代数 2 H 课程讲义

Instructor: 余成龙
Notes Taker: 刘博文

Qiuzhen College, Tsinghua University
2023 Spring

课程信息:

- 授课人: 余成龙.
- 办公室: 近春园西楼 260.
- 邮箱: yuchenglong@mail.tsinghua.edu.cn.
- 成绩分布: 作业 (20%) + 期中 (30%) + 期末 (50%).
- 参考书: M.Atiyah *Communicative algebra*, S.Lang *Algebra*.

内容大纲:

- 伽罗瓦理论.
- 同调代数.
- 交换代数.

目录

第一部分

伽罗瓦理论

第一章　域论回顾

1.1　域扩张

在本课程中, 如不加特殊说明, 环 R 总是指含有单位元的交换环, 并且环同态是保持单位元的.

定义 1.1.1. 对于环 R, 总有环同态 $\rho\colon \mathbb{Z} \to R$, 如果记 $\ker \rho = (n)$, 那么 R 的**特征** (characteristic)定义为 n, 记作 $\operatorname{char} R$.

定义 1.1.2. 如果环 R 中任何非零元素都可逆, 那么环 R 被称为一个**域** (field).

命题 1.1.3. *域的特征是素数.*

我们在学习环论时, 环的理想是一个非常重要的概念, 但是对域来说, 其只有平凡理想, 即只有零理想及自身. 这很大程度上限制了域之间的同态. 假设有非平凡的域同态 $\tau\colon E \to F$, 那么 τ 一定是单射, 从而我们可以将 E 视作包含在 F 中, 这引出了下面的概念.

定义 1.1.4. 给定域 E, F, 如果存在 (单) 同态 $\tau\colon F \to E$, 那么称 E 是域 F 的**扩张** (extension), 记作 E/F.

注记. 当我们用 (单) 同态 τ 表示域扩张 E/F 时, 我们不仅强调可以将 F 视作 E 的子域, 也强调映射 τ, 因为可能存在多种方式将 F 视作 E 的子域, 例如:

$$\begin{aligned} \tau\colon \mathbb{R}[x]/(x^2+1) &\to \mathbb{C} & \tau'\colon \mathbb{R}[x]/(x^2+1) &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sqrt{-1} & x &\mapsto -\sqrt{-1} \end{aligned}$$

都给出了这样的映射.

定义 1.1.5. 给定域扩张 $\tau\colon F \to E, \tau'\colon F \to E'$, **域扩张之间的态射** (morphism between field extension)是指域之间的同态 $\varphi\colon E \to E'$, 使得如下的图交换

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \overset{\tau}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ F & \xrightarrow{\tau'} & E' \end{array}$$

记号 1.1.6. 给定域扩张 $E/F, E'/F$, 用 $\operatorname{Hom}_F(E, E')$ 记域扩张之间的态射的全体.

定义 1.1.7. 给定域扩张 $E/F, E'/F$, 其被称为**同构的** (isomorphism), 如果两者间存在是同构的域扩张之间的态射.

定义 1.1.8. 给定域扩张 E/F, 扩张的**次数** (degree)定义为 $[E:F]=\dim_F E$.

命题 1.1.9. 对于域扩张 $F\subseteq E\subseteq K$, 则 $[K:F]=[K:E][E:F]$.

定义 1.1.10. 一个域扩张被称为**有限的** (finite extension), 如果其扩张次数有限, 否则被称为**无限的** (infinite extension).

例子. $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 是二次扩张, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 是无穷扩张.

例子. $\mathbb{Q}(i)=\{a+b\sqrt{-1}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}/\mathbb{Q}$ 是二次扩张.

定义 1.1.11. E/F 是域扩张, $S\subseteq K$ 是一个子集, 则 $F(S)$ 是 E 中包含 F,S 最小的子域. 特别地, 如果 $S=\{u\}$, $F(u)$ 叫做域 F 的一个**单扩张** (simple extension).

例子. 给定域 F, $F(u)$ 有如下的具体构造

$$F(u)=\{\frac{f(u)}{g(u)}\mid f(x),g(x)\in F[x]\}$$

命题 1.1.12. 假设域 $\mathbb{F}$ 的特征不为 2, 如果 E/F 是二次扩张, 那么 $E=F(\alpha)$, 其中 $\alpha^2\in F$.

证明: 假设 $\{1,\beta\}$ 是 E 的一组 F-基, 那么 $\beta^2=a+b\beta$, 其中 $a,b\in F$, 注意到

$$(\beta-\frac{1}{2}b)^2=a+\frac{1}{4}b^2\in F$$

那么 $\alpha=\beta-\frac{1}{2}$ 即可. □

注记. 域的特征不为 2 用在了配方上, 这是一个不可缺少的条件.

问题 1.1.13. 特征 2 域上的二次扩张是什么样的?

研究域扩张的一个重要的好处就是可以帮助我们求解方程, 例如 $x^2+1=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有根, 但是我们可以在 $\mathbb{R}$ 的域扩张 $\mathbb{C}$ 中找到它的一个根, 实际上, 我们总可以通过域扩张的办法去寻找根.

命题 1.1.14. 给定域 F 以及多项式 $f(x)\in F[x]$, 存在域扩张 E/F 使得 $f(x)$ 在 E 中有根.

证明: 将 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中写作不可约因子 $p_1(x)\dots p_k(x)$ 的乘积, 如果有一次因子, 那么 $f(x)$ 在 F 中就有根, 否则取某个不可约多项式 $p_1(x)$, 考虑

$$E=F[x]/(p_1(x))$$

那么 E/F 是一个域扩张, 并且 $f(x)$ 在 E 中有根 $x+(p_1(x))$. □

定义 1.1.15. 给定域扩张 $F\subseteq E\subseteq K$ 以及 $F\subseteq E'\subseteq K$, **域扩张的复合** (composition of field extension)定义为 K 中包含 E,E' 的所有子域的交, 记作 EE'.

1.2 代数扩张

定义 1.2.1. 给定域扩张 E/F, $\alpha \in E$ 称为在 F 上**代数** (algebraic), 如果存在非零多项式 $p(x) \in F[x]$, 使得 $p(\alpha) = 0$, 否则则称 α 在 F 上**超越** (transcendental).

例子. $\sqrt{2}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是代数元, e, π 在 $\mathbb{R}$ 上是超越元.

定义 1.2.2. 给定域扩张 E/F, $\alpha \in E$ 在 F 上代数, $F[x]$ 中零化 α 的最低次数首一多项式被称为 α 的在 F 上的**极小多项式** (minimal polynomial), 记作 $P_{\alpha,F}$.

注记. 我们还可以如下刻画 α 是否在 F 上代数: 考虑赋值映射 $\theta_\alpha \colon F[x] \twoheadrightarrow F[\alpha]$, 则

1. α 在 F 上代数当且仅当 $\ker \theta_\alpha \neq 0$.
2. α 在 F 上超越当且仅当 $\ker \theta_\alpha = 0$, 即 θ_α 是一个同构.

命题 1.2.3. 给定域扩张 E/F, $\alpha \in E$ 在 F 上代数, 那么 $[F(\alpha) : F] = \deg P_{\alpha,F}(x)$.

证明: 注意到 $F(\alpha) \cong F[x]/(P_{\alpha,F}(x))$, 并且 $[F[x]/(P_{\alpha,F}(x)) : F] = \deg P_{\alpha,F}$. □

引理 1.2.4. 给定单扩张 $F(\alpha)/F$, 其中 α 在 F 上代数. 对于域扩张 E/F, 存在 F-嵌入 $\tau \colon F(\alpha) \hookrightarrow E$ 当且仅当 $P_{\alpha,F}$ 在 E 中有根, 并且嵌入的个数与根的个数相同.

证明: 假设 $P_{\alpha,F}(x)$ 在 E 中有根 β, 那么考虑 F-映射

$$\begin{aligned} \varphi \colon F[x] &\to E \\ x &\mapsto \beta \end{aligned}$$

并且由于 $P_{\alpha,F}(\beta) = 0$, 从而 φ 给出了 $F[x]/(P_{\alpha,F}(x)) \cong F(\alpha)$ 到 E 的 $\mathbb{F}$-嵌入, 并且可以看出不同的根给出不同的嵌入. 另一方面, 如果存在 F-嵌入 $\tau \colon F(\alpha) \hookrightarrow E$, 显然 $\tau(\alpha)$ 是 $P_{\alpha,F}$ 在 E 中的根, 并且不同的嵌入给出的根是不同的. □

命题 1.2.5. 给定单扩张 $F(\alpha)/F$, 其中 α 在 F 上代数. 考虑映射 $\varphi \colon F \to F'$ 以及域扩张 E/F', 存在 $\tau \colon F(\alpha) \to E$ 使得如下的交换图当且仅当 $\varphi(P_{\alpha,F}(x))$ 在 E 中有根, 并且 τ 的个数等于 $\varphi(P_{\alpha,F}(x))$ 在 E 中根的个数.

$$\begin{array}{ccc} F(\alpha) & \xrightarrow{\tau} & E \\ \uparrow & & \uparrow \\ F & \xrightarrow{\varphi} & F' \end{array}$$

定义 1.2.6. 域扩张 E/F 称为**代数扩张** (algebraic extension), 如果 E 中任何一个元素都在 F 上代数, 否则称为**超越扩张** (transcendental extension).

例子. $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 是代数扩张, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 不是代数扩张.

命题 1.2.7. 有限扩张是代数扩张.

证明: 假设 E/F 是有限扩张, 任取 $\alpha \in E$, 考虑 $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$, 由于 E/F 是有限扩张, 则存在足够大的 n 使得

$$\alpha^{n+1} = a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0$$

从而 $\alpha \in E$ 在 F 上代数, 即 E/F 是代数扩张. □

注记. 反之并不成立, 即代数扩张不一定是有限扩张.

推论 1.2.8. 给定域扩张 E/F, E 中所有在 F 上代数的元素组成了 E 的一个子域.

证明: 即证明, 如果 $\alpha, \beta \in E$ 都在 F 上代数, 则 $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta(\beta \neq 0)$ 都在 F 上代数. 由于 $\alpha, \beta \in E$ 都是代数的, 那么 $F(\alpha), F(\beta)$ 都是有限扩张, 从而 $F(\alpha, \beta)$ 也是有限扩张, 从而是代数扩张, 即 $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta(\beta \neq 0)$ 都是代数的. □

命题 1.2.9. 给定代数扩张 $E/F, K/E$, 那么 K/F 也是代数扩张.

命题 1.2.10. 给定代数扩张 E/F, 则 $\mathrm{Hom}_F(E, E) = \mathrm{Aut}_F(E)$.

证明: 任取 $\varphi\colon E \to E$ 是域扩张之间的态射, 我们现在只需要说明其一定是满射即可. 任取 $\alpha \in K$, 我们用 S 记 $P_{\alpha,F}(x)$ 在 E 中的根的全体, 由于 φ 固定 F, 从而 φ 给出了 S 到自身的一个映射, 并且由于 φ 是单的, 以及 S 是有限集, 从而 φ 在 S 上是满射, 从而一定存在 E 中的元素被 φ 映射成 α, 即 φ 是满射. □

第二章　分裂域及其应用

2.1　分裂域

定义 2.1.1. 给定域扩张 E/F, 多项式 $f(x) \in F[x]$ 在 E 中**分裂** (split), 如果 $f(x)$ 在 E 中可以写成

$$f(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$$

其中 $\alpha_i \in E$.

定义 2.1.2. 给定域扩张 E/F, E 被称作是 $f(x) \in F[x]$ 的**分裂域** (splitting field), 如果 E 是包含 F 使得 $f(x)$ 分裂的最小的域.

注记. 如果 E 是 $f(x) \in F[x]$ 的分裂域, 那么 E/F 是代数扩张.

定理 2.1.3. 给定域 F, 多项式 $f(x) \in F[x]$ 的分裂域 E 存在且在同构意义下唯一, 并且 $[E : F] \leq n!$, 其中 $n = \deg f(x)$.

证明: 我们通过对 $p(x)$ 次数的归纳来证明存在唯一性, 当 $n = 1$ 的时候是显然的.

1. 存在性: 根据命题1.1.14, 总可以找到域扩张 F'/F 使得 $p(x)$ 在 F' 中有根, 因此 $p(x)$ 在 $F'[x]$ 中可以写成:
$$f(x) = (x - u)f_1(x), \quad \deg f_1(x) = n - 1$$
因此利用归纳假设, 存在 $f_1(x)$ 在 F' 上的唯一的分裂域 E, 并且 $[E : F'] \leq (n-1)!$, 根据分裂域的定义自然有 E 也是 $p(x)$ 在 F 上的分裂域, 并且 $[E : F] = [E : F'][F' : F] \leq (n-1)! \cdot n = n!$.
2. 唯一性: 如果 E' 是 $f(x)$ 在 F 上的另一个分裂域, 根据引理1.2.4, 存在嵌入 $F' \hookrightarrow E'$, 那么 E' 也应是 $p_1(x)$ 在 F' 上的分裂域, 因此 $E' \cong E$.

□

上述证明分裂域存在的方法虽然简洁, 但是我们实际上可以做的更精细一些, 计算出分裂域之间的同构的个数有多少个, 这主要依赖于命题1.2.5.

定理 2.1.4. 给定域 F, E 是 $f(x) \in F[x]$ 的分裂域. 如果 $f(x)$ 在域扩张 L/F 中分裂, 那么存在 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(E, L)$. 这样 φ 的个数小于等于 $[E : F]$, 并且等号取得当且仅当 $f(x)$ 没有重根.

证明: 假设 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是 $f(x)$ 的所有根, 我们归纳地考虑: 由于 $f(x)$ 在 L 中分裂, 那么根据引理1.2.4有如下的延拓:

$$\begin{array}{ccc} F(\alpha_1) & \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} & L \\ \uparrow & & \uparrow \\ F & \xrightarrow{\mathrm{id}} & F \end{array}$$

此时延拓可以选择的个数小于等于 $[F(\alpha_1):F]$. 利用命题1.2.5我们可以做如下的延拓:

$$\begin{array}{ccc} F(\alpha_1,\alpha_2) & \overset{\varphi_2}{\dashrightarrow} & L \\ \uparrow & \overset{\varphi_1}{\nearrow} & \uparrow \\ F(\alpha_1) & & \uparrow \\ \uparrow & & \uparrow \\ F & \xrightarrow{\mathrm{id}} & F \end{array}$$

这是因为 α_2 在 $F(\alpha_2)$ 上的极小多项式 $P_{\alpha_2,F(\alpha_2)}$ 是 f 的因子, 从而 $\varphi_1(P_{\alpha_2,F(\alpha_2)})$ 依然在 L 中分裂, 此时延拓的可以选择的个数小于等于 $[F(\alpha_1,\alpha_2):F(\alpha_1)]$, 不断归纳即可得到 $\varphi\in\mathrm{Hom}_F(E,L)$, 并且这样的 φ 的个数小于等于

$$[F(\alpha_1):F][F(\alpha_1,\alpha_2):F(\alpha_1)]\dots[F(\alpha_1,\dots,\alpha_n):F(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})]=[E:F]$$

并且等号取得当且仅当 $f(x)$ 没有重根. □

注记. 特别地, 如果取 L 就是 $f(x)$ 的分裂域 E, 那么 $\varphi\in\mathrm{Hom}_F(E,E)=\mathrm{Aut}_F(E)$ 的个数小于等于 $[E:F]$, 并且等号取得当且仅当 $f(x)$ 没有重根.

2.2 有限域

定义 2.2.1. 域 F 被称为**有限域** (finite field), 如果其元素个数 $|F|<\infty$.

记号 2.2.2. 有 q 个元素的有限域通常记作 $\mathbb{F}_q$.

注记. 根据定义, 显然有限域 $\mathbb{F}_q$ 的特征一定是素数 p, 并且如果 $\mathbb{F}_q$ 是 $\mathbb{F}_p$ 的 n 次扩张, 则 $q=p^n$.

定理 2.2.3. *对任意 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 元素个数为 $q=p^n$ 的有限域存在且唯一, 其中 p 是素数.*

证明: 存在性: 考虑 $P(x)=x^q-x\in\mathbb{F}_p[x]$, 通过直接验证, 即验证加减乘除的封闭性, 可以发现 $P(x)$ 的所有根恰好组成了一个域 E. 并且根据引理3.2.4计算可知 $P(x)$ 没有重根, 因此 $|E|=q$, 即给出了一个元素个数为 $q=p^n$ 的有限域.

