

同调论

刘博文

目录

1 奇异同调	2
1.1 范畴与函子	2
1.1.1 范畴	2
1.1.2 协变函子	3
1.1.3 反变函子	3
1.2 链复形与链映射	4
1.2.1 链复形及其同调群	4
1.2.2 链映射及其诱导同态	4
1.2.3 链同伦	5
1.3 奇异同调群	5
1.3.1 奇异单形	5
1.3.2 奇异链复形与奇异同调群	6
1.3.3 简约奇异同调群	8
1.3.4 奇异同调的同伦不变性	9
1.3.5 与基本群的关系	10
1.3.6 \mathcal{U} 小奇异链	10
1.4 Mayer-Vietoris 序列	10
1.4.1 同调代数工具	10
1.4.2 Mayer-Vietoris 序列	11

1 奇异同调

1.1 范畴与函子

1.1.1 范畴

定义 1.1.1. 一个范畴 \mathcal{C} 是由以下要素组成:

1. 一类数学对象 $\text{ob}(\mathcal{C})$;
2. 对于每两个对象 X, Y , 给定了一个集合 $\text{Mor}(X, Y)$, 其元素称为从 X 到 Y 的射, 记 $f \in \text{Mor}(X, Y)$ 为 $f: X \rightarrow Y$;
3. 一个复合规则 $\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) \rightarrow \text{Mor}(X, Z)$, 记作 $(f, g) \mapsto g \circ f$, 并且满足以下性质:

- (1) 结合律: 对任意的 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$, 满足

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- (2) 单位律: 每个对象 X 有一个单位射 $\text{id}_X: X \rightarrow X$, 满足对任何 $f: Y \rightarrow X$ 有

$$\text{id}_X \circ f = f$$

对于任何 $g: X \rightarrow Z$, 满足

$$g \circ \text{id}_X = g$$

在下面的例子中, 都以 {对象, 射} 的形式展示:

例 1.1.1. 集合的范畴: {集合, 函数}

例 1.1.2. 光滑流形的范畴: {光滑流形, 光滑映射}

例 1.1.3. 拓扑空间的范畴: {拓扑空间, 连续映射}

例 1.1.4. 单纯复形的范畴: {单纯复形, 单纯映射}

例 1.1.5. 阿贝尔群的范畴: {阿贝尔群, 群同态}

例 1.1.6. 群的范畴: {群, 群同态}; 环的范畴: {环, 环同态}

例 1.1.7. 域 F 上线性空间的范畴: { F 线性空间, F 线性映射}

例 1.1.8. 域 F 上的代数的范畴: { F 代数, F 代数同态}

例 1.1.9. 拓扑空间的范畴: {拓扑空间, X 到 Y 映射的同伦类}

例 1.1.10. 带基点的拓扑空间的范畴: {带基点的拓扑空间, 保持基点的连续映射}

例 1.1.11. 取定拓扑空间 X , 考虑: { X 中的点, 从点 a 到点 b 的道路的同伦类, 其中 $a, b \in X$ }

1.1.2 协变函子

定义 1.1.2. 假设 \mathcal{C}, \mathcal{D} 是两个范畴，一个协变函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是一个对应：

1. \mathcal{C} 中的每个对象 X 对应于 \mathcal{D} 的一个对象 $F(X)$;
2. \mathcal{C} 的每个射 $f: X \rightarrow Y$ 对应于 \mathcal{D} 的一个射 $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ ，满足以下性质：

- (1) 复合律：对于射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ ，有

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

- (2) 单位律：对于任意对象 X ，有

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$$

例 1.1.12. 遗忘函子： $\{\text{拓扑空间}, \text{映射}\} \rightarrow \{\text{集合}, \text{函数}\}$

例 1.1.13. 基本群函子 $\pi_1: \{\text{带基点的拓扑空间}, \text{保持基点的连续映射}\} \rightarrow \{\text{群}, \text{群同态}\}$

例 1.1.14. 单纯同调函子 $H_*: \{\text{单纯复形}, \text{单纯映射}\} \rightarrow \{\text{阿贝尔群}, \text{群同态}\}$

1.1.3 反变函子

定义 1.1.3. 假设 \mathcal{C}, \mathcal{D} 是两个范畴，一个反变函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是一个对应：

