同调论

刘博文

目录

1 奇异同调

1.1 范畴与函子

1.1.1 范畴

定义 1.1.1. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 是由以下要素组成：

1. 一类数学对象 $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$；
2. 对于每两个对象 X, Y，给定了一个集合 $\mathrm{Mor}(X,Y)$，其元素称为从 X 到 Y 的射，记 $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ 为 $f : X \to Y$；
3. 一个复合规则 $\mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z)$，记作 $(f,g) \mapsto g \circ f$，并且满足以下性质：

   (1) 结合律：对任意的 $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to W$，满足
   $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

   (2) 单位律：每个对象 X 有一个单位射 $\mathrm{id}_X : X \to X$，满足对任何 $f : Y \to X$ 有
   $$\mathrm{id}_X \circ f = f$$
   对于任何 $g : X \to Z$，满足
   $$g \circ \mathrm{id}_X = g$$

在下面的例子中，都以 {对象，射} 的形式展示：

例 1.1.1. 集合的范畴：{集合，函数}

例 1.1.2. 光滑流形的范畴：{光滑流形，光滑映射}

例 1.1.3. 拓扑空间的范畴：{拓扑空间，连续映射}

例 1.1.4. 单纯复形的范畴：{单纯复形，单纯映射}

例 1.1.5. 阿贝尔群的范畴：{阿贝尔群，群同态}

例 1.1.6. 群的范畴：{群，群同态}；环的范畴：{环，环同态}

例 1.1.7. 域 F 上线性空间的范畴：{F 线性空间，F 线性映射}

例 1.1.8. 域 F 上的代数的范畴：{F 代数，F 代数同态}

例 1.1.9. 拓扑空间的范畴：{拓扑空间，X 到 Y 映射的同伦类}

例 1.1.10. 带基点的拓扑空间的范畴：{带基点的拓扑空间，保持基点的连续映射}

例 1.1.11. 取定拓扑空间 X，考虑：{X 中的点，从点 a 到点 b 的道路的同伦类，其中 $a, b \in X$}

1.1.2 协变函子

定义 1.1.2. 假设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是两个范畴，一个协变函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个对应：

1. $\mathcal{C}$ 中的每个对象 X 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个对象 $F(X)$；
2. $\mathcal{C}$ 的每个射 $f:X\to Y$ 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个射 $F(f):F(X)\to F(Y)$，满足以下性质：

   (1) 复合律：对于射 $f:X\to Y, g:Y\to Z$，有

   $$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$$

   (2) 单位律：对于任意对象 X，有

   $$F(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{F(X)}$$

例 1.1.12. 遗忘函子：$\{$拓扑空间，映射$\}\to\{$集合，函数$\}$

例 1.1.13. 基本群函子 $\pi_1:\{$带基点的拓扑空间，保持基点的连续映射$\}\to\{$群，群同态$\}$

例 1.1.14. 单纯同调函子 $H_*:\{$单纯复形，单纯映射$\}\to\{$阿贝尔群，群同态$\}$

1.1.3 反变函子

定义 1.1.3. 假设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是两个范畴，一个反变函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个对应：

1. $\mathcal{C}$ 中的每个对象 X 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个对象 $F(X)$；
2. $\mathcal{C}$ 的每个射 $f:X\to Y$ 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个射 $F(f):F(Y)\to F(X)$，满足以下性质：

   (1) 复合律：对于射 $f:X\to Y, g:Y\to Z$，有

   $$F(g\circ f)=F(f)\circ F(g)$$

   (2) 单位律：对于任意对象 X，有

   $$F(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{F(X)}$$

例 1.1.15. 对偶函子:$\{$域 F 上的线性空间，F 线性映射$\}\to\{$对偶空间，映射的拉回$\}$

例 1.1.16. 给定拓扑空间 X，考虑 $C(X)=\{$连续函数 $X\to\mathbb{R}\}$，则有反变函子 $C^*:\{$拓扑空间，连续映射$\}\to\{$实代数，实代数同态$\}$

定义 1.1.4. 称一个射 $f : X \to Y$ 是可逆的，如果存在射 $g : Y \to X$，使得：

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

定义 1.1.5. 称两个对象是同构的，如果它们之间存在一对互逆的射。

命题 1.1.1. 协变（反变）函子总是把单位射变成单位射，把可逆射变成可逆射，把同构的对象变成同构的对象。

1.2 链复形与链映射

1.2.1 链复形及其同调群

定义 1.2.1. 一个链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 是一串阿贝尔群 C_q 以及一串群同态 $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$（称为 q 维边缘算子），满足 $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0, \forall q$，写法上有：

$$\cdots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \dots$$

定义 1.2.2. 链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 的 q 维闭链群定义为 $Z_q(C) = \operatorname{Ker} \partial_q$；$q$ 维边缘链群定义为 $B_q(C) = \operatorname{Im} \partial_{q+1}$

定义 1.2.3. 链复形 C 的 q 维同调群定义为 $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$，其元素称为 C 的 q 维同调类。

约定 1.2.1. 我们约定，$z_q \in Z_q(C)$ 所代表的同调类为 $[z_q] \in H_q(C)$，记 $H_*(C) = \{H_q(C)\}$，实际上，$H_*(C)$ 是一个分次群。

