代数 0 课程讲义

Instructor: 余成龙
Notes Taker: 刘博文

Qiuzhen College, Tsinghua University
2022 Spring

目录

第一章　线性方程组

1.1　线性函数与线性方程

定义 1.1.1. 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 如果存在 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 是常数, 使得 F 有如下表达式

$$F(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

那么称 F 是 $\mathbb{R}^n$ 上的**线性函数** (linear function).

例子. *如下的 F 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性函数:*

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto (x_1+1)^2 - (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - (x_1+1)^2 \end{aligned}$$

例子. *如下的 F 不是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性函数:*

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

定理 1.1.2. *函数 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是线性函数当且仅当 F 满足:*

(1) *对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有*

$$F(x+y) = F(x) + F(y)$$

(2) *对任意 $c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$, 有*

$$F(cx) = cF(x)$$

证明: 如果 F 是线性函数, 可以直接验证 F 满足 (1), (2) 两条性质; 另一方面, 如果 F 满足 (1), (2), 我们记

$$a_1 = F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}), \quad a_2 = F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}), \quad \ldots$$

则

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = a_1x_1, \quad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = a_2x_2, \quad \ldots$$

那么任取 $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$, 则

$$\begin{aligned} F(v_1 + v_2 + \cdots + v_m) &= F((v_1 + \cdots + v_{m-1}) + v_m) \\ &= F(v_1 + \cdots + v_{m-1}) + F(v_m) \\ &= F(v_1) + \cdots + F(v_m) \end{aligned}$$

因此,

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) + \cdots + F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

□

定义 1.1.3. $\mathbb{R}^n$ 上 m 个线性函数 $F_1, F_2, \ldots, F_m$ 和 m 个实数 $b_1, b_2, \ldots, b_m$ 满足的方程组

$$\begin{cases} F_1(x) = b_1 \\ F_2(x) = b_2 \\ \vdots \\ F_m(x) = b_m \end{cases}$$

称为 n 个变元的**线性方程组** (system of linear equations), 带入方程组使得其成立的 x 称为**线性方程组的解** (solution of system of linear equations)

注记. 我们可以给线性方程组如下的一些几何解释:

(1) 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 单个线性函数 $F_1(x) = a_1x_1 + a_2x_2$ 以及实数 b_1 给出的线性方程组 $a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$ 的解是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条直线.

(2) 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 根据 (1) 的几何解释不难理解如下线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解是 $\mathbb{R}^2$ 中两条直线的交点. 注意, 在 $\mathbb{R}^2$ 中两条直线不一定相交, 即如上线性方程组不一定有有解, 但是如果有解一定只有唯一解.

(3) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 如下线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

的解可以看成是 $\mathbb{R}^3$ 中两个平面的交线. 注意: 在 $\mathbb{R}^3$ 中两个平面不一定相交, 即如上线性方程组不一定有有解, 并且如果相交, 也是交出一条线, 即此时解不唯一.

(4) 在更高维中也有同样的解释: 由一个线性函数给出的线性方程的解可以看成是一个低一维的超平面, 而多个线性函数给出的线性方程组的解则是这些超平面的交.

1.2 高斯消元法

根据注记1.1可知对于一个线性方程组其可能没有解, 并且即使有解也不一定只有唯一解, 那么该如何求解线性方程组呢? 在本节中我们将利用高斯消元法, 来求解一般的线性方程组. 我们先来看下面的一个简单的例子.

例子.

$$\begin{cases} 4x_2 - x_3 = 7 & (r_1) \\ x_1 + 2x_2 = 5 & (r_2) \\ 2x_1 + x_3 = 3 & (r_3) \end{cases}$$

显然我们交换 r_1, r_2 不改变上述方程组的解, 因此我们得到:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 & (r_1') \\ 4x_2 - x_3 = 7 & (r_2') \\ 2x_1 + x_3 = 3 & (r_3') \end{cases}$$

我们考虑如下操作: 保持 r_1', r_2' 不变, 用 r_3' 减去 $2r_1'$, 得到如下的方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 & (r_1'') \\ 4x_2 - x_3 = 7 & (r_2'') \\ -4x_2 + x_3 = -7 & (r_3'') \end{cases}$$

上述操作并不改变方程组的解, 因为可由 r_1'', r_2'', r_3'' 恢复出 r_1', r_2', r_3'. 类似的最后再保持 r_1'', r_2'' 不变, 用 r_3'' 加上 r_2'', 得到

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 7 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

对于上述方程组我们可以用 x_3 来如下的表示 x_1, x_2, 其中 x_3 可以取任意的实数

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}$$

因此我们可以将方程组的解写作

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

注记. 根据上述结果可以发现该线性方程组有无穷组解, 这对应于几何解释中 $\mathbb{R}^3$ 中三个平面相交出一条线.

回顾例1.2, 在解方程中我们主要用到了如下三种操作:

(E1) 交换方程组的某两行.
(E2) 将某一行乘以非零常数 c.
(E3) 将某一行的非零常数 c 倍加到另一行上.
我们称如上的三种操作为**基础行变换** (elementary row operations). 不难发现基础行变换均可逆, 并且其逆也是基础行变换.

定义 1.2.1. 有限个基础行变换的复合称为**行变换** (row operations).

命题 1.2.2. *行变换均可逆, 并且其逆也为行变换.*

证明: 因为基础行变换可逆, 且其逆也为基础行变换, 并且操作 O_1O_2 的逆为 $O_2^{-1}O_1^{-1}$. □

推论 1.2.3. *行变换不改变线性方程组的解.*

由于作行变换只关注方程的系数以及右侧常数项, 因此对于如下的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

我们将其系数及常数项提出来记作

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

并将这个线性方程组记做 $Ax = b$, 这也引出了矩阵的概念.

定义 1.2.4. 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的 (实) 数表称为 m 行 n 列**矩阵** (matrix), 记做 $(a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 当 $m = n$ 时, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 被称为 n 阶**方阵** (square matrix).

例子. $\mathrm{I}_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *是只有* (i,i) *元为* 1, *其余分量为零的矩阵, 称为***单位矩阵** *(identity matrix).*

对于线性方程组 $Ax = b$, A 称为**系数矩阵** (coefficient matrix), (A, b) 称为**增广矩阵** (augmented matrix), 并将上述方程记作 $Ax = b$. 现在我们即可以通过行变换来操作我们的增广矩阵, 使其最终的形式方便于我们求解, 那么究竟该操作到什么样子为止呢?

根据例1.2, 我们发现如果我们的增广矩阵有如下的形式, 线性方程组可以直接求解:
(1) 所有非零行在零行的上面.
(2) 对某一非零行, 称最左边的非零元为**主元** (pivot), 第 i 行的主元严格比第 $i+1$ 行的主元靠左.

满足上述条件的矩阵称为**行阶梯型** (row echelon form), 并且如果主元所在列的其他元素均为零, 主元本身为 1, 则称此时为**最简行阶梯型** (reduced row echelon form).

定理 1.2.5. 矩阵 A 可通过行变换变成最简行阶梯型, 并且该最简行阶梯型不依赖于行变换的选取, 记作 $\operatorname{rref} A$.

证明: 对 $m\times n$ 矩阵的列作归纳: 假设 $n=1$ 时, 对于 $m\times 1$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}$$

如果 $a_{11}=\cdots=a_{m1}=0$, 则此时已经是最简行阶梯型. 若 $a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{(k-1)1}=0, a_{k1}\neq 0$, 那么通过 (E1) 将 a_{k1} 换到第一行, 用 (E2) 将第一行乘以 $(a_{k1})^{-1}$ 使得主元变为 1, 再用 (E3) 将第一行以下变为零, 因此此时最简行阶梯型为

$$\operatorname{rref} A=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

并且不依赖于行列变换的选取. 假设对列数为 n 的时候成立, 对于 $m\times(n+1)$ 的矩阵 A, 将其写作 $A=(B,y)$, 其中 B 是 $m\times n$ 矩阵. 根据归纳假设 B 可由行变换得到最简行阶梯型, 记作 B', 将同样的变换作用在 A 上得到 $A'=(B',y')$. 如果 B' 没有非零行, 则次数 A' 已经是最简行阶梯型. 如果 B' 从 $k+1$ 行开始是零行, 则对

$$\begin{pmatrix} y'_{k+1}\\ \vdots\\ y'_m\end{pmatrix}$$

应用 $n=1$ 时的结论, 可做行变换得到最简行阶梯型, 同时也对 B' 作. 但由于行变换不改变零矩阵, 因此不改变 B', 得到的矩阵记作 A''. 考虑如下两种情况:

(1) 如果

$$\operatorname{rref}(\begin{pmatrix} y'_{k+1}\\ \vdots\\ y'_m\end{pmatrix})=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

则此时 A'' 已经是最简行阶梯型.

(2) 如果

$$\operatorname{rref}(\begin{pmatrix} y'_{k+1}\\ \vdots\\ y'_m\end{pmatrix})=\begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

则作 (E3) 将第 $k+1$ 行加到第 $1,2,\ldots,k$ 行, 将 $y'_1,\ldots,y'_k$ 变成零, 此时得到的矩阵也是最简行阶梯型. 由于上述操作只依赖于 B 和 y, 即 A 的最简行阶梯型只依赖于 A 本身.

□

定义 1.2.6. 对于矩阵 A, $\operatorname{rref} A$ 的主元个数称为 A 的**秩** (rank), 记作 $\operatorname{rank} A$.

注记. 根据定义, 对于 $m \times n$ 矩阵, $\operatorname{rank} A \le m$.

命题 1.2.7. 对于矩阵 A, B, 有 $\operatorname{rank} AB \le \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$

1.3 线性方程组解的结构

定义 1.3.1. 对于线性方程组的系数矩阵 A, $\operatorname{rref} A$ 中主元对应的未知元称为**主元** (principal unknowns), 其余未知元称为**自由元** (free unknowns).

例子. 例如线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

则 x_1, x_2, x_5 是主元, x_3, x_4, x_6 是自由元. 并且根据上述最简行阶梯型, 我们可以直接分析出方程组的解的情况:

1. 如果 b_4 或者 b_5 不是零, 则方程组 $Ax = b$ 无解.
2. 如果 $b_4 = b_5 = 0$, 则 x_3, x_4, x_6 取定任意实数后, 主元由方程组唯一确定:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - 3x_3 - 5x_4 - x_6 \\ x_2 &= b_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_6 \\ x_5 &= b_3 \end{aligned}$$

定理 1.3.2 (线性方程组解的结构定理)**.** 对于方程 $Ax = b$, 用行变换将 (A, b) 化作最简行阶梯型 $(\overline{A}, \overline{b})$, 则

(1) 方程有解等价于 $\overline{A}$ 的零行对应的 $\overline{b}_i$ 也是零.

(2) 方程有解时自由元可以任意取值, 且自由元的每一组取值都唯一决定了一组解. 特别地, 方程有唯一解当且仅当没有自由元.

推论 1.3.3. 线性方程组 $Ax = b$

(1) 有解当且仅当 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A, b)$.

(2) 有唯一解当且仅当 $\operatorname{rank} A$ 等于 A 的列数相同.

定义 1.3.4. 方程 $Ax = 0$ 称为**齐次线性方程组** (system of homogeneous linear equations).

定理 1.3.5. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解在加法和数乘下封闭.

证明: 注意到

$$\begin{aligned} A(x + y) &= Ax + Ay \\ A(cx) &= cAx \end{aligned}$$

$\square$

定理 1.3.6. *对于线性方程组 $Ax = b$, 如果 $\widetilde{x}$ 是其某一解 (特解), 则 $Ax = b$ 的所有解均可唯一的表达为 $x = y + \widetilde{x}$, 其中 y 是 $Ax = 0$ 的解.*

证明: 只需验证如下两点:

(1) 验证 $y + \widetilde{x}$ 是解.

(2) 验证当 x 是解时, $x = (x - \widetilde{x}) + \widetilde{x}$, 其中 $x - \widetilde{x}$ 满足 $Ax = 0$.

□

注记. 从几何上来看, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解构成了 $\mathbb{R}^n$ 中的一个对加法数乘封闭的子集, 之后我们会用更抽象的观点去描述这种子集, 并称其为一个子空间. 而 $Ax = b$ 的解相当于是将这个子空间做了平移.

第二章　矩阵及其运算

2.1　矩阵乘法

在 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 上有如下的运算:

(1) 加法: $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$, 则 $A+B:=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

(2) 数乘: $A=(a_{ij})_{m\times n}, c\in\mathbb{R}$, 则 $cA:=(ca_{ij})_{m\times n}$.

并且对于 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B\in M_{n\times l}(\mathbb{R})$, 可以定义矩阵的乘法为 $AB:=(c_{ij})_{m\times l}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

即 AB 的 (i,j) 元是由 A 的第 i 行去乘 B 的第 j 列然后作求和得到的. 注意只有 A 的列数与 B 的行数相同时, 其才能做矩阵乘法, 否则无意义. 因此在 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 上还有第三种运算:

(3) 乘法: $A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$, 则 $AB:=(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj})_{n\times n}$.

注记. 对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}, x=(x_i)_{n\times 1}$ 以及 $b=(b_i)_{n\times 1}$, 矩阵乘法的等式 $Ax=b$ 给出了一个线性方程组, 这也是为什么我们之前如此记线性方程组的原因.

命题 2.1.1. *矩阵乘法具有结合律.*

证明: 假设 $A,B,C\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 不妨记 $C=(c_1,\dots,c_n)$, 其中 c_i 是列向量. 那么

$$(AB)C=((AB)c_1,\dots,(AB)c_n)$$
$$A(BC)=A(Bc_1,\dots,Bc_n)=(A(Bc_1),\dots,A(Bc_n))$$

因此只需对每个 c_i 验证 $(AB)c_i=A(Bc_i)$ 即可, 因此我们不妨假设 C 是 $n\times 1$ 的矩阵. 将 A 写作

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

其中 a_i 是行向量, 那么

$$(AB)C=\begin{pmatrix}a_1B\\a_2B\\\vdots\\a_nB\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}a_1BC\\a_2BC\\\vdots\\a_nBC\end{pmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}a_1(BC)\\a_2(BC)\\\vdots\\a_n(BC)\end{pmatrix}$$

因此只需要对每一个 a_i 验证即可, 因此我们不妨假设 A 是 $1\times n$ 的矩阵, 那么

$$((a_1,\dots,a_n)B)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_ib_{ij})c_j=\sum_{i,j}a_ib_{ij}c_j$$

$$(a_1,\dots,a_n)(B\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_i(\sum_{i=1}^{n}b_{ij}c)_j=\sum_{i,j}a_ib_{ij}c_j$$

□

有了矩阵乘法, 我们可以将之前对系数矩阵做的初等行变换用矩阵的语言来再说一遍.

定义 2.1.2. 如下的三类矩阵被称为**初等矩阵** (elementary matrix)

(E1)

$$E[ij]=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&\ddots&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

即交换 I_n 的第 i 行与第 j 行得到的矩阵.

(E2)

$$E[i,c]=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&c&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}$$

即将 I_n 的第 i 行乘以 c 得到的矩阵, 其中 $c\neq 0$.

(E3)

$$E[ij,c]=\begin{pmatrix}1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&&&& \\ &&\vdots&\ddots&&& \\ &&c&\cdots&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1\end{pmatrix}$$

即将 I_n 的第 i 行乘以 c 加到第 j 行得到的矩阵, 其中 $c\neq 0$.

例子. 假设系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{pmatrix}$$

那么如果我们对其作用 *(E3)* 将第三行的 2 倍加到第一行上去, 得到的新的系数矩阵记做 A', 那么

$$A'=\begin{pmatrix}r_1+2r_3\\ r_2\\ r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}A$$

因此我们可以看出初等行变换 *(E3)* 可以看作是初等矩阵 *(E3)* 左乘.

命题 2.1.3. 对 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 做初等行变换 O 等价于对左乘相应的初等矩阵 E.

证明: 根据定义验证即可. □

推论 2.1.4. 对 A 做行变换 $O_1\dots O_k$ 等价于左乘初等矩阵 $E_k\dots E_2E_1$.

注意到我们的初等行变换是可逆的, 用矩阵的语言来说, 对于初等矩阵 $B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 总存在另一个初等矩阵 B' 使得 $BB'A=\mathrm{I}_n$, 其中 I_n 是只有对角线为 1, 其余地方全为零的 $n\times n$ 矩阵.