唯一性: 假设 $\mathbb{F}_q$ 是元素个数为 q 的有限域, 那么 $|F^\times|=q-1$, 即任取 $\alpha\in F^\times$, 有 $\alpha^{q-1}=1$, 从而任取 $\alpha\in F$, 其满足

$$\alpha^q-\alpha=0$$

并且由于上述方程至多有 q 个解, 从而 F 是 $x^q-x\in\mathbb{F}_p[x]$ 的分裂域, 因此是唯一的. □

引理 2.2.4. *给定域 F, 以及 $F^\times$ 的有限子群 G, 那么 G 是循环群.*

证明: 由于 G 是有限阿贝尔群, 如果记其最大的不变因子为 d_n, 那么任取 $\alpha\in G$, 有 $\alpha^{d_n}=1$. 考虑 $x^{d_n}-1\in F[x]$, 其最多只有 d_n 个根, 那么 $d_n\geq|G|$. 而另一方面, $|G|\leq d_n$, 从而 $|G|=d_n$, 即 $G\cong\mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$. □

推论 2.2.5. $\mathbb{F}_q^\times$ 是 $q-1$ 阶循环群.

证明: 当 F 是有限域时, $F^\times$ 自身就是 $F^\times$ 的有限子群, 从而是循环群. □

例子. 考虑 $x^3-x-1\in\mathbb{F}_3[x]$, 其为 $\mathbb{F}_3[x]$ 上的不可约多项式, 那么

$$\mathbb{F}_3[x]/(x^3-x-1)$$

给出了一个 27 元域.

命题 2.2.6. 对任意的 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 都存在 $\mathbb{F}_q[x]$ 中的 n 次不可约多项式.

证明: 由于 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ 是循环群, 取其生成元为 α, 那么 $\mathbb{F}_q[\alpha]=F_{q^n}$, 从而 α 对应的极小多项式就是 $\mathbb{F}_q[x]$ 中的 n 次不可约多项式. □

问题 2.2.7. 对任意的 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbb{F}_q[x]$ 中的首一 n 次不可约多项式有多少个呢?

定义 2.2.8. 给定有限域 $\mathbb{F}_{p^n}$, 如下映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Frob}\colon \mathbb{F}_{p^n}&\to\mathbb{F}_{p^n}\\ x&\mapsto x^p\end{aligned}$$

被称作**弗罗贝尼乌斯映射** (Frobenius map).

注记. 根据命题1.2.10, 我们有 $\mathrm{Frob}\in\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q)$, 并且直接计算可知 $\mathrm{Frob}^n=\mathrm{id}$.

命题 2.2.9. 给定有限域 $\mathbb{F}_{p^n}$, $\mathbb{F}_{p^m}$ 是 $\mathbb{F}_{p^n}$ 的子域当且仅当 $m\mid n$.

证明: 如果 $\mathbb{F}_{p^m}$ 是 $\mathbb{F}_{p^n}$ 的子域, 那么 $\mathbb{F}_{p^n}$ 可以视作 $\mathbb{F}_{p^m}$ 上的有限维线性空间, 不妨假设为 k 维, 那么 $p^n=(p^m)^k$, 即 $n=mk$. 另一方面, 如果 $m\mid n$, 那么考虑 $x^{n/m}-x\in\mathbb{F}_{p^m}[x]$, 其分裂域就是 $\mathbb{F}_{p^n}$. □

注记. 由于 $\mathrm{Frob}^n=\mathrm{id}$, 因此 Frob 生成了一个 n 阶循环群 G, 并且注意到 G 的任何一个子群都是由 Frob^m 生成的, 其中 $m\mid n$. 注意到 $\{\alpha\in\mathbb{F}_{p^n}\mid \mathrm{Frob}^m(\alpha)=\alpha\}=\mathbb{F}_{p^{n/m}}$, 这实际上给出了一个 G 的所有子群与 $\mathbb{F}_{p^n}$ 的所有子域之间的一一对应. 上述的结果实际上已经展示了伽罗瓦理论的雏形.

2.3 代数闭域与代数闭包

定义 2.3.1. 域 F 被称为**代数闭域** (algebraic closed field), 如果其不存在真的代数扩张.

命题 2.3.2. 给定代数扩张 E/F, 如果任取 $f(x)\in F[x]$, 其在 E 上都分裂, 那么 E 是代数闭域.

证明: 任取 $\alpha\in E$, 使得其在 E 上代数, 即存在 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in E[x]$, 使得 $f(\alpha)=0$, 特别地, 我们有 α 在 $F(a_n,\ldots,a_0)$ 上代数, 并且由于 E/F 上代数, 那么 $F(a_n,\ldots,a_0)/F$ 也是代数扩张, 从而根据命题1.2.9可知 $F(\alpha)/F$ 是代数扩张, 因此存在多项式 $g(x)\in F[x]$ 使得 $g(\alpha)=0$, 而由于 $g(x)$ 在 E 中分裂, 从而 $\alpha\in E$, 即证明了 E 是代数闭域. □

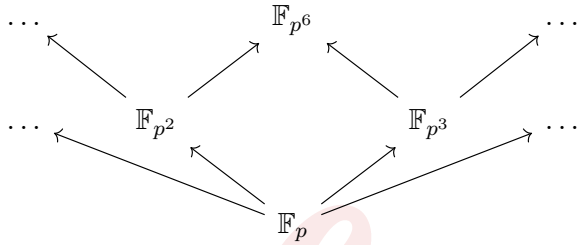
定义 2.3.3. 域扩张 E/F 中 E 被称为 F 的**代数闭包** (algebraic closure), 如果 E/F 是代数扩张, E 是代数闭域.

例子 ($\overline{\mathbb{Q}}$ 的构造)**.** 注意到 $\mathbb{Q}[x]$ 是可数的, 不妨排序为 $f_1, f_2, \ldots$, 那么我们令 E_1 是 f_1 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域, E_2 是 f_2 在 E_1 上的分裂域, 依次不断操作得到

$$\mathbb{Q} \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$$

考虑 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 则 $E/\mathbb{Q}$ 是一个域扩张, 并且 $\mathbb{Q}$ 上所有的多项式在 E 上都分裂, 并且根据命题1.2.9可知 E 是代数扩张, 从而 E 就是 $\overline{\mathbb{Q}}$.

例子 ($\overline{\mathbb{F}_p}$ 的构造)**.** 对于素数 p, 我们有如下的包含关系



那么我们有 $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^n}$.

命题 2.3.4 (E. Artin)**.** 任何域 F 都存在一个代数闭域 E 作为其扩张.

证明: 我们首先构造一个 F 的一个域扩张 E_1 使得任意次数大于等于 1 的 $f \in F[x]$ 在 E_1 中都有根: 考虑集合 $\mathfrak{X} = \{x_f \mid f \in F[x], \deg(f) \geq 1\}$, 以及以集合 $\mathfrak{X}$ 为未定元的多项式环 $F[\mathfrak{X}]$. 令 $I = (f(x_f))$, 我们断言 I 是 $F[\mathfrak{X}]$ 的一个真理想. 假设 $I = F[\mathfrak{X}]$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} g_i f_i(x_{f_i}) = 1$$

由于只有有限多个 f_i, 那么根据分裂域存在性的证明过程不难构造 F 的一个域扩张 F' 使得每一个 f_i 在 F' 中都有根 u_i. 考虑 $F[\mathfrak{X}] \to F'$, 定义为 $x_{f_i} \mapsto u_i$, 其余的 x_f 被映成零, 则考虑上述等式在这个映射下的结果, 我们有 $0 = 1$, 矛盾. 因此 I 是真理想, 我们取 $\mathfrak{m}$ 是包含 I 的一个极大理想, 令 $E_1 = F[\mathfrak{X}]/\mathfrak{m}$, 则

$$F \hookrightarrow F[\mathfrak{X}] \to F[\mathfrak{X}]/\mathfrak{m} = E_1$$

我们用 $\overline{x}_f$ 记 x_f 在 E_1 中的像, 可以发现其为 $f(x)$ 的一个根. 不断进行如上操作则有

$$F = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$$

令 $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$, 我们证明 E 是代数闭的. 任取多项式 $f \in E[x]$, 那么其系数总会落在某一个 E_n 中, 则它在 E_{n+1} 中有根, 即在 E_{n+1} 中有分解

$$f = (x - u_1) f_1$$

其中 $f_1 \in E_{n+1}[x]$, 继续对 f_1 使用如上操作即可. □

命题 2.3.5. *F 是域, E 是代数闭域, 并且有嵌入 $\tau: F \hookrightarrow E$. 如果 K/F 是代数扩张, 则 τ 可以延拓成 $\tau': K \to E$. 特别地, 如果 K 是代数闭域, 那么 $\tau': K \to E$ 是同构.*

证明: 任取 $u \in K$, α 在 F 上的极小多项式记作 $P_{\alpha,F}$, 由于 E 是代数闭域, 那么 $\tau(P_{\alpha,F})$ 在 E 中存在根 β, 那么根据引理1.2.4可知 σ 可以延拓到 $F(\alpha) \to E$. 用 M 记所有的 (K', τ'), 其中 K' 是 K 的包含 F 的子域, τ' 是 τ 的延拓. 并且定义偏序关系 $(K_1', \tau_1') \leq (K_2', \tau_2')$ 为 $K_1' \subseteq K_2'$ 并且 $\tau_2'|_{K_1'} = \tau_1'$. 我们已经知道 M 非空, 从而根据祖恩引理存在极大元 K', 并且再次利用引理1.2.4可知 K' 就是 K. □

定理 2.3.6. *域 F 的代数闭包 $\overline{F}$ 存在且唯一 (在同构意义下).*

证明: 存在性: 根据命题2.3.4, 存在代数闭域 E 使得其是 F 的扩张, 定义

$$\overline{F} := \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ 在 } F \text{ 上代数}\}$$

那么有 $\overline{F}$ 是 F 的代数扩张. 并且 $\overline{F}$ 是代数闭域, 因为任取 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \overline{F}[x]$, 根据韦达定理可知其根在 $F(a_0, \ldots, a_n)$ 上面代数, 从而在 F 上代数, 进而属于 $\overline{F}$.

唯一性: 根据命题2.3.5即可. □

注记 (Artin-Schreier). 如果 $[\overline{F} : F] < \infty$, 并且大于 1, 则 $[\overline{F} : F] = 2$, 且 -1 不是 F 中的平方根, $\overline{F} = F(\sqrt{-1})$.

第三章　正规扩张与可分扩张

3.1　正规扩张

定义 3.1.1. 代数扩张 E/F 被称为**正规扩张** (normal extension), 如果任取不可约多项式 $P(x) \in F[x]$, 如果其在 E 中有一个根, 则其全部的根都在 E 中.

例子. 二次扩张是正规扩张.

定理 3.1.2. 下列叙述等价:

(1) E/F 是正规扩张.

(2) 任何 F-嵌入 $\tau\colon E \to \overline{F}$ 满足 $\tau(E) \subseteq E$.

(3) $\mathrm{Hom}_F(E, \overline{F}) = \mathrm{Hom}_F(E, E)$.

如果 E/F 是有限扩张, 则上述三条还与下面等价:

(4) E 是某个多项式 $P(x) \in F[x]$ 的分裂域.

证明: 显然 (3) 和 (2) 等价, 下面我们只证明 (1) 和 (2) 的等价性:

(1) 推 (2): 假设 E/F 是正规扩张, 任取 $\alpha \in E$, 考虑 α 在 F 上的极小多项式 $P_{\alpha,F}$, 那么 $P_{\alpha,F}$ 的所有根都落在 E 中. 对于任意的 F-嵌入 $\tau\colon E \to \overline{F}$, $\tau(u)$ 一定是 $P_{\alpha,F}$ 的一个根, 因为 $P_{\alpha,F}(\tau(u)) = \tau(P_{\alpha,F}(u)) = 0$, 因此 $\tau(u) \in E$, 即 $\tau(E) \subseteq E$.

(2) 推 (1): 任取 $\alpha \in E$, 考虑其在 F 上的极小多项式 $P_{\alpha,F}$, 任取其另一个根 $\beta \in \overline{F}$, 则存在态射 $F(\alpha) \to \overline{F}, \alpha \mapsto \beta$, 因此根据引理1.2.4可以延拓成 $\tau\colon K \to \overline{F}$, 因此 $\tau(\alpha) = \beta \in E$, 即 E/F 是正规扩张.

现在假设扩张次数有限, 我们来证明 (4) 与上述命题的等价性:

(1) 推 (4): 假设 E/F 是正规扩张, 任取 $\alpha_1 \in E \setminus F$, 记其在 F 上的极小多项式为 $P_{\alpha_1,F}$, 并且 $[E : F(u_1)] < [E : F]$. 再取 $\alpha_2 \in E \setminus F(\alpha_1)$, 由于扩张次数不断在减小, 因此有限次重复后一定有 $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 令 $P = \prod_{i=1}^{n} P_{\alpha_i,F}$, 则 K 是 P 的分裂域.

(4) 推 (2): 如果 E 是 $P(x)$ 的分裂域, 其所有的根为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, 则 $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 考虑 F-嵌入 $\tau\colon F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to \overline{F}$, 由于 $\tau(\alpha_i)$ 仍然是 $P(x)$ 的根, 因此 $\tau(\alpha_i) \in E$, 即 $\tau(E) \subseteq E$.

□

推论 3.1.3. 对于域扩张 $F \subseteq E \subseteq K$,

(1) 如果 K/F 是正规扩张, 那么 K/E 也是正规扩张.

(2) 如果 $E/F, E'/F$ 都是正规扩张, 那么 EE'/F 也是正规扩张.

证明: (1). 任取 $\alpha \in K$, 考虑其在 F, E 上的极小多项式, 分别为 $P_{\alpha,F}, P_{\alpha,E}$, 则 $P_{\alpha,E} \mid P_{\alpha,F}$. 由于 K/F 是正规扩张, 因此 $P_{\alpha,F}$ 的所有根都在 K 中, 因此 $P_{\alpha,E}$ 的所有根也在 K 中, 即 K/E 也是正规扩张.

(2). 给定嵌入 $\tau: EE' \to \overline{F}$, 由于 $E/F, E'/F$ 都是正规扩张, 因此 $\tau(E) \subseteq E, \tau(E') \subseteq E'$, 因此 $\tau(EE') \subseteq EE'$, 即 EE'/F 是正规扩张. □

注记. 对于域扩张 $F \subseteq E \subseteq K$, K/F 是正规扩张并不意味着 E/F 是正规扩张, 例如考虑下面的例子:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}})$$

注记. 如果 K/E 是正规扩张, E/F 是正规扩张, 但 K/F 不一定是正规扩张, 考虑下面的例子:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$$

由于二次扩张都是正规扩张, 从而 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 以及 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ 都是正规扩张, 但是 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ 不是正规扩张: 考虑 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式 $x^4 - 2$, 其中一个根 $\sqrt[4]{2}$ 在 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ 中, 但存在一个根 $i\sqrt[4]{2}$ 不在其中.

3.2 可分扩张

引理 3.2.1. 给定代数扩张 $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/F$, 则

$$|\operatorname{Hom}_F(E, \overline{F})| \leq [E : F]$$

等号取得当且仅当 α_i 在 F 上的极小多项式 $P_{\alpha_i,F}$ 没有重根.

证明: 根据命题1.2.5即得. □

因此我们关心在什么时候极小多项式没有重根, 如下定义的形式导数给出了判别法.

定义 3.2.2. 给定域 F 以及 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in F[x]$, 其**形式导数** (formal derivative)定义为

$$f'(x) := n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$$

引理 3.2.3. 对于 $f(x), g(x) \in F[x]$, 有

1. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
2. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.

引理 3.2.4. 给定 $f(x) \in F[x]$, $f(x)$ 有重根当且仅当 $(f, f') \neq 1$.