定义 1.2.4. 分次群指的是一个阿贝尔群序列 $G_* = \{G_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$，分次群同态 $\phi_* : G_* \to G'_*$ 指的是一个同态序列 $\{\phi_q : G_q \to G'_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$

定义 1.2.5. 设 C, D 是链复形，一个链映射 $f : C \to D$ 是一串同态 $f_q : C_q \to D_q$，满足：

$$\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q, \quad \forall q$$

即下面的图表交换[1]：

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial_q"] & D_{q-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

[1]我们不在符号上区分不同链复形之间的边缘同态，一并记作 ∂_q，请读者留心。

1.2.2 链映射及其诱导同态

命题 1.2.1. 链映射 $f : C \to D$ 诱导出同调群的同态 $f_* : H_*(C) \to H_*(D)$，映射为 $f_*([z_q]) = [f_q(z_q)], \forall z_q \in Z_q(C)$

证明. 直接验证 □

至此，我们得到了一个新的范畴，即链复形的范畴 {链复形，链映射}，以及一个新的函子，同调函子：{链复形，链映射} $\to$ {分次群，分次群同态}。

1.2.3 链同伦

定义 1.2.6. 两个链映射 $f, g : C \to D$ 称为是链同伦的，如果存在一串同态 $T = \{T_q : C_q \to D_{q+1}\}$，如下面图表：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}-g_{q+1}"'] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q-g_q"] \arrow[dl, dashed, "T_q"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q-1}-g_{q-1}"] \arrow[dl, dashed, "T_{q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial_q"] & D_{q-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

使得对任意 q 满足 $\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q$，称 T 为联结 f, g 得一个链同伦，记作 $f \simeq g : C \to D$ 或者 $T : f \simeq g : C \to D$

定理 1.2.1. 假设 $f \simeq g : C \to D$，则 $f_* = g_* : H_*(C) \to H_*(D)$，即链同伦的链映射诱导出相同的同调群同态。

证明. 直接验证 □

命题 1.2.2. 链映射之间的链同伦关系是一个等价关系。

证明. □

定义 1.2.7. 两个链复形 C, D 称为是链同伦等价的，如果存在链映射 $f : C \to D, g : D \to C$，使得 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_D, g \circ f \simeq \mathrm{id}_C$

命题 1.2.3. 链同伦等价诱导同调群的同构，因而链同伦等价的链复形有同构的同调群。

证明. 显然 □

1.3 奇异同调群

1.3.1 奇异单形

定义 1.3.1. q 维标准单形 $\Delta_q = \{(x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \le x_i \le 1, \sum_{i=0}^{q} x_i = 1\}$

定义 1.3.2. 拓扑空间 X 中的 q 维奇异单形指的是一个连续映射 $\sigma : \Delta_q \to X$

例 1.3.1. （线性奇异单形）C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集，$c_0, c_1, \ldots, c_q \in C$，则有唯一的线性映射 $\Delta_q \to C$，把顶点 $e_0, \ldots, e_q$ 映射成 $c_0, \ldots, c_q$，记为 $(c_0 c_1 \ldots c_q) : \Delta_q \to C$，定义为 $\sum_i x_i e_i \mapsto \sum_i x_i c_i$

在下面的讨论中，我们取定拓扑空间 X

定义 1.3.3. X 的 q 维奇异链群 $S_q(X)$ 定义为以 X 中所有 q 维奇异单形为基生成的自由阿贝尔群，其元素称为 q 维奇异链，具有形式

$$c_q = k_1 \sigma_q^{(1)} + \cdots + k_r \sigma_q^{(r)}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \sigma_q^{(i)} : \Delta_q \to X, q \geq 0$$

并且规定负维数的 $S_q(X) = 0$

定义 1.3.4. X 中 q 为奇异单形 $\sigma : \Delta_q \to X$ 的边缘定义为如下 $q-1$ 维奇异链

$$\partial \sigma = \partial(\sigma \circ (e_0 \ldots e_q)) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \circ (e_0 \ldots \hat{e_i} \ldots e_q)$$

做 $\mathbb{Z}$ 线性扩张得到

$$\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$$

是阿贝尔群同态。

命题 1.3.1. $S_*(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$ 是链复形。

证明. 即验证 $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$，由于 ∂ 是群同态，因此只需要在奇异单形上验证即可。先在标准单形上看：

$$\begin{aligned}
\partial_{q-1} \circ \partial_q (e_0 \ldots e_q) &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_{q-1} (e_0 \ldots \widehat{e_i} \ldots e_q) \\
&= \sum_{i=0}^{q} \Big(\sum_{j<i} (-1)^j (e_0 \ldots \widehat{e_j} \ldots \widehat{e_i} \ldots e_q) + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} (e_0 \ldots \widehat{e_i} \ldots \widehat{e_j} \ldots e_q) \Big) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (e_0 \ldots \widehat{e_j} \ldots \widehat{e_i} \ldots e_q) + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j-1} (e_0 \ldots \widehat{e_i} \ldots \widehat{e_j} \ldots e_q) \\
&= 0
\end{aligned}$$

将上式用映射 $\sigma : \Delta_q \to X$ 复合就得到 $\partial_{q-1} \circ \partial_q (\sigma) = 0$ □

1.3.2 奇异链复形与奇异同调群

定义 1.3.5. 链复形 $S_*(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$ 称为 X 的奇异链复形。由 X 的奇异链复形决定的同调群称为 X 的奇异同调群，记作 $H_*(X) := H_*(S_*(X))$