定义 2.1.5. 对于矩阵 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

(1) 若有 B 使得 $BA=\mathrm{I}_n$, 则称 B 为 A 的**左逆** (left inverse).

(2) 若有 C 使得 $AC=\mathrm{I}_n$, 则称 C 为 A 的**右逆** (right inverse).

(3) 如果左逆右逆均存在, 则称 A **可逆** (invertible).

定理 2.1.6. 对于矩阵 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 如下叙述等价:

(1) A 可逆.

(2) A 存在左逆.

(3) A 存在右逆.

(4) $\operatorname{rref} A=\mathrm{I}_n$.

(5) $Ax=b$ 有唯一解.

(6) $Ax=0$ 有唯一解.

(7) $\operatorname{rank} A = n$.

证明: 根据线性方程组解的结构定理, 即定理1.3.2, 我们已经证明了 (4),(5),(6),(7) 的等价性.

(2) $\implies$ (6): 如果 A 存在左逆, 那么 $A^{-1}Ax = 0$ 意味着 $x = 0$, 即 $Ax = 0$ 只有唯一的解.

(5) $\implies$ (3): 如果 $Ax = b$ 存在唯一解, 那么我们不妨取

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

那么不妨记 $Ax = b_1, Ax = b_2, \dots, Ax = b_n$ 唯一的解分别是 $w_1, \dots, w_n$. 令 $C = (w_1, \dots, w_n)$ 则 $AC = \mathrm{I}_n$, 即 C 是 A 的右逆.

注记. 至此已经证明了如果矩阵 A 存在左逆, 那其一定存在右逆, 即 (2) $\implies$ (3).

(3) $\implies$ (2): 假设 A 有右逆, 存在 C 使得即 $AC = \mathrm{I}_n$, 从而 $CAC = C$. 另一方面, 由于 C 存在左逆, 从而 C 存在右逆, 不妨记为 D, 因此

$$CA = CACD = CD = \mathrm{I}_n$$

即 C 也是 A 的左逆.

注记. 从上述证明可以看出, 如果 A 存在左逆, 那么其右逆不仅存在, 并且还和左逆相同. 类似的可以说明如果 A 存在右逆则其左逆不仅存在, 也与右逆相同.

□

命题 2.1.7. *若 A 可逆, 则左逆与右逆均唯一存在且相同, 记做 A^{-1}.*

证明: 我们只需要证明如果 A 可逆, 那么其左逆右逆都唯一: 假设 C 是 A 的一个左逆, D 是 A 的一个右逆, 那么

$$C = C\,\mathrm{I}_n = CAD = \mathrm{I}_n\,D = D$$

即 A 的任何左逆与右逆都相同. 那么假设 C_1, C_2 是 A 的两个左逆, 由于 C_1 也是 A 的右逆, 从而 $C_1 = C_2$, 即 A 的左逆唯一, 类似的, 我们也可以说明 A 的右逆唯一. □

注记. 上述结论表明, 如果 A 可逆, 那么 $\operatorname{rref} A = \mathrm{I}_n$, 而根据推论2.1.4可知行变换等价于左乘初等矩阵, 因此将其化为最简行阶梯型的初等矩阵的乘积就是 A^{-1}. 那么我们该如何将这些初等矩阵的乘积记录下来呢? 考虑矩阵 (A, I_n), 对其进行操作使得 A 化为最简行阶梯型则有 (I, A^{-1}), 这也给出了我们求逆的办法, 并且我们也有如下简单的推论.

推论 2.1.8. *矩阵 A 可逆当且仅当其为初等矩阵的乘积.*

例子. 考虑 $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

即 $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$

注记. 更一般的, 如果 2×2 矩阵可逆, 那么

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2.2 矩阵的转置

定义 2.2.1. 对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, **其转置矩阵** (transpose matrix), 记做 A^T, 是一个 $n\times m$ 阶矩阵 $(b_{ij})_{n\times n}$, 其中 $b_{ij}=a_{ji}$.

定义 2.2.2. 矩阵 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 被称为**对称矩阵** (symmetric matrix), 如果 $A^T=A$.

例子. *对于列向量来说, 其转置为行向量; 对于行向量来说, 其转置为列向量.*

命题 2.2.3. *对于矩阵转置来说, 我们有如下简单的性质:*

(1) $(A^T)^T=A$.

(2) $(AB)^T=B^TA^T$.

(3) $AA^T=0$ *当且仅当* $A=0$.

证明: 直接验证即可. □

推论 2.2.4. *对* $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *做列变换等价于右乘可逆矩阵* $B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

证明: 利用转置矩阵的观点, 对矩阵 A 进行列变换, 等价于对 A^T 进行行变换再转置, 而列变换等价于左乘可逆矩阵, 因此根据命题2.2.3的 (2) 即可. □

回忆定义1.2.6, 我们定义矩阵 A 的秩为其最简行阶梯型的主元个数. 一个自然的问题就是 A^T 的秩与 A 的秩有什么关系呢?[1] 我们可以证明 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} A^T$, 这主要依赖于下面的定理.

定理 2.2.5. *列变换不改变矩阵* A *的秩.*

证明: 假设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵, 根据推论2.2.4, 我们只需要对可逆矩阵 $B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 证明 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}(AB)$. 我们不妨记 $\operatorname{rank} A=k, \operatorname{rank}(AB)=l$. 根据线性方程组解的理论可知

1. $Ax=0$ 有主元 $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ 以及自由元 $x_{i_{k+1}},\dots,x_{i_n}$.
2. $ABy=0$ 有主元 $y_{i_1},\dots,y_{i_l}$ 以及自由元 $y_{i_{l+1}},\dots,y_{l_n}$.

由于 $Ax=0$ 的解与 $ABy=0$ 的解之间满足 $x=By$, 由于 B 是可逆矩阵, 根据定理 2.1.6 可知两者解之间存在一一对应, 从而主元与自由元的情况是相同的, 从而 $k=l$. □

推论 2.2.6. *对于矩阵* A *来说,* $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} A^T$.

证明: 我们对 A 的最简行阶梯型 $\operatorname{rref} A$ 作列变换, 将其化作如下形式

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & \mathrm{O}_{k\times n-k} \\ \mathrm{O}_{m-k\times k} & \mathrm{O}_{m-k\times n-k} \end{pmatrix}$$

其中 O 代表分量全为零的矩阵. 此时 A 与 A^T 都为最简行阶梯型, 从而 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} A^T=k$. □

[1]在一些教材中我们这里定义的矩阵的秩又被称为行秩, A^T 的秩被称为 A 的列秩, 即我们要证明矩阵的行秩与列秩相同.

从上述证明过程中, 根据可逆矩阵与行列变换的关系, 我们还能看出:

推论 2.2.7. 对于矩阵 $A \in M_{m\times n}$, 存在可逆矩阵 P, Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & \mathrm{O}_{k\times n-k} \\ \mathrm{O}_{m-k\times k} & \mathrm{O}_{m-k\times n-k} \end{pmatrix}$$

其中 $k = \operatorname{rank} A$, 这被称为 A 的**相抵标准型** *(canonical form)*.

定义 2.2.8. (实) 矩阵 A, B 之间被称为**相抵** (equivalent), 如果存在 (实) 可逆矩阵 P, Q 使得 $PAQ = B$.

定理 2.2.9. $m \times n$ 阶矩阵 A, B 之间相抵当且仅当 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$, 即相抵关系完全由矩阵的秩分类.

证明: 由于行列变换不改变矩阵的秩, 从而相抵矩阵有相同的秩; 另一方面, 如果 A, B 有相同的秩, 它们的相抵标准型相同, 从而相抵. □

2.3 分块矩阵

一般来说, 当 n 较大时, 求解 $n \times n$ 矩阵的逆对人工操作来说是相对较麻烦的, 但如果矩阵有相对较好的形式, 此时的求解也可以化简. 下面将介绍分块矩阵的想法, 给定矩阵 A, 我们可以做适当的划分, 将其看作矩阵元素是矩阵的矩阵. 例如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

我们可以将其看成 2×2 的矩阵 $(A_{ij})_{2\times 2}$, 其中

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \quad A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix}$$

如果可逆矩阵 A 可以写成分块对角的形式, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{pmatrix}$$

那么则有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & A_3^{-1} & \\ & & & A_4^{-1} \end{pmatrix}$$

同样的, 我们可以对分块矩矩阵进行分块行列变换, 得到相对较好的形式. 例如对于分块矩阵

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中 A,B,C,D 都是方阵. 如果 A 可逆, 那么

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

即通过行列变换将其下三角化, 对于 B,C,D 可逆的时候我们也可以做类似的事情. 特别地是, 如果我们采取不同的变换得到相同的等式, 这有时候可以给我们带来一些非平凡的结果.

例子. 对于列向量 α,β, 考虑

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \alpha \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

一方面我们考虑

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \alpha & \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \beta^T & 1 & \mathrm{O} & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \alpha & \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ 0 & 1-\beta^T\alpha & -\beta^T & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \alpha & \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ 0 & 1 & -\beta^T(1-\beta^T\alpha)^{-1} & (1-\beta^T\alpha)^{-1} \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & \mathrm{I}+\alpha(1-\beta^T\alpha)^{-1}\beta^T & -(1-\beta^T\alpha)^{-1}\alpha \\ 0 & 1 & -(1-\beta^T\alpha)^{-1}\beta^T & (1-\beta^T\alpha)^{-1} \end{pmatrix}$$

另一方面我们有

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \alpha & \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \beta^T & 1 & \mathrm{O} & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \mathrm{I}-\alpha\beta^T & 0 & \mathrm{I} & -\alpha \\ \beta^T & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & (\mathrm{I}-\alpha\beta^T)^{-1} & -(\mathrm{I}-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha \\ \beta^T & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & (\mathrm{I}-\alpha\beta^T)^{-1} & -(\mathrm{I}-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha \\ 0 & 1 & -\beta^T(\mathrm{I}-\alpha\beta^T)^{-1} & 1+\beta^T(\mathrm{I}-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

从而我们有非平凡等式

$$(\mathrm{I}-\alpha\beta^T)^{-1}=\mathrm{I}+\alpha(1-\beta^T\alpha)^{-1}\beta^T$$
$$(1-\beta^T\alpha)^{-1}=1+\beta^T(\mathrm{I}-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha$$

2.4 矩阵的行列式

回忆在注2.1中, 我们有

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

因此 2×2 矩阵可逆当且仅当 $ad-bc\neq 0$. 实际上, $ad-bc$ 有如下的几何含义: 考虑在 $\mathbb{R}^2$ 中由列向量 $v=\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right), w=\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)$ 围成的平行四边形, 向量 v,w 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}}$$

从而 v, w 围成的平行四边形面积为

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{1-\cos\theta^2}\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2} \\ &= \sqrt{(ad-bc)^2} \\ &= |ad-bc| \end{aligned}$$

注意 $ad-bc>0$ 与 <0 两种情况分别对应了 v 在 w 左侧或右侧两种情况, 因此 $ad-bc$ 可以看作是 v, w 围成的平行四边形的 "有向面积", 我们将要定义的行列式, 就是这种有向面积的高维推广.

定义 2.4.1. $\mathbb{R}^n$ 上的 n 次**多重反对称线性函数** (multiple skew symmetric linear function)(多重反对称线性函数, multiple skew symmetric linear function) 是函数

$$f\colon \underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{n\text{个}}\to\mathbb{R}$$

满足条件

(1) $f(v_1,\ldots,cv_i,\ldots,v_n)=cf(v_1,\ldots,v_n)$, 其中 $c\in\mathbb{R}$.
(2) $f(v_1,v_2,\ldots,v_i'+v_i,\ldots,v_n)=f(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n)+f(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)$.
(3) $f(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_n)=-f(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_n)$.
(4) $f(e_1,\ldots,e_n)=1$.

定理 2.4.2. *$\mathbb{R}^n$ 上的 n 次多重反对称线性函数存在且唯一.*

证明: 对 n 进行归纳: 当 $n=1$ 时, 由于 $f(e_1)=1$ 以及任取 $v\in\mathbb{R}$ 我们有 $v=ce_1$, 从而 $f(v)=c$, 即此时被唯一确定. 假设当 $n<k$ 时假设成立, 考虑 $n=k$ 的情形. 任取 $v=(v_1,\ldots,v_k)\in\mathbb{R}^k$, □

定义 2.4.3. 假设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上 n 次多重反对称线性函数, 对于 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 记 $A=(v_1,\ldots,v_n)$, 则 A 的**行列式** (determinant)定义为

$$\det A=|A|:=f(v_1,\ldots,v_n)$$

推论 2.4.4.

例子. 当 $n=2$ 时

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=ad-bc$$

例子. 当 $n=3$ 时

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

注记. 上述公式又被称为对角线法则.

例子. 对于三种初等矩阵[2], 其行列式分别为

(E1) $\det E[ij]=1$.

(E2) $\det E[i,c]=c$.

(E3) $\det E[ij,c]=1$.

特别地, 对于矩阵 A 以及初等矩阵 E, 有 $|AE|=|A||E|$.

命题 2.4.5. 行列式有如下性质:

(1) 如果 A 的某一列为零, 则 $|A|=0$.

(2) $|A|\neq 0$ 当且仅当 $\operatorname{rank} A=n$.

(3) $|\mathrm{I}_n|=1$.

(4) $|AB|=|A||B|$.

(5) $|A^{-1}|=|A|^{-1}, |PAP^{-1}|=|A|$.

(6) $|A|=|A^T|$.

(7) 假设 A 是分块上三角矩阵, 并且对角线分块矩阵为 $A_1,\ldots,A_n$, 则 $|A|=|A_1|\ldots|A_n|$. 特别地, 如果 A 是上三角矩阵, 并且对角线元素为 $a_1,\ldots,a_n$, 则 $|A|=a_1\ldots a_n$.

证明: (1). 根据定义2.4.1中 (1) 即可.

(2). 根据例2.4可知, 如果 E 是初等矩阵, 则 $|AE|=|A||E|$, 因此因此不妨将 A 写作 $E_k\ldots E_1 \operatorname{rref} A$, 其中 E_i 是初等矩阵. 而 $\operatorname{rank} A=n$ 当且仅当 $\operatorname{rref} A$ 没有零列, 并且由于 $|E_i|\neq 0$, 从而根据 (1) 可知 $|A|\neq 0$ 当且仅当 $\operatorname{rank} A=n$.

(3). 根据定义2.4.1中 (4) 即可.

(4). 假设 B 不可逆, 即 $\operatorname{rank} B<n$, 根据 (2) 则有 $|B|=0$. 而根据命题1.2.7有 $\operatorname{rank} AB\leq \operatorname{rank} B<n$, 因此 $|AB|=0$, 即 $|AB|=|A||B|$. 假设 B 可逆, 则根据推论2.1.8不妨将其写成初等矩阵的乘积, 再根据初等矩阵的性质即可.

(5). 由 (4) 即得.

(6). 根据推论2.2.6可知 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} A^T$. 因此如果 $\operatorname{rank} A<n$, 则 $\operatorname{rank} A^T<n$, 即根据 (2) 可知 $|A|=|A^T|=0$. 假设 $\operatorname{rank} A=n$, 再根据推论2.2.6将 A 写成初等矩阵的乘积, 并注意到对于初等矩阵 E 有 $|E|=|E^T|$.