证明: 在 $f(x)$ 的分裂域中将 $f(x)$ 写做 $f(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$, 则

$$f'(x) = c\sum_{i=1}^{n}(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1})\ldots(x - \alpha_n)$$

如果 $f(x)$ 有重根, 不妨假设 $\alpha_1 = \alpha_2$, 则 $f'(\alpha_1) = 0$, 即 $(x - \alpha_1) \mid (f, f')$. 另一方面, 如果 $\alpha_i \neq \alpha_j$ 对任意 $i \neq j$ 成立, 则 $f'(\alpha_i) \neq 0$ 对任意 $1 \leq i \leq n$ 成立, 从而 $(f, f') = 1$. □

推论 3.2.5. 如果 f 是不可约多项式, f 有重根等价于 $f'=0$.

证明: 如果 f 是不可约的, 从而 $(f,f')=1$ 或 $(f,f')=f$. 从而 f 有重根当且仅当 $(f,f')=f$, 但是 $\deg p'\leq n-1$, 从而有 $f'=0$. □

定义 3.2.6. 给定域 F, $p(x)\in F[x]$ 被称为**可分多项式** (seperable polynomial), 如果其不存在重根.

定义 3.2.7. 给定域扩张 E/F, $\alpha\in E$ 被称为 F 上的**可分元** (seperable element), 如果其在 F 上的极小多项式 $P_{\alpha,F}$ 是可分多项式.

定义 3.2.8. 代数扩张 E/F 被称为**可分扩张** (seperable extension), 如果 E 中所有元素都在 F 上可分.

定理 3.2.9. 给定代数扩张 E/F, 如下叙述等价:

(1) E/F 是可分扩张.

(2) $E=F(\{\alpha_i\}_{i\in I})$, 其中 α_i 是 F 上的可分元.

如果 E/F 是有限扩张, 则上述两条还与下面的等价:

(3) $|\mathrm{Hom}_F(E,\overline{F})|=[E:F]$.

证明: (1) 推 (2) 是显然的, (2) 推 (3) 成立依赖于引理3.2.1. 下面我们假设 E/F 是有限扩张来证明 (3) 推 (1): 由于 E/F 是有限扩张, 因此不妨假设 E 是 F 添加有限多个元素得到的, 即 $E=F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, 任取 $\alpha\in E$, 我们不妨考虑 $E=F(\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, 因此根据引理3.2.1的取等条件可知 $\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 都是 F 上的可分元. 特别地, 有 α 是 F 上的可分元, 即 E/F 可分.

最后我们来证明 (2) 推 (1): 假设 $E=F(\{\alpha_i\}_{i\in I})$, 其中 α_i 是 F 上的可分元. 任取 $\alpha\in E$, 由于 E/F 代数, 从而存在 F 的某个有限扩张 $L=F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 使得 $\alpha\in L$, 因此利用有限扩张情形的 (2) 推 (3) 推 (1) 即可知 α 在 F 上可分. □

推论 3.2.10. 可分多项式的分裂域是可分扩张.

证明: 可分多项式的分裂域可以视作是添加若干可分元得到的扩域. □

推论 3.2.11. 域扩张 $F\subseteq E\subseteq K$, 则 K/F 是可分扩张当且仅当 $K/E, E/F$ 都是可分扩张.

证明: 假设 K/F 是可分扩张, 那么任取 $u\in K$, 其在 E 上的不可约多项式可以整除其在 F 上的不可约多项式, 即 K/E 是可分扩张; E/F 是可分的更是显然, 因为任取 $u\in E$ 考虑其在 F 上的不可约多项式和将其看成是 K 中的元素考虑其在 F 上的不可约多项式是一样的.

另一方面, 任取 $\alpha\in K$, 其在 E 上的极小多项式记作 $P_{\alpha,E}(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$. 考虑 $F\subseteq F(a_0,\ldots,a_n)\subseteq E\subseteq E(u)\subseteq K$, 由于 E/F 是可分的, 从而 $F(a_0,\ldots,a_n)/F$ 是可分的. 而 α 在 $F(a_0,\ldots,a_n)$ 上的极小多项式也是 $P_{\alpha,E}$, 是一个可分多项式, 即 α 在 $F(a_0,\ldots,a_n)$ 上可分, 从而根据定理3.2.9有 $F(u,a_0,\ldots,a_n)/F$ 是可分的. 特别地, α 在 F 上是可分的. □

推论 3.2.12. $E/F, E'/F$ 都是可分扩张, 则 EE'/F 也是可分扩张.

证明: 显然 EE' 中所有的元素都是 F 上的可分元, 从而根据定理3.2.9可知 EE'/F 是可分扩张. □

命题 3.2.13. 如果 $\operatorname{char} F = 0$, 则任何不可约多项式都是可分的.

证明: 当 $\operatorname{char} F = 0$ 时, 任何非常数的多项式都有非零导数, 从而根据引理3.2.4即可. □

例子. 当 $\operatorname{char} F = p$ 时, 并非所有不可约多项式都是可分的: 令 $F = \mathbb{F}_p(t)$, 取 $f(x) = x^p - t \in F[x]$, 则 $p(x)$ 是不可约多项式, 但不是可分的, 因为

$$(f, f') = (x^p - t, px^p) = (x^p - t, 0) = 0 \neq 1$$

这里面关键的原因在于特征不为零时, 一个高次多项式的形式导数可能会为零.

命题 3.2.14. 如果 $\operatorname{char} F = p$, 则任何不可约多项式都是可分的当且仅当 $F = F^p$.

证明: 假设不可约 $f(x) \in F[x]$ 不可分当且仅当 $f'(x) = 0$, 这也当且仅当 $f(x)$ 可以写作

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{kp}$$

假设 $F = F^p$, 那么对于任意 a_k, 总存在 b_k 使得 $b_k^p = a_k$, 从而

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^p x^{kp} = (\sum_{k=0}^{n} b_k x^k)^p$$

与 $f(x)$ 不可约相矛盾. 另一方面, 假设 $F \neq F^p$, 那么存在 $t \in F$ 使得 $\sqrt[p]{t} \notin F$, 考虑 $x^p - t$ 便得到了一个不可约的不可分多项式. □

定义 3.2.15. 域 F 被称为**完美域** (perfect field), 如果任何不可约多项式都是可分的.

命题 3.2.16.

1. 如果 $\operatorname{char} F = 0$, 则 F 是完美域.
2. 如果 $\operatorname{char} F = p$, 域 F 是完美域当且仅的 $F^p = F$.
3. 任何有限域都是完美域.

证明: (1) 和 (2) 根据命题3.2.13以及命题3.2.14即可. 对于 (3), 弗罗贝尼乌斯映射给出了 $F^p = F$. □

命题 3.2.17. 完美域的代数扩张都是可分扩张.

证明: 假设 F 是完美域, E/F 是代数扩张, 任取 $\alpha \in E$, 则其在 F 上的极小多项式是可分多项式, 从而 α 是 F 上的可分元, 即 E/F 是可分扩张. □

推论 3.2.18. 如果 $\operatorname{char} F = 0$, 则任何代数扩张 E/F 是可分扩张.

推论 3.2.19. $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ 是可分扩张.

3.3 纯不可分扩张

在本节中, F 总是指特征为 p 的域. 给定一个不可约的不可分多项式 $P(x) \in F[x]$, 那么根据 $P'(x) = 0$ 可知存在 $P_1(x)$, 使得 $P(x) = P_1(x^p)$. 下面考虑 $P_1(x)$ 是否不可分, 如果仍不可分, 可以继续做下去, 直到 $P = P_e(x^{p^e})$, 其中 $P_e(x)$ 是可分多项式.

定义 3.3.1. 对于不可约的不可分多项式 $P(x) \in F[x]$, $n_s := \deg P_e$, 则 $n = n_s \cdot p^e$, 其中 n_s 称为 $P(x)$ 的**可分次数** (seperable degree), p^e 称作 $P(x)$ 的**不可分次数** (inseperable degree).

命题 3.3.2. *给定域扩张 E/F, F 上所有可分的元素组成的集合记作 E_s, 那么 E_s 是 E 的一个子域.*

证明: 任取 $\alpha, \beta \in E$ 是可分元, 那么根据定理3.2.9可知 $F(\alpha, \beta)/F$ 是可分扩张, 从而可分元的加减乘除都在其中, 即 E_s 是 E 的一个子域. □

定义 3.3.3. $u \in \overline{F}$ 被称为在 F 上**纯不可分** (purely inseperable), 如果 $u^{p^m} \in F$, 对某个正整数 m 成立.

定义 3.3.4. 代数扩张 E/F 被称为**纯不可分扩张** (purely inseperable extension), 如果 E 中的每个元素在 F 上都是纯不可分的.

命题 3.3.5. *给定域扩张 E/F, 则 E/E_s 是纯不可分扩张.*

证明: 任取 $\alpha \in E \setminus E_s$, 考虑其在 F 上的极小多项式 $P_{\alpha,F}$, 是一个不可分的不可约多项式. 假设其不可分次数为 p^e, 那么 $P_{\alpha,F} = P_e(x^{p^e})$, 其中 P_e 是一个可分多项式, 即 $\alpha^{p^e} \in E_s$, 即 E/E_s 是纯不可分扩张. □

注记. 即给定域扩张 E/F, 其可以分解为可分扩张 E_s/F 和纯不可分扩张 E/E_s.

定义 3.3.6. 给定域扩张 E/F, 其**可分次数** (seperable degree)定义为 $[E : F]_s := [E_s : F]$, 其**不可分次数** (inseperable degree)定义为 $[E : F]_i := [E : E_s]$.

命题 3.3.7.

(1) *如果 E/F 是有限纯不可分扩张, 则 $[E : F]$ 是 p 的幂次.*

(2) *如果 $K/E, E/F$ 都是纯不可分扩张, 则 K/F 也是纯不可分扩张.*

证明: (1). 由于 E/F 是纯不可分扩张, 从而 $\alpha \in E$ 满足某个多项式 $x^{p^m} - c \in F[x]$, 从而其极小多项式整除 $x^{p^m} - c$, 进而极小多项式的次数也是 p 幂次. 对于 E 的任何包含 F 的子域 K, $\alpha \in E$ 在 K 上的极小多项式一定整除其在 F 上的极小多项式, 从而次数也是 p 的幂次, 从而

$$[E : F] = [F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})] \ldots [F(\alpha_1) : F]$$

是 p 的幂次.

(2). 任取 $\alpha \in K$, 由于 K/E 是纯不可分的, 因此存在正整数 m_1 使得 $\alpha^{p^{m_1}} \in E$, 再利用 E/F 是纯不可分的, 可以找到正整数 m_2 使得 $(\alpha^{p^{m_1}})^{p^{m_2}} \in F$, 从而 K/F 是纯不可分的. □

命题 3.3.8. 给定有限扩张 E/F, 则

$$|\mathrm{Hom}_F(E,\overline{F})| = [E:F]_s \leq [E:F]$$

特别地, 等号取得当且仅当 E/F 是可分扩张.

证明: 如果 E/F 是可分扩张, 则根据定理3.2.9可知

$$|\mathrm{Hom}_F(E,\overline{F})| = [E:F]$$

而当 E/F 不是可分扩张时, 我们断言有如下一一对应:

$$\mathrm{Hom}_F(E,\overline{F}) = \mathrm{Hom}_F(E_s,\overline{F})$$

通过 $\tau \mapsto \tau|_{K_s}$ 给出. 对应是满射可根据命题2.3.5; 为了证明对应是单射, 即证明 τ 被 $\tau|_{E_s}$ 所决定: 任取 $u \in E$, 则存在正整数 m 使得 $u^{p^m} \in E_s$, 则 $\tau(u^{p^m}) = \tau(u)^{p^m} = v \in \overline{F}$, 因此 $\tau(u)$ 满足方程 $x^{p^m} - v = (x-v')^{p^m} = 0$, 可知 $\tau(u)$ 被唯一确定. □

第四章　伽罗瓦理论

4.1　伽罗瓦扩张

记号 4.1.1. 给定域扩张 E/F, 对于 $H < \mathrm{Aut}_F(E)$, 记 $E^H = \{u \in E \mid \tau(u) = u, \forall \tau \in H\}$.

定义 4.1.2. 代数扩张 E/F 被称为**伽罗瓦扩张** (Galois extension), 如果其是可分正规扩张.

注记. 根据正规性可知 $\mathrm{Hom}_F(E, \overline{F}) = \mathrm{Hom}_F(E, E) = \mathrm{Aut}_F(E)$. 对于伽罗瓦扩张 E/F, F-自同构全体 $\mathrm{Aut}_F(E)$ 通常也被记作 $\mathrm{Gal}(E/F)$, 并且

$$|\mathrm{Gal}(K/F)| = |\mathrm{Hom}_F(K, K)| \overset{(1)}{=} |\mathrm{Hom}_F(K, \overline{F})| \overset{(2)}{=} [K : F]$$

其中 (1) 成立是根据定理3.1.2, (2) 成立是根据定理3.2.9.

命题 4.1.3. *对于域扩张 $F \subseteq E \subseteq K$, 如果 K/F 是伽罗瓦扩张, 则 K/E 也是.*

证明: 根据推论3.1.3以及推论3.2.11即可. □

注记. 注意, 对于域扩张 $F \subseteq E \subseteq K$, 如果 K/F 是伽罗瓦扩张, E/F 不一定是伽罗瓦扩张, 在下一节伽罗瓦对应中我们将看到 E/F 是伽罗瓦扩张当且仅当 $\mathrm{Gal}(K/E)$ 是 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 的正规子群.

定义 4.1.4. 给定可分扩张 E/F, 则在 $\overline{F}$ 中包含 E 的最小的伽罗瓦扩张被称为 E/F 的**伽罗瓦闭包** (Galois closure).

注记. 对于一个任意的代数扩张 E/F, 我们都可以在 $\overline{F}$ 中寻找 E/F 的正规闭包: 将 E 写成 $F(\{\alpha_i\}_{i\in I})$, 其中 α_i 都是代数元. 对于每一个 α_i, 用 $P_{\alpha_i,F}$ 去记其在 F 上的极小多项式, 那么将这些 $P_{\alpha_i,F}$ 在 $\overline{F}$ 中的所有根都添加到 F 中, 得到的域记作 N, 不难发现 N 就是 K/F 的正规闭包. 特别地, 如果 E/F 是可分扩张, 我们可以选取 α_i 都是可分元, 从而此时的 N/F 也是可分扩张, 从而是 E/F 的 Galois 闭包. 更特别地, 如果 E/F 是有限可分扩张, 那么其 Galois 闭包也是 F 的有限扩张.

命题 4.1.5. *对于有限扩张 E/F, 如下叙述等价:*

(1) *E/F 是伽罗瓦扩张.*
(2) *E 是可分多项式 $f \in F[x]$ 的分裂域.*
(3) *$F = E^{\mathrm{Gal}(E/F)}$.*
(4) *存在 $\mathrm{Aut}_F(E)$ 的有限子群 H 使得 $F = E^H$.*

证明: (1) 和 (2) 等价是根据定理3.1.2和推论3.2.10即可. (1) 推 (3): 首先显然 $F \subseteq E^{\mathrm{Gal}(E/F)}$; 另一方面, 任取 $\alpha \in E^{\mathrm{Gal}(E/F)}$, 考虑 α 在 F 上的极小多项式 $P_{\alpha,F}$, 任取 $P_{\alpha,F}$ 的一个根 β, 定义嵌入 $F(\alpha) \hookrightarrow \overline{F}$ 为 $\alpha \mapsto \beta$, 根据命题2.3.5可以将其延拓成 $\tau\colon E \to \overline{F}$, 而根据 E 是正规扩张, 可知 $\tau(E) = E$, 即 $\tau \in \mathrm{Gal}(E/F)$. 由于 $\alpha \in E^{\mathrm{Gal}(E/F)}$, 因此 $\beta = \tau(\alpha) = \alpha$, 即 $P_{\alpha,F}(x) = x - \alpha$, 即 $\alpha \in F$. (3) 推 (4) 是显然的, 取 $H = \mathrm{Aut}_F(K)$ 即可. (4) 推 (1) 是下面将要证明的引理4.1.8, 即阿廷引理. □

记号 4.1.6. 如果伽罗瓦扩张 E/F 是多项式 $f(x) \in F[x]$ 的分裂域, 那么此时记伽罗瓦群为 G_f.

引理 4.1.7 (Dedekind 无关引理). *K 是域, $H = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ 是 $\mathrm{Aut}(K)$ 的有限子集 (不必要是子群). 如果存在 $c_i \in K$ 使得*

$$c_1\tau_1(x) + \cdots + c_n\tau_n(x) = 0$$

对任意的 $x \in K$ 成立, 那么 $c_i = 0, i = 1, \dots, n$.