定义 1.3.6. 设 $f : X \to Y$ 是映射，它把 X 中的奇异单形 $\sigma : \Delta_q \to X$ 变成 Y 中的奇异单形 $f \circ \sigma$，记为 $f_{\#}(\sigma)$。通过线性扩张可以得到同态

$$f_{\#} : S_q(X) \to S_q(Y)$$

命题 1.3.2. $f_{\#}$ 与 ∂ 可交换，即 $f_{\#} : S_*(X) \to S_*(Y)$ 是链映射。

证明. 显然。 □

定义 1.3.7. 映射 $f : X \to Y$ 诱导的同调群的同态 $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ 指的是链映射 $f_{\#} : S_*(X) \to S_*(Y)$ 所诱导的同调群同态。

命题 1.3.3 (奇异同调群的拓扑不变性)**.** 同胚的拓扑空间有着同构的奇异同调群。

注 1.3.1. 协变函子 S_* 把拓扑空间范畴变到链复形范畴，同调函子把链复形范畴变成分次群范畴，将这两个协变函子复合得到协变函子称为奇异同调函子 H_*。因此用这种观点，命题 1.3.3 是直接的，因为函子是保同构的。

例 1.3.2. 单点空间的奇异同调群 $H_*(\mathrm{pt})$ 如下

$$H_*(\mathrm{pt}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

这是因为对于每一个维度, 都只有一个奇异单形 $\sigma : \Delta_q \to \{\mathrm{pt}\}$, 因此 $S_q(X) = \mathbb{Z}, \forall q$, 对于边缘同态 ∂_q 来说，我们有

$$\partial_q = \begin{cases} 1, & q = 2k+1 \\ 0, & q = 2k \end{cases}$$

因此我们有如下的链复形

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \dots$$

因此可以得到我们期待的结果。

定义 1.3.8. 克罗内克同态 $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$\varepsilon(k_1 a_1 + \cdots + k_r a_r) = k_1 + \cdots + k_r$$

注 1.3.2. $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ 诱导出满同态 $H_0(X) \to \mathbb{Z}$，因为 $S_0(X) = Z(X)$，并且每个 1 维奇异单形的边缘的克罗内克指标为零。

命题 1.3.4. 如果空间 X 道路连通，则 $\varepsilon : H_0(X) \to \mathbb{Z}$ 是同构。

证明. 任取基点 $p \in X$，任意 $c_0 = k_1a_1 + \cdots + k_ra_r \in \operatorname{Ker}(\varepsilon)$，则 $c_0 = c_0 - \varepsilon(c_0)b = k_1(a_1 - b) + \cdots + k_r(a_r - b)$，由于 X 道路连通，因此存在道路连接 a_i 和 b，对于每个 i 成立，记作 σ_i，因此

$$\partial(\sum_i k_i\sigma_i) = c_0$$

因此 c_0 是一个边缘链，因此 $\operatorname{Ker}\varepsilon = 0$，即 ε 是同构。 □

定义 1.3.9. 一族链复形 $\{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$，其中 $C_\lambda = \{C_{\lambda q}, \partial_{\lambda q}\}$ 这族链复形的直和定义为 $\bigoplus C_\lambda = \{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda q}, \bigoplus \partial_{\lambda q}\}$

命题 1.3.5.

$$H_*(\bigoplus_\lambda C_\lambda) = \bigoplus_\lambda H_*(C_\lambda)$$

证明. 我们具体写出链复形的直和如下：

$$\cdots \bigoplus_\lambda C_{\lambda q+1} \xrightarrow{\oplus_\lambda \partial_{\lambda q+1}} \bigoplus_\lambda C_{\lambda q} \xrightarrow{\oplus_\lambda \partial_{\lambda q}} \bigoplus_\lambda C_{\lambda q-1} \to \ldots$$

因此可以注意到

$$H_q(\bigoplus_\lambda C_\lambda) = \operatorname{Ker}\bigoplus_\lambda \partial_{\lambda q}/\operatorname{Im}\bigoplus_\lambda \partial_{\lambda q+1} = \bigoplus_\lambda \operatorname{Ker}\partial_{\lambda q}/\operatorname{Im}\partial_{\lambda q+1}$$

最后一个等式成立是因为核与像是可以与直和交换的，因此

$$H_q(\bigoplus_\lambda C_\lambda) = \bigoplus_\lambda H_q(C_\lambda)$$

□

定理 1.3.1. 设 $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 是 X 的道路连通分支分解，则有同调群的直和分解 $H_*(X) = \oplus_{\lambda\in\Lambda} H_*(X_\lambda)$

证明. 用 $\sum_X$ 记 X 中全体奇异单形的集合，则可以分解为 $\sum_X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \sum_{X_\lambda}$，从而有直和分解 $S_*(X) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_*(X_\lambda)$ □

推论 1.3.1. 拓扑空间 X 道路连通当且仅当 $H^0(X) = \mathbb{Z}$

1.3.3 简约奇异同调群

定义 1.3.10. 拓扑空间 X 的增广链复形 $\widetilde{S}_*(X) = \{\widetilde{S}_q(X), \widetilde{\partial}_q\}$ 定义为

$$\widetilde{S}_q(X) = \begin{cases} S_q(X), & q > -1 \\ \mathbb{Z}, & q = -1 \end{cases} \qquad \widetilde{\partial}_q = \begin{cases} \partial_q, & q > 0 \\ \varepsilon, & q = 0 \end{cases}$$