1. \mathcal{C} 中的每个对象 X 对应于 \mathcal{D} 的一个对象 $F(X)$;
2. \mathcal{C} 的每个射 $f: X \rightarrow Y$ 对应于 \mathcal{D} 的一个射 $F(f): F(Y) \rightarrow F(X)$ ，满足以下性质：

- (1) 复合律：对于射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ ，有

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

- (2) 单位律：对于任意对象 X ，有

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$$

例 1.1.15. 对偶函子： $\{\text{域 } F \text{ 上的线性空间}, F \text{ 线性映射}\} \rightarrow \{\text{对偶空间}, \text{映射的拉回}\}$

例 1.1.16. 给定拓扑空间 X ，考虑 $C(X) = \{\text{连续函数 } X \rightarrow \mathbb{R}\}$ ，则有反变函子 $C^*: \{\text{拓扑空间}, \text{连续映射}\} \rightarrow \{\text{实代数}, \text{实代数同态}\}$

定义 1.1.4. 称一个射 $f: X \rightarrow Y$ 是可逆的, 如果存在射 $g: Y \rightarrow X$, 使得:

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

定义 1.1.5. 称两个对象是同构的, 如果它们之间存在一对互逆的射。

命题 1.1.1. 协变 (反变) 函子总是把单位射变成单位射, 把可逆射变成可逆射, 把同构的对象变成同构的对象。

1.2 链复形与链映射

1.2.1 链复形及其同调群

定义 1.2.1. 一个链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 是一串阿贝尔群 C_q 以及一串群同态 $\partial_q: C_q \rightarrow C_{q-1}$ (称为 q 维边缘算子), 满足 $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0, \forall q$, 写法上有:

$$\cdots \rightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \rightarrow \cdots$$

定义 1.2.2. 链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 的 q 维闭链群定义为 $Z_q(C) = \text{Ker } \partial_q$; q 维边缘链群定义为 $B_q(C) = \text{Im } \partial_{q+1}$

定义 1.2.3. 链复形 C 的 q 维同调群定义为 $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$, 其元素称为 C 的 q 维同调类。

约定 1.2.1. 我们约定, $z_q \in Z_q(C)$ 所代表的同调类为 $[z_q] \in H_q(C)$, 记 $H_*(C) = \{H_q(C)\}$, 实际上, $H_*(C)$ 是一个分次群。

定义 1.2.4. 分次群指的是一个阿贝尔群序列 $G_* = \{G_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$, 分次群同态 $\phi_*: G_* \rightarrow G'_*$ 指的是一个同态序列 $\{\phi_q: G_q \rightarrow G'_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$

定义 1.2.5. 设 C, D 是链复形, 一个链映射 $f: C \rightarrow D$ 是一串同态 $f_q: C_q \rightarrow D_q$, 满足:

$$\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q, \quad \forall q$$

即下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{q+1} & & \downarrow f_q & & \downarrow f_{q-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\partial_q} & D_{q-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

1.2.2 链映射及其诱导同态

命题 1.2.1. 链映射 $f: C \rightarrow D$ 诱导出同调群的同态 $f_*: H_*(C) \rightarrow H_*(D)$, 映射为 $f_*([z_q]) = [f_q(z_q)], \forall z_q \in Z_q(C)$

证明. 直接验证 □

至此, 我们得到了一个新的范畴, 即链复形的范畴 {链复形, 链映射}, 以及一个新的函子, 同调函子: {链复形, 链映射} \rightarrow {分次群, 分次群同态}。

1.2.3 链同伦

定义 1.2.6. 两个链映射 $f, g: C \rightarrow D$ 称为是链同伦的, 如果存在一串同态 $T = \{T_q: C_q \rightarrow D_{q+1}\}$, 如下面图表:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f_{q+1}-g_{q+1} & \swarrow T_q & \downarrow f_q-g_q & \swarrow T_{q-1} & \downarrow f_{q-1}-g_{q-1} \\ \dots & \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\partial_q} & D_{q-1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

使得对任意 q 满足 $\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q$, 称 T 为联结 f, g 得一个链同伦, 记作 $f \simeq g: C \rightarrow D$ 或者 $T: f \simeq g: C \rightarrow D$

定理 1.2.1. 假设 $f \simeq g: C \rightarrow D$, 则 $f_* = g_*: H_*(C) \rightarrow H_*(D)$, 即链同伦的链映射诱导出相同的同调群同态。