证明: 假设存在这样的 c_i, 我们不妨假设

$$c_1\tau_1(x) + \cdots + c_r\tau_r(x) = 0 \tag{4.1.1}$$

对任意的 $x \in K$ 成立, 并且 $c_i \neq 0, 1 \leq i \leq r$, 其中 r 是满足这样条件最小的数. 用 $ax, a \in K^\times$ 替代 x 则有

$$c_1\tau_1(a)\tau_1(x) + \cdots + c_r\tau_r(a)\tau_r(x) = 0 \tag{4.1.2}$$

(4.1.2) 减 (4.1.1) 乘 $\tau_r(a)$ 则有

$$c_1[\tau_1(a) - \tau_r(a)]\tau_1(x) + \cdots + c_{r-1}[\tau_{r-1}(a) - \tau_r(a)]\tau_{r-1}(x) = 0$$

根据我们对 r 的假设则有 $\tau_i(a) = \tau_r(a)$ 对任意的 $1 \leq i \leq r-1$ 以及 $a \in K^\times$ 成立, 从而有 $\tau_1 = \tau_r, r \geq 2$, 相矛盾. □

引理 4.1.8 (阿廷引理). *K 是域, $H = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}, \tau_1 = \mathrm{id}$ 是 $\mathrm{Aut}(K)$ 的有限子群, 记 $E = K^H$, 则 K/E 是伽罗瓦扩张, 并且扩张次数 $[K : E] = |H|$.*

证明: 我们首先证明 K/E 是伽罗瓦扩张: 任取 $\alpha \in K$, 记 α 在 E 上的极小多项式为 p, 令 $\mathcal{O}$ 是 α 在 H 作用下的轨道, 考虑:

$$q(x) = \prod_{\alpha \in \mathcal{O}} (x - \alpha)$$

则任取 $\tau \in H$ 有 $\tau(q(x)) = q(x)$, 即 $q(x) \in E[x]$. 并且由于 H 是一个子群, 其中含有单位元, 从而 $\alpha \in \mathcal{O}$, 即 $q(\alpha) = 0$, 因此 $p(x) \mid q(x)$, 但是 q 没有重根, 并且所有的根都在 K 中, 因此 K/E 是伽罗瓦扩张.

现在来证明 $[K : E] \leq |H|$: 只需要证明任取 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K$, 它们是 E-线性相关即可: 考虑矩阵 $(\tau_i(\alpha_j)) \in M_{n\times(n+1)}(K)$, 则其 $n+1$ 列 K-线性相关, 即存在 $c_1, \dots, c_{n+1} \in K$, 且不全为零使得:

$$c_1\begin{pmatrix} \tau_1(\alpha_1) \\ \tau_2(\alpha_1) \\ \vdots \\ \tau_n(\alpha_1) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \tau_1(\alpha_2) \\ \tau_2(\alpha_2) \\ \vdots \\ \tau_n(\alpha_2) \end{pmatrix} + \cdots + c_{n+1}\begin{pmatrix} \tau_1(\alpha_{n+1}) \\ \tau_2(\alpha_{n+1}) \\ \vdots \\ \tau_n(\alpha_{n+1}) \end{pmatrix} = 0 \tag{4.1.3}$$

不妨假设 $c_1,\dots,c_r\neq 0$, $c_{r+1}=\cdots=c_{n+1}=0$, 且这样的 r 是最小的. 那么 $r\geq 2$, 并且不妨假设 $c_1=1$, 考虑第一行:

$$\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_r\alpha_r=0 \tag{4.1.4}$$

我们断言 $c_2,\dots,c_n\in E$, 不然如果存在 $2\leq i\leq r$, 使得对任意的 $1\leq j\leq n$ 有 $\tau_j(c_i)\neq c_i$, 用 τ_j 作用 (4.1.4) 可得

$$\tau_j(\alpha_1)+\tau_j(c_2)\tau_j(\alpha_2)+\cdots+\tau_j(c_r)\tau_j(\alpha_r)=0 \tag{4.1.5}$$

用 (4.1.5) 分别与 (4.1.3) 的每一行相减, 可以得到一个新的更小的 r', 这与 r 的选取相矛盾.

最后来证明 $[K:E]\geq|H|$: 假设 $[K:E]=r<n$, 令 $\{x_1,\dots,x_r\}$ 是 K 在 E 上的一组基, 那么任取 $y\in K$, 将其写成

$$y=c_1x_1+\cdots+c_rx_r$$

考虑 $r\times n$ 矩阵 $(\tau_j(x_i))$, 其秩一定 $\leq r<n$, 因此存在非平凡的 ξ_i 满足

$$\begin{cases}\xi_1\tau_1(x_1)+\ldots+\xi_n\tau_n(x_1)=0\\ \qquad\vdots\\ \xi_1\tau_1(x_r)+\ldots+\xi_n\tau_n(x_r)=0\end{cases}$$

将上面第 i 个方程乘以 c_i, 由于 $E=K^H$, 因此 $\tau_j(c_i)=c_i$, 从而

$$\begin{cases}\xi_1\tau_1(c_1x_1)+\ldots+\xi_n\tau_n(c_1x_1)=0\\ \qquad\vdots\\ \xi_1\tau_1(c_rx_r)+\ldots+\xi_n\tau_n(c_rx_r)=0\end{cases}$$

因此 $\xi_1\tau_1(y)+\cdots+\xi_n\tau_n(y)=0$ 对任意的 $y\in K$ 成立, 根据引理4.1.7可知 $\xi_i=0$, 相矛盾! □

4.2 伽罗瓦对应

定理 4.2.1 (伽罗瓦主定理). *给定有限伽罗瓦扩张 K/F, 则*

(1) *存在如下的一一对应:*

$$\{\mathrm{Gal}(K/F)\text{的子群}\}\overset{1-1}{\longleftrightarrow}\{K/F\text{的中间域}\}$$

对应法则为 $H\mapsto K^H$ 与 $E\mapsto\mathrm{Gal}(K/E)$.

(2) *E/F 是伽罗瓦扩张当且仅当 $\mathrm{Gal}(K/E)$ 是 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 的正规子群, 并且:*

$$\mathrm{Gal}(E/F)\cong\mathrm{Gal}(K/F)/\mathrm{Gal}(K/E)$$

证明: (1). 根据命题4.2.4的 (3) 可知

$$E\to\mathrm{Gal}(K/E)\to K^{\mathrm{Gal}(K/E)}=E$$

现在只需要证明下面的对应成立:

$$H\to K^H\to\mathrm{Gal}(K/K^H)=H$$

一方面 $H \subseteq \mathrm{Gal}(K/K^H)$ 是显然的, 而根据引理4.1.8:

$$|\mathrm{Gal}(K/K^H)| \leq |H|$$

即两者相同.

(2). 根据推论3.2.11可知 E/F 是可分扩张, 从而 E/F 是伽罗瓦扩张当且仅当 E/F 是正规扩张, 即 $\tau(E) = E$. 任取 $\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)$, 可以直接验证:

$$\mathrm{Gal}(K/\tau(E)) = \tau^{-1}\,\mathrm{Gal}(K/E)\tau$$

因此 E/F 是伽罗瓦扩张当且仅当 $\tau(E) = E$ 当且仅当 $\mathrm{Gal}(K/E)$ 是正规子群. □

推论 4.2.2. *E/F 是有限可分扩张, 则 E/F 中只存在有限多个中间域.*

证明: 考虑其 Galois 闭包 K/F, 由注记4.1可知其 Galois 闭包 K/F 也是有限扩张, 从而根据伽罗瓦对应 K/F 中只有有限多个中间域, 从而 E/F 中只有有限多个中间域. □

推论 4.2.3 (本原元定理)**.** *如果 E/F 是有限可分扩张, 则 $E = F(\alpha), \alpha \in E$.*

证明: 如果 F 是有限域, 则不妨假设 $F = \mathbb{F}_p, E = \mathbb{F}_q, q = p^m$, 根据推论2.2.5可知 $\mathbb{F}_q^\times$ 是循环群, 不妨记其生成元为 ξ, 则 $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\xi)$; 如果 F 是无限域, 不妨假设 $E = F(\alpha_1, \alpha_2)$, 一般情况归纳即可: 任取 $r \in F$, 考虑 $F \subseteq F(\alpha_1 + r\alpha_2) \subseteq E$, 由于其中只有有限多个中间域, 并且 F 是无限域, 因此存在不同的 $r_1, r_2 \in F$ 使得:

$$F(\alpha_1 + r_1\alpha_2) = F(\alpha_1 + r_2\alpha_2)$$

考虑 $\alpha = \alpha_1 + r_1\alpha_2$, 我们断言 $F(\alpha) = F(\alpha_1, \alpha_2)$: 显然 $F(\alpha) \subseteq F(\alpha_1, \alpha_2)$; 另一方面, 由于 $\alpha = \alpha_1 + r_1\alpha_2 = \alpha_1 + r_2\alpha_2$, 并且 $r_1 \neq r_2$, 从而 $(r_1 - r_2)\alpha_2 \in F(\alpha)$, 即 $\alpha_2 \in F(\alpha)$, 从而 $\alpha_1 \in F(\alpha)$, 即 $F(\alpha) = F(\alpha_1, \alpha_2)$. □

命题 4.2.4. *如果 $E/F, K/F$ 都是有限伽罗瓦扩张, 则 EK/F 也是伽罗瓦扩张, 并且*

(1)

$$\varphi\colon \mathrm{Gal}(EK/K) \to \mathrm{Gal}(E/E \cap K)$$
$$\tau \mapsto \tau|_E$$

是同构.

(2)

$$\psi\colon \mathrm{Gal}(EK/F) \to \mathrm{Gal}(E/F) \times \mathrm{Gal}(K/F)$$
$$\tau \mapsto (\tau|_E, \tau|_K)$$

是单射. 如果 $E \cap K = F$, 那么上述映射还是满射, 从而使同构.

证明: 根据推论3.1.3可知 EK/F 是正规扩张. 根据推论3.2.12可知 EK/F 是可分扩张, 从而 EK/F 是伽罗瓦扩张, 并且由于 $E/F, K/F$ 都是有限的, 从而 EK/F 也是有限伽罗瓦扩张, 因此 EK/E 也是有限伽罗瓦扩张.

(1). 任取 $\tau \in \mathrm{Gal}(EK/K)$, 考虑 $\tau|_E : E \to EK \hookrightarrow \overline{F}$, 由于 E/F 是正规的, 从而根据定理3.1.2有 $\tau(E) \subseteq E$, 即 $\tau|_E \in \mathrm{Gal}(E/E \cap K)$. 如果 $\tau|_E = \mathrm{id}_E$, 那么由于 $\tau|_F = \mathrm{id}_F$ 有 $\tau = \mathrm{id}_{EK}$,

即 φ 是单射. 另一方面, $\operatorname{im}\varphi$ 是 $\mathrm{Gal}(E/E\cap K)$ 的子群, 并且 $E^{\operatorname{im}\varphi}=(EK)^{\mathrm{Gal}(EK/K)}\cap E=K\cap E$, 从而 $\operatorname{im}\varphi=\mathrm{Gal}(E/E\cap K)$.

(2). ψ 是单射与 φ 是单射的证明同理. 如果 $E\cap K=F$, 那么任取 $(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathrm{Gal}(E/F)\times\mathrm{Gal}(K/F)$, 根据 (1) 有 σ_1,σ_2 可以被延拓成 $\sigma_1'\in\mathrm{Gal}(EK/K)$ 和 $\sigma_2'\in\mathrm{Gal}(EK/E)$. 令 $\tau=\sigma_2'\circ\sigma_1'\in\mathrm{Gal}(EK/F)$, 那么 $\tau|_K=\sigma_2'\circ\sigma_1'|_K=\sigma_2'|_K=\sigma_2$, 同理有 $\tau|_E=\sigma_1$, 从而是满射. □

定义 4.2.5. 伽罗瓦扩张被称为**阿贝尔扩张** (abelian extension), 如果其伽罗瓦群是阿贝尔群.

定义 4.2.6. 伽罗瓦扩张被称为**循环扩张** (cyclic extension), 如果其伽罗瓦群是循环群.

推论 4.2.7. *阿贝尔扩张的复合也是阿贝尔扩张, 循环扩张的复合也是循环扩张.*

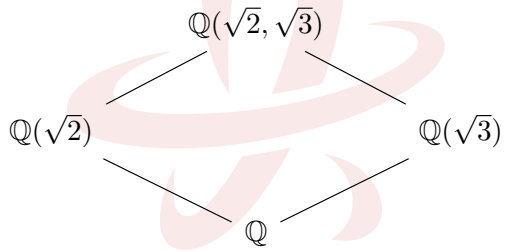
证明: 注意到阿贝尔群 (循环群) 的子群还是阿贝尔群 (循环群). □

4.3 伽罗瓦群的计算

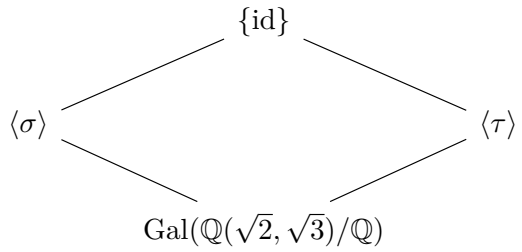
4.3.1 简单多项式的分裂域

通过伽罗瓦对应, 我们可以计算一些常见的扩张的伽罗瓦群.

例子. *考虑伽罗瓦扩张 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}$, 我们有如下的中间域:*



其对应到子群



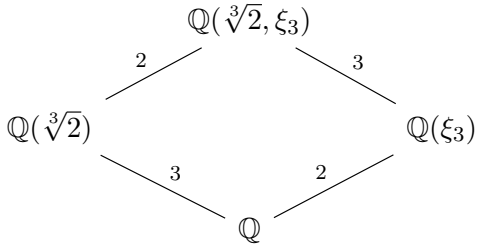
其中

$$\sigma:\begin{cases}\sqrt{2}\mapsto-\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\mapsto\sqrt{3}\end{cases}\qquad\tau:\begin{cases}\sqrt{2}\mapsto\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\mapsto-\sqrt{3}\end{cases}$$

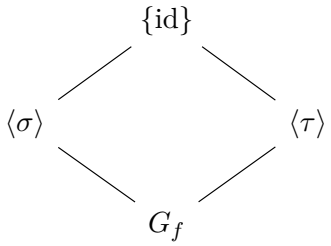
由于 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ 是一个四阶群, 而我们已经找到了两个二阶子群 $\langle\sigma\rangle,\langle\tau\rangle$, 并且 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 从而可知 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q})=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

注记. 注意到 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 还有一个二阶子群 $\langle\tau\sigma\rangle$, 其对应到的不变子域为 $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

例子. 考虑 $f(x)=x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$ 的分裂域 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\xi_3)/\mathbb{Q}$, 其中 $\xi_3=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$, 我们有如下的中间域:



对应到子群



其中

$$\sigma\colon\begin{cases}\xi_3\mapsto\xi_3^2\\ \sqrt[3]{2}\mapsto\sqrt[3]{2}\end{cases}\qquad\tau\colon\begin{cases}\xi_3\mapsto\xi_3\\ \sqrt[3]{2}\mapsto\sqrt[3]{2}\xi_3\\ \sqrt[3]{2}\xi_3\mapsto\sqrt[3]{2}\xi_3^2\end{cases}$$

并且直接计算可知

$$\sigma\tau\neq\tau\sigma$$
$$\sigma\tau\sigma^{-1}=\tau^2$$

从而可知 $G_f=S_3$.

练习. 写出 S_3 的其他子群, 与其对应的不变子域.

命题 4.3.1. 令 E 是不可约多项式 $f(x)\in F[x]$ 的分裂域, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 是 $f(x)$ 的根, 那么 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 在 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 上忠实地[1] *(faithfully)*, 可递地 *(transitively)*作用, 并且 n 整除 $|\mathrm{Gal}(E/F)|$.