注 1.3.3. $f:X\to Y$ 诱导的 $f_\#:S_q(X)\to S_q(Y)$ 保持零维的克罗内克指数，因此 $f_\#:\widetilde{S}_*(X)\to\widetilde{S}_*(Y)$ 是链映射（$f_\#:\widetilde{S}_{-1}(X)\to\widetilde{S}_{-1}(Y)$ 规定为 id）

定义 1.3.11. 拓扑空间 X 的简约同调群定义为增广链复形 $\widetilde{S}_*(X)$ 对应的同调群，记作 $\widetilde{H}_*(X)$。$f:X\to Y$ 诱导的同态 $f_*:\widetilde{H}_*(X)\to\widetilde{H}_*(Y)$ 规定为链映射 $f_\#:\widetilde{S}_*(X)\to\widetilde{S}_*(Y)$ 所诱导的同调群同态

命题 1.3.6. 对于拓扑空间 X，简约同调群与同调群有如下关系

$$H_q(X)=\begin{cases}\widetilde{H}_q(X), & q\neq 0\\ \widetilde{H}_q(X)\oplus\mathbb{Z}, & q=0\end{cases}$$

证明. 由于增广链复形与链复形相比只改变了链群 C_{-1} 以及 ∂_0，因此对于 $q>0$ 时的同调群都是不改变的。

对于零维的情况，我们有

$$H_0(X)=C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1,\quad \widetilde{H}_0(X)=\operatorname{Ker}\varepsilon/\operatorname{Im}\partial_1$$

而由于 ε 是满射，我们有

$$C_0(X)/\operatorname{Ker}\varepsilon\cong\mathbb{Z}$$

因此可以得到

$$H_0(X)\cong\widetilde{H}_0(X)\oplus\mathbb{Z}$$

□

注 1.3.4. 后补：上面的证明利用了一个看似“显然”的结果：

$$C_0(X)/\operatorname{Ker}\varepsilon\cong\mathbb{Z}\implies C_0(X)\cong\operatorname{Ker}\varepsilon\oplus\mathbb{Z}$$

实际上是因为下述短正合列分裂的结果

$$0\to\operatorname{Ker}\varepsilon\to C_0(X)\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\to 0$$

推论 1.3.2. 拓扑空间 X 是道路连通当且仅当 $\widetilde{H}_0(X)=0$

1.3.4 奇异同调的同伦不变性

定义 1.3.12. 映射 $f:X\to Y,g:X\to Y$ 称为同伦的，如果存在映射 $F:X\times I\to Y$，使得 $F(x,0)=f(x),F(x,1)=g(x)$，记作 $f\cong g$

定义 1.3.13. 两个拓扑空间 X,Y 称为同伦等价，或者是有相同的同伦型，如果存在映射 $f:X\to Y,g:Y\to X$，使得 $f\circ g\cong\mathrm{id}_Y$，$g\circ f\cong\mathrm{id}_X$

定义 1.3.14. 拓扑空间 X 称为是可缩的，如果它与单点集有相同的同伦型。

定义 1.3.15. 拓扑空间 X 的子空间 A 称为是 X 的收缩形变核[2]，如果存在收缩 $r: X \to A$[3]，使得 $i \circ r$ 同伦于 id_X，并且同伦的过程中固定 A[4]，其中 $i: A \to X$ 是嵌入。

例 1.3.3. S^n 是 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 的收缩形变核。

定理 1.3.2 (同伦不变性)**.** 假定 $f \cong g$ 是同伦的映射，则 $f_\# \cong g_\# : S_*(X) \to S_*(Y)$ 是链同伦的，因而诱导相同的同调群同态。

推论 1.3.3 (同伦型不变性)**.** 设拓扑空间 X, Y 有相同的同伦型 $X \cong Y$，则它们的同调群同构。

推论 1.3.4. 设拓扑空间 X 的子空间 A 是 X 的收缩形变核，则嵌入映射 $i: A \to X$ 诱导了同调群的同构。

1.3.5 与基本群的关系

定义 1.3.16. X 是拓扑空间，$x_0 \in X$ 是取定的基点，则 X 的基本群为

$$\pi_1(X, x_0) = \{\gamma\text{的同伦类} \mid \gamma\text{是 } x_0 \text{ 处的闭路}\}$$

如果我们将 $[0,1]$ 等同于 1 维标准单形，则 X 中的每条道路都是 X 中的 1 维奇异单形，若 γ 是闭道路，则 γ 是闭链，因此 $H_1(X)$ 关心的也是 X 中的闭路的情况。以 $[\gamma]_h \in H_1(X)$ 表示 γ 代表的同调类，$[\gamma]$ 代表 γ 的同伦类。

易知

$$[\gamma\gamma']_h = [\gamma]_h + [\gamma']_h$$

故我们有同态：

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$$

定义为 $[\gamma] \mapsto [\gamma]_h$，称为 *Hurewicz* 同态。

定理 1.3.3. 假设拓扑空间 X 道路连通，则 *Hurewicz* 同态是满同态，并且 $\mathrm{Ker}\, h_*$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的换位子群，即 $H_1(X)$ 就是 $\pi_1(X, x_0)$ 的交换化。