证明. 直接验证 □

命题 1.2.2. 链映射之间的链同伦关系是一个等价关系。

证明. □

定义 1.2.7. 两个链复形 C, D 称为是链同伦等价的, 如果存在链映射 $f: C \rightarrow D, g: D \rightarrow C$, 使得 $f \circ g \simeq \text{id}_D, g \circ f \simeq \text{id}_C$

命题 1.2.3. 链同伦等价诱导同调群的同构, 因而链同伦等价的链复形有同构的同调群。

证明. 显然 □

1.3 奇异同调群

1.3.1 奇异单形

定义 1.3.1. q 维标准单形 $\Delta_q = \{(x_0, x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=0}^q x_i = 1\}$

定义 1.3.2. 拓扑空间 X 中的 q 维奇异单形指的是一个连续映射 $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$

例 1.3.1. (线性奇异单形) C 是 \mathbb{R}^n 中的凸集, $c_0, c_1, \dots, c_q \in C$, 则有唯一的线性映射 $\Delta_q \rightarrow C$, 把顶点 e_0, \dots, e_q 映射成 c_0, \dots, c_q , 记为 $(c_0 c_1 \dots c_q): \Delta_q \rightarrow C$, 定义为 $\sum_i x_i e_i \mapsto \sum_i x_i c_i$

在下面的讨论中，我们取定拓扑空间 X

定义 1.3.3. X 的 q 维奇异链群 $S_q(X)$ 定义为以 X 中所有 q 维奇异单形为基生成的自由阿贝尔群，其元素称为 q 维奇异链，具有形式

$$c_q = k_1 \sigma_q^{(1)} + \cdots + k_r \sigma_q^{(r)}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \sigma_q^{(i)} : \Delta_q \rightarrow X, q \geq 0$$

并且规定负维数的 $S_q(X) = 0$

定义 1.3.4. X 中 q 为奇异单形 $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ 的边缘定义为如下 $q-1$ 维奇异链

$$\partial \sigma = \partial(\sigma \circ (e_0 \dots e_q)) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ (e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_q)$$

做 \mathbb{Z} 线性扩张得到

$$\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$$

是阿贝尔群同态。

命题 1.3.1. $S_*(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$ 是链复形。

证明. 即验证 $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ ，由于 ∂ 是群同态，因此只需要在奇异单形上验证即可。先在标准单形上看：

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q(e_0 \dots e_q) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_{q-1}(e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_q) \\ &= \sum_{i=0}^q \left(\sum_{j < i} (-1)^j (e_0 \dots \hat{e}_j \dots \hat{e}_i \dots e_q) + \sum_{j > i} (-1)^{j-1} (e_0 \dots \hat{e}_i \dots \hat{e}_j \dots e_q) \right) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (e_0 \dots \hat{e}_j \dots \hat{e}_i \dots e_q) + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j-1} (e_0 \dots \hat{e}_i \dots \hat{e}_j \dots e_q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

将上式用映射 $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ 复合就得到 $\partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) = 0$ □

1.3.2 奇异链复形与奇异同调群

定义 1.3.5. 链复形 $S_*(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$ 称为 X 的奇异链复形。由 X 的奇异链复形决定的同调群称为 X 的奇异同调群，记作 $H_*(X) := H_*(S_*(X))$

定义 1.3.6. 设 $f : X \rightarrow Y$ 是映射，它把 X 中的奇异单形 $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ 变成 Y 中的奇异单形 $f \circ \sigma$ ，记为 $f_{\#}(\sigma)$ 。通过线性扩张可以得到同态

$$f_{\#} : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$$

命题 1.3.2. $f_{\#}$ 与 ∂ 可交换，即 $f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ 是链映射。

证明. 显然. \square

定义 1.3.7. 映射 $f: X \rightarrow Y$ 诱导的同调群的同态 $f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ 指的是链映射 $f_\#: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ 所诱导的同调群同态。

命题 1.3.3 (奇异同调群的拓扑不变性). 同胚的拓扑空间有着同构的奇异同调群。

注 1.3.1. 协变函子 S_* 把拓扑空间范畴变到链复形范畴, 同调函子把链复形范畴变成分次群范畴, 将这两个协变函子复合得到协变函子称为奇异同调函子 H_* 。因此用这种观点, 命题 1.3.3 是直接的, 因为函子是保同构的。