(7). 不妨假设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \mathrm{O} & A_3 \end{pmatrix}$$

假设 A_1,A_3 中有一个不可逆, 则此时 A 也不可逆, 因此 $|A|=|A_1||A_2|=0$. 假设 A_1,A_2 都可逆, 则此时 $\operatorname{rref} A=\mathrm{I}_n$. 将 A_1 化作最简行阶梯型的初等矩阵记做 $E_1,\ldots,E_k$, 将 A_3 化作最简行阶梯型的初等矩阵记做 $E'_1,\ldots,E'_l$, 则考虑

$$\widetilde{E}_i=\begin{pmatrix} E_i & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{E}'_j=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & E'_j \end{pmatrix}$$

则 $\widetilde{E}_k\ldots\widetilde{E}_1\widetilde{E}'_l\ldots\widetilde{E}'_1 A=\mathrm{I}_n$, 从而 $|A|^{-1}=|\widetilde{E}_k|\ldots|\widetilde{E}_1||\widetilde{E}'_l|\ldots|\widetilde{E}'_1|$. 注意到 $|\widetilde{E}_i|=|E_i|, |\widetilde{E}'_j|=|E'_j|$ 以及 $|A_1|=\prod_{i=1}^k |E_i|, |A_3|=\prod_{j=1}^l |E'_j|$ 即可. □

[2] 见定义2.1.2

命题 2.4.6. 对于 $2n \times 2n$ 阶矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中 A, B, C, D 是 $n \times n$ 阶矩阵，并且 $AC = CA$，则 $|M| = |AD - CB|$

证明: 首先我们假设 A 可逆，则

$$\begin{aligned} |M| &= |\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}| \\ &= |A||D - CA^{-1}B| \\ &= |A(D - CA^{-1}B)| \\ &= |AD - CB| \end{aligned}$$

而当 A 不可逆时, 我们不妨考虑 $A_\lambda = A + \lambda I$. 由于 $|A_\lambda|$ 是 λ 的 n 次多项式, 从而对有限多个 λ 之外 A_λ 总可逆, 因此我们不妨取足够小的 λ 使得 A_λ 总可逆, 根据可逆时的情形我们有

$$|\begin{pmatrix} A_\lambda & B \\ C & D \end{pmatrix}| = |A_\lambda D - CB|$$

从而我们令 $\lambda \to 0$ 即有我们期待的结果[3]. □

2.5 伴随矩阵

命题 2.5.1. 对于 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，有

$$AA^* = A^*A = \det A\,\mathrm{I}_n$$

推论 2.5.2. 如果 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 可逆，则

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

推论 2.5.3 (克拉姆法则 (cramer's rule))**.** 对于线性方程组 $Ax = b$，如果 A 可逆，则有唯一解

$$x = \frac{1}{\det A} A^* b$$

2.6 矩阵的若干应用

2.6.1 快速傅立叶变换

给定两个 d 次多项式

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \\ g(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_d x^d \end{aligned}$$

多项式乘积为

$$fg := a_0 b_0 + (a_1 b_0 + b_1 a_0)x + \dots$$

[3]这个操作称为微扰法, 是矩阵中一个非常经典的技巧.

在实际计算中, 计算两个 d 次多项式的乘积需要进行 d^2 次运算, 即复杂度为 $O(d^2)$. 在本节中我们将介绍快速傅立叶变换 (fast fourier transformation), 将复杂度降到 $O(d\log d)$.

注意到对于 d 次多项式 $f(x)$, 其可以由在 $d+1$ 个不同的 x 处取值决定, 即我们有如下的矩阵表达式

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_d) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^d \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^d \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_d & x_d^2 & \dots & x_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

其中 M 被称为**范德蒙德矩阵** (Vandermond matrix).

练习. $|M| = \prod_{i<j}(x_i - x_j) \neq 0$, 即 M 可逆.

例子. 例如 $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$, 我们将其写作

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4 + 2x^2 + 1) + x(3x^2 + 1) \\ &= f_e(x^2) + x f_o(x^2) \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f_e(x_i^2) + x_i f_o(x_i^2) \\ f(-x_i) &= f_e(x_i^2) - x_i f_o(x_i^2) \end{aligned}$$

第三章　线性空间与线性映射

3.1　$\mathbb{R}^n$ 情形

3.1.1　$\mathbb{R}^n$ 的子空间

回忆对于线性方程组 $Ax = 0$ 的解构成的集合, 其满足:

(1) 加法封闭.

(2) 数乘封闭.

定义 3.1.1. 将满足 (1) 和 (2) 的 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集称为 $\mathbb{R}^n$ 的**子空间** (subspace).

例子. *$\{0\}$ 是子空间*[1]*, 称为零空间 (zero space).*

命题 3.1.2. *$\mathbb{R}^n$ 的任何一个子空间 W 均包含零空间.*

证明: 任取 $w \in W$, 由于 W 对于数乘封闭, 那么 $0 = 0w \in W$. □

注记. 零空间是在包含关系下最小的子空间.

定义 3.1.3. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 被称为解空间, 也被称为 A 的**核** (kernel), 记为 $\ker A$.

例子. *如果 A 是 3×3 阶矩阵, 根据线性方程组解的结构定理, 即定理1.3.2, 我们可以发现 $\ker A$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中的形式与 $\operatorname{rank} A$ 关系密切:*

(1) $\operatorname{rank} A = 0$, 此时 A 是零矩阵, 从而 $\ker A = \mathbb{R}^3$.

(2) $\operatorname{rank} A = 1$, 此时 $\ker A$ 是通过原点的平面.

(3) $\operatorname{rank} A = 2$, 此时 $\ker A$ 是通过原点的直线.

(4) $\operatorname{rank} A = 3$, 此时 A 可逆, 从而 $\ker A = \{0\}$.

注记. 实际上, 这不是巧合, 见维数公式, 即定理3.5.3.

定义 3.1.4. 给定 $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, 则

$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\} := \{x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

称为 $v_1, \ldots, v_n$ 的**线性张成** (linearly span), 可以直接验证 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\}$ 是子空间.

[1]这里的 0 指代零向量, 之后可能会用 0 即代指实数零又代指零向量, 请读者注意自己区分.

注记. 现在我们来看一下线性方程组与线性张成的关系: 给定 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, 将其写作 $A = (v_1, \ldots, v_n)$, 那么 $Ax = b$ 有解当且仅当

$$b \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\}$$

这个时候也称 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\}$ 是 A 的**列空间** (column space), 记做 $\operatorname{im} A$. 类似的, 我们也可以定义其**行空间** (row space), 记做 $\operatorname{im} A^T$.

命题 3.1.5. *列变换不改变 A 的列空间.*

证明: 不妨将 A 写作 $A = (v_1, \ldots, v_n)$, 根据推论2.2.4, 做列变换等价于右乘可逆矩阵 B, 因此不妨记 A 做列变换得到的矩阵为 $AB = (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$. 根据矩阵乘法的定义, 我们有 $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n$ 都是 $v_1, \ldots, v_n$ 的线性组合, 从而

$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\} \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\}$$

并且由于列变换是可逆的, 即 A 也可以由 AB 做列变换得到, 从而

$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$$

即列变换不改变 A 的列空间. □

推论 3.1.6. *行变换不改变 A 的行空间.*

证明: 证明同上. □

3.1.2 线性相关性

定义 3.1.7. $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ 被称为**线性无关** (linearly independent), 如果 0 表示为 $v_1, \ldots, v_n$ 的线性组合的方式唯一, 即只有

$$0 = 0v_1 + \cdots + 0v_n$$

否则 $v_1, \ldots, v_n$ 被称为**线性相关** (linearly dependent).

命题 3.1.8. *若 $v_1, \ldots, v_n$ 线性无关, 则对于 $v \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\}$, 其被写成 $v_1, \ldots, v_n$ 线性组合式子的系数是唯一的.*

证明: 不妨假设

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \\ &= b_1v_1 + \cdots + b_nv_n \end{aligned}$$

则

$$0 = (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$$

根据线性无关的定义可知 $a_i = b_i$ 对任意的 $1 \leq i \leq n$ 成立. □

定理 3.1.9. *$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ 线性无关当且仅当 $\operatorname{rank} A = n$, 其中 $A = (v_1, \ldots, v_n)$ 是 $m \times n$ 阶矩阵, 此时也称 A 是列满秩的.*

证明: 注意到 $v_1, \ldots, v_n$ 线性无关当且仅当 $Ax = 0$ 只有零解, 根据定理1.3.2可知这当且仅当 $\operatorname{rank} A = n$. □

推论 3.1.10. $\mathbb{R}^m$ 中 k 个列向量当 $k > m$ 时一定线性相关.

证明: $\mathbb{R}^m$ 中 k 个列向量组成的矩阵 A 的秩在 $k > m$ 时最大为 m. □

推论 3.1.11. 列变换不改变矩阵列向量的线性相关性.

证明: 根据定理2.2.5, 列变换不改变矩阵的秩, 从而不改变列向量的线性相关性. □

定理 3.1.12. 假设 $v_1, \ldots, v_n$ 线性无关, 则 $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ 线性相关等价于 $v_{n+1} \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

证明: 如果 $v_{n+1} \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\}$, 则显然 $v_1, \ldots, v_{n+1}$ 线性相关. 另一方面, 假设

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{n+1} v_{n+1} = 0$$

的系数 $a_1, \ldots, a_{n+1}$ 不全为零, 那么一定有 $a_{n+1} \neq 0$, 否则有

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

并且 $a_1, \ldots, a_n$ 不全为零, 这与线性无关相矛盾, 从而

$$v_{n+1} = -a_{n+1}^{-1}(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\}$$

□

定义 3.1.13. 对于 $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, 称 $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ 是**极大线性无关组** (maximal linearly independent set), 如果

(1) $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ 线性无关.
(2) 任何包含 $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ 的 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 的子集中的向量都线性相关.

注记. 若 $v_1, \ldots, v_n$ 不全为零, 则其一定存在极大线性无关组: 假设 $v_1 \neq 0$, 考虑 v_1, v_2 是否线性相关, 如线性相关则剔除 v_2, 线性无关则保留 v_2. 再依次考虑 $v_3, v_4, \ldots$ 即可.

定理 3.1.14. 对于 $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ 是其极大线性无关组, 则

$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$$

证明: 显然 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\}$, 并且根据定理以及极大线性无关组的定义可知任取 $i \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_k\}$ 有

$$v_i \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$$

从而 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_n\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$. □

对于一组向量来说, 其极大线性无关组可能有很多, 但是任何两个极大线性无关组中向量的个数是一样的, 极大线性无关组不仅仅是包含意义下极大, 也是绝对数目的极大.

定理 3.1.15. 假设 $v_1,\dots,v_n$ 的某个极大线性无关组中有 k 个向量, 则对于任意 $v_{j_1},\dots,v_{j_l}$, 其中 $l>k$, 其线性相关.

证明: 假设 $v_{i_1},\dots,v_{i_k}$ 是 $v_1,\dots,v_n$ 的一个极大线性无关组, 任取 $l>k$ 以及 $v_{j_1},\dots,v_{j_l}$, 根据极大线性无关组的定义有

$$(v_{j_1},\dots,v_{j_l})=(v_{i_1},\dots,v_{i_k})A$$

其中 $A\in M_{k\times l}(\mathbb{R})$, 从而

$$x_1v_{j_1}+\cdots+x_lv_{j_l}=(v_{j_1},\dots,v_{j_l})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_l\end{pmatrix}=(v_{i_1},\dots,v_{i_k})A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_l\end{pmatrix}$$

由于 $l>k$, 从而根据线性方程组解的结构定理1.3.2可知 $Ax=0$ 有非零解, 从而 $v_{j_1},\dots,v_{j_l}$ 线性相关. □

推论 3.1.16. $v_1,\dots,v_n$ 的极大线性无关组中向量的数目是确定的.

3.1.3 $\mathbb{R}^n$ 子空间的维数

定义 3.1.17. $\mathbb{R}^n$ 的子空间 W 中的一个极大线性无关组被称作**基** (basis).

例子. $W=\mathbb{R}^n$, 则

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad\dots\quad e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

定义 3.1.18. $\mathbb{R}^n$ 的子空间 W 的极大线性无关组中向量的个数被称为 W 的 (实) **维数** (dimension), 记做 $\dim_{\mathbb{R}}W$.

注记. 根据推论3.1.16可知 W 的维数是良定义的, 并且如下三条中任意满足两条即可说明 $v_1,\dots,v_k$ 是 W 的基:

(1) $W=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{v_1,\dots,v_k\}$.

(2) $v_1,\dots,v_k$ 线性无关.

(3) $\dim_{\mathbb{R}}W=k$.

命题 3.1.19. 若 $W_1\subseteq W_2$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则

(1) $\dim_{\mathbb{R}}W_1\le\dim_{\mathbb{R}}W_2$, 并且等号成立当且仅当 $W_1=W_2$.

(2) W_1 的基可以扩充为 W_2 的基.

证明: (1). 由于 W_1 中的线性无关组一定是 W_2 中的线性无关组, 从而$\dim W_1 \leq \dim W_2$, 等号取得是显然的.

(2). 假设 W_1 的基是 $v_1, \dots, v_k$, W_2 的基是 $w_1, \dots, w_l$. 我们在取 $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l$ 的极大线性无关组的时候仔细一些: 即前 k 个向量取 $v_1, \dots, v_k$, 这是可以做到的, 因为 $v_1, \dots, v_k$ 本身线性无关. 这样取出的极大线性无关组就是由 $v_1, \dots, v_k$ 扩充得到的 W_2 的基. □

定理 3.1.20. *对于矩阵 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\operatorname{rank} A$ 是行空间维数, $\operatorname{rank} A^T$ 是列空间维数.*

证明: 根据推论3.1.6可知行变换不改变行空间, 因此我们通过行变换将其化作最简行阶梯型, 此时主元所在的行向量构成了行空间的一组基, 因此 $\operatorname{rank} A$ 是行空间维数. 类似的可以证明 $\operatorname{rank} A^T$ 是列空间维数. □

推论 3.1.21. *对于矩阵 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} A = \operatorname{rank} A$.*

证明: 根据推论2.2.6即可. □

3.2 域上的线性空间

定义 3.2.1. 集合 $\mathbb{F}$ 被称为**域** (field), 如果其上带有运算:

(1) $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, 记做 $(a, b) \mapsto a + b$.

(2) $\times : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, 记做 $(a, b) \mapsto ab$.

满足:

(3) 交换律, 即 $a + b = b + a, ab = ba$.

(4) 结合律, 即 $(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc)$.

(5) 分配律, 即 $a(b + c) = ab + ac$.

(6) 单位元, 即存在 $1, 0 \in \mathbb{F}$, 使得 $a + 0 = a, 1a = a$.

(7) 逆元, 即存在 $b \in \mathbb{F}$ 是的 $a + b = 0$; 对 $a \neq 0$, 存在 c 使得 $ac = 1$.

例子. *$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 都是域.*

例子. *$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上定义:*

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \times (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

可以直接验证如上运算使得 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 构成了域.

注记. 在给定域 $\mathbb{F}$ 之后, 我们之前对实数域 $\mathbb{R}$ 所做的事情在一般的域 $\mathbb{F}$ 上均成立, 即线性函数, 线性方程组, 线性方程组解的结构, 秩, 子空间以及维数等等.

定义 3.2.2. 给定集合 V, 如果其上有如下结构:

(1) 加法 $V \times V \to V$, 记做 $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$.

(2) 数乘 $\mathbb{F} \times V \to V$, 记做 $(c, v) \mapsto cv$.

满足:

(3) 加法满足交换律, 结合律, 0 向量以及逆元.

(4) 数乘满足结合律以及单位元.

(5) 加法和数乘满足分配律.

则称 V 构成了一个 $\mathbb{F}$-**线性空间** (vector space).

例子. $\mathbb{F}^n$ 构成了一个 $\mathbb{F}$-线性空间. 特别地, $\mathbb{R}^n$ 是一个 $\mathbb{R}$-线性空间.

例子. 假设有域之间的包含关系 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$, 则任何 $\mathbb{E}$-线性空间都可以视作 $\mathbb{F}$-线性空间. 特别地, 任何 $\mathbb{C}$-线性空间都可以视作 $\mathbb{R}$-线性空间.

例子. $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 构成了 $\mathbb{F}$-线性空间, 但全体可逆矩阵不构成线性空间.

例子. 全体 $\mathbb{R}$-系数多项式 $\mathbb{R}[x]$ 构成了 $\mathbb{R}$-线性空间.

例子. 全体次数小于等于 n 的 $\mathbb{R}$-系数多项式, 记做 $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ 构成了 $\mathbb{R}$-线性空间.

例子. $V = \{f(x) \mid f(x)\text{是定义在 } [a,b] \text{ 上的光滑函数}\}$, 这常常记做 $C^\infty([a,b])$.

我们之前对于 $\mathbb{R}^n$ 所发展的理论都可以对一般的 $\mathbb{F}$-线性空间发展.

定义 3.2.3. 给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V, $W \subseteq V$ 被称为 V 的**子空间** (subspace), 如果 W 对 V 上的数乘与加法都封闭.

