并且 X 在 U 上只有 p 一个零点，记 $\xi = \varphi_*(X|_U)$，考虑映射

$$\begin{aligned}
\partial B_\delta = S_\delta^{n-1} &\to S^{n-1} \\
x &\mapsto \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}
\end{aligned}$$

则 X 在 p 点的度定义为这个映射的度。

例 1.5.10. 毛球定理实际上是 Poincaré – Hopf 定理的一个特殊情况。例如在 S^2 时，任何连续的向量场都一定存在零点，因为 $\chi(S^2) = 2$；然而对于奇数维的球面上则不会出现这种情况，这是由于 Poincaré 对偶的推论告诉我们 $\chi(S^{2n+1}) = 0$。

注 1.5.8. 对连续函数 $f: S^n \to S^n$ 的映射度 $\deg(f)$，实际上还有下面的定义：考虑 f 诱导的同调群同态，则

$$\begin{aligned} f_*: H_n(S^n) &\to H_n(S^n) \\ \alpha &\mapsto \deg(f)\alpha \end{aligned}$$

定理 1.5.13 (Hopf 定理)**.** 考虑 $f, g: S^n \to S^n$，则 f 同伦于 g 当且仅当 $\deg(f) = \deg(g)$。

1.6 映射的简约同调序列

定义 1.6.1 (贴空间)**.** 设 X, Y 是拓扑空间，$A \hookrightarrow X$，以及 $f: A \to Y$ 是连续映射，在无交并 $X \coprod Y$ 中由 $a \sim f(a), a \in A$ 给出等价关系，则定义贴空间 $X \cup_f Y$ 为 $X \coprod Y/\sim$，称通过映射 f 把 X 贴到 Y 上。

命题 1.6.1. $Y \hookrightarrow X \cup_f Y$，即 Y 可以自然地看成贴空间的子空间。

注 1.6.1. 一般来说，X 不能看成是贴空间 $X \cup_f Y$ 的子空间。

定义 1.6.2 (贴胞腔)**.** $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ 称为闭胞腔；$\mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ 称为开胞腔，或简称为胞腔。任给连续映射 $f: S^{n-1} \to X$，则 $X \cup_f S^{n-1}$ 称为在 X 上贴一个 n 胞腔。

例 1.6.1. S^n 可以看作是向单点集上贴一个 $n-1$ 胞腔。

例 1.6.2. T^2 可以看作是向单点集上贴两个 1 胞腔和一个 2 胞腔。

例 1.6.3. 对于子空间 $A \hookrightarrow X$，商空间 X/A 可以看作是 X 通过 $f: A \to \{pt\}$ 贴到单点集上去。

例 1.6.4 (X 上的锥形)**.** X 上的锥形 CX 定义为

$$CX = X \times [0,1]/X \times \{1\}$$

显然，对于任意空间 X，CX 可缩。

例 1.6.5 (双角锥)**.** 对于拓扑空间 X，其双角锥 $\sum X$ 定义为

$$\sum X = CX/X \times \{0\}$$

例 1.6.6. S^1 的双角锥 $\sum S^1 = S^2$，更一般的，$S^n = \sum S^{n-1} = \sum^n S^0$。

例 1.6.7 (映射柱)**.** 对于拓扑空间之间的连续映射 $f: X \to Y$，f 的映射柱 Zf 定义为将 $X \times [0,1]$ 通过映射 $f: X \times \{0\} \to Y$ 贴到 Y 上去。

例 1.6.8 (映射锥). 对于拓扑空间之间的连续映射 $f: X \to Y$，f 的映射锥 Cf 定义为

$$Cf = Zf/X \times \{1\}$$

注 1.6.2. 映射柱与映射锥的一个想法在于，将对映射的研究转移为对空间的研究，即将对映射 f 的研究转移为对映射柱和映射锥的研究。

回忆对于拓扑空间 X 来说，$X = X_1 \cup X_2$，X_i 是开子空间，则 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 Mayer – Vietoris 耦。我们给出下面的命题