例 1.3.2. 单点空间的奇异同调群 $H_*(\text{pt})$ 如下

$$H_*(\text{pt}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

这是因为对于每一个维度, 都只有一个奇异单形 $\sigma: \Delta_q \rightarrow \{\text{pt}\}$, 因此 $S_q(X) = \mathbb{Z}, \forall q$, 对于边缘同态 ∂_q 来说, 我们有

$$\partial_q = \begin{cases} 1, & q = 2k + 1 \\ 0, & q = 2k \end{cases}$$

因此我们有如下的链复形

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \dots$$

因此可以得到我们期待的结果。

定义 1.3.8. 克罗内克同态 $\varepsilon: S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ 定义为

$$\varepsilon(k_1 a_1 + \dots + k_r a_r) = k_1 + \dots + k_r$$

注 1.3.2. $\varepsilon: S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ 诱导出满同态 $H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, 因为 $S_0(X) = Z(X)$, 并且每个 1 维奇异单形的边缘的克罗内克指标为零。

命题 1.3.4. 如果空间 X 道路连通, 则 $\varepsilon: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ 是同构。

证明. 任取基点 $p \in X$, 任意 $c_0 = k_1 a_1 + \dots + k_r a_r \in \text{Ker}(\varepsilon)$, 则 $c_0 = c_0 - \varepsilon(c_0)b = k_1(a_1 - b) + \dots + k_r(a_r - b)$, 由于 X 道路连通, 因此存在道路连接 a_i 和 b , 对于每个 i 成立, 记作 σ_i , 因此

$$\partial(\sum_i k_i \sigma_i) = c_0$$

因此 c_0 是一个边缘链, 因此 $\text{Ker } \varepsilon = 0$, 即 ε 是同构. \square

定义 1.3.9. 一族链复形 $\{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, 其中 $C_\lambda = \{C_{\lambda q}, \partial_{\lambda q}\}$ 这族链复形的直和定义为 $\bigoplus C_\lambda = \{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_{\lambda q}, \bigoplus \partial_{\lambda q}\}$

命题 1.3.5.

$$H_*(\bigoplus_{\lambda} C_\lambda) = \bigoplus_{\lambda} H_*(C_\lambda)$$

证明. 我们具体写出链复形的直和如下:

$$\cdots \bigoplus_{\lambda} C_{\lambda q+1} \xrightarrow{\bigoplus_{\lambda} \partial_{\lambda q+1}} \bigoplus_{\lambda} C_{\lambda q} \xrightarrow{\bigoplus_{\lambda} \partial_{\lambda q}} \bigoplus_{\lambda} C_{\lambda q-1} \rightarrow \cdots$$

因此可以注意到

$$H_q(\bigoplus_{\lambda} C_\lambda) = \text{Ker} \bigoplus_{\lambda} \partial_{\lambda q} / \text{Im} \bigoplus_{\lambda} \partial_{\lambda q+1} = \bigoplus_{\lambda} \text{Ker} \partial_{\lambda q} / \text{Im} \partial_{\lambda q+1}$$

最后一个等式成立是因为核与像是可以与直和交换的, 因此

$$H_q(\bigoplus_{\lambda} C_\lambda) = \bigoplus_{\lambda} H_q(C_\lambda)$$

□

定理 1.3.1. 设 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 是 X 的道路连通分支分解, 则有同调群的直和分解 $H_*(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(X_\lambda)$

证明. 用 \sum_X 记 X 中全体奇异单形的集合, 则可以分解为 $\sum_X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} \sum_{X_\lambda}$, 从而有直和分解 $S_*(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_*(X_\lambda)$ □

推论 1.3.1. 拓扑空间 X 道路连通常且仅当 $H^0(X) = \mathbb{Z}$

1.3.3 简约奇异同调群

定义 1.3.10. 拓扑空间 X 的增广链复形 $\tilde{S}_*(X) = \{\tilde{S}_q(X), \tilde{\partial}_q\}$ 定义为

$$\tilde{S}_q(X) = \begin{cases} S_q(X), & q > -1 \\ \mathbb{Z}, & q = -1 \end{cases} \quad \tilde{\partial}_q = \begin{cases} \partial_q, & q > 0 \\ \varepsilon, & q = 0 \end{cases}$$