1.3.6 $\mathcal{U}$ 小奇异链

定义 1.3.17. X 是拓扑空间，$\mathcal{U}$ 是 X 的覆盖，奇异单形 $\sigma: \Delta_q \to X$ 被称为 $\mathcal{U}$-小的，如果 $\sigma(\Delta_q) \subset U \in \mathcal{U}$；记 $S_q^{\mathcal{U}}(X)$ 是由以所有 $\mathcal{U}$-小奇异单形为基生成的自由阿贝尔群，是 $S_*(X)$ 的子链复形。

定理 1.3.4. 假设 $\mathrm{Int}\,\mathcal{U} = \{\mathring{U} \mid U \in \mathcal{U}\}$ 是 X 的开覆盖，则存在链映射 $k: S_*(X) \to S_*^{\mathcal{U}}(X)$ 满足 $k \circ i = \mathrm{id}, i \circ k \cong \mathrm{id}$，从而含入映射诱导出同调群的同构。

[2]这里的定义有时也被称为强形变收缩核

[3]映射 $r: X \to A$ 被称为收缩，如果 $r \circ i = \mathrm{id}_A$

[4]这意味着同伦 $F: X \times I \to X$ 满足对于任意的 $t \in I, F(a,t) = a, \forall a \in A$

1.4 Mayer-Vietoris 序列

1.4.1 同调代数工具

定义 1.4.1. 阿贝尔群同态 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 在 B 处正合，如果 $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$；阿贝尔群同态序列 $\cdots \to G_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\phi_i} G_{i+1} \to \dots$ 被称为正合列，如果在每一个 G_i 处都正合。

定理 1.4.1. 链复形和链映射的长正合列 $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ 诱导了同调群间的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C) \xrightarrow{f_*} H_q(D) \xrightarrow{g_*} H_q(E) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C) \to \dots$$

证明. 首先 f_*, g_* 都是链复形的链映射自然的诱导的同调群之间的态射，下面我们定义 ∂_*，考虑下面的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & D_{q+1} \arrow[r, "g_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & E_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & D_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & E_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & D_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & E_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

任取 $z \in E_q$ 是一个闭链，由于 g_q 是满射因此可以考虑 $g_q^{-1}(z)$，并通过 ∂_q 映到 D_{q-1}，由于 $g_{q-1}\partial_q(g_q^{-1}(z)) = \partial_q(z) = 0$，因此 $\partial_q(g_q^{-1}(z)) \in \operatorname{Ker} g_{q-1} = \operatorname{Im} f_{q-1}$，并且由于

$$f_{q-2}\partial_{q-1}f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z) = \partial_{q-1}\partial_q g_q^{-1}(z) = 0$$

以及 f_{q-2} 是单射可知 $\partial_{q-1}f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z) = 0$，因此 $f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)$ 是 C_{q-1} 中的闭链，因此可以定义

$$\partial_*([z]) := [f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)]$$

在这里，我们需要小心验证以下的事实：

(1) 定义不依赖于 z 这个同调类代表元的选取；

(2) 定义不依赖于 $g_q^{-1}(z)$ 的选取；

我们依次如下验证：

(1) 如果将 z 改成 $z+\partial_{q+1}a, a\in E_{q+1}$，则

$$\partial_q g_q^{-1}(z+\partial_{q+1}a)=\partial_q g_q^{-1}(z)+\partial_q g_q^{-1}\partial_{q+1}(a)=\partial_q g_q^{-1}(z)+\partial_q\partial_{q+1}g_{q+1}^{-1}(a)=\partial_q g_q^{-1}(z)$$

即与同调类代表元选取无关。

(2) 由于 z 在 g_q^{-1} 下的任何两个原像只相差一个 $\operatorname{Im} f_q$ 中的元素，我们不妨假设将 $g_q^{-1}(z)$ 换成 $g_q^{-1}(z)+f(a), a\in C_q$，则

$$f_{q-1}^{-1}\partial_q(g_q^{-1}(z)+f_q(a))=f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)+f_{q-1}^{-1}\partial_q f_q(a)=f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)+\partial_q(a)$$

因此更换 $g_q^{-1}(z)$ 的原像将会得到落在同一个同调类中的元素，因此定义不依赖于 $g_q^{-1}(z)$ 的选取。

因此，∂_* 的定义是良好的。 □

定理 1.4.2 (同调序列的自然性)**.** 设有链复形与链映射交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

则有下面的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(E) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(C) & \xrightarrow{f_*} & H_q(D) & \xrightarrow{g_*} & H_q(E) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_*} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_*} & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(E') & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_q(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_q(E') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

引理 1.4.1 (五引理)**.** 设有阿贝尔群的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\phi_1} & A_2 & \xrightarrow{\phi_2} & A_3 & \xrightarrow{\phi_3} & A_4 & \xrightarrow{\phi_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5 \end{array}$$

其中两个横行都是正合列，如果 f_1, f_2, f_4, f_5 都是同构，则 f_3 也是同构。

证明. 图上追踪。 □

注 1.4.1. 实际上，只需要 f_1, f_2, f_4 是满射，$f_2.f_4, f_5$ 是单射。

定义 1.4.2. 阿贝尔群同态的正合列 $C\xrightarrow{f}D\xrightarrow{g}E$ 称为裂正合的，如果 $f(C)$ 是 D 的直和项，即 D 能分解成 $f(C)$ 和某个子群的直和。

注 1.4.2. 短正合列是列正合列的等价于 $D \cong C \oplus E$，因为如果 $D \cong C \oplus E$，由于 f 是单射自然有 $f(C)$ 是 D 的直和项；而如果 $f(C)$ 是 D 的直和项，那么我们不妨写成 $D = f(C) \oplus E'$，因此

$$E' \cong D/\operatorname{Im} f \cong D/\operatorname{Ker} g \cong E$$

即 $D \cong C \oplus E$.