命题 1.6.2. 如果拓扑空间 $X = X_1 \cup X_2$，X_1, X_2 是闭子空间，且 $X_1 \cap X_2$ 是某个开邻域的形变收缩核，则 $\{X_1, X_2\}$ 是 Mayer – Vietoris 耦

证明. 记 $X_1 \cap X_2$ 的开邻域 V 以及 $F: V \times I \to V$ 是形变收缩同伦，记 $V_i = X_i \cup V, i = 1, 2$，显然 $\{V_1, V_2\}$ 是 Mayer – Vietoris 耦。

我们断言：对于 $i = 1, 2$，V_i 可形变收缩到 X_i，定义

$$F_i(x,t) = \begin{cases} x, & x \in X_i \\ F(x,t), & x \in V \backslash X_i \end{cases}$$

根据 Mayer – Vietoris 序列则有

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_q(V) \arrow[r] & H_q(V_1) \oplus H_q(V_2) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r] & H_{q-1}(V) \arrow[r] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_q(X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[u] & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \arrow[r] \arrow[u] & H_q(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \arrow[r] \arrow[u, dashed] & H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[u] & \dots
\end{tikzcd}$$

根据五引理可知虚线是一个同构，即 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 Mayer – Vietoris 耦。 □

例 1.6.9. 设 X 是多面体，$X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$，其中 X_i 是 X 的子多面体，并且任取 i, j 有 $X_i \cap X_j = x_0 \in X$，称为 X 是诸 X_i 的单点并，通常记作 $\bigvee_{i=1}^n X_i$，则有

$$\widetilde{H}_*(X) = \bigoplus_{i=1}^n \widetilde{H}_*(X_i)$$

对于连续映射 $f: X \to Y$，我们记

$$C_+f = X \times [\frac{1}{2}, 1]/X \times \{1\}, \quad C_-f = X \times [0, \frac{1}{2}] \cup_f Y$$

则 $C_+f \cup C_-f = Cf$，$C_+f \cap C_-f = X \times \{\frac{1}{2}\} \cong X$，并且 $\{C_+f, C_-f\}$ 构成了映射锥 Cf 的 Mayer – Vietoris 耦，则

定理 1.6.1. 我们有如下的同调正合列

$$\cdots \to \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_q(Y) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(Cf) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(X) \to \dots$$

证明. 考虑映射锥 Cf 的 Mayer – Vietoris 耦 $\{C_+f, C_-f\}$，利用 Mayer – Vietoris 序列则有

$$\cdots \to \widetilde{H}_q(X) \to \widetilde{H}_q(C_-f) \oplus \widetilde{H}_q(C_+f) \to \widetilde{H}_q(Cf) \to \widetilde{H}_{q-1}(X) \to \dots$$

考虑到 C_+f 可缩，C_-f 收缩形变到 Y，则上面有上面正合列到下面序列的同构

$$\cdots \to \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_q(Y) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(Cf) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(X) \to \dots$$

因而有下面序列的正合。 □

推论 1.6.1. 设 $A \subset X$，则有下面的长正合列

$$\cdots \to \widetilde{H}_q(A) \to \widetilde{H}_q(X) \to \widetilde{H}_q(X \cup CA) \to \widetilde{H}_{q-1}(A) \to \dots$$

证明. $X \cup CA$ 就是嵌入 $i : A \to X$ 的映射锥。 □

推论 1.6.2. 对于空间 X 的双角锥 $\sum X$，有同构

$$\widetilde{H}_{q+1}(\sum X) \cong \widetilde{H}_q(X)$$

证明. $\sum X$ 是点映射 $X \to \{pt\}$ 的映射锥，并且 $\widetilde{H}_*(\{pt\}) = 0$。 □

下面我们来考虑一种特殊的贴映射，并称这种操作为粘贴胞腔：假设有从 D^n 的边缘 S^{n-1} 到空间 X 的映射 $f : S^{n-1} \to X$，由于 CS^{n-1} 同胚于 D^n，因此映射锥 Cf 就是贴空间 $X \cup_f D^n$，因此立刻有下面的推论