注 1.3.3. $f : X \rightarrow Y$ 诱导的 $f_\# : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$ 保持零维的克罗内克指数, 因此 $f_\# : \tilde{S}_*(X) \rightarrow \tilde{S}_*(Y)$ 是链映射 ($f_\# : \tilde{S}_{-1}(X) \rightarrow \tilde{S}_{-1}(Y)$ 规定为 id)

定义 1.3.11. 拓扑空间 X 的简约同调群定义为增广链复形 $\tilde{S}_*(X)$ 对应的同调群, 记作 $\tilde{H}_*(X)$. $f : X \rightarrow Y$ 诱导的同态 $f_* : \tilde{H}_*(X) \rightarrow \tilde{H}_*(Y)$ 规定为链映射 $f_\# : \tilde{S}_*(X) \rightarrow \tilde{S}_*(Y)$ 所诱导的同调群同态

命题 1.3.6. 对于拓扑空间 X , 简约同调群与同调群有如下关系

$$H_q(X) = \begin{cases} \tilde{H}_q(X), & q \neq 0 \\ \tilde{H}_q(X) \oplus \mathbb{Z}, & q = 0 \end{cases}$$

证明. 由于增广链复形与链复形相比只改变了链群 C_{-1} 以及 ∂_0 , 因此对于 $q > 0$ 时的同调群都是不改变的。

对于零维的情况, 我们有

$$H_0(X) = C_0(X) / \text{Im } \partial_1, \quad \tilde{H}_0(X) = \text{Ker } \varepsilon / \text{Im } \partial_1$$

而由于 ε 是满射, 我们有

$$C_0(X) / \text{Ker } \varepsilon \cong \mathbb{Z}$$

因此可以得到

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$$

□

推论 1.3.2. 拓扑空间 X 是道路连通当且仅当 $\tilde{H}_0(X) = 0$

1.3.4 奇异同调的同伦不变性

定义 1.3.12. 映射 $f: X \rightarrow Y, g: X \rightarrow Y$ 称为同伦的, 如果存在映射 $F: X \times I \rightarrow Y$, 使得 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$, 记作 $f \cong g$

定义 1.3.13. 两个拓扑空间 X, Y 称为同伦等价, 或者是有相同的同伦型, 如果存在映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$, 使得 $f \circ g \cong \text{id}_Y, g \circ f \cong \text{id}_X$

定义 1.3.14. 拓扑空间 X 称为是可缩的, 如果它与单点集有相同的同伦型。

定义 1.3.15. 拓扑空间 X 的子空间 A 称为是 X 的收缩形变核¹, 如果存在收缩 $r: X \rightarrow A^2$, 使得 $i \circ r$ 同伦于 id_X , 并且同伦的过程中固定 A^3 , 其中 $i: A \rightarrow X$ 是嵌入。

例 1.3.3. S^n 是 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的收缩形变核。

定理 1.3.2 (同伦不变性). 假定 $f \cong g$ 是同伦的映射, 则 $f_{\#} \cong g_{\#}: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ 是链同伦的, 因而诱导相同的同调群同态。

推论 1.3.3 (同伦型不变性). 设拓扑空间 X, Y 有相同的同伦型 $X \cong Y$, 则它们的同调群同构。

推论 1.3.4. 设拓扑空间 X 的子空间 A 是 X 的收缩形变核, 则嵌入映射 $i: A \rightarrow X$ 诱导了同调群的同构。

¹这里的定义有时也被称为强形变收缩核

²映射 $r: X \rightarrow A$ 被称为收缩, 如果 $r \circ i = \text{id}_A$

³这意味着同伦 $F: X \times I \rightarrow X$ 满足对于任意的 $t \in I, F(a, t) = a, \forall a \in A$

1.3.5 与基本群的关系

定义 1.3.16. X 是拓扑空间, $x_0 \in X$ 是取定的基点, 则 X 的基本群为

$$\pi_1(X, x_0) = \{\gamma \text{ 的同伦类} \mid \gamma \text{ 是 } x_0 \text{ 处的闭路}\}$$

如果我们将 $[0, 1]$ 等同于 1 维标准单形, 则 X 中的每条道路都是 X 中的 1 维奇异单形, 若 γ 是闭道路, 则 γ 是闭链, 因此 $H_1(X)$ 关心的也是 X 中的闭路的情况。以 $[\gamma]_h \in H_1(X)$ 表示 γ 代表的同调类, $[\gamma]$ 代表 γ 的同伦类。