命题 1.4.1. 对于阿贝尔群同态的短正合列 $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$，下列叙述等价：

1. 存在同态 $h : D \to C$，使得 $h \circ f = \mathrm{id}_C$
2. 存在同态 $k : E \to D$，使得 $g \circ k = \mathrm{id}_E$
3. 短正合列 $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ 是裂正合的。

特别的，若 E 是自由阿贝尔群[5]，则 $1, 2, 3$ 成立。

证明. 如果短正合列是正合的，那么 (1), (2) 是显然成立的，取 $C \oplus E$ 的到每个分量的投射即可。

下面证明 $(1) \to (3)$，首先注意到 $D = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} h$，这是因为任取 $x \in D$，我们有如下分解

$$x = (x - fh(x)) + fh(x)$$

后者显然在 $\operatorname{Im} f$ 中，然而前者在 $\operatorname{Ker} h$ 中只需要做如下验算

$$h(x - fh(x)) = h(x) - hfh(x) = h(x) - h(x) = 0$$

下面证明 $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} h = 0$，若存在 $c \in C$ 使得 $f(c) = d$ 以及 $h(d) = 0$，那么 $c = hf(c) = h(d) = 0$，因此 $D = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} h$，即该短正合列分裂。

下面证明 $(2) \to (3)$，论证的方式与上面类似，同样注意到 $D = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} k$，这是因为任取 $x \in D$，我们有如下的分解

$$x = (x - kg(x)) + kg(x)$$

后者显然在 $\operatorname{Im} k$ 中，然而前者在 $\operatorname{Ker} g$ 中只需要做如下验算

$$g(x - kg(x)) = g(x) - gkg(x) = g(x) - g(x) = 0$$

下面证明 $\operatorname{Im} k \cap \operatorname{Ker} g = 0$，若存在 $d \in D$ 使得 $d = k(e)$，并且满足 $g(d) = 0$，那么 $0 = g(d) = gk(e) = e$，因此交平凡，即 $D = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} k = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} k$，即该短正合列分裂。 □

[5]更一般的，E 是投射的，或 C 是内射的即可。

1.4.2 Mayer-Vietoris 序列

我们先来考虑下面的情况：X 是拓扑空间，X_1, X_2 是 X 的子空间，使得 $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$ 是 X 的一个覆盖，则

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(X_1) + S_*(X_2)$$

我们考虑下面的图表：

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
X_1 \cap X_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X_1 \cup X_2 \\
 & X_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

则可以得到链复形与链映射的短正合列

$$0 \to S_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_\#} S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \xrightarrow{k_\#} S_*(X_1) + S_*(X_2) \to 0$$

其中 $h_\#(x) := (i_{1\#}(x), -i_{2\#}(x)), k_\#(x) := j_{1\#}(y) + j_{2\#}(z)$

定义 1.4.3. 设 X_1, X_2 是 X 的子空间，满足含入映射 $i : S_*(X_1) + S_*(X_2) \to S_*(X_1 \cup X_2)$ 诱导了同调群的同构，则称 (X_1, X_2) 是一个 Mayer-Vietoris 耦。

例 1.4.1. 若 $\mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2 = X$，则 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。因为此时 $S_*(X_1) + S_*(X_2) = S_*^{\mathcal{U}}(X)$，根据定理 1.3.4，可知 $S_*^{\mathcal{U}}(X) \cong S_*(X) = S_*(X_1 \cup X_2)$

定理 1.4.3 (Mayer-Vietoris 序列)**.** 设 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。则存在长正合列

$$\cdots \to H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{-} H_1(X_1) \oplus H_2(X_2) \xrightarrow{+} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \to \dots$$

证明. 短正合列诱导长正合列。 □

注 1.4.3. 对增广链复形，同样有短正合列

$$0 \to \widetilde{S}_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_\#} \widetilde{S}_*(X_1) \oplus \widetilde{S}_*(X_2) \xrightarrow{k_\#} \widetilde{S}_*(X_1) + \widetilde{S}_*(X_2) \to 0$$