推论 1.6.3. 对于 $D^n \supset S^{n-1} \xleftarrow{f} X$，有

1. $\widetilde{H}_q(X \cup_f D^n) = \widetilde{H}_q(X)$，当 $q \neq n, n-1$ 时。
2. 正合列

$$0 \to \widetilde{H}_n(X) \to \widetilde{H}_n(X \cup_f D^n) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_{n-1}(X) \to \widetilde{H}_{n-1}(X \cup_f D^n) \to 0$$

注 1.6.3. 因此，对于粘贴一个 n 胞腔的结果，n 维同调群可能不变，也可能变成与 $\mathbb{Z}$ 作直和，这是因为

$$\widetilde{H}_n(X \cup_f D^n)/\widetilde{H}_n(X) \cong \operatorname{im} \partial_* \leq \mathbb{Z}$$

而 $\mathbb{Z}$ 的子群只有 0 和 $\mathbb{Z}$；$n-1$ 维同调群可能不变，也可能变成以循环子群为核的商群，这是因为

$$\widetilde{H}_{n-1}(X)/\operatorname{im} f_* \cong \widetilde{H}_{n-1}(X \cup_f D^n)$$

并且 $\operatorname{im} f_*$ 是一个循环子群。

例 1.6.10. 环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 可以看作是在 $S^1 \vee S^1$ 上再粘贴一个 2 胞腔，其粘贴映射 $f: S^1 \to S^1 \vee S^1$ 是在两个 S^1 上都正反各绕一圈，因此得到

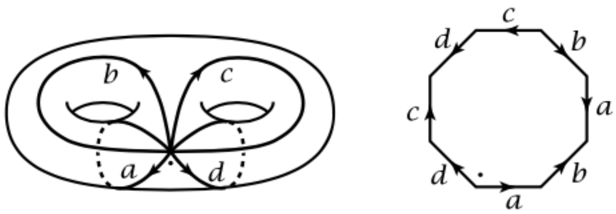
$$0 \to H_2(S^1 \vee S^1) \to H_2(T^2) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} H_1(S^1 \vee S^1) \to H_1(T^2) \to 0$$

从而有

$$H_2(T^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_0(T^2) = \mathbb{Z}$$

更高维的同调群都为零。

例 1.6.11. 双环面 $T^2 \# T^2$ 可以看作是在 $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ 上面再粘贴一个 2 胞腔



根据闭曲面的分类定理，任何一个可定向的闭曲面根据其亏格分类。一般的，对于亏格为 g 的闭曲面，我们有如下的序列

$$0 \to H_2(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{2g\text{个}}) \to H_2(T^2) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} H_1(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{2g\text{个}}) \to H_1(T^2) \to 0$$

从而有

$$H_2(\Sigma_g) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\Sigma_g) = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}, \quad H_0(\Sigma_g) = \mathbb{Z}$$

更高维的同调群都为零。

例 1.6.12. 下面我们来计算不可定向的闭曲面的同调群

例 1.6.13. 计算 $H_*(S^m \times S^n), m, n \in \mathbb{N}$

另一个非常有趣的例子则是复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 的同调群，一般来说，$\mathbb{CP}^n$ 通常定义为

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} / \mathbb{C}^*$$

为了方便看出其上的胞腔结构，我们不妨将 $\mathbb{CP}^n$ 视作是 S^{2n+1} 上每一族圆周中的每一个粘合成一点得到的空间，具体来说

$$\mathbb{CP}^n = S^{2n+1} / \{z \sim e^{i\theta} z, \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall z \in S^{2n+1}\}$$

这是我们之后常用的做法，粘合映射记作 $\pi_n : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$。

第三种看法，如果我们将 D^{2n} 与 $\{(z', \sqrt{1 - \|z'\|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid z' \in D^{2n}\} \subset S^{2n+1}$ 视作同胚，那么