证明: 任取 $\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)$, 其完全被 $\sigma(\alpha_i)$ 所决定, 因此 $G_f\hookrightarrow S_n$. 并且是可递的, 因为可以定义

$$\sigma'\colon\alpha_i\to\alpha_j$$

再将其延拓成 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 中的元素. 注意到 $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\alpha_1)\subseteq E$, 由于 $[\mathbb{Q}(\alpha_1):\mathbb{Q}]$ 的扩张次数是 n, 因此 n 整除 $|\mathrm{Gal}(E/F)|$. □

注记. 根据上述命题, 不难直接看出 x^3-2 的伽罗瓦群就是 S_3.

4.3.2 有限域上的伽罗瓦扩张

定理 4.3.2. $q=p^m,m>0$, 则 $\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q$ 是伽罗瓦扩张, 并且 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q)=\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, 由弗罗贝尼乌斯同构 $\sigma\colon x\mapsto x^q$ 生成.

[1]即有单嵌入 $\mathrm{Gal}(E/F)\to S_n$.

4.3.3 模 p 方法

给定 n 次首一多项式 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 其判别式定义为 $D(f)=\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\in\mathbb{Z}$, 其中 α_i 是 $f(x)$ 的根. 如果记 $f_p(x)\equiv f(x)\pmod p$, 那么 $D(f_p)\neq 0$ 当且仅当素数 p 不整除 $D(f)$.

定理 4.3.3 (Dedekind)**.** *$f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 是 n 次首一多项式, p 是使得 $f_p(x)$ 可分的素数, 假设 $f_p(x)$ 在 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$ 中分解成次数分别是 $n_1,\dots,n_r$ 的不可约多项式的乘积, 那么 G_f 中包含一个类型为 $(n_1,\dots,n_r)$ 的置换.*

证明: 假设 K 是 f 的分裂域, $f(x)$ 在 K 中分裂为 $(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$. 考虑 $R=\mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_n]\subseteq K$, 由于 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 都是代数整数, 从而 R 中所有的元素都是代数整数. 由 p 生成的主理想 $pR\neq R$, 否则 $1/p\in R$ 导致 $1/p\in R\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Z}$, 相矛盾. 取包含 pR 的一个极大理想 P, 因为 $\mathbb{Z}$ 可以自然的嵌入到 R 中, 我们有映射 $\mathbb{Z}\to R/P$, 并且 $p\mathbb{Z}$ 包含在映射的核里, 再由于 $p\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的极大理想可知映射的核就是 $p\mathbb{Z}$, 即 R/P 是 $\mathbb{F}_p$ 的一个域扩张. 假设

$$f(x)\equiv(x-\overline{\alpha}_1)\dots(x-\overline{\alpha}_n)\pmod P$$

从而 $f(x)$ 在 R/P 中分裂, 并且 R/P 由 $\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_n$ 生成, 因此 R/P 是 $f_p(x)$ 的分裂域.

因为 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 可以作用在 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 上, 从而 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 可以作用在 R 上. 令 $D_P=\{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})\mid\sigma P=P\}$, 从而有映射

$$\begin{aligned}\varphi\colon D_P&\mapsto\mathrm{Aut}(R/P)\\ \sigma&\mapsto\sigma|_R\end{aligned}$$

□

引理 4.3.4. *$G<S_n$ 是 S_n 可递子群, 假设 G 包含一个 2-轮换 σ 和 $(n-1)$-轮换 τ, 那么 $G=S_n$.*

证明: 我们不妨取 $(n-1)$-轮换 $\tau=(23\dots n)$, 因为任何 $(n-1)$-轮换都可以生成它. 并且我们可以取 $\sigma=(1a)$, 因为任取 $\sigma'\in S_n$, 我们有:

$$\sigma'(ij)\sigma'^{-1}=(\sigma'(i)\sigma'(j))$$

因此只需根据 G 的可递性取 σ' 满足 $\sigma'(i)=1$ 即可. 考虑如下 τ^k 在 $(1a)$ 上的作用

$$\tau^k(1a)\tau^{-k}=(1\tau^k(a))$$

可以得到 $(12),(13),\dots,(1n)$, 即 $G=S_n$. □

引理 4.3.5. *p 是素数, $G<S_p$, 并且 G 包含一个对换和 p-轮换, 则 $G=S_p$.*

例子. *考虑 $f(x)=x^5-x-1$, 首先模 5 可知 $f_5(x)=x^5-x-1$ 是不可约的, 从而 G_f 中包含一个 5-轮换. 模 2 可知 $f_2(x)=(x^2+x+1)(x^3+x^2+1)$, 从而 G_f 包含一个对换, 从而可知 $G_f=S_5$.*

例子. *考虑 $f(x)=x^6+22x^5+21x^4+12x^3-36x^2-29x-15$, 首先模 2 可知 $f_2(x)=x^6+x^4+x^2+x+1$, 分析其不可约性可知其不可约, 从而 G_f 中包含一个 6-轮换, 即 G_f 是 S_6 的可递子群. 模 3 可知 $f_3(x)=x(x^5+x^4-x+1)$, 从而 G_f 包含一个 5-轮换. 最后考虑模 5 得到 $f_5(x)=x(x-1)(x+1)(x+2)(x^2+2)$, 从而 G_f 包含 2-轮换, 从而根据引理4.3.4可知 $G_f=S_6$.*

4.3.4 分圆扩张

定义 4.3.6. ξ_n 被称为 n **次本原单位根** (n-th primitive root of unity), 如果 $\xi_n^n = 1$ 且对任意 $k < n$ 有 $\xi_n^k \neq 1$.

注记.

(1) n 次单位根的全体可以表示为 $\{\xi_n^k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$.

(2) ξ_n^k 也是 n 次本原单位根当且仅当 $(n,k) = 1$.

定义 4.3.7. n **次分圆多项式** (n-th cyclotomic polynomial)被定义为:

$$\Phi_n(x) = \prod_{(n,k)=1} (x - \xi_n^k)$$

定理 4.3.8. $\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦扩张, 并且 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

证明: $\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦扩张, 因为是特征零域上的 $x^n - 1$ 的分裂域. 任取 $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q})$, 其一定形如 $\tau(\xi_n) = \xi_n^k$, 并且如果假设其逆映射为 $\tau^{-1}(\xi_n) = \xi_n^l$, 则

$$\xi_n = \tau^{-1}(\tau(\xi_n)) = \tau^{-1}(\xi_n^k) = \xi_n^{kl}$$

即 $kl \equiv 1 \pmod{n}$, 即 $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, 因此有单射 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q}) \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. 为了证明满射, 只需要证明任取素数 $p \nmid n$, 存在 $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q})$ 使得 $\tau(\xi_n) = \xi_n^p$. 令 $R = \mathbb{Z}[\xi_n]$ 以及 P 是包含 pR 的极大理想, 那么根据模 p 方法的证明过程可知 R/P 是 $\Phi_n(x) \mod p$ 的分裂域. 假设 $\sigma \in D_P$ 使得 $\sigma|_R$ 上给出了 $\mathrm{Gal}((R/P)/\mathbb{F}_p)$ 的弗罗贝尼乌斯映射, 即

$$\sigma(\overline{\xi_n}) = \overline{\xi_n}^p = \overline{\xi_n^p}$$

假设 $\sigma(\xi_n) = \xi_n^i$, 那么 $\overline{\xi_n^i} = \overline{\xi_n^p}$. 由于 $\Phi_n(x) \mid x^n - 1$, 以及 $x^n - 1 \mod p$ 无重根, 从而 $\Phi_n(x) \mod p$ 无重根, 因此 $\xi_n^i = \xi_n^p$, 证毕. □

推论 4.3.9. $\Phi_n(x)$ 是不可约多项式.

推论 4.3.10.

$$\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

证明: 任取 $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, 有

$$\begin{aligned}\tau(\Phi_n(x)) &= \tau\Big(\prod_{(n,k)=1} (x - \xi_n^k)\Big) \\ &= \prod_{(n,k)=1} (x - \xi_n^k) \\ &= \Phi_n(x)\end{aligned}$$

从而 $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$. 并且注意到 $\Phi_n(x)$ 的系数都是本原单位根的组合, 从而是代数整数, 因此 $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. □

推论 4.3.11. 对于 $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq \mathbb{Q}(\xi_n)$, $E/\mathbb{Q}$ 是阿贝尔扩张.

定理 4.3.12 (Kronecker-Weber)**.** 如果 $E/\mathbb{Q}$ 是有限阿贝尔扩张, 则存在 n 使得 $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq \mathbb{Q}(\xi_n)$.

下面列出一些有关 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ 的结果:

命题 4.3.13. 如果 $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, 则我们有:

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z})^\times \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p_r^{k_r}\mathbb{Z})^\times$$

命题 4.3.14. 当 $p \geq 3$ 时, 我们有:

$$(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{k-1}\mathbb{Z}$$

是循环群.

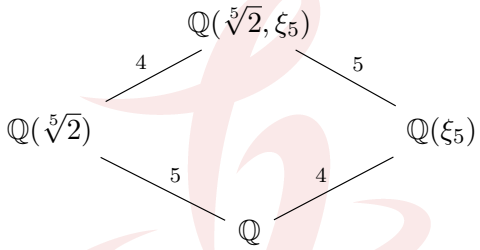
命题 4.3.15. 当 $p = 2, k \geq 4$ 时, 我们有:

$$(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{k-2}\mathbb{Z}$$

不是循环群.

例子. 多项式 $f(x) = x^5 - 2$ 的伽罗瓦群 G_f 为 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

证明: 考虑下图



首先根据分圆扩张可知 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \xi_5)/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})) = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, 由如下的映射生成:

$$\sigma: \begin{cases} \xi_5 \mapsto \xi_5^2 \\ \sqrt[5]{2} \mapsto \sqrt[5]{2} \end{cases}$$

另一方面 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \xi_5)/\mathbb{Q}(\xi + 5)) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, 由如下的映射生成

$$\tau: \begin{cases} \xi_5 \mapsto \xi_5 \\ \sqrt[5]{2}\xi_5^i \mapsto \sqrt[5]{2}\xi_5^{i+1} \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

因此找到了 G_f 的两个子群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \xi_5)/\mathbb{Q}(\xi_5)) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 以及 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \xi_5)/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, 其中前者还是正规子群. 由于 $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) \cap \mathbb{Q}(\xi_5) = \mathbb{Q}$ 意味着这两个子群的交平凡. $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) \cap \mathbb{Q}(\xi_5) = \mathbb{Q}$ 意味着 G_f 可以写成这两个子群的并, 从而

$$G_f \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

□

例子. 对于素数 p, 我们有 $f(x) = x^p - 2$ 的伽罗瓦群 $G_f \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

练习. 对于素数 p, 证明 $f(x) = x^p - 2$ 的伽罗瓦群 G_f 同构于

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

第五章　伽罗瓦理论的应用

5.1　尺规作图问题

对于一个没有刻度的直尺和圆规, 我们只可以通过以下的方式得到新的点:

(1) 两条直线的交点.

(2) 一条直线与一个圆的交点.

(3) 两个圆的交点.

定义 5.1.1. $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ 被称为**可构造的** (constructable), 如果我们可以从 $(0,0),(1,0)$ 以及尺规作图得到 (a,b).

注记 (标准构造). 利用尺规, 我们有下面两种基本的做法:

(1) 给定线段 AB, 作出以 AB 为直径的圆.

(2) 给定直线 l 以及直线外一点 p, 可以作出过 p 与 l 垂直或平行的直线.

推论 5.1.2. (a,b) 可构造当且仅当 $(a,0),(b,0)$ 可构造.

定义 5.1.3. $c\in\mathbb{R}$ 称为**可构造的** (constructable), 如果 $(c,0)$ 可构造. 我们用 $\mathfrak{C}$ 记 $\mathbb{R}$ 中所有可构造的点.

命题 5.1.4.

(1) $\mathfrak{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 包含 $\mathbb{Q}$ 的子域.

(2) 如果 $c\in\mathfrak{C},c>0$, 则 $\sqrt{c}\in\mathfrak{C}$

证明: (1). 由于任何特征零的域都包含 $\mathbb{Q}$ 作为子域, 所以只需要证明 $\mathfrak{C}$ 是一个域即可. 如果 $c\in\mathfrak{C}$, 那么以 $(0,0)$ 为圆心 c 为半径画圆, 则有 $-c\in\mathfrak{C}$. 如果 $ab\in\mathfrak{C}$, 我们可以通过以下方式得到 a^{-1}.

(2). 如果 $c\in\mathfrak{C}$, 那么可以用如下的方式构造 $\sqrt{c}$. □

定义 5.1.5. $K\subseteq\mathbb{R}$ 是子域, K **中的平面** (plane of K)定义为 $K\times K\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; K **中的直线** (line of K)定义为连接 K 平面中两点的直线; K **中的圆** (circle of K)定义为圆心在 K 平面中, 半径在 K 中的圆.

引理 5.1.6. 我们有如下结果:

(1) 两条 K 中直线的交点要么是空集, 要么是 K 中的点.

(2) 一条 K 中的直线与一个 K 中的圆的交点要么是空集, 要么是 $K(\sqrt{\alpha}),\alpha\in K$ 中的点.

(3) 两个 K 中的圆的交点要么是空集, 要么是 $K(\sqrt{\alpha}),\alpha\in K$ 中的点.

证明: 只需要注意到 K 中的直线由下面方程定义:

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in K$$

K 中的圆由下面方程定义:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in K$$

□

定理 5.1.7. *$c \in \mathfrak{C}$ 当且仅当存在下面的域扩张链:*

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n$$

(1) $c \in K_n$.
(2) $[K_n : K_{n-1}] = 2$, 即 $K_{i+1} = K_i(\sqrt{\alpha_i})$, 其中 $0 < \alpha_i \in K_i$.

特别地, 如果 c 可构造, 则 c 在 $\mathbb{Q}$ 上代数, 并且 $[\mathbb{Q}(c) : \mathbb{Q}]$ 是 2 的幂次.

证明: 假设 $c \in \mathfrak{C}$, 即 $(c, 0)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可构造, 即 $(c, 0)$ 可以通过有限步画圆或化直线的操作得到. 在每一步中, 新的点由两条线的交点, 线与圆的交点以及圆与圆的交点得到, 从而根据引理5.1.6有期待的域扩张链.

另一方面, 如果我们假设这样域扩张链存在, 那么 c 在 K_{n-1} 上的极小多项式为 $x^2+ax+b \in K_{n-1}[x]$, 那么 $(c, 0)$ 可以通过圆 $(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} - b$ 与 x 轴的交点的到. 根据命题5.1.4, 如果 α, β 可构造, 那么 $\alpha \pm \beta, \alpha\beta$ 都可构造. 由于 a, b 是 1 和 $\sqrt{\alpha_{n-2}}$ 在 K_{n-2} 上线性组合得到的, 而 K_{n-2} 可由在 K_{n-3} 上构造 $\sqrt{\alpha_{n-3}}$ 的到. 因此问题归结于在 K_{n-2} 上构造 $\sqrt{\alpha_{n-2}}$. 由于 $(\sqrt{\alpha_{n-2}}, 0)$ 是 $x^2 + y^2 = \alpha_{n-2}$ 与 x 轴的交点, 即经过有限步操作后 c 可构造. 特别地, 如果 c 可构造, 那么 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(c) \subseteq K_n$, 从而 $[K_n : \mathbb{Q}(c)][\mathbb{Q}(c) : \mathbb{Q}] = 2^n$, 从而 $[\mathbb{Q}(c) : \mathbb{Q}]$ 也是 2 的幂次. □

5.1.1 化圆为方

构造一个正方形, 使得其面积为给定的圆的面积: 这等价于 $\sqrt{\pi}$ 是否可构造? 显然是不可以的, 因为 π 在 $\mathbb{Q}$ 上超越.

5.1.2 倍立方体

构造一个立方体, 使得其体积为给定立方体的二倍, 这等价于 $\sqrt[3]{2}$ 是否可构造? 也是不可以的, 因为 $[\mathbb{Q}\sqrt[3]{2} : \mathbb{Q}] = 3$, 不是 2^n.

5.1.3 三等分角

给定角 θ, 三等分角即等价于构造 $\cos\theta/3$, 我们有如下的三角公式:

$$\cos\theta = 4\cos^3\theta/3 - 3\cos\theta/3$$

即等价于构造 $4x^3 - 3x - a = 0$ 的根, 我们给出下面的一些例子, 来说明这并非总是可以构造的:

例子. 如果 $a=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, 则此时是不可构造的, 因为等价于构造 $8x^3-6x-1=0$ 这个不可约多项式的根, 这是三次扩张.