易知

$$[\gamma\gamma']_h = [\gamma]_h + [\gamma']_h$$

故我们有同态:

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$$

定义为 $[\gamma] \mapsto [\gamma]_h$, 称为 Hurewicz 同态。

定理 1.3.3. 假设拓扑空间 X 道路连通, 则 Hurewicz 同态是满同态, 并且 $\text{Ker } h_*$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的换位子群, 即 $H_1(X)$ 就是 $\pi_1(X, x_0)$ 的交换化。

1.3.6 \mathcal{U} 小奇异链

定义 1.3.17. X 是拓扑空间, \mathcal{U} 是 X 的覆盖, 奇异单形 $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ 被称为 \mathcal{U} -小的, 如果 $\sigma(\Delta_q) \subset U \in \mathcal{U}$; 记 $S_q^{\mathcal{U}}(X)$ 是由以所有 \mathcal{U} -小奇异单形为基生成的自由阿贝尔群, 是 $S_*(X)$ 的子链复形。

定理 1.3.4. 假设 $\text{Int } \mathcal{U} = \{\overset{\circ}{U} \mid U \in \mathcal{U}\}$ 是 X 的开覆盖, 则存在链映射 $k : S_*(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(X)$ 满足 $k \circ i = \text{id}, i \circ k \cong \text{id}$, 从而包含映射诱导出同调群的同构。

1.4 Mayer-Vietoris 序列

1.4.1 同调代数工具

定义 1.4.1. 阿贝尔群同态 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 在 B 处正合, 如果 $\text{Ker } g = \text{Im } f$; 阿贝尔群同态序列 $\cdots \rightarrow G_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\phi_i} G_{i+1} \rightarrow \cdots$ 被称为正合列, 如果在每一个 G_i 处都正合。

定理 1.4.1. 链复形和链映射的长正合列 $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ 诱导了同调群间的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C) \xrightarrow{f_*} H_q(D) \xrightarrow{g_*} H_q(E) \xrightarrow{\partial_*} H_{q+1}(C) \rightarrow \cdots$$

证明. 图上追踪。 □

定理 1.4.2 (同调序列的自然性). 设有链复形与链映射交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

则有下列的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{q+1}(E) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(C) & \xrightarrow{f_*} & H_q(D) & \xrightarrow{g_*} & H_q(E) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{q+1}(E') & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_q(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_q(E') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

引理 1.4.1 (五引理). 设有阿贝尔群的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\phi_1} & A_2 & \xrightarrow{\phi_2} & A_3 & \xrightarrow{\phi_3} & A_4 & \xrightarrow{\phi_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5 \end{array}$$

其中两个横行都是正合列, 如果 f_1, f_2, f_4, f_5 都是同构, 则 f_3 也是同构。

证明. 图上追踪。 □

注 1.4.1. 实际上, 只需要 f_1, f_2, f_4 是满射, f_2, f_4, f_5 是单射。

定义 1.4.2. 阿贝尔群同态的正合列 $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ 称为裂正合的, 如果 $f(C)$ 是 D 的直和项, 即 D 能分解成 $f(C)$ 和某个子群的直和。

命题 1.4.1. 对于阿贝尔群同态的短正合列 $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$, 下列叙述等价:

1. 存在同态 $h: D \rightarrow C$, 使得 $h \circ f = \text{id}_C$
2. 存在同态 $k: E \rightarrow D$, 使得 $g \circ k = \text{id}_E$
3. 短正合列 $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ 是裂正合的。

特别的, 若 E 是自由阿贝尔群⁴, 则 1, 2, 3 成立。

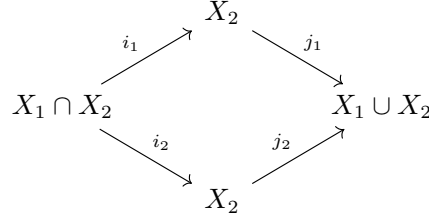
1.4.2 Mayer-Vietoris 序列

我们先来考虑下面的情况: X 是拓扑空间, X_1, X_2 是 X 的子空间, 使得 $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$ 是 X 的一个覆盖, 则

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(X_1) + S_*(X_2)$$

我们考虑下面的图表:

⁴更一般的, E 是投射的, 或 C 是内射的即可。



则可以得到链复形与链映射的短正合列

$$0 \rightarrow S_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_{\#}} S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \xrightarrow{k_{\#}} S_*(X_1) + S_*(X_2) \rightarrow 0$$