从第三种定义来看，

2 相对同调

2.1 相对同调群

定义 2.1.1 (拓扑空间偶). 一个拓扑空间 X 与它的一个子空间 A 放在一起，称为一个拓扑空间偶 (X, A)。

定义 2.1.2 (空间偶的映射). 拓扑空间偶之间的映射 $f : (X, A) \to (Y, B)$ 指的是 $f : X \to Y$ 满足 $f(A) \subset B$。

定义 2.1.3 (空间偶的同伦). 空间偶映射的同伦 $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ 指的是联结 f, g 的同伦 $(X \times I, A \times I) \to (Y, B)$。

现在观察空间偶 (X, A)，则对任意的 q，我们有 $S_q(A) \subset S_q(X)$，则定义空间偶的 q 维奇异链群为

定义 2.1.4 (空间偶的奇异链). 空间偶 (X, A) 的 q 维奇异链群定义为商群

$$S_q(X, A) := S_q(X)/S_q(A)$$

注意到边缘态射 $\partial_q : S_q(A) \to S_{q-1}(A)$，那么其诱导了空间偶的奇异链群之间的态射，并且作用两次仍为零，那么：

定义 2.1.5 (空间偶的相对奇异链复形). 空间偶 (X, A) 的相对奇异链复形定义为

$$S_*(X, A) := \{S_q(X, A), \partial_q\}$$

定义 2.1.6 (空间偶的相对奇异同调群). 空间偶 (X, A) 的相对奇异同调群

$$H_*(X, A) := H_*(S_*(X, A))$$

定义 2.1.7 (相对同调的同态). 设 $f : (X, A) \to (Y, B)$ 是空间偶的映射，链映射 $f_\# : S_*(X) \to S_*(Y)$ 把子复形 $S_*(A)$ 映入 $S_*(B)$，则诱导了相对链映射 $f_\# : S_*(X, A) \to S_*(Y, B)$，而相对同调的同态 $f_* : H_*(X, A) \to H_*(Y, B)$ 指的是这个相对链映射诱导的同调群同态。

注 2.1.1. 自然的，如果两个空间偶映射 f, g 同伦，则诱导的相对同调的同态 f_*, g_* 也相同。同样地，如果两个空间偶有着相同的伦型，则它们有着相同的相对同调群。

对于空间偶来说，显然我们下面的短正合列

$$0 \to S_*(A) \to S_*(X) \to S_*(X, A) \to 0$$

所以我们有下面的定理

定理 2.1.1 (空间偶的同调序列). 设 (X,A) 是空间偶，则有正合同调序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

注 2.1.2. 与单个空间不同的是, 对于空间偶的简约同调群没有给出任何新鲜的东西, 这是因为

$$S_*(X)/S_*(A) = \widetilde{S}_*(X)/\widetilde{S}_*(A)$$

完全相同，因此

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_q(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

注 2.1.3. 我们仔细探究一下边缘同态

$$\partial_* : H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$$

任取相对闭链 $\overline{z} \in Z_q(X,A)$ 是 $[\overline{z}] \in H_q(X,A)$ 的代表元, 则 $\overline{z}$ 也可以看作是 X 上的链，并且满足 $\partial^X\overline{z} \in A$，并且 $\partial^X\overline{z} \in Z_{q-1}(A)$，这是因为 $\partial^A(\partial^X\overline{z}) = \partial^X(\partial^X\overline{z}) = 0$，根据 ∂_* 的定义实际上

$$\partial_*([\overline{z}]) = [\partial^X\overline{z}]$$

例 2.1.1. 设 x_0 是空间 X 中的一个点，则 $H_*(X,x_0) \cong \widetilde{H}_*(X)$。

例 2.1.2. 相对同调群

$$H_q(D^n,S^{n-1}) \cong \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & q \neq n \end{cases}$$

2.2 切除定理

定理 2.2.1. 设 X_1, X_2 是 X 的子空间，则 $\{X_1, X_2\}$ 是 Mayer − Vietoris 耦的充要条件是含入映射 $i : (X_1, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_2)$ 诱导了相对同调群的同构

$$i_* : H_*(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\cong} H_*(X_1 \cup X_2, X_2)$$