定义 3.2.4. $\mathbb{F}$-线性空间 V 中的向量 $v_1, \ldots, v_n$ 称为 $\mathbb{F}$-**线性无关** (linearly independent)(线性无关, linearly independent), 如果 0 表示为 $v_1, \ldots, v_n$ 的 $\mathbb{F}$-线性组合的方式唯一, 否则 $v_1, \ldots, v_n$ 称为**线性相关** (linearly dependent).

定义 3.2.5. $\mathbb{F}$-线性空间 V 的一个 $\mathbb{F}$-极大线性无关组被称作 V 的 $\mathbb{F}$-**基** (basis).

定义 3.2.6. $\mathbb{F}$-线性空间 V 的一个 $\mathbb{F}$-极大线性无关组中向量的个数被称作 V 的 $\mathbb{F}$-**维数** (dimension).

注记. 注意, 在这里我们强调它作为某个域上线性空间的维数, 因为同一个集合作为不同线性空间的维数可能不同, 例如 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ 但是 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

注记. 对于一般的 $\mathbb{F}$-线性空间 V, 其维数不一定有限, 比如下面的例子.

例子. 对于 $\mathbb{F}$-线性空间 $\mathbb{F}[x]$, $1, x, x^2, \ldots$ 构成了一个极大线性无关组, 因此 $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x] = \infty$.

但是在这门课程中, 我们主要关心有限维的线性空间. 在之后, 如果不加特殊说明, 我们总假设线性空间是有限维的.

例子. $\mathbb{F}$-线性空间 $\mathbb{F}^n$ 有一组自然的基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$, 其中 e_i 是只有第 i 行为 1, 其余行为 0 的列向量.

例子. 基本矩阵 E_{ij}, 即只有 (i,j) 元是 1, 其余地方为零的矩阵构成了 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的一组基, 因此 $\dim_{\mathbb{F}} M_{m\times n}(\mathbb{F}) = mn$.

例子. $1, x, x^2, \ldots, x^n$ 构成了 $\mathbb{F}[x]_{\leq n}$ 的一组基, 因此 $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x]_{\leq n} = n+1$.

例子. $V=\{\frac{ax^2+bx+c}{x^3-x}\mid a,b,c\in\mathbb{F}\}$ 构成了一个 $\mathbb{F}$-线性空间, 其有如下两组不同的基:

$$B=\{\frac{x^2}{x^3-x},\frac{x}{x^3-x},\frac{1}{x^3-x}\}$$
$$C=\{\frac{1}{x},\frac{1}{x-1},\frac{1}{x+1}\}$$

定义 3.2.7. V 是 $\mathbb{F}$-线性空间, $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ 是其一组 $\mathbb{F}$-基, 则对于 $v\in V$, 有

$$v=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$$

其中 $a_i\in\mathbb{F}$. 列向量

$$[v]_B=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$$

被称为 v 在基 B 下的**坐标** (coordinate).

注记. 对于 $\mathbb{F}$-线性空间 V, $v\in V$ 在不同基下的坐标往往有不同的优势: 在例3.2, 考虑

$$v=\frac{3x^2+x+2}{x^3-x}$$

我们可以很轻易地写出其在 B 下的坐标

$$[v]_B=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

然而很难直接写出 $[v]_C$. 另一方面, 基 C 便于积分, 因此如果我们有 $[v]_C$, 则可以很轻易地将 v 的积分写出来. 因此搞清楚同一个向量在不同基下坐标的变换关系是非常有意义的问题.

对于 $\mathbb{F}$-线性空间 V, 给定其一组基 $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$, 我们可以将其视作矩阵 $B=(v_1,\ldots,v_n)$, 此时我们有矩阵乘法的等式

$$v=B[v]_B$$

并且对于另一个基 $C=\{w_1,\ldots,w_n\}$, 任取 $1\le i\le j$, 有

$$w_i=v_1p_{1i}+\cdots+v_np_{ni}$$

如果我们记矩阵 $P_{BC}=(p_{ij})_{n\times n}$, 并称其为基 B 到基 C 的**转移矩阵** (transition matrix), 则有

$$C=BP_{BC}$$

命题 3.2.8. 对于转移矩阵, 我们有如下简单的性质.

(1) $[v]_B=P_{BC}[v]_C$.

(2) $P_{B_1B_3}=P_{B_1B_2}P_{B_2B_3}$.

(3) $P_{BB}=\mathrm{I}_n$.

(4) P_{BC} 是可逆矩阵, 并且 $P_{BC}^{-1}=P_{CB}$.

3.3 线性空间的构造

3.3.1 直和

定义 3.3.1. 给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V, W, 定义线性空间的**外直和** (external direct sum)为集合 $V \times W$, 其上带有结构

(1) $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$, 其中 $v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W$.

(2) $c(v, w) := (cv, cw)$, 其中 $v \in V, w \in W, c \in \mathbb{F}$.

使得其成为一个 $\mathbb{F}$-线性空间, 记做 $V \oplus W$.

例子. $\mathbb{R}^n$ 可以视作 n 个 $\mathbb{R}$ 的外直和.

定义 3.3.2. 给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V 以及其子空间 V_1, V_2, 如果

(1) $V = V_1 + V_2$, 即任何 V 中的向量可以表示成 V_1, V_2 中向量的组合.

(2) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

则称 V 是 V_1 和 V_2 的**内直和** (internal direct sum).

命题 3.3.3. *给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V 以及其子空间 V_1, V_2, 如果 V 是 V_1 和 V_2 的内直和, 那么*

$$\begin{aligned} T : V_1 \oplus V_2 &\to V_1 + V_2 \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2 \end{aligned}$$

是线性同构, 即 $V \cong V_1 \oplus V_2$.

证明: 线性映射 T 显然是满射, 并且根据内直和的定义有 $\ker T = V_1 \cap V_2 = \{0\}$. □

注记. 这意味着内直和与外直和是一体两面, 因此我们之后并不再区分内外直和, 而统称为直和.

定义 3.3.4. 给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V 以及子空间 V_1, 如果存在子空间 V_2 满足 $V = V_1 \oplus V_2$, 则称 V_2 是 V_1 的补空间 (complement space).

注记. 根据命题3.1.19, 我们总可以将子空间的一组基延拓成全空间的一组基, 因此补空间总是存在的.

命题 3.3.5. *$\mathbb{F}$-线性空间 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ 当且仅当如下两条满足:*

(1) $V = V_1 + \cdots + V_k$.

(2) 对任意 $1 \le i \le k$, 有 $V_i \cap \sum_{i \ne j} V_j = \{0\}$.

命题 3.3.6. *给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V, W, 有*

$$\dim_{\mathbb{F}} V \oplus W = \dim_{\mathbb{F}} V + \dim_{\mathbb{F}} W$$

证明: 假设 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 是 V 的一组基, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ 是 W 的一组基, 直接验证 $\{(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots,$
构成了 $V \oplus W$ 的一组基. □

3.3.2 商空间

定义 3.3.7. 给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V 以及其子空间 W, **商空间** (quotient space)定义为集合 V/W, 其上带有结构:

(1) $(v_1+W)+(v_2+W):=(v_1+v_2)+W$, 其中 $v_1,v_2\in V$.

(2) $c(v+W):=cv+W$, 其中 $c\in\mathbb{F}$.

使得其称为一个 $\mathbb{F}$-线性空间.

注记. 注意我们在处理商集的时, 定义的良好性是我们始终要考虑的问题, 即定义不依赖于代表元的选取.

命题 3.3.8. *给定 $\mathbb{F}$-线性空间以及商空间 V/W, 自然投射 (canonical projection)*

$$\begin{aligned}\pi: V &\to V/W\\ v &\mapsto v+W\end{aligned}$$

是满的线性映射, 并且 $\ker\pi=W$.

命题 3.3.9. *给定 $\mathbb{F}$-线性空间以及商空间 V/W, 有*

$$\dim_{\mathbb{F}} V=\dim_{\mathbb{F}} V/W+\dim_{\mathbb{F}} W$$

证明: 假设 $v_1+W,\dots,v_n+W,w_1,\dots,w_m$ 分别构成了 V/W 和 W 的基, 直接验证 $v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_m$ 构成了 V 的一组基. □

3.4 线性映射

3.4.1 定义与例子

定义 3.4.1. 对于 $\mathbb{F}$-线性空间 V,W, 映射 $T:V\to W$ 被称为 **$\mathbb{F}$-线性映射** (linear map), 如果

(1) 对任意 $v_1,v_2\in V$ 有 $T(v_1+v_2)=Tv_1+Tv_2$.

(2) 对于任意 $c\in\mathbb{F},v\in V$ 有 $T(cv)=cv$.

定义 3.4.2. $\mathbb{F}$-线性映射 T 是**线性同构** (linear isomorphism), 如果其既是双射也是满射.

定义 3.4.3. $\mathbb{F}$-线性空间 V,W 称为**线性同构** (linear isomorphism), 如果存在线性同构 $T:V\to W$.

例子. *逆时针旋转角度 θ 是 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的 $\mathbb{R}$-线性同构.*

例子. *$\mathbb{R}^n$ 到子空间 W 的投影映射是 $\mathbb{R}$-线性映射.*

命题 3.4.4. *给定 n 维 $\mathbb{F}$-线性空间 V 以及其一组基 $B=\{v_1,\dots,v_n\}$, 如下映射是 $\mathbb{F}$-线性同构*

$$\begin{aligned}T: V &\to \mathbb{F}^n\\ \sum_{i=1}^n a_iv_i &\mapsto \sum_{i=1}^n a_ie_i\end{aligned}$$

证明: 映射 T 显然是 $\mathbb{F}$-线性的, 并且满射也是显然的. 假设

$$T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$$

根据 $\{e_i\}$ 的线性无关性可知 $a_i = 0$, 从而 $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. □

推论 3.4.5. $\mathbb{F}$-线性空间 V, W 之间同构当且仅当 $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$, 即维数是线性空间的完全不变量.

证明: 显然同构的线性空间有相同的维数; 另一方面, 假设 $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W = n$, 则 $V \cong \mathbb{F}^n \cong W$. □

例子. 对于矩阵 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 对于 n 维 $\mathbb{F}$-线性空间 V 以及 m 维 $\mathbb{F}$-线性空间 W

$$\begin{aligned} T_A : V &\to W \\ v &\mapsto CA[v]_B \end{aligned}$$

是 $\mathbb{F}$-线性映射, 其中 B, C 分别是 V 和 W 的基. T_A 为线性同构当且仅当 A 可逆.

定义 3.4.6. 给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V, W, 全体 V 到 W 的 $\mathbb{F}$ 线性映射组成的集合记做 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

注记. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ 上有自然的加法与 $\mathbb{F}$-数乘结构如下:

(1) $(T_1 + T_2)v = T_1 v + T_2 v$, 其中 $v \in V$.

(2) $(cT)v = cTv$, 其中 $v \in V, c \in \mathbb{F}$.

并且可以直接验证上述结构使得 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ 是 $\mathbb{F}$-线性空间.

命题 3.4.7. 给定 $\mathbb{F}$-线性映射 $T_1 : V_1 \to V_2, T_2 : V_2 \to V_3$, 则 $T_2 \circ T_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, V_3)$.

3.4.2 线性映射与矩阵

定理 3.4.8. 对于 n 维 $\mathbb{F}$-线性空间 V 以及 m 维 $\mathbb{F}$-线性空间 W, 有如下 $\mathbb{F}$-线性空间的同构

$$M_{m\times n}(\mathbb{F}) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$$

证明: 考虑映射

$$\begin{aligned} M_{m\times n}(\mathbb{F}) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \\ A &\mapsto T_A \end{aligned}$$

首先线性性是显然的. 我们固定 V 的一组基 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 以及 W 的基 $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$. 对于矩阵 $A_1, A_2 \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 注意到 $[T_{A_1} v_i]_C$ 是 A_1 的第 i 列, $[T_{A_2} v_i]_C$ 是 A_2 的第 i 列, 从而如果 $T_{A_1} = T_{A_2}$, 从而 $A_1 = A_2$; 另一方面, 对于 $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$, 我们可以得到矩阵[2] $[T]_B^C = ([Tv_1]_C, \ldots, [Tv_n]_C) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 直接验证有

$$\begin{aligned} Tv &= T((v_1, \ldots, v_n)[v]_B) \\ &= (Tv_1, \ldots, Tv_n)[v]_B \\ &= C([Tv_1]_C, \ldots, [Tv_n]_C)[v]_B \\ &= T_{[T]_B^C} v \end{aligned}$$

□

[2]我们称矩阵 $[T]_B^C$ 为线性映射 T 在基 B, C 下的矩阵.

注记. 这是一个非常重要的观点, 即当我们取定线性空间 V 的一组基之后, 根据命题3.4.4我们可以将 V 看作 $\mathbb{F}^n$, 并且根据定理3.4.8我们可以将线性映射看作矩阵, 因此线性空间上线性映射的问题可以被转化成矩阵问题来解决, 这更加的具体, 以及可计算.

注意到定理3.4.8中的对应是依赖于基的选取的, 那么一个自然的问题是给定一个 $\mathbb{F}$-线性映射, 选取不同的基得到的矩阵之间有什么关系?

命题 3.4.9. *假设 B_1, B_2 都是 $\mathbb{F}$-线性空间 V 的基, C_1, C_2 都是 W 的基, 则对于 $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$, 有*

$$[T]_{B_1}^{C_1} = P_{C_1C_2}[T]_{B_2}^{C_2}P_{B_2B_1}$$

定义 3.4.10. 矩阵 $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 称为**相似** (similar), 如果存在可逆矩阵 $P \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $PAP^{-1} = B$.

因此, 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T : V \to V$, 其在不同基下的矩阵是相似的, 这也是相似矩阵的几何解释. 如果对于矩阵来说一些量是相似不变量[3], 则我们可以对线性映射定义.

定义 3.4.11. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T : V \to W$, 其**行列式** (determinant)定义为 $\det[T]_B^C$, 其中 B, C 分别是 V, W 的基, 记做 $\det T$.

注记. 根据命题2.4.5的 (5) 即可.

定义 3.4.12. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T : V \to W$, 其**秩** (rank)定义为 $\mathrm{rank}[T]_B^C$, 其中 B, C 分别是 V, W 的基, 记做 $\mathrm{rank}\, T$.

注记. 由于相似矩阵只相差可逆矩阵左乘右乘, 并且左乘右乘可逆矩阵不改变矩阵的秩, 从而线性映射的秩定义是良好的.

例子. *考虑如下线性映射*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}[x]_{\le n} &\to \mathbb{R}[x]_{\le n} \\ f(x) &\mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

考虑基 $B = \{1, x, \dots, x^n\}$, 则有

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

注记. 在上面的例子中, $T^{n+1} = 0$, 并且 $\mathrm{rank}\, T = n$.

[3]即指如果两个矩阵相似, 它们的这个量相同.

3.5 维数公式

定义 3.5.1. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to W$, 其**核** (kernel)定义为

$$\ker T := \{v \in V \mid Tv = 0\}$$

其**像** (image)定义为

$$\operatorname{im} T := \{Tv \in W \mid v \in V\}$$

命题 3.5.2. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to W$, $\ker T$ 是 V 的子空间, $\operatorname{im} T$ 是 W 的子空间.

定理 3.5.3 (维数公式)**.** 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to W$, 有

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T$$

推论 3.5.4. 对于 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 有如下维数公式成立

$$\dim \ker A + \operatorname{rank} A = n$$

推论 3.5.5. 对于 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 线性方程组 $Ax = 0$ 解空间的维数为 $n - \operatorname{rank} A$.

第四章　对角化

对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T : V \to V$, 能否找到 V 的一组基 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 满足对任意的 $1 \le i \le n$ 有 $Tv_i = \lambda_i v_i$, 其中 $\lambda_i \in \mathbb{F}$, 称为线性映射的可对角化问题. 用矩阵的语言来说, 给定矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 是否存在可逆矩阵 $P \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 PAP^{-1} 是对角矩阵.