例子. 如果 $a=\cos\frac{\pi}{4}$, 此时是可以构造的, 此时下述多项式:

$$4x^3-6x-\frac{\sqrt{2}}{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$$

是可约的, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是其一个根, 因此实际上此时是二次扩张.

5.1.4 尺规作正 n 边形状问题

正 n 边形是否尺规可作等价于 $\theta_n=2\pi/n$ 是否可构造, 我们有下述引理:

引理 5.1.8. 正 n 边形尺规可作等价于 $[\mathbb{Q}(\xi_n):\mathbb{Q}]=2^n$.

证明: 令 $\xi_n=\cos\theta_n+\sqrt{-1}\sin\theta_n$, 只需要注意到:

$$[\mathbb{Q}(\xi_n):\mathbb{Q}(\theta_n)]\leq 2$$

即可. □

定理 5.1.9. 正 n 边形尺规可作等价于 n 有如下分解:

$$n=2^kp_1\dots p_k$$

其中 p_k 是费马素数.

证明: 由于 $[\mathbb{Q}(\xi_n):\mathbb{Q}]=\phi(n)$, 令 $n=2^kp_1^{r_1}\dots p_s^{r_s}$, 则

$$\phi(n)=2^{k-1}(p_1-1)p^{r_1-1}\dots(p_s-1)p^{r_s-1}$$

若为 2 的幂次, 应该有 $r_i\leq 1$, p_i 形如 2^m+1, 但是形如 2^m+1 的素数一定是 $2^{2^n}+1$ 的形式, 即为费马素数. □

注记. 有关费马素数, 是形如 $2^{2^n}+1$ 的素数, 实际上, 现在对费马素数的所知仍然很少, 已知的五个费马素数为 $n=0,1,2,3,4$ 的情况, 对于 $n>4$ 的情况, 所能验证的都不是素数, 但是否仅仅只有这五个费马素数, 还是一个猜想.

5.2 代数基本定理的证明

命题 5.2.1. 对于任何 p-群 G, 都存在 G_i 使得

$$G\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\dots\supseteq G_n=\{e\}$$

满足 $|G_i/G_{i+1}|=p$.

定理 5.2.2. 任何 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ 在 $\mathbb{C}$ 中都有根.

证明: 考虑 $f(x)\overline{f(x)} \in \mathbb{R}[x]$, 如果 $f(x)\overline{f(x)}$ 有复根 α, 那么 α 或 $\bar{\alpha}$ 是 $f(x)$ 的一个复根, 从而我们不妨在一开始就假设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. 记 $|G_f| = n$, 考虑 G_f 的西罗 2-子群 H, 那么 $[G_f : H]$ 是奇数, 从而根据伽罗瓦主定理对应到 $\mathbb{R}$ 的一个奇数次扩域 L, 然而任何奇数次多项式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 在 $\mathbb{R}$ 中都有根, 从而 $L = \mathbb{R}$, 再根据伽罗瓦主定理有 $G_f = H$, 即 $|G_f| = 2^n$.

根据命题5.2.1可知存在 G_i 使得

$$G_f \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{e\}$$

使得 $|G_i/G_{i+1}| = 2$. 注意到 $\mathbb{R}$ 的任何二次扩张都同构于 $\mathbb{C}$, 从而 G_1 对应的 $\mathbb{R}$ 的扩域就是 $\mathbb{C}$, 但是 $\mathbb{C}$ 没有非平凡的二次扩域, 从而 $K_2 = \cdots = K_n = \mathbb{C}$, 从而 $f(x)$ 的分裂域就是 $\mathbb{C}$, 即 $f(x)$ 有复根. □

5.3 根式可解问题

在本节中, 所有的域的特征都是 0.

5.3.1 根式扩张与根式可解

定义 5.3.1. 有限扩张 E/F 被称为**根式扩张** (radical extension), 如果存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, 使得:

(1) $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

(2) $\alpha_1^{m_1} \in F$, 并且对 $2 \leq i \leq n$ 有 $\alpha_i^{m_i} \in F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$.

即:

$$F \subseteq F(\alpha_1) \subseteq \cdots \subseteq F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

其中每一步被称为**单根式扩张** (simple radical extension).

注记. 根式扩张不一定是伽罗瓦扩张, 例如 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

定义 5.3.2. $f(x) \in F[x]$ 被称为**根式可解** (solvable by radical), 如果其分裂域包含在 F 的某个根式扩张中.

命题 5.3.3.

(1) 如果 $F \subseteq E \subseteq K$, 其中 K/F 是根式扩张, 则 K/E 也是根式扩张, 但 E/F 不一定是根式扩张[1].

(2) 如果 $K/E, E/F$ 都是根式扩张, 则 K/F 也是根式扩张.

(3) 如果 $E/F, E'/F$ 都是根式扩张, 则 EE'/F 也是根式扩张.

(4) 如果 E/F 是根式扩张, 则其伽罗瓦闭包 K/F 也是根式扩张.

证明: (1). 如果 K/F 是根式扩张, 那么有 $K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 满足定义里的要求, 那么自然有 $K = E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 即 K/E 也是根式扩张.

(2). 如果 $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), K = E(\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_m)$, 那么 $K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, 即 K/F 是根式扩张.

[1] 这条性质与正规扩张类似.

(3). 假设 $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 那么 $EE' = E'(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 并且 $\alpha_i^{m_i} \in F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}) \subseteq E'(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$, 从而 EE'/E' 是根式扩张, 从而根据 (2) 可知 EE'/F 也是根式扩张.

(4). 假设 $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i^{m_i} \in F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$, 那么 Galois 闭包 K 由所有 $P_{\alpha_i, F}$ 的根生成. 令 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$, 任取 $\tau \in G$, 那么 $\tau(E) = F(\tau(\alpha_1), \ldots, \tau(\alpha_n))$ 在 F 上也是根式扩张, 因为 $\tau(\alpha_i)^{m_i} = \tau(\alpha_i^{m_i}) \in \tau(F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})) = F(\tau(\alpha_1), \ldots, \tau(\alpha_{i-1}))$. 从而根据 (3) 有 $K = \prod_\tau \tau(E)$ 是根式扩张. □

5.3.2 可解群及其性质

本节中的群 G 都是有限群.

定义 5.3.4. 群 G 的**换位子群** (commutator group), 定义为由形如 $ghg^{-1}h^{-1}$, 其中 $g, h \in G$ 生成的子群, 记作 $[G, G]$.

记号 5.3.5. 给定群 G, 记 $G^{(1)} = [G, G]$, 以及 $G^{(i)} := [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}], i \geq 2$.

命题 5.3.6. 给定群 G, 有

(1) $[G, G]$ 是 G 的正规子群.

(2) $G/[G, G]$ 是阿贝尔群.

(3) 对于群同态 $\varphi: G \to H$, 如果 H 是阿贝尔群, 那么 $[G, G] \subseteq \ker \varphi$.

定义 5.3.7. 群 G 被称为**可解群** (solvable group), 如果 $G^{(n)} = \{e\}$ 对某个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成立.

命题 5.3.8. 如果 G 是非交换的单群, 则 G 不是可解群.

证明: 注意到 $G = G^{(1)} = \cdots = G^{(n)}$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成立, 从而 G 不是可解群. □

推论 5.3.9. $A_n, n \geq 5$ 时不是可解群.

命题 5.3.10. 如下叙述等价:

(1) 群 G 可解.

(2) 如果 G 存在一个子群链 $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{e\}$, 满足 $G_{i+1} \triangleleft G_i$, 并且 G_i/G_{i+1} 是阿贝尔群.

(3) 如果 G 存在一个子群链 $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{e\}$, 满足 $G_{i+1} \triangleleft G_i$, 并且 G_i/G_{i+1} 是素数阶循环群.

推论 5.3.11. p-群是可解群.

证明: 根据命题5.2.1即可. □

命题 5.3.12.

(1) 如果 G 是可解群, $H < G$, 则 H 也是可解群.

(2) 如果 G 是可解群, $H \triangleleft G$, 那么 G/H 也是可解群.

(3) 如果 $H \triangleleft G$, 且 $H, G/H$ 都是可解群, 则 G 也是可解群.

(4) 如果 G 是可解群, 则 G 有个极大正规子群, 其指数为素数 p.

5.3.3 根式可解与可解群

命题 5.3.13. *如果 E/F 是有限伽罗瓦根式扩张, 则 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 是可解群.*

证明: 假设 $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i^{m_i} \in F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$, 我们对 n 做归纳法. 当 $n = 1$ 时, $E = F(\alpha_1)$, 并且 $\alpha_1^{m_1} \in F$, 注意到 $E \subseteq F(\alpha_1, \xi_{m_1})$, 从而根据命题5.3.12的 (1) 可知只需要证明 $\mathrm{Gal}(F(\alpha_1, \xi_{m_1})/F)$ 是可解群即可. 考虑下图

$$\begin{array}{c} F(\alpha_1, \xi_{m_1}) \\ | \\ F(\xi_{m_1}) \\ | \\ F \end{array}$$

由于 $F(\xi_{m_1})$ 是 m_1 次本元多项式的分裂域, 从而 $F(\xi_{m_1})/F$ 是伽罗瓦扩张. 根据伽罗瓦对应, $\mathrm{Gal}(F(\alpha_1, \xi_{m_1})/F(\xi_{m_1}))$ 是 $\mathrm{Gal}(F(\alpha_1, \xi_{m_1})/F)$ 的正规子群, 并且

$$\mathrm{Gal}(F(\xi_{m_1})/F) \cong \mathrm{Gal}(F(\alpha_1, \xi_{m_1})/F)/\mathrm{Gal}(F(\alpha_1, \xi_{m_1})/F(\xi_{m_1}))$$

那么根命题5.3.12的 (3), 我们只需要证明 $\mathrm{Gal}(F(\xi_{m_1})/F)$ 和 $\mathrm{Gal}(F(\alpha_1, \xi_{m_1})/F(\xi_{m_1}))$ 是可解群即可. 考虑如下图

$$\begin{array}{ccc} & F(\xi_{m_1}) & \\ \mathbb{Q}(\xi_{m_1}) & & F \\ & \mathbb{Q} & \end{array}$$

我们有嵌入 $\mathrm{Gal}(F(\xi_{m_1})/F) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{m_1})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z})^\times$, 从而 $\mathrm{Gal}(F(\xi_{m_1})/F)$ 是阿贝尔群, 从而是可解群. 另一方面, 任取 $\tau \in \mathrm{Gal}(F(\alpha_1, \xi_{m_1})/F(\xi_{m_1}))$, τ 完全由其在 α_1 上的值决定, 由于 $x^{m_1} - \alpha_1^{m_1}$ 的所有根是 $\alpha_1\xi_{m_1}^k$, 其中 $0 \le k \le m_1 - 1$, 因此 $\tau(\alpha_1) = \alpha_1\xi_{m_1}^k$, 并且由于 $\tau(\xi_{m_1}) = \xi_{m_1}$, 从而可知 $\mathrm{Gal}(F(\alpha_1, \xi_{m_1})/F(\xi_{m_1}))$ 是一个阿贝尔群, 从而是个可解群, 至此我们解决了 $n = 1$ 的情况. 对于一般情况, 我们考虑下图

$$\begin{array}{ccc} E = F(\alpha_1)(u_2, \ldots, \alpha_n) & \text{———} & E(\xi_{m_1}) \\ | & & | \\ F(\alpha_1) & \text{———} & F(\alpha_1, \xi_{m_1}) \\ | & \diagup & \\ F & & \end{array}$$

首先我们有 $\mathrm{Gal}(F(\alpha_1, \xi_{m_1})/F)$ 是可解群, 并且根据归纳假设 $\mathrm{Gal}(E(\xi_{m_1})/F(\alpha_1, \xi_{m_1}))$ 是可解群, 根据命题5.3.12的 (3) 有 $\mathrm{Gal}(E(\xi_{m_1})/F)$ 是可解群, 再根据命题5.3.12的 (1) 有 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 是可解群. □

引理 5.3.14 (Kummer)**.** *假设域 F 包含 p 次单位根 ξ_p, 其中 p 是素数. 域扩张 E/F 是 p 次伽罗瓦扩张当且仅当 $E = F(\alpha)$, 其中 $\alpha \notin F, \alpha^p \in F$.*

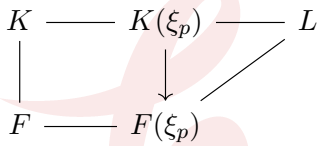
证明: 假设 E/F 是 p 次伽罗瓦扩张, 即 $\mathrm{Gal}(E/F)=\langle\sigma\rangle$ 是一个 p 阶循环群. 将 E 视作 p 维 F-线性空间, $\sigma\colon E\to E$ 是 F-线性变换, 满足 $\sigma^p=1$. 由于 F 含有 ξ_p, 从而 σ 可对角化, 并且特征值为 $\{1,\xi_p,\dots,\xi_p^{p-1}\}$, 考虑 ξ_p 对应的特征向量 α, 那么

$$\sigma(\alpha^i)=\sigma(\alpha)^i=(\xi_p\alpha)^i=\xi_p^i\alpha^i$$

对任意 $0\le i\le p-1$ 成立, 从而 $\{1,\alpha,\dots,\alpha^{p-1}\}$ 构成了一组 E/F 的基, 并且 $\alpha^p\in F$, 从而 α 对应的极小多项式为 $x^p-\alpha^p$, 从而 $E=F(\alpha)$. 另一方面, 假设 $E=F(\alpha),\alpha\notin F,\alpha^p\in F$, 那么 E 是 $x^p-\alpha^p$ 的分裂域, 下面只需证明 $[E:F]=p$ 即可: 考虑 $\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)$, 其中 $\sigma(\alpha)=\xi_p\alpha$, 可知 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 在 $\{\alpha,\xi_p\alpha,\dots,\xi_p^{p-1}\alpha\}$ 上的作用是可递的, 从而 $x^p-\alpha^p$ 是 α 的极小多项式, 从而 $[E:F]=p$. □

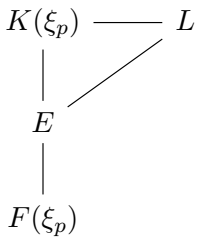
定理 5.3.15. *K/F 是有限伽罗瓦扩张, 并且 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 是可解群, 那么 K 包含在 F 的某个根式扩张中.*

证明: 我们对 $[K:F]=n$ 进行归纳. 假设 $n=2$, 由于任何二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有求根公式, 从而 E/F 本身就是根式扩张. 假设命题对 $[K:F]\le n-1,n\ge 2$ 时成立, 考虑如下图



由于 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 是可解群, 根据命题5.3.12的 (4) 可知其存在一个指数是素数 p 的正规子群, 我们将 p 次本原单位根 ξ_p 添加到 E 中, 那么由于 $F\subseteq K$, 则 $[K(\xi_p):E]\le[F(\xi_p):F]$, 因此 $[K(\xi_p):K]\le n$. 我们分以下两种情况考虑:

1. 如果 $[K(\xi_p):F(\xi_p)]<n$, 那么根据归纳假设 $K(\xi_p)$ 包含在某个 F 的根式扩张 L 中, 进而 L/F 是根式扩张, 并且包含 K.
2. 如果 $[K(\xi_p):K(\xi_p)]=n$. 我们令 $E=K(\xi_p)^H$, 其中 H 是 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 指数为 p 的正规子群. 考虑下图



由于 H 是正规子群, 从而 $E/F(\xi_p)$ 是次数为 p 的伽罗瓦扩张, 那么根据引理5.3.14可知其为单根式扩张, 再根据归纳假设有 $K(\xi_p)/E$ 包含在某个根式扩张 L/E 中, 因此 $L/F(\xi_p)$ 也是根式扩张.

□

定理 5.3.16. *$f(x)\in F[x]$ 根式可解当且仅当 G_f 是可解群.*

证明: 如果 $f(x)$ 根式可解, 因此分裂域 E 包含在 F 的某个根式扩张 K 中, 并且不妨假设 K/F 是伽罗瓦的, 因为根据命题5.3.3的 (4) 根式扩张的伽罗瓦闭包依然是根式扩张. 根据命

题5.3.13有 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 是可解群, 则 $G_f = \mathrm{Gal}(E/F) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(K/F)$, 也是一个可解群. 另一方面, 根据定理5.3.15即可. □

5.4 求根公式

5.4.1 五次及以上方程无求根公式

给定环 R, S_n 在 $R[x_1, \ldots, x_n]$ 上有如下的作用

$$\sigma \cdot f(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

定义 5.4.1. S_n 作用下不变的子环 $R[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ 中的元素称为 R 系数的**对称多项式** (symmetric polynomial).