证明. 注意到

$$\frac{S_*(X_1) + S_*(X_2)}{S_*(X_2)} = \frac{S_*(X_1)}{S_*(X_1) \cap S_*(X_2)} = \frac{S_*(X_1)}{S_*(X_1 \cap X_2)} = S_*(X_1, X_1 \cap X_2)$$

在链复形偶 $(S_*(X_1) + S_*(X_2), S_*(X_2))$ 的正合同调序列中做上述替换，即替换

$$H_q((S_*(X_1)+S_*(X_2), S_*(X_2))) = H_q((S_*(X_1), S_*(X_1)\cap S_*(X_2))) = H_q(X_1, X_1\cap X_2)$$

从而得到

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_q(X_2) & \longrightarrow & H_q(S_*(X_1)+S_*(X_2)) & \longrightarrow & H_q(X_1, X_1\cap X_2) & \longrightarrow & H_q(X_2) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & H_q(X_2) & \longrightarrow & H_q(X_1\cup X_2) & \longrightarrow & H_q(X_1\cup X_2, X_2) & \longrightarrow & H_q(X_2) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

再利用五引理即可。 □

推论 2.2.1 (切除定理)**.** 设 (X,A) 是空间偶，子集 $W\subset A$ 满足 $\overline{W}\subset \operatorname{int} A$，则含入映射 $i:(X\backslash W, A\backslash W)\to (X,A)$ 诱导了相对同调群的同构

$$i_*: H_*(X-W, A-W)\xrightarrow{\cong} H_*(X,A)$$

证明. 设 $X_1 = X\backslash W, X_2 = A$, 则 $\mathring{X}_1\cup\mathring{X}_2 = X$, 则 $\{X_1, X_2\}$ 是 X 的是 Mayer − Vietoris 耦。 □

下面的定理揭示了相对同调群与绝对同调群的关系

定理 2.2.2. 设 (X,A) 是空间偶，A 非空，则

$$H_*(X,A)\cong \widetilde{H}_*(X\cup CA)$$

证明. 由于 CA 可缩，观察空间偶 $(X\cup CA, CA)$ 则有

$$H_*(X\cup CA, CA)\cong \widetilde{H}_*(X\cup CA)$$

再利用切除定理切除上半锥 $W=(A\times[\frac{1}{2},1])/(A\times\{1\})$，切除后的空间以 (X,A) 为收缩形变核，因此

$$H_*(X\cup CA, CA)\cong H_*(X,A)$$

□

2.3 空间三元组的同调序列

定义 2.3.1 (空间三元组)**.** 一个拓扑空间 X 与它的两个子空间 $B\subset A$ 放在一起，称为一个空间三元组 (X,A,B)

定义 2.3.2. 空间三元组之间的映射 $f:(X,A,B)\to(X',A',B')$ 指的是 $f:X\to X'$ 满足 $f(A)\subset A', f(B)\subset B'$。

对于空间三元组 (X,A,B)，我们总是有下面的短正合列

$$0\to S_*(A,B)\xrightarrow{i^{\#}} S_*(X,B)\xrightarrow{j_{\#}} S_*(X,A)\to 0$$

则我们有

定理 2.3.1. 设 (X,A,B) 是空间三元组，则有正合同调序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(A,B) \xrightarrow{i_*} H_q(X,B) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A,B) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

定理 2.3.2. 三元组 (X,A,B) 相对同调长正合列中的边缘同态 ∂_* 有分解：对于任意 $C \subset B$，有

$$H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A,C) \xrightarrow{j_*} H_{q-1}(A,B)$$

其中 j_* 是由含入映射 $j:(A,C) \to (A,B)$ 诱导的。

证明. 含入映射 $j:(X,A,C) \to (X,A,B)$ 给我们了如下的交换图表

而右边方块的交换性就是我们需要的分解。 □