当 $\dim_{\mathbb{F}} V = 1$ 时是显然的, 因为任何 1×1 阶矩阵都是对角矩阵. 但是对一般的维数来说, 并不是所有的线性映射都是可对角化的. 考虑 $\dim_{\mathbb{F}} = 2$ 的情形: 固定 V 的一组基 B 将 T 看作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

那么 $0 \ne v \in V$ 满足 $Tv = \lambda v$, 其中 $\lambda \in \mathbb{F}$, 等价于 $(\lambda \mathrm{I}_2 - A)v = 0$ 有非零解, 根据定理2.1.6以及命题2.4.5的 (2) 可知这等价于 λ 满足 $|\lambda \mathrm{I}_2 - A| = 0$, 即

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

我们考虑如下的情况:

(1) 如果 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ 不存在根, 那么一定不存在 V 的一组基 $\{v_1, v_2\}$ 使得 $Tv_i = \lambda_i v_i$, 其中 $i = 1, 2$.

(2) 如果 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ 有两个不同的根 λ_1, λ_2, 那么考虑对于每一个 λ_i 考虑 $(\lambda_i \mathrm{I}_2 - A)v = 0$ 的非零解 v_i, 那么我们断言 $\{v_1, v_2\}$ 构成了一组基, 因此满足我们的要求: 假设 $\{v_1, v_2\}$ 线性相关, 不妨假设 $v_1 = \mu v_2$, 从而

$$\lambda_1 v_1 = Tv_1 = T(\mu v_2) = \mu \lambda_2 v_2$$

这意味着 $\mu(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$, 从而有 $\mu = 0$, 从而证明了 v_1, v_2 线性无关.

(3) 如果 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ 有重根 λ, 我们要考虑 $\lambda \mathrm{I}_2 - A$ 的秩:

  (*a*) $\mathrm{rank}(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = 0$, 此时根据推论3.5.5解空间的维数是 2, 因此可以找到两个线性无关的向量 $\{v_1, v_2\}$ 满足 $Tv_i = \lambda v_i$, 其中 $i = 1, 2$.

  (*b*) $\mathrm{rank}(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = 1$, 此时根据推论3.5.5解空间的维数是 1, 则此时找不到两个线性无关的向量.

注记. 实际上, 我们对 2 维情况做的分析, 已经暗示了对一般的维数该如何去分析.

4.1 特征值与特征向量

4.1.1 线性映射语言

定义 4.1.1. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$, $\lambda \in \mathbb{F}$ 被称为 T 的**特征值** (eigenvalue), 如果存在 $0 \neq v \in V$ 使得

$$Tv = \lambda v$$

此时 v 称为特征值 λ 对应的**特征向量** (eigenvector).

定义 4.1.2. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$, 其中 $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. 关于 λ 的 n 次多项式 $|\lambda \mathrm{I}_n - T|$ 称为 T 的**特征多项式** (characteristic polynomial).

注记. 显然, $\mathbb{F}$-线性映射 T 的特征值是特征多项式在域 $\mathbb{F}$ 中的根, 因此 n 维线性空间上的线性映射至多有 n 个不同的特征值. 并且值得注意的是其可能没有特征值.

命题 4.1.3. *假设 V 是 n 维 $\mathbb{C}$-线性空间, 给定 $\mathbb{C}$-线性映射 $T: V \to V$, 存在 V 的一组基 B 使得 $[T]_B^B$ 是上三角矩阵.*

证明: 我们对维数 n 做归纳法: 当 $n = 1$ 的时候是显然的. 假设命题对 $n < k$ 都成立, 当 $n = k$ 时, 由于 $\mathbb{C}$ 是代数闭域, 因此 T 的特征多项式总存在根, 即 T 总有特征值. 不妨假设 $v_1 \in V$ 是 T 对于特征值 λ_1 的特征向量. 将 v_1 扩充为 V 的一组基 $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, 则

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathrm{O} & A \end{pmatrix}$$

其中 A 是 $(k-1) \times (k-1)$ 阶矩阵. 根据归纳法存在可逆矩阵 P 使得 PAP^{-1} 是上三角矩阵, 从而考虑基 $B' = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, 则此时 T 在这组基下的矩阵为上三角矩阵. □

推论 4.1.4. *对于 $\mathbb{C}$-线性映射 $T: V \to V$, 其特征值恰为 $[T]_B^B$ 对角线上的元素, 其中 B 是使得 $[T]_B^B$ 为上三角矩阵的基.*

定义 4.1.5. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$, 全体特征值 λ 对应的特征向量构成了一个 $\mathbb{F}$-线性空间, 称为特征值 λ 的**特征子空间** (eigenspace), 记做 V_λ.

命题 4.1.6. *对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$ 以及其特征值 λ, 有*

$$V_\lambda = \ker(\lambda \mathrm{I} - T)$$

证明: 根据定义即可. □

定理 4.1.7. *$\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$ 可对角化当且仅当 V 有特征子空间分解, 即 $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 是 T 的全体不同特征值.*

证明: 假设 $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$, 则任取 $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_s}$ 的基, 将其并起来得到 V 的一组基, 则在这组基下 T 对应的矩阵是对角矩阵; 另一方面, 假设 T 可对角化, 则可以找到 V 的一组由特征向量构成的基, 这组基给出了 V 的特征子空间分解. □

4.1.2 矩阵语言

定义 4.1.8. 对于矩阵 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $\lambda \in \mathbb{F}$ 被称为 A 的**特征值** (eigenvalue), 如果存在非零列向量使得

$$Av = \lambda v$$

此时 v 称为特征值 λ 对应的**特征向量** (eigenvector).

定义 4.1.9. 对于矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 关于 λ 的 n 次多项式 $|\lambda \mathrm{I}_n - A|$ 称为 A 的**特征多项式** (characteristic polynomial).

定义 4.1.10. 对于矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 全体特征值 λ 对应的特征向量构成了一个 $\mathbb{F}$-线性空间, 称为特征值 λ 的**特征子空间** (eigenspace), 记做 V_λ.

命题 4.1.11. *对于矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 以及其特征值 λ, 有*

$$V_\lambda = \ker(\lambda \mathrm{I}_n - T)$$

定理 4.1.12. *矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 可对角化当且仅当 $\mathbb{F}^n$ 有特征子空间分解, 即 $\mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 是 T 的全体不同特征值.*

4.2 极小多项式

定义 4.2.1. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$, 多项式 $f(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ 称为其**零化多项式** (annihilation polynomial), 如果 $f(T) = 0$.

注记. 类似的, 我们可以对矩阵定义其零化多项式, 即将矩阵视作线性映射. 本节之后所有的概念以及结果都可以用矩阵的语言叙述, 在此不再赘述.

定义 4.2.2. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$, 其次数最低的首一零化多项式被称为**极小多项式** (minimal polynomial).

命题 4.2.3. *对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$, 其极小多项式整除其任何一个零化多项式.*

证明: 假设 $m(\lambda)$ 是 T 的极小多项式, $f(\lambda)$ 是 T 的某个零化多项式, 作带余除法则有

$$f(\lambda) = m(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$$

其中 $r(\lambda)$ 显然也是 T 的零化多项式. 如果 $r(\lambda)$ 不为零, 根据带余除法的结果我们有 $\deg r(\lambda) < m(\lambda)$, 这与极小多项式的定义矛盾. $\square$

推论 4.2.4. *对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$, 其极小多项式是唯一的.*

证明: 假设 $m_1(\lambda), m_2(\lambda)$ 都是 T 的极小多项式, 从而有 $m_1(\lambda) \mid m_2(\lambda)$ 以及 $m_2(\lambda) \mid m_1(\lambda)$, 因此 $m_1(\lambda), m_2(\lambda)$ 之间相差一个非零常数 c, 再利用首一性可知 $m_1(\lambda) = m_2(\lambda)$. $\square$

定理 4.2.5 (Cayley-Hamilton)**.** *对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$, 其特征多项式是其零化多项式.*

推论 4.2.6. *对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$, 其极小多项式整除其特征多项式.*

命题 4.2.7. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T:V\to V$, 如果 $f(\lambda)$ 是其零化多项式, 则其特征值 λ 也是该多项式的根. 特别地, 是其极小多项式的根.

注记. 根据推论4.2.6以及命题4.2.7可知, 如果 $\mathbb{F}$-线性映射 $T:V\to V$ 的分解为一次因式的乘积

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\dots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

那么其极小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\dots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$$

其中 $k_i\le n_i, 1\le i\le s$.

定理 4.2.8. 对于 $\mathbb{F}$-线性映射 $T:V\to V$, 其在 $\mathbb{F}$ 上可对角化当且仅当极小多项式 $m(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积, 且没有重根.

证明: 如果 T 可对角化, 即其在某一组基下的矩阵 A 是对角阵, 其不同的特征值分别记为 $\lambda_1,\dots,\lambda_s$, 此时 A 的极小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_s)$; 另一方面, 假设 T 的极小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_s)$, 其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ 互不相同, 考虑

$$h_i(\lambda)=\frac{m(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)}$$

则 $\gcd(h_1,\dots,h_s)=1$, 从而根据裴蜀定理存在 $k_1(\lambda),\dots,k_s(\lambda)\in\mathbb{F}[\lambda]$ 使得

$$k_1(\lambda)h_1(\lambda)+\dots+k_s(\lambda)h_s(\lambda)=1$$

即

$$k_1(T)h_1(T)+\dots+k_s(T)h_s(T)=\mathrm{I}$$

从而任取 $v\in V$, 我们可以将其分解为 $v=v_1+\dots+v_s$, 其中

$$v_i=k_i(T)h_i(T)v$$

如果我们记 $V_i=\ker(\lambda_i\,\mathrm{I}-T)$, 那么

(1) $v_i\in V_i$, 这是因为 $(A-\lambda_i\,\mathrm{I}_n)v_i=k_i(T)m(T)v=0$.

(2) 任取 $1\le i\le s$ 以及 $v\in V_i\cap\sum_{j\ne i}V_j$, 则有

$$0=(k_1(T)h_1(T)+\dots+k_s(T)h_s(T))v=v$$

从而根据命题3.3.5有

$$V=V_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus V_{\lambda_s}$$

根据定理4.1.7可知 T 可对角化. □

推论 4.2.9. n 维 $\mathbb{F}$-线性空间 V 上的 $\mathbb{F}$-线性映射如果有 n 个不同的特征值, 则其可对角化.

证明: 假设特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n)$, 根据命题4.2.7可知此时极小多项式等于特征多项式, 并且是没有重根的一次因式乘积. □

推论 4.2.10. $\mathbb{F}$-线性映射 $T: V \to V$ 可对角化, 假设 W 是 T-不变子空间, 则 $T|_W: W \to W$ 也可对角化.

证明: 假设 $m_V(\lambda)$ 是 $T: V \to V$ 的极小多项式, 那么其也是 $T|_W: W \to W$ 的零化多项式, 从而 $m_W(\lambda)$ 整除 $m_V(\lambda)$. 从而如果 $m_V(\lambda)$ 可以分解为没有重根的一次因式乘积, $m_W(\lambda)$ 也可以分解为没有重根的一次因式乘积, 从而 $T|_W$ 可对角化. □

定义 4.2.11. 矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 称为**幂等矩阵** (idempotent matrix), 如果 $A^2 = \mathrm{I}_n$.

命题 4.2.12. 假设 $\mathbb{F}$ 的特征不为 2, 则幂等矩阵 A 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化.

证明: 注意到 $\lambda^2 - 1$ 是 A 的零化多项式, 从而其极小多项式整除 $\lambda^2 - 1$. 如果 $\mathbb{F}$ 的特征不为 2, $\lambda^2 - 1$ 在 $\mathbb{F}$ 可以分解为 $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$, 从而根据定理4.2.8可知 A 可对角化. □

定义 4.2.13. 矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 被称为**幂零矩阵** (nilpotent matrix), 如果存在 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ 使得 $A^k = 0$.

命题 4.2.14. 幂零矩阵的特征值都为零.

证明: 如果 A 是幂零矩阵, 则某个单项式 λ^k 是 A 的零化多项式, 特别地, 根据命题4.2.7有幂零矩阵的特征值都为零. □

推论 4.2.15. 幂零矩阵可对角化当且仅当其为零矩阵.

证明: 一方面, 如果其可对角化, 由于其特征值都为零从而有其为零矩阵; 另一方面, 零矩阵当然是可对角化的幂零矩阵. □

注记. 上述命题也可以通过极小多项式的观点看出: 如果 A 是非零的幂零矩阵, 那么其极小多项式对于其 λ^k, $k \geq 2$, 从而不是没有重根的一次因式的乘积.

4.3 代数重数与几何重数

定义 4.3.1. 对于矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 特征值 λ 在特征多项式中的重数称为 λ 的**代数重数** (algebraic multiplicity).

定义 4.3.2. 对于矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 特征值 λ 的特征子空间 V_λ 的维数称为 λ 的**几何重数** (geometric multiplicity).

例子. 假设矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 只有一个特征值 λ_1, 即其特征多项式为 $(\lambda - \lambda_1)^n$. 根据定理*4.2.5*可知 $(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)^n = 0$, 因此 $\mathbb{F}^n = \ker(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)^n$. 特别地, A 的特征值 λ_1 的代数重数为

$$n = \dim\{v \in \mathbb{F}^n \mid (\lambda\,\mathrm{I}_n - A)^n v = 0\}$$

命题 4.3.3. 对于矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 特征值 λ 的代数重数为 $\dim V'_\lambda$, 其中

$$V'_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n \mid \text{存在 } k \in \mathbb{N}_{\geq 0} \text{ 使得 } (\lambda\,\mathrm{I}_n - A)^k v = 0\}$$

推论 4.3.4. 对于矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的特征值 λ, 其几何重数小于等于代数重数.

证明: 注意到对于特征值 λ 我们有 $V_\lambda \subseteq V'_\lambda$. □

定理 4.3.5. 矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 可对角化当且仅当对于每一个特征值 λ 其几何重数等于代数重数.

证明: 假设 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\dots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$, 从而给出了 $\mathbb{F}^n$ 的如下直和分解

$$\mathbb{F}^n = V'_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V'_{\lambda_s}$$

注意到代数重数等于几何重数当且仅当对任意 $1 \le i \le s$ 有 $V'_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}$, 根据定理4.1.12即可. □

第五章　双线性型

现在我们开始研究域上的双线性型. 如果不加特殊说明, 在本部分中我们总是假设 $\mathbb{F}$ 是特征不为 2 的域.

5.1　双线性型与格拉姆矩阵

定义 5.1.1. $\mathbb{F}$-线性空间 V 的**对偶空间** (dual space)定义为

$$V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, F) = \{f\colon V \to \mathbb{F}\text{是 }\mathbb{F}\text{-线性映射}\}$$

我们有如下自然的配对:

$$\begin{aligned} g: V^* \times V &\to \mathbb{F} \\ (f, v) &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

并且这个配对是双线性的, 即

(1) 固定 $f \in V^*$, 任取 $v_1, v_2 \in V$ 有 $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

(2) 任取 $\lambda \in \mathbb{F}, v \in V$, 有 $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

(3) 固定 $v \in V$, 任取 $f_1, f_2 \in V$ 有 $(f_1 + f_2)v = f_1(v) + f_2(v)$.

(4) 任取 $\lambda \in \mathbb{F}, f \in V^*$, 有 $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

命题 5.1.2. 我们有如下典范[1]的同构

$$(V^*)^* \cong V$$

证明: 考虑配对 $g: V^* \times V \to \mathbb{F}$ 给出的如下同构

$$\begin{aligned} r_g: V &\to (V^*)^* \\ v &\mapsto g(\text{-}, v) \end{aligned}$$

□

定义 5.1.3. 给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V, W, 映射 $f\colon V \times W \to \mathbb{F}$ 被称为**双线性**的 (bilinear), 如果

(1) $f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$ 对任意的 $v_1, v_2 \in V, w \in W$ 成立.

(2) $f(\lambda v, w) = \lambda f(v, w)$ 对任意的 $v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{F}$ 成立.

(3) $f(v, w_1 + w_2) = f(v, w_1) + f(v, w_2)$ 对任意的 $v, \in V, w_1, w_2 \in W$ 成立.

(4) $f(v, \lambda w) = \lambda f(v, w)$ 对任意的 $v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{F}$ 成立.

[1]线性空间之间的同构被称作**典范的** (canonical), 如果这个同构的给出不依赖于基的选取.