例子 (初等对称多项式)**.**

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\ s_2 &= \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \\ &\vdots \\ s_n &= x_1 \ldots x_n \end{aligned}$$

定理 5.4.2 (对称多项式基本定理)**.**

$$\begin{aligned} \varphi \colon R[y_1, \ldots, y_n] &\to R[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} \\ g(y_1, \ldots, y_n) &\mapsto g(s_1, \ldots, s_n) \end{aligned}$$

则 φ 是环同构.

证明: φ 是满射: 任取 $f \in R[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$, 那么 $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n-1}]^{S_{n-1}}$, 根据归纳假设存在 $n-1$ 元多项式 g 使得

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

令 $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - g(s_1, \ldots, s_{n-1})$, 如果 $h \equiv 0$, 那么证明结束. 如果 $h \neq 0$, 根据构造有 $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$, 即 x_n 整除 $h(x_1, \ldots, x_n)$, 并且注意到 $h(x_1, \ldots, x_n)$ 是 S_n 不变的, 从而任取 $1 \le i \le n$, 都有 $x_i \mid h(x_1, \ldots, x_n)$, 因此不妨假设

$$h(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n H(x_1, \ldots, x_n)$$

此时 $\deg H < \deg h$, 再对次数做归纳则可知 $H(x_1, \ldots, x_n)$ 是初等对称多项式的组合, 从而 $h(x_1, \ldots, x_n)$ 也是.

φ 是单射: 假设 $\varphi(g) = 0$, 即 $g(s_1, \ldots, s_n) = 0$, 特别地有 $g(s_1, \ldots, s_{n-1}, 0) = 0$. 根据归纳假设有 $g(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) = 0$, 从而 $y_n \mid g(y_1, \ldots, y_n)$, 不妨假设

$$g(y_1, \ldots, y_n) = y_n h(y_1, \ldots, y_n)$$

利用 $\varphi(g)=0$ 有

$$x_1\dots x_n\varphi(h)=0$$

即 $\varphi(h)=0$, 并且 $\deg h<\deg g$, 再对次数做归纳即可. □

推论 5.4.3.

$$F(y_1,\dots,y_n)\cong F(x_1,\dots,x_n)^{S_n}$$

是域同构.

证明: 首先 $\varphi\colon F[x_1,\dots,x_n]\to F[x_1,\dots,x_n]^{S_n}$ 给出了分式域之间的同态

$$\begin{aligned}\varphi\colon F(y_1,\dots,y_n)&\to F(x_1,\dots,x_n)^{S_n}\\ \frac{f(y_1,\dots,y_n)}{g(y_1,\dots,y_n)}&\mapsto\frac{f(s_1,\dots,s_n)}{g(s_1,\dots,s_n)}\end{aligned}$$

下面只需要证明是满射: 任取 $\tau=\dfrac{f(x_1,\dots,x_n)}{g(x_1,\dots,x_n)}\in F(x_1,\dots,x_n)^{S_n}$, 考虑

$$r=\frac{f(x_1,\dots,x_n)\prod_{\sigma\in S_n\setminus\{\mathrm{id}\}}\sigma g}{\prod_{\sigma\in S_n}\sigma g}$$

由于 $\prod_{\sigma\in S_n}\sigma g$ 以及 r 都在 $F(x_1,\dots,x_n)^{S_n}$ 中, 从而

$$r\prod_{\sigma\in S_n}\sigma g\in F[x_1,\dots,x_n]\cap F(x_1,\dots,x_n)^{S_n}=F[x_1,\dots,x_n]^{S_n}$$

□

令 $K=F(x_1,\dots,x_n)$ 以及 $S_n\subseteq\mathrm{Aut}_F(K)$, 那么 $K^{S_n}=F(s_1,\dots,s_n)$ 并且 K/K^{S_n} 是伽罗瓦扩张, 并且实际上 K 是

$$x^n-s_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^ns_n=0$$

的分裂域. 即我们找到了一个多项式 $f(x)$, 使得其伽罗瓦群 $G_f=S_n$. 由于我们知道 A_n 在 $n\geq 5$ 的时候不可解, 从而 S_n 在 $n\geq 5$ 的时候不可解, 即不存在五次及以上的多项式的求根公式.

注记. 对于素数 p, 伽罗瓦群为 S_p 的多项式的存在性更容易一些.

定理 5.4.4. *p 是素数, f 是 $\mathbb{Q}$ 上恰有两个虚根的不可约 p 次多项式, 则 $G_f\cong S_p$.*

证明: 首先复共扼 $c\colon a+b\sqrt{-1}\mapsto a-b\sqrt{-1}$ 属于 G_f, 对应于一个对换. 并且根据柯西定理, 对于一个有限群, 如果素数 p 整除群的阶数, 则其中包含一个 p 阶的元素, 这对应于 S_p 中的一个 p 轮换. 根据引理4.3.5可知 $G_f\cong S_p$. □

5.4.2 低次方程求根公式

给定三次多项式 $x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3$, 有伽罗瓦对应如下

$$\begin{array}{ccc} K = F(x_1, x_2, x_3) & & \{\mathrm{id}\} \\ | & & | \\ L & & A_3 \\ | & & | \\ E = F(s_1, s_2, s_3) & & S_3 \end{array}$$

即 L 是 K 的 A_3 不变子域. 令

$$D = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

注意到 D 在 A_3 下不变, 并且 $[E(\sqrt{D}) : E] = [L : E] = 2$, 从而有 $L = E(\sqrt{D})$. 取 $\sigma \in A_3 = \mathrm{Gal}(K/L)$, 其中

$$\sigma(x_1) = x_2$$
$$\sigma(x_2) = x_3$$
$$\sigma(x_3) = x_1$$

假设 F 中有三次单位根 ξ_3, 考虑

$$t_1 = x_1 + \xi_3 x_2 + \xi_3^2 x_3$$
$$t_2 = x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_3^2 x_1$$

直接验证则有 $t_1^3, t_2^3 \in E(\sqrt{D})$, 如果我们将 t_1^3, t_2^3 用 $\sqrt{D}$ 以及 s_1, s_2, s_3 表示出来, 并注意到 $\sqrt{D}$ 可以写成 s_1, s_2, s_3 的组合, 因此我们可以给出三次方程的求根公式.

注记. 四次方程的求根公式也可由上述步骤给出.

5.5 Kummer 理论

在本节中[2], 域 F 总是满足如下两条假设:

(1) F 包含 n 次本原单位根 ξ_n, 并用 μ_n 表示全体单位根组成的群.

(2) $x^n - 1$ 在 F 中有 n 个不同的根.

引理 5.5.1. 令 $a \in F^\times$, m 是 a 在 $F^\times/(F^\times)^n$ 中的阶数, 那么 $x^n - a$ 的每个不可约因子都是 $x^m - b, b \in F$ 的形式.

证明: 即证明如果 α 是 $P(x) = x^n - a$ 在 $\overline{F}$ 中的根, 则 $P_{\alpha,F} = x^m - b, b \in F$ 的形式. 首先, 由于 $a^m \in (F^\times)^n$, 因此存在 $b \in F^\times$, 使得 $a^m = b^n$. 而 $\alpha^n = a$, 因此 $\alpha^{nm} = b^n$, 即 $a^m/b \in \mu_n \subseteq F$. 由于 $b \in F^\times$ 我们有 $\alpha^m \in F^\times$, 因此 $P_{\alpha,F} \mid x^m - b$, 下面只需要证明 $\deg P_{\alpha,F} = m$ 即可. 不妨记 $\deg P_{\alpha,F} = d$, 由于 $P(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - \alpha\xi_n^i)$, 因此 $P_{\alpha,F} = \prod_{i\in S}(x - \alpha\xi_n^i)$, 其中 $|S| = d$. 将 $P_{\alpha,F}$ 展开, 考虑其常数项则有 $\alpha^d\xi_n^i \in F \implies \alpha^d \in F$. 因此:

$$a^d = (\alpha^n)^d = (\alpha^d)^n \in (F^\times)^n$$

[2]对于一般的域也有 Kummer 理论, 但为了方便起见, 我们在这种域上考虑.

因此 $m \mid d$, 再加上 $d \leq m$, 从而有 $m = d$. □

命题 5.5.2. *$E = F(\alpha)$, 其中 $\alpha^n = a \in F^\times$, 则 E/F 是 m 次循环扩张, 其中 m 是 a 在 $F^\times/(F^\times)^n$ 中的阶数.*

证明: 首先引理5.5.1可知 E/F 的扩张次数就是 m. 由于 $x^n - a$ 的所有根是 $\{\alpha\xi_n^i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ 是不同的, 进而 α 的极小多项式也没有重根, 从而 α 是 F 上的可分元, 根据定理3.2.9可知 E/F 是可分扩张; 并且由于 E 是 $x^n - a$ 的分裂域, 从而根据定理3.1.2可知 E 是正规扩张, 从而 E/F 是伽罗瓦扩张. 最后我们来证明其为循环扩张: 考虑映射

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{Gal}(E/F) &\to \mu_n \\ \sigma &\mapsto \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \end{aligned}$$

这定义了一个群同态, 因为:

$$\varphi(\sigma\tau) = \frac{\sigma\tau(\alpha)}{\alpha} = \frac{\sigma\varphi(\tau)}{\alpha} = \varphi(\tau)\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$$

并且是单射, 因为如果 $\varphi(\sigma) = 1$, 即 $\sigma(\alpha) = \alpha$, 这意味着 σ 固定 E, 从而根据定理4.2.1, 即伽罗瓦对应可知 $\sigma = \mathrm{id}$. 因此 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 嵌入到循环群 μ_n 中, 也是一个循环群. □

定理 5.5.3 (Kummer)**.** *给定有限伽罗瓦扩张 E/F, 其伽罗瓦群为 n 阶循环群 $\langle\sigma\rangle$, 则 $E = F(\alpha), \alpha^n \in F^\times$.*

证明: 根据引理4.1.7存在 $\gamma \in F^\times$ 使得

$$\alpha := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_n^i \sigma^i(\gamma) \neq 0$$

从而 $\sigma(\alpha) = \xi_n^{-1}\alpha$, 进而 $\sigma(\alpha^n) = (\sigma(\alpha))^n = \alpha^n$. 下面说明 $E = F(\alpha)$, 只需要证明 $\mathrm{Gal}(E/F(\alpha)) = \{\mathrm{id}\}$. 如果存在 $\tau = \sigma^k \in \mathrm{Gal}(E/F(\alpha))$, 则 $\tau(\alpha) = \sigma^k(\alpha) = \xi_n^k\alpha$, 那么 $\xi_n^k = 1$, 而 ξ_n 是本原单位根, 因此 $k = n$, 即 $\tau = \mathrm{id}$. □

推论 5.5.4.

$$\{F \text{ 的 } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ 扩张}\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{a \in F^\times/(F^\times)^n, \text{其中 } a \text{ 的阶数为 } n\}$$

证明: 命题5.5.2给出了从左往右的对应, 定理 5.5.3 说明这个对应是满射, 现在只需证明对应是单射: 假设 $F(\alpha) = F(\beta)$ 是 F 的两个 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 扩张, 其中 $\alpha^n = a \in F^\times, \beta^n = b \in F^\times$, 我们要证明 a, b 在 $F^\times/(F^\times)^n$ 中的阶数相同. 根据命题5.5.2的证明过程, 我们可以定义映射:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(\sigma) &= \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \\ \varphi_\beta(\sigma) &= \frac{\sigma(\beta)}{\beta} \end{aligned}$$

并且由构造可知 $\dfrac{\sigma(\alpha)}{\alpha}, \dfrac{\sigma(\beta)}{\beta}$ 都是 n 次本原单位根, 因此存在整数 k 满足 $(k, n) = 1$ 使得

$$\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} = \left(\frac{\sigma(\beta)}{\beta}\right)^k$$

即 $\sigma(\alpha\beta^{-k}) = \alpha\beta^{-k}$, 这意味着 $\alpha\beta^{-k} \in F^\times$, 并且注意到 $ab^{-k} = (ab^{-k})^n \in (F^\times)^n$, 从而在 $F^\times/(F^\times)^n$ 中 $a = b^k$, 由于 $(k, n) = 1$ 可知 a, b 的阶数相同. □

定义 5.5.5. n 次扩张 E/F 被称为 **Kummer 扩张** (Kummer extension), 如果其为一个阿贝尔扩张, 并且其伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 的指数[3]整除 n.

定理 5.5.6. *E/F 是 Kummer 扩张, 当且仅当 $E = F(\sqrt[n]{a_1}, \dots, \sqrt[n]{a_r}), a_i \in F^\times$.*

证明: 一方面, $F(\sqrt[n]{a_1}, \dots, \sqrt[n]{a_r})$ 是 $F(\sqrt[n]{a_i})$ 的复合, 因此:

$$\mathrm{Gal}(K/F) \hookrightarrow \prod_i \mathrm{Gal}(F(\sqrt[n]{a_i})/F)$$

是一个指数整除 n 的阿贝尔群. 另一方面, 考虑阿贝尔群的分解:

$$\mathrm{Gal}(E/F) \cong C_1 \times \cdots \times C_r$$

其中 C_r 是阶数乘除 n 的循环群, 令 $H_i = \prod_{j\neq i} H_j \times \{1\}$, 令 $K_j = K^{H_j}$, 那么 $\mathrm{Gal}(K_j/F) \cong C_i$, 因此 $K_j = F(\sqrt[n]{a_i})$, 下面只需要说明 $K = K_1 \dots K_r$ 即可, 下面以一个引理的形式证明, 因为这对一般情况来说也是正确的. □

引理 5.5.7. *K/F 是有限伽罗瓦扩张, 其伽罗瓦群为 $G = G_1 \times \cdots \times G_r$, 则 $K = K_1 \dots K_r$, 其中 $K_j = K^{H_j}, H_j = \prod_{i\neq j} G_i \times \{1\}$*

证明: 根据归纳法, 只需要证明 $r = 2$ 的情况即可: 如果 $K_1/F, K_2/F$ 都是伽罗瓦扩张, 则 $[K_1K_2 : K_2] = [K_1 : K_1 \cap K_2]$, 而这里 $K_1 \cap K_2 = F$, 因此 $[K_1K_2 : F] = [K_1 : F][K_2 : F] = |H_1||H_2| = |G|$, 因此 $K = F_1F_2$. □

5.6 正规基定理

定理 5.6.1 (正规基定理)**.** *给定有限伽罗瓦扩张 E/F, 则存在 E/F 的一族正规基, 即存在 $\alpha \in E^\times$, 使得 $\{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{Gal}(E/F)\}$ 构成了 E/F 的一族基.*

[3]exponent, 指群中所有元素阶的最小公倍数.

第六章　伽罗瓦上同调与希尔伯特 90

6.1　范与迹

定义 6.1.1. E/F 是有限扩张, 对于 $\alpha \in E$, 其**范数** (norm)定义为 F-线性映射 $m_\alpha(x) = \alpha x$ 的行列式, 即

$$\mathrm{N}_{E/F}(\alpha) = \det(m_\alpha)$$

其**迹** (trace)定义为

$$\mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha) = \mathrm{trace}(m_\alpha)$$

命题 6.1.2.

(1) $\mathrm{N}_{E/F}$ 是可乘的.

(2) 如果 $a \in F$, 则 $\mathrm{N}_{E/F}(a\alpha) = a^{[E:F]}\,\mathrm{N}_{E/F}(\alpha)$.

(2) $\mathrm{Tr}_{E/F}$ 是可加的.

(4) 如果 $a \in F$, 则 $\mathrm{Tr}_{E/F}(a\alpha) = a\,\mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha)$.