因此也有简约同调群的 Mayer-Vietoris 序列。

注 1.4.4. $\partial_* : H_q(X_1 \cup X_2) \to H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$ 的具体形式：任取 $[z] \in H_q(X_1 \cup X_2)$，由于 Mayer-Vietoris 耦的原因，$[z]$ 一定有一个代表闭链可以写成 $x_1 + x_2$，其中 x_1 是 X_2 中的链，x_2 是 X_2 中的链。由于 $\partial z = \partial x_1 + \partial x_2 = 0$，则 $\partial x_1 = -\partial x_2$，记作 y，是 $X_1 \cap X_2$ 中的闭链，它代表了 $H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$ 中的同调类，即

$$\partial_*([z]) = [y]$$

定理 1.4.4 (Mayer-Vietoris 序列的自然性). 设 $\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\}$ 是 X, Y 中的 Mayer-Vietoris 耦，映射 $f : X \to Y$ 满足 $f(X_1) \subset Y_1, f(X_2) \subset Y_2$，则有正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to H_{q+1}(X_1 \cup X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{-} & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) & \xrightarrow{+} & H_q(X_1 \cup X_2) \to \dots \\
\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\
\cdots \to H_{q+1}(Y_1 \cup Y_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(Y_1 \cap Y_2) & \xrightarrow{-} & H_q(Y_1) \oplus H_q(Y_2) & \xrightarrow{+'} & H_q(Y_1 \cup Y_2) \to \dots
\end{array}$$

推论 1.4.1. 拓扑空间 X 是两个闭子空间 X_1, X_2 的并，若 $X_1 \cap X_2$ 是某个开邻域的形变收缩核，则 $\{X_1, X_2\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦。

例 1.4.2. 当 $n \geq 0$ 时，有球面的同调群为

$$\widetilde{H}_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. 令 $B_+ = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \geq 0\}, B_- = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \leq 0\}$，则 $B_+ \cap B_- = S^{n-1}$ 是其某个开邻域的收缩形变核，则 $\{B_+, B_-\}$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。而 B_+, B_- 都同胚与 D^{n-1}，是一个可缩空间，则其各个维数的简约同调群为零，利用简约同调群的 Mayer-Vietoris 序列则有

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{+} \widetilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{-} 0 \xrightarrow{+} \widetilde{H}_{q-1}(S^n) \to \dots$$

因此可以得到

$$\widetilde{H}_q(S^n) \cong \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong \widetilde{H}_{q-n}(S^0)$$

利用两点空间的简约同调群可以得到我们期待的结果。 □

1.5 插曲：微分上同调

1.5.1 de Rham 上同调

在本节中[6]，为了简洁起见，仅从形式上的定义微分形式，而不深究其背后的原理。

[6]关于这部分材料，详见 GTM82

取开集 $D \subseteq \mathbb{R}^n$，并取坐标 $x = (x^1, \ldots, x^n)$，则其上的微分形式如下

$$
\begin{aligned}
\Omega^0(D) &= \{f \in C^\infty(D, \mathbb{R})\} \\
\Omega^1(D) &= \{\sum_{i=1}^n f_i \mathrm{d}x^i \mid f_i \in C^\infty(D, \mathbb{R})\} \\
\Omega^2(D) &= \{\sum_{1 \le i < j \le n}^n f_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \mid f_{ij} \in C^\infty(D, \mathbb{R})\} \\
&\vdots \\
\Omega^n(D) &= \{f \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \mid f \in C^\infty(D, \mathbb{R})\}
\end{aligned}
$$

规定大于 n 次以及小于 0 次的微分形式都是零，并且

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$$

在微分形式上定义外微分运算 $d : \Omega^k(D) \to \Omega^{k+1}(D)$ 如下

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \\
\mathrm{d}(\sum_{i=1}^n f_i \mathrm{d}x^i) &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}x^i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

做 $\mathbb{R}$-线性扩张即可得到 $\Omega^k(D) \to \Omega^{k+1}(D)$ 的映射，并且容易验证，$\mathrm{d}^2 = 0$，因此得到了如下的微分复形

$$0 \to \Omega^0(D) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(D) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(D) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(D) \xrightarrow{\mathrm{d}} \ldots$$

并且可以定义该微分复形对应的上同调群[7]，记作 $H^*_{dR}(D, \mathbb{R})$

例 1.5.1. 我们下面计算 $H^0_{dR}(D, \mathbb{R})$ 如下

$$
\begin{aligned}
H^0_{dR}(D, \mathbb{R}) &= \mathrm{Ker}(d : \Omega^0(D) \to \Omega^1(D)) \\
&= \{f \in C^\infty(D, \mathbb{R}) \mid \mathrm{d}f = 0\}
\end{aligned}
$$

因此

$$H^0_{dR}(D, \mathbb{R}) = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{D \text{ 的连通分支的个数}}$$

[7]由于随着边缘同态的作用指标在上升，因此这种同调群一般称作上同调群，以与之前的同调群作区分。

1.5.2 Stokes 公式

回忆在微积分中所学过的如下公式

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\partial D} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + Q\mathrm{d}z = \iint_D (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意到，如果我们记

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

那么根据外微分的运算则有

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y) = (\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}y = (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

类似上面的运算，可以发现后两个公式也有相同的结果，实际上，它们都是下面公式的特殊形式

定理 1.5.1 (Stokes 公式). D 是 r 维边界分片光滑的区域，ω 是 $r-1$ 次微分形式，则

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega$$

注 1.5.1. 上面的等式也可以写成

$$\langle \partial D, \omega \rangle = \langle D, \mathrm{d}\omega \rangle$$

即 ∂ 与 d 构成对偶。

注 1.5.2. 令 $\Omega^*(D) = \bigoplus_{i=1}^n \Omega^i(D)$，则 $(\Omega^*, \wedge)$ 构成了一个外代数。满足任取 $\omega \in \Omega^p(D), \eta \in \Omega^q(D)$，则