给定一个双线性映射 $f\colon V\times W\to\mathbb{F}$, 固定 $w\in W$, 则可以得到线性映射

$$\begin{aligned} f_w : V &\to \mathbb{F} \\ v &\mapsto f(v,w) \end{aligned}$$

即 $f_w\in V^*$, 从而有如下线性映射

$$\begin{aligned} W &\to V^* \\ w &\mapsto f_w \end{aligned}$$

推论 5.1.4. *我们有如下一一对应:*

$$\{\text{双线性映射} f\colon V\times W\to\mathbb{F}\}\longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W,V^*)$$

证明: 给定 $\varphi : W\to V^*$ 是线性映射, 考虑如下映射即可

$$f(v,w) := (\varphi(w))(v)$$

$\square$

定义 5.1.5. $\mathbb{F}$-线性空间 V 上的一个**双线性型** (bilinear form)指的是双线性映射 $f\colon V\times V\to\mathbb{F}$.

定义 5.1.6. 给定带有双线性型的 $\mathbb{F}$-线性空间 $(V_1,g_1),(V_2,g_2)$, 一个**等距同构** (isometry)指的是一个线性同构 $f\colon V_1\to V_2$, 满足

$$g_2(f(v),f(w)) = g_1(v,w)$$

其中 $v,w\in V_1$.

由于 V 上的一个双线性型等价于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,V^*)$ 中的一个元素, 因此我们可以通过取定 V,V^* 的基来研究双线性型对应的矩阵来研究双线性型. 考虑如下的基: 给定 V 一族基 $\{v_1,\dots,v_n\}$, 考虑 V^* 中的元素 $v_1^*,\dots,v_n^*$, 定义为

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

我们断言 $\{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ 构成了 V^* 的一组基, 称做 $\{v_1,\dots,v_n\}$ 的**对偶基** (dual basis).

1. $\{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ 张成 V^*: 任取 $f\colon V\to\mathbb{F}$, 令 $a_i = f(e_i)$, 则 $f=\sum_{i=1}^n a^i v_i^*$, 因为对任意的 v_j 我们都有

$$(f-\sum_{i=1}^n a_i v_i^*)(e_j) = a_j - a_j = 0$$

2. $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ 线性无关: 假设 $\sum_{i=1}^n a_i v_i^* = 0$, 那么对任意的 j 有

$$0=\sum_{i=1}^n a_i v_i^*(v_j) = a_j$$

现在我们要看一下对偶基在基变换下的表现: 假设 $B=\{v_1,\dots,v_n\}, C=\{w_1,\dots,w_n\}$ 是 V 的两组基, 并且

$$(w_1,\dots,w_n) = (v_1,\dots,v_n)P_{BC}$$

其中 P_{BC} 是从基 B 到基 C 的过渡矩阵.

命题 5.1.7.

$$(w_1^*, \ldots, w_n^*) = (v_1^*, \ldots, v_n^*)(P_{BC}^T)^{-1}$$

证明: 注意到 v_i 是 $(w_1, \ldots, w_n)P_{BC}^{-1}$ 的第 i 列的元素, 从而

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} (P_{BC}^{-1})_{ki} w_k$$

即 $w_j^*(v_i) = (P_{BC})_{ki}^{-1}\delta_{kj} = (P_{BC}^{-1})_{ji}$. 因此

$$w_j^* = \sum_{i=1}^{n} (P_{BC}^{-1})_{ji} v_i^*$$

即

$$(w_1^*, \ldots, w_n^*) = (v_1^*, \ldots, v_n^*)(P_{BC}^T)^{-1}$$

□

定义 5.1.8. 假设 $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 是 V 的一组基, V 上双线性型 g 对于基 B 的**格拉姆矩阵** (gram matrix)定义为

$$G_B = (g(v_i, v_j))_{n\times n}$$

命题 5.1.9. $\mathbb{F}$-线性空间 V 上的双线性型一一对应于 $M_n(\mathbb{F})$, 其中对应由格拉姆矩阵给出.

证明: 给定双线性型 g, 显然它的格拉姆矩阵是 $n \times n$ 矩阵; 另一方面, 给定 $n \times n$ 矩阵 $(g(v_i, v_j))$, 任取 $v, w \in V$, 写作

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$
$$w = \sum_{j-1}^{n} y_j v_j$$

那么定义双线性型 g 如下

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i g(v_i, v_j) y_j \\ &= (x_1, \ldots, x_n) G_B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

并且不难看出这个对应是个双射. □

命题 5.1.10. 对于 $\mathbb{F}$-线性空间 V 以及其上的双线性型 g, 假设 $B = \{v_1, \ldots, v_n\}, C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ 是 V 的两组基, 并且 $C = BP_{BC}$, 那么

$$G_C = P_{BC}^T G_B P_{BC}$$

证明: 直接计算有

$$\begin{aligned}(G_C)_{ij} &= g(w_i, w_j)\\ &= g(\sum_{k=1}^{n} p_{ki}v_k, \sum_{l=1}^{n} p_{lj}v_l)\\ &= \sum_{k,l=1}^{n} p_{ki}p_{lj}g(v_k, v_l)\\ &= (P_{BC}^T G_B P_{BC})_{ij}\end{aligned}$$

□

命题 5.1.11. 对于 $\mathbb{F}$-线性空间 V 以及其上的双线性型 g, 假设 B 是 V 的一组基, B^* 是其对偶基, 那么对于如下的线性映射

$$\begin{aligned} l_g : V &\to V^* & r_g : V &\to V^*\\ v &\mapsto g(v, \text{-}) & v &\mapsto g(\text{-}, v)\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}[l_g]_B^{B^*} &= G_B\\ [r_g]_B^{B^*} &= G_B^T\end{aligned}$$

证明: 直接验证则有

$$\begin{aligned}(l_g(v_i))(v_j) &= g(v_i, v_j) = (G_B)_{ij}\\ (r_g(v_i))(v_j) &= g(v_j, v_i) = (G_B)_{ji}\end{aligned}$$

□

5.2 对称、反对称双线性型与厄尔米特型

定义 5.2.1. $\mathbb{F}$-线性空间 V 上的双线性型 g 被称为是**对称的** (symmetric), 如果 $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$, 对任意的 $v_1, v_2 \in V$ 成立.

定义 5.2.2. $\mathbb{F}$-线性空间 V 上的双线性型 g 被称为是**反对称的** (skew-symmtric), 如果 $g(v_1, v_2) = -g(v_2, v_1)$, 对任意的 $v_1, v_2 \in V$ 成立.

定义 5.2.3. 如果 $\mathbb{F}$ 上带有如下自同构:

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{F} &\to \mathbb{F}\\ a &\mapsto \overline{a}\end{aligned}$$

满足 $\sigma^2 = \mathrm{id}$. $\mathbb{F}$-线性空间 V 上的一个双线性型 g 被称为**厄尔米特型** (Hermitian form), 如果 g 对第一分量线性, 对第二个分量 σ 线性.

注记. 上述三种双线性型可以用格拉姆矩阵如下刻画:

(1) g 是对称双线性型当且仅当格拉姆矩阵是对称矩阵.
(2) g 是反对称双线性型当且仅当格拉姆矩阵是反对称矩阵.
(3) g 是厄尔米特型当且仅当格拉姆矩阵 G_B 满足 $G_B = \overline{G_B^T}$.

在本节剩下的内容中, 如无特殊说明, 双线性型 g 总是指的上述三种中的某一种.

命题 5.2.4. *对于双线性型 g, 如下三条等价:*

(1) G_B *是可逆的.*

(2) r_g *是同构.*

(3) l_g *是同构.*

*满足这样条件的 g 被称为***非退化的** *(non-degenerate).*

而对于一般的情况, 我们需要有一种量来刻画 g 与非退化情况相差的程度.

命题 5.2.5. *对于双线性型 g, 有*

$$\ker r_g = \ker l_g$$

证明: 直接如下验证:

$$\begin{aligned}
\ker r_g &= \{v \in V \mid r_g(v) = 0\} \\
&= \{v \in V \mid g(\text{-}, v) = 0\} \\
&= \{v \in V \mid g(w, v) = 0, \forall w \in V\} \\
&= \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \forall w \in V\} \\
&= \{v \in V \mid g(v, \text{-}) = 0\} \\
&= \ker l_g
\end{aligned}$$

□

定义 5.2.6. 对于双线性型 g, 其**核** (kernel)定义为

$$\ker g := \ker r_g = \ker l_g$$

注记. 对于 $\mathbb{F}$-线性空间上双线性型 g, 其可以诱导如下的双线性型

$$\begin{aligned}
\overline{g} : V / \ker g \times V / \ker g &\to \mathbb{F} \\
g(\overline{v_1}, \overline{v_1}) &\mapsto g(v_1, v_2)
\end{aligned}$$

不难发现双线性型 $\overline{g}$ 是非退化的.

定义 5.2.7. 给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V 的一个子空间 W, W 在双线性型 g 下的**正交补** (orthogonal complement)定义为

$$W^{\perp} := \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

定义 5.2.8. 给定 $\mathbb{F}$-线性空间 V 的两个子空间 V_1, V_2, 称 V 是 V_1, V_2 在双线性型 g 下的**正交直和** (orthogonal direct sum), 记做 $V = V_1 \perp V_2$, 如果

1. $V = V_1 \oplus V_2$.
2. $g(v_1, v_2) = 0$ 对任意的 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ 成立.

注记. 如果带有双线性型的 $\mathbb{F}$-线性空间 (V, g), 其可以写成正交直和分解 $V = V_1 \perp V_2$, 那么实际上我们有如下的等距同构

$$(V, g) \cong (V_1 \oplus V_2, g_1 \oplus g_2)$$

其中 $g_i, i = 1, 2$ 是 g 限制在 $V_i, i = 1, 2$ 上得到的.

命题 5.2.9. *g 是 V 上的双线性型, W 是 V 的子空间, 则如下叙述等价:*

1. $V = W \perp W^{\perp}$.
2. $g|_W : W \times W \to \mathbb{F}$ 非退化.
3. $g|_{W^{\perp}} : W^{\perp} \times W^{\perp} \to \mathbb{F}$ 非退化.

证明: 我们首先断言如果 g 非退化, 则

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$$

因为当 g 非退化时, $l_g : V \to V^*$ 是一个同构. 并且嵌入 $i : W \to V$ 给出了满射 $i^* : W^* \to V^*$, 从而有如下满射:

$$V \xrightarrow{r_g} V^* \xrightarrow{i^*} W^*$$

注意到 $\ker(i^* r_g) = W^{\perp}$, 从而有

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W^* = \dim V - \dim W$$

并且由于 $W, W^{\perp}$ 已经自然满足正交直和的第二个条件, 所以 $V = W \perp W^{\perp}$ 等价于 $V = W \oplus W^{\perp}$, 这等价于 $W \cap W^{\perp} = \{0\}$. 并且注意到 $\ker(r_g|_W) = W \cap W^{\perp}$, 因此 $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ 等价于 $r_g|_W$ 是同构, 即 $g|_W$ 上是非退化的; 用一样的论断可以 $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ 等价于 $r_g|_{W^{\perp}}$ 是同构. □

注记. 对一般的双线性型 g 来说, 我们只有 $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$.

5.3 对称双线性型的分类

本节的目的在于对特殊的 $\mathbb{F}$ 去分类 $\mathbb{F}$-线性空间 V 上的对称双线性型. 根据命题5.2.9, 如果我们可以找到 $\mathbb{F}$-线性空间 V 的一个子空间 W, 使得 g 限制在其上是非退化的, 那么我们就可以将 V 进行正交直和分解 $V = W \perp W^{\perp}$, 即我们可以把 g 写成两个双线性型直和的形式, 这可以帮助我们进行分类.

V 最简单的 (非平凡) 子空间当然是一维的子空间, 任取 $v \in V$ 考虑 $W = \mathrm{span}\{v\}$, 那么 $g|_W$ 是否非退化取决于 $g(v, v)$ 是否为零.

定义 5.3.1. 对于 $\mathbb{F}$-线性空间 V, 其上的线性函数 $q\colon V \to \mathbb{F}$ 被称为一个**二次型** (quadratic form), 如果存在一个对称双线性型 g 使得 $q(v) = g(v, v)$.

命题 5.3.2. *对于对称双线性型 g, 有*

$$g(v + w, v + w) - g(v, v) - g(w, w) = 2g(v, w)$$

证明: 显然. □

推论 5.3.3. *二次型 q 如下决定了一个双线性型*

$$g(v, w) := \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$$

定义 5.3.4. (V, g) 的一组基 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 被称为是正交基, 如果对任意 $i \neq j$ 有 $g(v_i, v_j) = 0$.

定理 5.3.5. *如果 V 是一个 $\mathbb{F}$-线性空间, g 是其上的一个对称双线性型, 那么 (V, g) 存在正交基.*

证明: 我们不妨假设 g 是非退化的, 那么一定存在 $v \in V$ 使得 $g(v, v) \neq 0$, 否则 g 对应的二次型 q 恒为零, 再根据推论5.3.3, 可知 g 恒为零. 那么如果记 $W = \mathrm{span}\{v\}$, 则有 $g|_W$ 是非退化的, 即

$$V = W \perp W^{\perp}$$

再对 V 的维数利用归纳法即可. □

推论 5.3.6. *如果 g 是非退化的对称双线性型, 任取 $v \in V$ 使得 $g(v, v) \neq 0$, 则 v 可以被延拓成 V 的一组正交基.*

注记. 需要注意的是, 即便是你给出了一些相互正交的向量, 它们也不一定可以延拓成一组正交基.

在一组正交基下 $\{v_1, \ldots, v_n\}$, 对称双线性 g 的格拉姆矩阵是一个对角阵, 这实际上我们已经完全分类了 g, 因为 g 完全可以由这些对角线上的元素所刻画. 在 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 的时候, 我们可以做的更加具体.

定理 5.3.7 (惯性定理)**.** *V 是一个 $\mathbb{R}$-线性空间, g 是其上的对称双线性型, 那么存在一组正交基 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 使得*

(1) $g(v_1, v_1) = \cdots = g(v_p, v_p) = 1$;

(2) $g(v_{p+1}, v_{p+1}) = \cdots = g(v_{p+q}, v_{p+q}) = -1$;

(3) $g(v_{p+q+1}, v_{p+q+1}) = \cdots = g(v_n, v_n) = 0$.

其中 $(p, q, n-p-q)$ 由 g 决定.

证明: 存在性是容易的, 因为对于 $\mathbb{R}$-线性空间上的对称双线性型 g, 我们总可以找到正交基, 那么只需要调整正交基的模长以及顺序即可.

唯一性: 首先 $n - p - q$ 由 g 决定是显然的, 因为 $n - p - q = \dim \ker g$. 为了证明 p 和 q 的唯一性, 我们需要再引入一些概念. □

定义 5.3.8. $\mathbb{F}$-线性空间 V 上的对称双线性型 g 被称为

(1) **正定的** (positive definite), 如果 $g(v, v) > 0$ 对任意的 $0 \neq v \in V$ 成立, 记做 $g > 0$.

(2) **负定的** (negative definite), 如果 $g(v, v) < 0$ 对任意的 $0 \neq v \in V$ 成立, 记做 $g < 0$.

(3) **半正定的** (semi-positive definite), 如果 $g(v, v) \geq 0$ 对任意的 $0 \neq v \in V$ 成立, 记做 $g \geq 0$.

(4) **半负定的** (semi-negative definite), 如果 $g(v, v) \leq 0$ 对任意的 $0 \neq v \in V$ 成立, 记做 $g \leq 0$.

命题 5.3.9. *$g > 0$ 当且仅当对任意的正交基 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 有 $g(v_i, v_i) > 0$.*

证明: 显然. □

下面的命题将完成定理5.3.7的证明.

命题 5.3.10.

$$p = \max\{\dim W : W\text{是 } V \text{ 的子空间, 并且} g|_W > 0\}$$

证明: 我们记 $p' = \max\{\dim W \mid W$是 V 的子空间, 并且$g|_W > 0\}$. 首先取 $W = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$, 由于 $g|_W > 0$, 那么有 $p \le p'$. 假设 $p' > p+1$, 那么存在 W 使得 $W \cap \{v_{p+1}, \ldots, v_n\} \ne \{0\}$, 取 $0 \ne v \in W \cap \{v_{p+1}, \ldots, v_n\}$, 那么

$$g(v, v) \le 0$$

矛盾. □

定义 5.3.11. 由 $\mathbb{R}$-线性空间 V 上的对称双线性型 g 确定的 $(p, q, n-p-q)$ 称为 g 的**符号** (signature).

5.4 反对称双线性型的分类

对于域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的反对称双线性型 g, 我们有如下的结果.