(5) 如果 $\alpha \in F$, 则

$$\mathrm{N}_{E/F}(\alpha) = \alpha^{[E:F]}$$
$$\mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha) = [E:F]\alpha$$

证明: 线性代数. □

引理 6.1.3. 如果 $F \subseteq E \subseteq K, \alpha \in E$, 则

$$\mathrm{N}_{K/F}(\alpha) = \mathrm{N}_{E/F}(\alpha)^{[K:E]}$$
$$\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha) = [K:E]\,\mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha)$$

证明: 假设 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是 E/F 的一组基，$\{y_1, \ldots, y_n\}$ 是 K/E 的一组基, 那么根据线性代数的结果 $\{x_i y_j\}$ 是 K/F 的一组基. 如果 $A \in M_{n\times n}(F)$ 是 m_α 在 E/F 上对应的矩阵, 即

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

那么则有

$$\alpha\begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_1 \\ \vdots \\ x_ny_1 \\ x_1y_2 \\ \vdots \\ x_ny_2 \\ \vdots \\ x_ny_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_1 \\ \vdots \\ x_ny_1 \\ x_1y_2 \\ \vdots \\ x_ny_2 \\ \vdots \\ x_ny_m \end{pmatrix}$$

从而有 $\mathrm{N}_{K/F}(\alpha) = \det(A)^m = N_{E/F}(\alpha)^{[K:E]}$ 以及 $\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha) = m\,\mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha) = [K:E]\,\mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha)$. □

注记. 实际上, 上述引理是如下传递性的特殊情况.

$$\mathrm{N}_{K/F} = \mathrm{N}_{K/E} \circ \mathrm{N}_{E/F}$$
$$\mathrm{Tr}_{K/F} = \mathrm{Tr}_{K/E} \circ \mathrm{Tr}_{E/F}$$

引理 6.1.4. 给定 $E = F(\alpha)$, 如果 $P_{\alpha,F}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, 则

$$\mathrm{N}_{E/F}(\alpha) = (-1)^n a_0$$
$$\mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha) = -a_{n-1}$$

证明: 选取基 $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ 即可. □

命题 6.1.5. 如果 E/F 是有限扩张, 任取 $\alpha \in K$, 则

$$\mathrm{N}_{E/F}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_F(E,\bar{F})} \sigma(\alpha)^{[E:F]_i}$$
$$\mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha) = [E:F]_i \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}_F(E,\bar{F})} \sigma(\alpha)$$

其中 $[K:F]_i$ 为扩张的纯不可分次数[1].

证明: 下面只对范数证明, 迹的证明是类似的: 任取 $\alpha \in E$, 考虑域扩张 $F \subseteq F(\alpha) \subseteq E$, 根据引理6.1.3有:

$$\mathrm{N}_{E/F}(\alpha) = \mathrm{N}_{F(\alpha)/F}(\alpha)^{[E:F(\alpha)]}$$

而考虑满射:

$$\mathrm{Hom}_F(E,\bar{F}) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_F(F(\alpha),\bar{F})$$

其每个纤维都包含 $[E:F(\alpha)]$ 个元素: 这是因为 $\mathrm{Hom}_F(E,\bar{F}) = \mathrm{Hom}_F(E_s,\bar{F})$ 中恰有 $[E:F]_s$ 个元素, $\mathrm{Hom}_F(F(\alpha),\bar{F}) = \mathrm{Hom}_F(F(\alpha)_s,\bar{F})$ 中恰有 $[F(\alpha):F]_s$ 个元素. 因此:

$$\Big(\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_F(K,\bar{F})} \sigma(\alpha)\Big)^{[K:F]_i} = \prod_{\mathrm{Hom}_F(F(\alpha),\bar{F})} \sigma(\alpha)^{[K:F(\alpha)]_s[K:F]_i}$$

[1] 见定义3.3.6.

由于 $[K:F(\alpha)]=[K:F(\alpha)]_i[K:F(\alpha)]_s$, 因此只需要证明:

$$N_{F(\alpha)/F}(\alpha)=\prod_{\mathrm{Hom}_F(F(\alpha),\bar{F})}\sigma(\alpha)^{[F(\alpha):F]_i}$$

即单扩张的情形, 而根据引理6.1.4直接可以得到想要的结果. □

推论 6.1.6. *E/F 是有限扩张, 则 E/F 可分当且仅当 $\mathrm{Tr}_{E/F}$ 是满射, 这也当且仅当 $\mathrm{Tr}_{E/F}$ 是非零映射.*

证明: 根据线性代数的知识, $\mathrm{Tr}_{E/F}$ 非零当且仅当其为满射是显然的. 如果 E/F 不可分, 假设 $\mathrm{char}\,F=p$, 则根据命题6.1.5可知 $\mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha)$ 中含有 $[K:F]_i$ 作为因子, 然而其为 p 的幂次, 因此 $\mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha)$ 恒为零映射. 另一方面, 如果 E/F 是可分的, 需要证明 $Tr_{E/F}$ 不是零映射, 这只需要寻找 α 使得:

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}_F(E,\bar{F})}\sigma(\alpha)\neq 0$$

□

命题 6.1.7. *E/F 是有限域上的有限扩张, 则 $\mathrm{N}_{E/F},\mathrm{Tr}_{E/F}$ 都是满射.*

证明: 不妨记 $E=\mathbb{F}_{q^d},F=\mathbb{F}_q$. 根据推论6.1.6可知 $\mathrm{Tr}_{E/F}$ 是满射, 因为有限域上的扩张都是可分的. 另一方面, 注意到 $\mathrm{N}_{E/F}$ 是可乘的, 并且 $E^\times$ 是循环群, 因此我们只需要考虑 $\mathrm{N}_{E/F}$ 在 x 上的取值即可:

$$\mathrm{N}_{E/F}(x)=\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\sigma(x)=x\cdot x^q\cdot\cdots\cdot x^{q^{d-1}}=x^{\frac{q^d-1}{q-1}}:=a\in\mathbb{F}_q^\times$$

并且 a 的阶为 $q-1$, 而注意到 $\mathbb{F}_q^\times$ 是一个 $q-1$ 阶循环群, 因此 a 是其一个生成元, 因此 $\mathrm{N}_{K/F}$ 也是满射. □

注记. 希尔伯特 90 问题断言: 如果 $\mathrm{Gal}(E/F)=\langle\sigma\rangle$ 是一个循环群, $\alpha\in E$ 满足其范数为 1, 则 $\alpha=\dfrac{\sigma(\beta)}{\beta}$, 对于某个 $\beta\in E^\times$ 成立. 对于有限域来说, 这个命题的答案可以显式的构造出来: 不妨沿用命题6.1.7中的记号, 如果 $\alpha=x^k$ 满足范数为 1, 则由于可乘性:

$$\mathrm{N}_{E/F}(\alpha)=\mathrm{N}_{E/F}(x)^k=a^k=1$$

因此 $q-1\mid k$, 不妨记作 $k=(q-1)r$, 则

$$\alpha=x^{(q-1)r}=\frac{x^{qr}}{x^r}=\frac{\sigma(x^r)}{x^r}$$

6.2 伽罗瓦上同调

定义 6.2.1. G 是一个有限群, 一个 G **模** (module)是指一个阿贝尔群 A 以及一个 G 作用 $\mu\colon G\times A\to A$ 满足:

(1) $1\cdot a=a$

(2) $gg'\cdot a=g\cdot(g'\cdot a)$

(3) $g\cdot(a+a')=g\cdot a+g\cdot a'$

并且 G 模之间的**态射** (morphism)为是满足 $f(ga)=gf(a), g\in G, a\in A$ 的群同态.

注记. 模论中的结果告诉我们阿贝尔群可以与 $\mathbb{Z}$ 模等同起来，则上述定义的 G 模可以与 $\mathbb{Z}[G]$ 模等同起来，其中 $\mathbb{Z}[G]=\{\sum_{g\in G}a_g g \mid a_g\in\mathbb{Z}\}$ 是 G 的群代数。

注记. 在上述定义中我们为了叙述方便假设 G 是乘法群, A 是加法群, 但这并不关键. 之后可能会根据情况需要而调整, 请读者留心.

例子. 给定有限伽罗瓦扩张 E/F, 令 $G=\mathrm{Gal}(E/F)$, 则 $G\curvearrowright(E,+), G\curvearrowright(E^\times,\times)$ 都是 G 模.

定义 6.2.2. 给定有限群 G 和群 A, 定义

$$C^n(G,A)=\begin{cases}A & n=0\\ \{f\colon G^n\to A\} & n\geq 1\end{cases}$$

并且定义 $\mathrm{d}^n\colon C^n(G,A)\to C^{n+1}(G,A)$ 如下:

$$\begin{cases}\mathrm{d}^0a(g)=ga-a\\ \mathrm{d}^nf(g_1,\dots,g_{n+1})=g_1f(g_2,\dots,g_{n+1})+\sum_{i=1}^n(-1)^if(g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+1})+(-1)^{n+1}f(g_1,\dots,g_n)\end{cases}$$

可以验证, (C,d) 构成了一个链复形, 因此定义**群的上同调** (group cohomology)[2]为:

$$H^n(G,A)=\frac{\ker\mathrm{d}^n}{\mathrm{im}\,\mathrm{d}^{n-1}}$$

例子. 当 $n=0$ 时, $H^0(G,A)=\ker\mathrm{d}^0$. 若 $a\in\ker\mathrm{d}^0$, 当且仅当对任意的 $g\in G$, 有 $ga-a=0$, 当且仅当 $a\in A^G$, 即:

$$H^0(G,A)=A^G$$

这实际上与一般的导出函子是一致的, 零阶导出函子就是其自身.

例子. 当 $n=1$ 时:

$$\mathrm{d}^1f(g_1,g_2)=g_1f(g_2)-f(g_1g_2)+f(g_2)$$

因此:

$$\ker\mathrm{d}^1=\{f\colon G\to A\mid f(g_1g_2)=f(g_1)+g_1f(g_2)\}$$

满足上述条件的函数也被称为**交错同态** *(crossed homomorphism)*. 特别地, 当 A 是一个平凡 G 模时, 一个交错同态就是群同态. 而

$$\mathrm{im}\,\mathrm{d}^0=\{f\colon G\to A\mid \text{存在 } a\in A \text{ 使得} f(g)=ga-a\}$$

注记. 如果 $f\colon G\to A$ 是一个交错同态, 则有下面的观察:

(1)

$$f(1)=f(1)+1\cdot f(1)=2f(1)\implies f(1)=0$$

即 f 将 G 中的单位元映成 A 中的单位元.

[2]在同调代数中, 函子 $A\to A^G=\{a\in A\mid ga=a\}$ 是左正合函子, 则 $H^n(G,A)$ 被定义为这个函子的右导出函子.

(2)

$$f(g^2) = f(g) + g \cdot f(g) = (1+g) \cdot f(g)$$

归纳地可以得到:

$$f(g^n) = (1 + g + \cdots + g^{n-1}) f(g)$$

假设 G 是一个 n 阶循环群, 生成元为 g, 则

$$0 = f(1) = f(g^n) = (1 + g + \cdots + g^{n-1}) f(g)$$

反之, 如果 $x \in A$ 满足 $(1+g+\cdots+g^{n-1})x = 0$, 则 $f(g) := x$ 定义了交错同态 $f\colon G \to A$.

定理 6.2.3 (Hilbert 90)**.** *给定有限伽罗瓦扩张 E/F, 则*

$$H^1(\mathrm{Gal}(E/F), E^\times) = 1$$
$$H^1(\mathrm{Gal}(E/F), E^+) = 0$$

前者称为乘法版本, 后者称为加法版本.

证明: 我们先来证明乘法版本: 令 $f\colon G \to E^\times$ 是交错同态, 那么任取 $\tau \in G, f(\tau) \neq 0$, 根据引理4.1.7可知 $\sum_{\tau\in G} f(\tau)\tau$ 是非零的, 即存在 $a \in E^\times$ 使得

$$\beta = \sum_{\tau\in G} f(\tau)\tau(a) \neq 0$$

因此

$$\begin{aligned}\sigma(\beta) &= \sum_{\tau\in G} \sigma f(\tau)(\sigma\tau)(\gamma) \\ &= \sum_{\tau\in G} f^{-1}(\sigma) f(\sigma\tau)(\sigma\tau)(\gamma) \\ &= f^{-1}(\sigma)\beta\end{aligned}$$

即 $f(\sigma) = \beta/\sigma(\beta)$. 令 $x = \beta^{=1}$, 则 $f(\sigma) = \sigma(x)/x$, 即任何交错同态都落在 $\mathrm{im}\,\mathrm{d}^0$ 中, 即上同调群平凡.

现在来证明加法版本: 令 $f\colon G \to E$ 是交错同态, 不妨假设 $f \not\equiv 0$, 那么任取 $\tau \in G, f(\tau)$ 不全为零, 同样根据 Dedekind 无关引理4.1.7有 $a \in E$ 使得

$$\beta = \sum_{\tau\in G} f(\tau)\tau(a) \neq 0$$

另外, 我们取 $b \in E^\times$ 满足 $\mathrm{Tr}_{E/F}(b) \neq 0$, 并且根据推论6.1.6, 这样的 b 是存在的. 令 $\mu = \sum_{\tau\in G} f(\tau)\tau$, 如果 $\mu(a+b) = 0$, 那么 $\mu(b) = -\mu(a) \neq 0$; 如果 $\mathrm{Tr}_{E/F}(a+b) = 0$, 那么 $\mathrm{Tr}_{E/F}(a) \neq 0$; 如果 $\mu(a+b) \neq 0$ 并且 $\mathrm{Tr}_{E/F}(a+b) \neq 0$, 那么我们用 $\mu(a+b)$ 代替 β. 如上分

析说明我们总可以找到 $a \in E^\times, \mu(a) \neq 0$ 并且 $\mathrm{Tr}_{E/F}(a) \neq 0$, 令 $\beta = \mu(a)$, 那么

$$\begin{aligned}\sigma(\beta) &= \sum_{\tau\in G} \sigma(f(\tau)\tau(a)) \\ &= \sum_{\tau\in G} \sigma(f(\tau))\sigma\tau(a) \\ &= \sum_{\tau\in G} (f(\sigma\tau) - f(\sigma))\sigma\tau(a) \\ &= \beta - f(\sigma)\sum_{\tau\in G} \sigma\tau(a) \\ &= \beta - f(\sigma)\,\mathrm{Tr}_{E/F}(a)\end{aligned}$$

则 $f(\sigma) = \mathrm{Tr}_{E/F}(a)^{-1}(\beta - \sigma(\beta))$, 取 $x = \dfrac{-\beta}{\mathrm{Tr}_{E/F}(a)}$, 则有 $f(\sigma) = \sigma(x) - x$. □

定理 6.2.4 (Hilbert 90)**.** *给定有限伽罗瓦扩张 E/F, 并且 $G = \mathrm{Gal}(E/F) = \langle\sigma\rangle$ 是 n 阶循环群, 则*

(1) *如果 $\alpha \in E^\times$ 满足范数为 1, 则 $\alpha = \dfrac{\sigma(\beta)}{\beta}, \beta \in E^\times$.*

(2) *如果 $\alpha \in E$ 满足迹为 0, 则 $\alpha = \sigma(\beta) - \beta, \beta \in E$.*

证明: 由于 (1) 和 (2) 的证明几乎完全一致, 在这里我们给出 (2) 的证明: 如果 $\alpha \in E$ 满足迹为零, 则

$$0 = \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha) = \sum_{\tau\in G} \tau\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i\alpha$$

考虑 $f\colon G \to K$, 定义为 $\sigma^i \mapsto (1 + \sigma + \cdots + \sigma^{i-1})x$, 可以直接验证[3]其为一个是一个交错同态. 根据定理6.2.3可知存在 $\beta \in E$ 使得 $f(\sigma^k) = \sigma^k(\beta) - \beta$ 对任意的 $0 \leq k \leq n-1$ 成立. 特别地, $\alpha = f(\sigma) = \sigma(\beta) - \beta$. □

推论 6.2.5. *令 $a, b \in \mathbb{Q}$, 满足 $a^2 + b^2 = 1$, 则存在 $c, d \in \mathbb{Z}$ 使得*

$$a = \frac{c^2 - d^2}{c^2 - d^2}, \quad b = \frac{-2cd}{c^2 + d^2}$$

证明: 考虑 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}$, 取 $a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 满足范数为 1, 则存在 $c + d\sqrt{-1}$ 使得:

$$a + b\sqrt{-1} = \frac{c - d\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}}$$

实部虚部对应即可. □

[3]这里用到了 α 的迹为零这个条件.

索引