其中 $h_{\#}(x) := (i_{1\#}(x), -i_{2\#}(x))$, $k_{\#}(x) := j_{1\#}(y) + j_{2\#}(z)$

定义 1.4.3. 设 X_1, X_2 是 X 的子空间, 满足包含映射 $i : S_*(X_1) + S_*(X_2) \rightarrow S_*(X_1 \cup X_2)$ 诱导了同调群的同构, 则称 (X_1, X_2) 是一个 *Mayer-Vietoris* 耦。

例 1.4.1. 若 $\overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2 = X$, 则 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 *Mayer-Vietoris* 耦。因为此时 $S_*(X_1) + S_*(X_2) = S_*^{\mathcal{U}}(X)$, 根据定理 1.3.4, 可知 $S_*^{\mathcal{U}}(X) \cong S_*(X) = S_*(X_1 \cup X_2)$

定理 1.4.3 (Mayer-Vietoris 序列). 设 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 *Mayer-Vietoris* 耦。则存在长正合列

$$\cdots \rightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \rightrightarrows H_1(X_1) \oplus H_2(X_2) \xrightarrow{\pm} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \cdots$$

证明. 短正合列诱导长正合列。 □

注 1.4.2. 对增广链复形, 同样有短正合列

$$0 \rightarrow \tilde{S}_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_{\#}} \tilde{S}_*(X_1) \oplus \tilde{S}_*(X_2) \xrightarrow{k_{\#}} \tilde{S}_*(X_1) + \tilde{S}_*(X_2) \rightarrow 0$$

因此也有简约同调群的 *Mayer-Vietoris* 序列。

注 1.4.3. $\partial_* : H_q(X_1 \cup X_2) \rightarrow H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$ 的具体形式: 任取 $[z] \in H_q(X_1 \cup X_2)$, 由于 *Mayer-Vietoris* 耦的原因, $[z]$ 一定有一个代表闭链可以写成 $x_1 + x_2$, 其中 x_1 是 X_1 中的链, x_2 是 X_2 中的链。由于 $\partial z = \partial x_1 + \partial x_2 = 0$, 则 $\partial x_1 = -\partial x_2$, 记作 y , 是 $X_1 \cap X_2$ 中的闭链, 它代表了 $H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$ 中的同调类, 即

$$\partial_*([z]) = [y]$$

定理 1.4.4 (Mayer-Vietoris 序列的自然性). 设 $\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\}$ 是 X, Y 中的 *Mayer-Vietoris* 耦, 映射 $f : X \rightarrow Y$ 满足 $f(X_1) \subset Y_1, f(X_2) \subset Y_2$, 则有正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \rightarrow H_{q+1}(X_1 \cup X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{-} & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) & \xrightarrow{+} & H_q(X_1 \cup X_2) \rightarrow \cdots \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
\cdots \rightarrow H_{q+1}(Y_1 \cup Y_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(Y_1 \cap Y_2) & \xrightarrow{-} & H_q(Y_1) \oplus H_q(Y_2) & \xrightarrow{+'} & H_q(Y_1 \cup Y_2) \rightarrow \cdots
\end{array}$$

推论 1.4.1. 拓扑空间 X 是两个闭子空间 X_1, X_2 的并, 若 $X_1 \cap X_2$ 是某个开邻域的形变收缩核, 则 $\{X_1, X_2\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦。

例 1.4.2. 当 $n \geq 0$ 时, 有球面的同调群为

$$\widetilde{H}_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. 令 $B_+ = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \geq 0\}$, $B_- = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \leq 0\}$, 则 $B_+ \cap B_- = S^{n-1}$ 是其某个开邻域的收缩形变核, 则 $\{B_+, B_-\}$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。而 B_+, B_- 都同胚与 D^{n-1} , 是一个可缩空间, 则其各个维数的简约同调群为零, 利用简约同调群的 Mayer-Vietoris 序列则有

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{+} \widetilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{-} 0 \xrightarrow{+} \widetilde{H}_{q-1}(S^n) \rightarrow \cdots$$

因此可以得到

$$\widetilde{H}_q(S^n) \cong \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \cong \cdots \cong \widetilde{H}_{q-n}(S^0)$$

利用两点空间的简约同调群可以得到我们期待的结果。 □