命题 5.4.1. *存在一组 V 的基使得 g 对于这组基的格拉姆矩阵为如下分块对角矩阵*

$$\mathrm{diag}\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\}$$

证明: 不妨假设 g 是非退化的. 任取 $0 \ne v \in V$, 存在 $w \in V$ 使得 $g(v, w) \ne 0$, 显然这样的 w 和 v 是线性无关的, 因为 $g(v, v) = 0$. 对 w 进行一些标准化处理我们不妨假设 $g(v, w) = 1$, 那么 $g(w, v) = -1$. 考虑由 $\{v, w\}$ 张成的二维子空间 W, 则有 $g|_W$ 的格拉姆矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

是非退化的, 从而 $V = W \perp W^{\perp}$, 再利用归纳即可. □

注记. 从上面的结果来看, 反对称双线性型 g 的结构相对简单, 并且不依赖于基域的选取.

推论 5.4.2. *对任意反对称矩阵 A, 存在可逆矩阵 P, 使得*

$$P^T A P = \mathrm{diag}\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\}$$

第六章　内积空间

6.1　$\mathbb{R}^n$ 情形

6.1.1　$\mathbb{R}^n$ 上的内积

在 $\mathbb{R}$-线性空间 $\mathbb{R}^n$ 上除了线性结构, 我们还可以去描述向量的长度以及向量之间的角度, 这是通过其上的内积结构给出的.

定义 6.1.1. 对于向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, 其 (标准) **长度** (length)定义为 $\|x\| := \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$.

定义 6.1.2. 对于向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ 上的 (标准) **内积** (inner product)定义为 $\langle x, y \rangle := x^T y$.

定义 6.1.3. 对于 $x =\in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ 上的 (标准) **二次型** (quadratic form)定义为 $q(x) = \langle x, x \rangle$.

注记. 注意到对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 显然有 $\|x\|^2 = q(x)$, 即 $\mathbb{R}^n$ 上的二次型和长度之间可以相互决定.

命题 6.1.4. *对于内积与二次型, 我们有如下性质:*

(1) $\langle -, - \rangle$ *具有双线性性.*

(2) $\langle -, - \rangle$ *具有对称性.*

(3) $q(x) \geq 0$, *并且* $q(x) = 0$ *当且仅当* $x = 0$.

(4) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$.

证明: 直接验证即可. □

注记. 根据 (4) 可知 $\mathbb{R}^n$ 上的内积与二次型之间可以相互决定.

命题 6.1.5 (柯西不等式)**.** *对于* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *有*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

证明: 注意到对于任意的 $t \in \mathbb{R}$ 有 $q(x+ty) \geq 0$, 从而

$$t^2 \langle y, y \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \geq 0$$

考虑上述关于 t 的二次方程的判别式即可. □

定义 6.1.6. $\mathbb{R}^n$ 中向量之间的 (标准) **距离** (distance)定义为

$$\operatorname{dist}(x,y)=\sqrt{q(x-y)}\geq 0$$

其中 $x,y\in\mathbb{R}^n$.

注记. 特别地, $\|x\|=\operatorname{dist}(x,0)$, 从而 $\mathbb{R}^n$ 上的距离和内积可以相互决定.

命题 6.1.7 (三角不等式)**.** 对于 $x,y,z\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\operatorname{dist}(x,y)+\operatorname{dist}(y,z)\geq\operatorname{dist}(x,z)$$

证明: 根据定义要证明

$$\sqrt{q(x-y)}+\sqrt{q(y-z)}\geq\sqrt{q(x-z)}$$

如果令 $X=x-y, Y=y-z$, 则 $x-z=X+Y$, 从而这等价于证明

$$\sqrt{q(X)}+\sqrt{q(Y)}\geq\sqrt{q(X+Y)}$$

两侧平方可知这等价于证明

$$q(X)+q(Y)+2\sqrt{q(X)q(Y)}\geq q(X+Y)$$

再由命题6.1.5, 即柯西不等式即可. □

定义 6.1.8. $\mathbb{R}^n$ 中两个向量之间的**角度** (angle)由如下给出

$$\langle x,y\rangle=\|x\|\|y\|\cos\theta$$

其中 $0\neq x,y\in\mathbb{R}^n$.

注记. 关于两个向量之间的角度, 我们有如下注:

(1) 上述定义是良好的, 因为根据命题6.1.5, 即柯西不等式有

$$-1\leq\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}\leq 1$$

(2) 由于 cos 是周期函数, 所以我们通常限制向量的夹角满足 $0\leq\theta\leq\pi$.

(3) 根据定义可以之间看出向量之间的夹角与内积之间可以相互决定, 即根据之前的注, 可知 $\mathbb{R}^n$ 上的长度、二次型、内积、距离以及角度说的都是同一件事情.

定义 6.1.9. $x,y\in\mathbb{R}^n$ 称为**正交的** (orthogonal), 如果 $\langle x,y\rangle=0$, 即它们之间夹角为 $\pi/2$, 记做 $x\perp y$.

6.1.2 正交变换

在上一节中我们对线性空间 $\mathbb{R}^n$ 赋予了内积结构, 在这一节中我们将考虑那些保持 $\mathbb{R}^n$ 上内积结构的线性映射[1].

例子. 在 $\mathbb{R}^2$ 中旋转可由如下矩阵给出

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

而

$$\langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay$$

直接计算有

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此 $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$.

根据上面的例子, 对于矩阵 (线性映射)A, 如果其满足 $A^T A = \mathrm{I}_n$, 则其保持了 $\mathbb{R}^n$ 上的内积, 从而我们如下定义.

定义 6.1.10. 矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 被称为**正交矩阵** (orthogonal matrix), 如果其满足 $A^T A = \mathrm{I}_n$.

记号 6.1.11. 全体 n 阶正交矩阵记为 $\mathrm{O}(n)$.

命题 6.1.12. $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

证明: 任取 $A \in \mathrm{O}(n)$, 显然 A 可逆, 并且其逆为 A^T. □

命题 6.1.13. 矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 保持 $\mathbb{R}^n$ 的内积当且仅当 $A \in \mathrm{O}(n)$.

证明: 一方面是显然的; 如果 $\langle Ax, Ay\rangle = x^T A^T Ay = x^T y$, 我们取 $x = e_i, y = e_j$ 可知 $A^T A$ 的 (i, j) 元是 δ_{ij}, 即 $A^T A = \mathrm{I}_n$. □

命题 6.1.14. 对于矩阵 $A \in \mathrm{O}(n)$, 如果将 A 写成 $A = (v_1, \dots, v_n)$, 则有 $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$.

证明: 注意到

$$A^T A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} (v_1, \dots, v_n) = (v_i^T v_j) = (\langle v_i, v_j\rangle)$$

从而 $A \in \mathrm{O}(n)$ 当且仅当 $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$. □

定义 6.1.15. $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 被称为**标准正交基** (orthonormal basis basis), 如果 $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$.

推论 6.1.16. 对于矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 如果将 A 写成 $A = (v_1, \dots, v_n)$, 则 $A \in \mathrm{O}(n)$ 当且仅当 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

[1] 这种想法是自然的, 当我们引入新的结构之后, 一个自然的要求就是之前的东西与新的结构有某些相容性

命题 6.1.17. 对于矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, A 为正交矩阵当且仅当其将标准正交基变为标准正交基.

证明: 如果 A 是正交矩阵, 那么其当然将标准正交基变为标准正交基, 因为 A 保持内积; 另一方面, 假设 $\{v_1,\dots,v_n\}$ 是标准正交基, 并且 $\{Av_1,\dots,Av_n\}$ 也是标准正交基, 那么

$$\langle Av_i, Av_j\rangle = \delta_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$$

即 A 在基上保持内积, 再由 A 和内积的线性性即可. □

注记 (格拉姆-施密特正交化). 给定 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{v_1,\dots,v_n\}$, 我们可以通过如下的办法得到一组标准正交基 $\{w_1,\dots,w_n\}$. 这个操作被称为**格拉姆-施密特正交化** (Gram–Schmidt process).

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|}\\
w_2 &= \frac{v_2-\langle v_2,w_1\rangle w_1}{\|v_2-\langle v_2,w_1\rangle w_1\|}\\
w_3 &= \frac{w_3-\langle v_3,w_1\rangle w_1-\langle v_3,w_2\rangle w_2}{\|w_3-\langle v_3,w_1\rangle w_1-\langle v_3,w_2\rangle w_2\|}\\
&\vdots\\
w_n &= \frac{v_n-\sum_{i=1}^{n-1}\langle v_n,w_i\rangle w_i}{\|v_n-\sum_{i=1}^{n-1}\langle v_n,w_i\rangle w_i\|}
\end{aligned}$$

可以直接验证这样得到的是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

命题 6.1.18. 任取 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{v_1,\dots,v_n\}$, 存在一组标准正交基 $\{w_1,\dots,w_n\}$ 使得

$$(w_1,\dots,w_n) = (v_1,\dots,v_n)A$$

其中 $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是对角线全部大于零的上三角矩阵.

证明: 这就是格拉姆-施密特正交化. □

推论 6.1.19 (可逆矩阵的 QR 分解). 给定 $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 存在正交矩阵 Q 以及对角线大于零的上三角矩阵 R, 使得 $A = QR$.

6.1.3 $\mathbb{R}^n$ 中的正交分解

我们考虑如下的问题: 给定 $\mathbb{R}^2$ 中的一些点 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n$, 寻找 a_0,a_1 使得 $y = a_0 + a_1 x$ 满足

$$\sum_{i=1}^n |y_i - a_1x_i - a_0|^2$$

最小, 这被称为最小二乘法问题. 我们可以用 $\mathbb{R}^n$ 中的内积将其翻译为: 求 a_0,a_1 使得如下向量

$$A\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix} - y := \begin{pmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\\ \vdots & \\ 1 & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

的长度的平方最小. 类似的我们还可以考虑另一个问题: 寻找 a_0, a_1, a_2 使得 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - a_2 x_i^2 - a_1 x_i - a_0|^2$$

同样的我们可以翻译为求 a_0, a_1, a_2 使得如下向量

$$A\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - y := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

的长度的平方最小. 如果我们将 A 写作 $A = (w_0, w_1, w_2)$, 不难发现 $\operatorname{rank} A = 3$, 因此如果令 $W = \operatorname{span}\{w_0, w_1, w_2\}$, 则 $W \subset \mathbb{R}^n$ 中的一个三维子空间. 如果存在 $w \in W$, 使得

$$y = w + v$$

其中 v 满足 $v \perp w_1, v \perp w_2, v \perp w_3$, 那么任取 $w' \in W$, 有

$$\begin{aligned} \|y - w'\|^2 &= \|w + v - w'\|^2 \\ &= \|(w - w)'' + v\|^2 \\ &= \langle w - w' + v, w - w' + v\rangle \\ &= \|w - w'\|^2 + \|v\|^2 \\ &\geq \|v\|^2 \end{aligned}$$

并且等号取得当且仅当 $w = w'$, 从而我们可知解决上述问题的 a_0, a_1, a_2 应通过如下方式选取

$$w = a_0 w_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2$$

即引出了如下的概念.

定义 6.1.20. 对于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 W, 其**正交补** (orthogonal complement)定义为

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in W\}$$

命题 6.1.21. *对于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 W, 其正交补满足:*

(1) $W^{\perp}$ *是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.*
(2) $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.
(3) $\mathbb{R}^n = W \oplus W^{\perp}$.
(4) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

证明: (1),(2) 以及 (4) 直接验证即可. 对于 (3), 根据 (2) 我们只需要验证 $\mathbb{R}^n = W + W^{\perp}$: 不妨假设 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 是 W 的一组标准正交基, 那么任取 $v \in \mathbb{R}^n$, 我们令

$$w = \sum_{i=1}^{k} \langle y, v_i\rangle v_i$$

从而任取 $1 \leq j \leq k$ 有

$$\langle w, v_j \rangle = \langle y, v_j \rangle$$

即对任意的 $1 \leq j \leq k$ 有

$$\langle y - w, v_j \rangle = 0$$

从而 $y - w \in W^{\perp}$, 即 $y = (y - w) + w$, 其中 $y - w \in W^{\perp}, w \in W$. □

6.2 内积空间

定义 6.2.1. 对于 $\mathbb{F}$-线性空间 V, 其上的**内积** (inner product)定义为一个对称正定双线性型.

定义 6.2.2. 带有内积的一个 $\mathbb{F}$-线性空间被称为一个 **$\mathbb{F}$-内积空间** (inner product space).

注记. 在给定了 $\mathbb{F}$-线性空间 V 上一个内积以后, 我们也可以定义其上的的长度、距离以及标准正交基等概念, 在此不再赘述.

定义 6.2.3. 对于 $\mathbb{F}$-内积空间 $(V, \langle -,- \rangle_V), (W, \langle -,- \rangle_W)$, $\mathbb{F}$-线性映射 $T : V \to W$ 被称为**等距映射** (isometric map), 如果

$$\langle v, w \rangle_V = \langle Tv, Tw \rangle_W$$

对任意的 $v, w \in V$ 成立. T 被称为**等距同构** (isometry), 如果 T 作为 $\mathbb{F}$-线性映射是一个同构.

记号 6.2.4. 从 $\mathbb{F}$-内积空间 $(V, \langle -,- \rangle)$ 到自身的等距同构全体记为 $\mathrm{O}(V)$.

例子. *$\mathbb{R}^n$ 带有标准内积 $\langle -,- \rangle$ 构成了一个 $\mathbb{R}$-内积空间, 通常也被称为***欧几里德空间** *(Euclidean space), 记做 $\mathbb{E}^n$,*

例子. *考虑 $\mathbb{R}$-线性空间 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 则 $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(X^T Y)$ 给出了其上一个内积.*

例子. *考虑 $\mathbb{R}$-线性空间 $C^{\infty}([0,1])$, 则*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

给出了其上的一个内积.

命题 6.2.5 (柯西不等式)**.** *假设 $(V, \langle -,- \rangle)$ 是一个 $\mathbb{F}$-内积空间, 则*

$$|\langle X, Y \rangle|^2 \leq \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle$$

其中 $X, Y \in V$.

命题 6.2.6. *对于 $\mathbb{F}$-内积空间 $(V, \langle -,- \rangle)$, 其总有标准正交基.*

证明: 格拉姆-施密特正交化即可. □

我们知道, 对于 n 维 $\mathbb{F}$-线性空间 V 来说, 选定一组基之后其同构于 $\mathbb{F}^n$, 对内积空间来说, 也有类似的事情, 即对 $\mathbb{R}$-内积空间 V 来说, 选定一组标准正交基之后, 其等距同构于欧几里德空间.

命题 6.2.7. 对于 n 维 $\mathbb{F}$-内积空间 $(V, \langle -, - \rangle)$ 来说, 选定标准正交基 $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ 后,

$$\begin{aligned} T : (V, \langle -, - \rangle) &\to \mathbb{E}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

是一个等距同构.

证明: 首先根据命题3.4.4, 我们已经有其作为 $\mathbb{R}$-线性映射是一个同构, 现在只需要证明其为等距映射即可: 任取 $v, w \in V$, 假设

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad [w]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

那么

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle v_i, v_j \rangle \end{aligned}$$

而由于 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 是标准正交基, 从而 $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, 因此

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle [v]_B, [w]_B \rangle$$

□

并且我们知道, 在选取好基之后, 线性映射与矩阵一一对应, 在这里我们也有平行的结果.

命题 6.2.8. 对于 n 维 $\mathbb{F}$-内积空间 $(V, \langle -, - \rangle)$ 以及 $\mathbb{F}$-线性映射 $T : V \to V$, 选定标准正交基 $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ 后, 有 $T \in \mathrm{O}(V)$ 当且仅当 $[T]_B^B \in \mathrm{O}(n)$.

证明: 任取 $v, w \in V$, 假设 $[v]_B = x, [w]_B = y$ 以及 $[T]_B^B = A$, 直接计算有

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= x^T y \\ \langle Tv, Tw \rangle &= (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay \end{aligned}$$

即 T 是等距同构当且仅当 $[T]_B^B$ 是正交矩阵. □

6.3 内积空间上的线性变换

6.3.1 等距同构的分类

给定 n 维 $\mathbb{R}$-内积空间 $(V, \langle -, - \rangle)$, 在本节中我们要去分类其上的所有的等距同构, 根据命题6.2.8这实际上归结于搞清楚 $\mathrm{O}(n)$ 中有哪些元素. 由于正交矩阵的行列式一定为 1, 从而当 $n = 1$ 的时候情况的是容易的

$$\mathrm{O}(1) = \{\pm 1\}$$

对于更大的一般的维数, 我们期待通过归纳法来解决问题, 这主要归功于如下两个命题.