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$$

1.5.3 de Rham 上同调的函子性

取 $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n, D_2 \subseteq \mathbb{R}^m$，以及 D_1 的坐标 $(y^1, \dots, y^n)$，D_2 的坐标 $(x^1, \dots, x^m)$，我们定义切向量的推出

$$f_*(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

设 $\omega = \sum_{i_1,\dots,i_r} \varphi_{i_1\dots i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \mathrm{d}x^{i_r}$，则定义微分形式的拉回为

$$f^*(\omega) = \sum_{\alpha_1\dots\alpha_r} \varphi_{i_1\dots i_r} \circ f \frac{\partial f^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial f^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^{i_r}$$

并且我们断言 f^* 保持外积以及与外微分交换，即

$$\begin{cases} f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta) \\ f^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ f^* \end{cases}$$

因此微分形式的拉回

$$f^* : \Omega^*(D_2) \to \Omega^*(D_1)$$

诱导了 de Rham 上同调群之间的态射，即 H^*_{dR} 是一个反变函子。

注 1.5.3. 对于一般的 n 维光滑流形来说，其上的微分形式可以在每一个局部坐标卡上定义，并且要求在相交处相容，得到整体上的微分形式。

1.5.4 de Rham 上同调中的 Mayer-Vietoris 序列

取 U_1, U_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$U = U_1 \cup U_2$，则有

$$\begin{tikzcd} & U_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\ U_1 \cap U_2 \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & & U_1 \cup U_2 = U \\ & U_2 \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

命题 1.5.1. 根据上面的图表，对任意的 p，我们有下面的短正合列

$$0 \to \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

其中

$$I^p(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega))$$
$$J^p(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$$

证明. 关键证明 J^p 是满射，不妨考虑 $p = 0$ 的情形，其余情况类似。取从属于 $\{U_1, U_2\}$ 的单位分解 $\{\rho_1, \rho_2\}$，则任取 $f \in C^\infty(U_1 \cap U_2)$，考虑 $f_1 = \rho_2 f \in C^\infty(U_1), -\rho_1 f \in C^\infty(U_2)$[8]，则

$$f = \rho_2 f - (-\rho_1 f) = (\rho_1 + \rho_2) f = f$$

□

推论 1.5.1. 上述微分复形的短正合列诱导了 de Rham 上同调群的长正合列，即 Mayer-Vietoris 序列。

$$\cdots \to H^p_{dR}(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{+} H^p_{dR}(U_1, \mathbb{R}) \oplus H^p_{dR}(U_2, \mathbb{R}) \xrightarrow{-} H^q_{dR}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H^{q+1}_{dR}(U, \mathbb{R}) \to \ldots$$

[8] 思考：为什么不选取 $f_1 = \rho_1 f, f_2 = -\rho_2 f$?

注 1.5.4. One of hallmarks of a topologist is a sound intuition of d^*

注 1.5.5. 由于我们可以在光滑流形上考虑微分形式，以及光滑流形上单位分解的存在性，上述短正合列可以自然的推广到光滑流形上去。

注 1.5.6. 关于单位分解，我们做如下补充：

定义 1.5.1 (光滑单位分解)**.** 设 M 是 n 维光滑流形[9]，$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的局部有限的开覆盖[10]，则存在从属于 $\{U_i\}$ 的光滑单位分解，即存在 $\varphi_i \in U_i, 0 \leq \varphi_i \leq 1$，满足 $\operatorname{supp}\varphi_i \subset U_i, \forall i \in I$.

定义 1.5.2 (紧支的光滑单位分解)**.** 设 M 是 n 维光滑流形，$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的开覆盖，则存在 $\{V_j\}$ 是 $\{U_i\}$ 的一个局部有限的加细，以及从属于 $\{V_j\}$ 的光滑单位分解 $\{\phi_j\}$，使得 ϕ_j 的支集是 V_j 的紧子集。

例 1.5.2. 计算 $H^*_{dR}(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\})$ 如下：我们取 $U_1 = \mathbb{R}^2\backslash[0,+\infty), U_2 = \mathbb{R}^2\backslash(-\infty,0]$。则[11]

$$H^q_{dR}(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & q = 0 \end{cases} \quad , \quad H^q_{dR}(U_1) \oplus H^q_{dR}(U_2) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & q = 0 \end{cases}$$

因此根据 Mayer-Vietoris 序列，当 $p > 0$ 时有

$$0 \to H^p_{dR}(U_1 \cap U_2) \to H^{p+1}_{dR}(U_1 \cup U_2) \to 0$$

即 $p \geq 2$ 时，有 $H^q_{dR}(U_1 \cup U_2) = 0$

而当 $p = 0$ 时，有

$$0 \to H^0_{dR}(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{I^*} H^0_{dR}(U_1) \oplus H^0_{dR}(U_2) \xrightarrow{J^*} H^0_{dR}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H^1_{dR}(U_1 \cup U_2) \to 0$$

我们可以直接计算

$$H^1_{dR}(U_1 \cup U_2) = H^0_{dR}(U_1 \cap U_2)/\operatorname{Im} J^* = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

---

[9]当我们提及流形时，总要求它是 T_2 并且可数的。

[10]即任取 $x \in M$，x 只包含在有限多个 U_i 中，我们对流形的要求已经足够强，使得这样的开覆盖总是存在的。

[11]这里我们实际上应用了庞加莱引理