命题 6.3.1. 对于 $\mathbb{R}$-内积空间 $(V, \langle -,- \rangle)$ 以及其上的 $\mathbb{R}$-线性映射 $T : V \to V$, T 一定有一维或二维不变子空间.

证明: 这依赖于 $\mathbb{R}[x]$ 中的不可约多项式只有一次和二次的. □

命题 6.3.2. 对于 $\mathbb{F}$-内积空间 $(V, \langle -,- \rangle)$ 以及其上的等距同构 $T : V \to V$, 如果子空间 W 是 T-不变子空间, 那么 $W^\perp$ 也是 T-不变子空间.

证明: 任取 $w \in W, v \in W^\perp$, 则

$$\langle Tv, w \rangle = \langle Tv, TT^{-1}w \rangle = \langle v, T^{-1}w \rangle$$

由于 W 是 T-不变子空间, T 是可逆的, 从而 W 也是 T^{-1}-不变子空间, 因此

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^{-1}w \rangle = 0$$

□

定理 6.3.3. 对于

6.3.2 自伴随算子

定义 6.3.4. 对于 $\mathbb{F}$-内积空间 $(V, \langle -,- \rangle)$, $\mathbb{F}$-线性映射 $T : V \to V$ 被称为**自伴随算子** (self-adjoint operator), 如果对任意的 $v, w \in V$ 满足

$$\langle v, Tw \rangle = \langle Tv, w \rangle$$

命题 6.3.5. 对于 $\mathbb{F}$-内积空间 $(V, \langle -,- \rangle)$, $\mathbb{F}$-线性映射 $T : V \to V$ 是自伴随算子当且仅当其在标准正交基 $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 下的矩阵 $A = [T]_B^B$ 是对称矩阵.

证明: 假设 $[v]_B = x, [w]_B = y$, 那么[2]

$$\begin{aligned}\langle v, Tw \rangle &= x^T Ay \\ \langle Tv, w \rangle &= (Ax)^T y = x^T A^T y\end{aligned}$$

因此 T 是自伴随算子当且仅当 $[T]_B^B$ 是对称矩阵. □

命题 6.3.6. 对于 $\mathbb{F}$-内积空间 $(V, \langle -,- \rangle)$ 以及自伴随算子 $T : V \to V$, 假设 $W \subset V$ 是 T-不变子空间, 则 $W^\perp$ 也是 T-不变子空间.

证明: 任取 $v \in W^\perp, w \in W$, 直接计算则有

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle = 0$$

从而 $Tv \in W^\perp$. □

[2]注意, 在这里由于符号的混用, T 既指 $\mathbb{F}$-线性映射, 又指矩阵的转置, 请读者留心.

上述命题启示我们可以完全类似等距同构分类时做的事情, 去分类自伴随算子, 即我们只需要把一维和二维的情况搞清楚即可: 一维情况是容易的, 因为任何 1×1 阶矩阵总是对称矩阵. 在二维时, 假设在某一组基下自伴随算子 T 表达为

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

则特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0$, 其判别式 $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$, 我们考虑如下两种情况:

(1) $\Delta > 0$ 时, 此时 A 有两个不同的特征值, 从而在 $\mathbb{R}$ 上可对角化.

(2) $\Delta = 0$ 时, 此时 $a = c, b = 0$, 因此

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

是对角阵, 即 A 此时也可对角化.

综上所述, 我们有如下的结果:

定理 6.3.7. 对于 $\mathbb{F}$-内积空间 $(V, \langle -, - \rangle)$, 其上的自伴随算子 $T : V \to V$ 可对角化.

第七章　作业

基础题部分必做, 记入成绩; 思考题部分选做, 不计成绩.

7.1　作业一

7.2　作业二

7.2.1　基础题

练习. 计算矩阵乘法:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ -3 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & -2 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} X & 1 & 0 \\ X^2+X & 2 & 0 \\ 0 & X & X-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & X & -X \\ 8 & -X-2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ 其中 $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.
4. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^6$.

练习. 计算如下矩阵的逆矩阵:

1. $\begin{pmatrix} 1 & a & z \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad-bc \neq 0$;
3. $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. 利用你计算的结果解方程 $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}$.

练习. 求下述 n 阶矩阵的逆:

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

(其中 $a_i \neq 0$.)

注记. 提示: 有时解线性方程组比求逆矩阵更容易.

练习. 设矩阵 A, B 的行数相等. 证明: 存在矩阵 X 使得 $AX = B$ 当且仅当 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A, B)$.

练习. 对于 n 阶方阵 A, B, C, 证明

$$\operatorname{rank} ABC \geq \operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC - \operatorname{rank} B.$$

注记. 提示: 对如下分块矩阵作行 (列) 变换.

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix}.$$

练习. 设 A 是二阶矩阵, 若有 $n > 2$, 使 $A^n = O$, 求证: $A^2 = O$.

练习. 设 A 为 n 阶实反对称阵, 即 $A^T = -A$, 证明: $I_n - A$ 是可逆的.

练习. 证明: 与所有 n 阶方阵均可交换的 n 阶方阵必为纯量方阵, 即形如 $\lambda I, \lambda \in \mathbb{C}$.

练习. 设有 n 个矩阵 $A^{(1)}, \cdots, A^{(n)}$, 其阶数未知, 但满足乘积 $P = A^{(1)}A^{(2)} \cdots A^{(n)}$ 有意义. 记 $A^{(k)}$ 的第 i 行第 j 个元素为 $a_{ij}^{(k)}$, P 的第 i 行第 j 个元素为 p_{ij}. 请用 $a_{ij}^{(k)}$ 表示 p_{ij}.

注记. 提示: 答案并不复杂. $n = 2$ 时的答案为

$$p_{ij} = \sum_k a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(2)}.$$

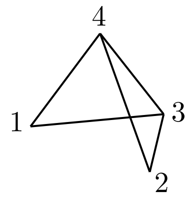
练习. 设 $G = (V, E)$ 是一个图, 顶点集 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$. n 阶矩阵 A 是 G 的邻接矩阵, 即 A 的元素 a_{ij} 等于顶点 i, j 之间边的数量. 证明 A^k 的第 i 行第 j 个元素等于 i, j 之间长度为 k 的道路的数量[1].

注记. 提示: 使用练习7.2.1的结果.

练习. 1. 求下图 G 中从顶点 1 到顶点 2 的长度为 8 的道路的数量.

[1]所谓 i, j 之间长度为 k 的道路, 是指 V 的一列元素 $i = v_0, v_1, \cdots, v_k = j$ 和 E 的一列元素 $e_1, \cdots, e_k$, 满足 e_h 的顶点为 v_{h-1}, v_h.

2. 证明对任意正整数 n, G 中从顶点 2 到顶点 3 的长度为 n 的道路的数量是完全平方数.



练习. 回顾第一次课里介绍的 *Google* 的 *PageRank* 算法. 对任意一个有向图 N, 其对应的线性方程组是否一定有非零解?

注记. 提示: 这个方程可以表示为 $Ax = 0$, A 是某个方阵. 考虑 A^T 以及方程 $A^Ty = 0$.

7.2.2 思考题

练习. 课上我们研究过 $G(m, n)$ 的分解中 $\mathbb{R}^i$ 的个数, 记为 b_i, 验证 $b_i = b_{m(n-m)-i}$.

练习. 不用矩阵, 而是用线性空间的观点证明问题7.2.1.

练习. 你能对非方形的矩阵定义逆吗? (可参考 *Penrose* 伪逆.)

练习. 考虑 $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[X, X^{-1}])$. 证明, 存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[X])$ 及 $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[X^{-1}])$ 使得

$$QMP = \begin{pmatrix} X^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{k_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X^{k_n} \end{pmatrix}$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}$ 及 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$.

7.3 作业三

不加说明的情况下, 本节总是考虑 $\mathbb{R}$ 上的矩阵和线性空间.

7.3.1 基础题

练习. 判断下述向量组是否线性无关, 并找它们生成的子空间的一组基:

1. $a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (3, 6, 7)$;
2. $a_1 = (2, -3, 1), a_2 = (3, -1, 5), a_3 = (1, -4, 3)$;
3. $a_1 = (4, -5, 2, 6), a_2 = (2, -2, 1, 3), a_3 = (6, -3, 3, 9), a_4 = (4, -1, 5, 6)$;
4. $a_1 = (1, 0, 0, 2, 5), a_2 = (0, 1, 0, 3, 4), a_3 = (0, 0, 1, 4, 7), a_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

练习. 给定一个向量组

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i = 1, 2, \cdots, s, s \leq n$$

证明，如果

$$|a_{jj}| > \sum_{1\le i\le s, i\ne j} |a_{ij}|, j = 1, \cdots, s,$$

则该向量组线性无关.

练习. 证明每个秩为 1 的矩阵有下述分解

$$\begin{bmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & \cdots & b_1c_n \\ b_2c_1 & b_2c_2 & \cdots & b_2c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_mc_1 & b_mc_2 & \cdots & b_mc_n \end{bmatrix} = B^T \cdot C$$

其中 $B = (b_1, b_2, \cdots, b_m), C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 都是行向量组.

练习. 求矩阵 A, 使得 A 以如下向量组生成的子空间为解空间, 并求解空间的一组基:

1. $\{(1, -1, 1, 0)^T, (1, 1, 0, 1)^T, (2, 0, 1, 1)^T\}$;
2. $\{(1, -1, 1, -1, 1)^T, (1, 1, 0, 0, 3)^T, (3, 1, 1, -1, 7)^T\}$.

练习. 对于空间 $\mathbb{R}^4$ 的如下向量组生成的线性子空间, 求两个子空间的交的维数, 并求交的一组基, 并请思考如何计算最快.

1. $S = \text{span}\{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}, T = \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}$;
2. $S = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 3, 1, 3)\}$,
   $T = \text{span}\{(1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1)\}$.

练习. 回顾课上域的定义. 证明, 加法逆和乘法逆都是唯一的.

练习. 对 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, 定义其 “迹” 为

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 证明 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
2. 证明不存在 $n \times n$ 的矩阵 A, B 使得 $AB - BA = \mathrm{I}_n$.

练习. 证明线性方程组 $Ax = b$ 有解当且仅当 $\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解.

练习. 对于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 V, W, 证明

$$\dim V \cap W + n \ge \dim V + \dim W$$

7.3.2 思考题

练习. 证明反对称矩阵的秩为偶数.

练习. 设 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是一个可逆方阵. A 的一个 LDU 分解指 $A = LDU$, 其中 L 是一个主对角线均为 1 的下三角矩阵, U 是一个主对角线均为 1 的上三角矩阵, D 是一个可逆的对角矩阵. 记 $A_m = (a_{ij})_{1\le i,j\le m}$. 证明,$A$ 存在 LDU 分解当且仅当对每个 $1 \le m \le n$, A_m 都可逆, 并且当 A 存在 LDU 分解时, 其 LDU 分解是唯一的.

注记. A_m 称做 A 的顺序主子阵. 请用这个结论说服自己, "大部分" 矩阵都具有 LDU 分解, 思考如何来定义 "大部分".

练习. *对于练习7.3.1的第二问, 如果 A 和 B 换成有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的 n 阶方阵, 结论是否依然成立? 试找出对哪些 n 存在这样的 A 和 B, 并举出例子.*

第八章　试题

8.1　期中试题

8.1.1　必做题

注记. 每题 15 分，要求有清晰的过程。答题纸上注明姓名学号.

练习. 令 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

(1) 证明和 B 交换的矩阵 A 的集合 $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$ 是 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 的子空间.

(2) 找到 W 的一组基.

练习. 找到一个 3×3 的实矩阵 A，使得

$$\ker A = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

练习. 计算以下关于 x 的函数的导数

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 35 & 3 & 5 \\ 4 & x & 6 & 21 \\ -1 & 32 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

练习. 令 G 是 2×2 阶可逆实矩阵组成的集合，B 是 G 中上三角矩阵组成的子集，$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，定义 G 的子集 $B\omega B$ 为 $B\omega B = \{g\omega h \mid g, h \in B\}$. 证明 G 是 B 和 $B\omega B$ 的无交并.

练习. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶方阵. 设 A 可逆，$B = (b_{ij})_{n\times n}$ 是一个严格上三角矩阵，即当 $i \geq j$ 时，$b_{ij} = 0$. 定义 $M_n(\mathbb{R})$ 上的线性变换 φ 如下

$$\varphi(X) = AX - XB$$

证明对任意 $C \in M_n(\mathbb{R})$，存在唯一的 X 使得 $\varphi(X) = C$.

练习. 设 A, B 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $m \times n$ 矩阵，$\operatorname{rank} A = r, \operatorname{rank} B = s$，并且 $\operatorname{rank} A + B = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$. 证明：存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

练习. $\Phi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是一个映射, 满足以下条件:

(1) $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B), \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

(2) 对任意上三角矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(A)$ 等于 A 的主对角线元素之积.

(3) 对任意下三角矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(A)$ 等于 A 的主对角线元素之积.

那么

(a) 证明: $\Phi(A) = |A|$ 对任意 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 成立.

(b) 如果 Φ 只满足条件 (1) 和 (2), 结论是否成立? 请证明.

练习. 考虑 $T = \{XY - YX : X, Y \in M_n(\mathbb{C})\}, S$ 为 T 在 $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 中生成的子空间. 证明

$$S = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : \mathrm{Tr}(X) = 0\}$$

8.1.2 以下为选做题，可在考试后一天内网络学堂继续提交，考试后提交的可得一半分数

练习. 设 A, B, C, D 是 3×3 的复对称矩阵，即 $A = A^T, B = B^T, C = C^T, D = D^T$. 证明存在不全为零的复数 a, b, c, d 使得

$$\mathrm{rank}(aA + bB + cC + dD) \leq 1.$$

练习. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, 证明

$$\sum_{\sigma\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n)} = 0.$$

其中 S_{2n} 表示 $2n$ 个元素的置换群. $\mathrm{sgn}(\sigma)$ 表示置换 σ 的符号，即 $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{l(\sigma)}$，其中 $l(\sigma)$ 是 σ 中逆序对的个数，即集合 $\{(l, k) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq l < k \leq 2n, \sigma(l) > \sigma(k)\}$ 中元素的个数.

8.2 期末试题

练习 (15′). 判断以下矩阵在复数域上是否可以对角化，如果可以，求出可逆复方阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵; 如果不能，请说明理由.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

练习 (10′). 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

练习 (10′). 定义 P_n 为关于未定元 x 次数小于或等于 n 的复系数多项式组成的复线性空间. 定义 P_n 上的线性变换 $T\colon P_n \to P_n$ 为 $T(f) = f' + f$. 求这个线性变换的特征值和对应的特征向量.

练习 (15′). 假设 V 是关于 x 的次数小于或等于 3 次的实系数多项式组成的实线性空间. 定义 V 上的对称双线性型为 $B(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x\,dx$. 求 B 的符号.

练习 (15′). 假设 A 是一个 n 阶实方阵，有实特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 和奇异值 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$. 证明 $\sigma_1 \geq \lambda_1$.

练习 (10′). 求 n 阶实正交矩阵的行列式的所有可能取值. 并对每一个可能值举出一个对应的 n 阶正交矩阵.

练习 (10′). 已知一次实验测得关于不同自变量 x 的函数值 y 为 $(x_1, y_1) = (1,1), (x_2, y_2) = (0,1), (x_3, y_3) = (-1,2), (x_4, y_4) = (2,4), (x_5, y_5) = (3,5)$. 求实系数一次函数 $y(x) = a + bx$ 使得 $\sum_i |y(x_i) - y_i|^2$ 最小.

练习 (15′). 取 α 和 β 为 n 维复列向量. 请问 n 阶方阵 $\alpha \cdot \beta^T$ 是否一定可以对角化? 如果一定可对角化，请证明. 如果不一定，请举出例子，并说明在什么时候可以对角化.

索引