Лекции по математическому анализу для студентов ф-та КНиИТ.
Третья часть.

Л.В. Сахно

Содержание

1 Поверхностные интегралы

1.1 Поверхности в пространстве.

Поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$ может быть задана различными способами. Пусть в пространстве фиксирована прямоугольная система координат $Oxyz$ с ортонормированным базисом $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Поверхность может быть задана как график некоторой непрерывной функции

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

или

$$x = f(y, z),\ (y, z) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

или

$$y = f(x, z),\ (x, z) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

В этих случаях поверхность называют *явно заданной поверхностью.*

Поверхность может быть задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

которое не разрешено относительно какой-либо из переменных. Тогда ее называют *неявно заданной поверхностью.*

Пусть $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, функция F непрерывно дифферкнцируема и

$$grad\ F(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Тогда по крайней мере одна из производных F'_x, F'_y, F'_z в точке (x_0, y_0, z_0) отлична от нуля. Если, например, $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то согласно теореме о неявной функции уравнение $F(x, y, z) = 0$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) разрешимо относительно переменной z, т. е. эквивалентно уравнению $z = f(x, y)$.

Наконец, более общий способ задания поверхности - *параметрическое представление.*

Пусть поверхность Φ задана следующими равенствами:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

Если поверхность задана в явном виде, например, уравнением $z = f(x, y)$, то ее параметрическое уравнение в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

В дальнейшем будем рассматривать поверхности, заданные параметрически. Причем будут выполнятся следующие условия:

1) множество D является замкнутым ограниченным элементарным множеством, граница γ которого представляет собой простой кусочно гладкий контур, а отображение, задаваемое равенствами

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

взаимно однозначно на множестве внутренних точек множества D (простая поверхность);

2) функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ и их частные производные первого порядка непрерывны на множестве D вплоть до границы γ (гладкая поверхность);

3) хотя бы один из якобианов

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$$

отличен от нуля при любых значениях u и v (регулярная поверхность, невырожденная поверхность или поверхность без особых точек).

Поверхности, удовлетворяющие указанным трем условиям, будем называть кратко *гладкими поверхностями.*

Замечание. На границе γ некоторые частные производные функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ могут не существовать в обычном смысле. Поэтому в этом определении под частной производной в граничной точке (u_0, v_0) множества D будем понимать предел соответствующей частной производной при стремлении точки $(u, v) \in D$ к точке (u_0, v_0). Если частная производная в граничной точке существует в обычном смысле, то можно показать, что оба определения частной производной в точке границы приводят к одному и тому же значению.

Обозначим

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

$$\overline{r}'_u(u, v) = (x'_u(u, v), y'_u(u, v), z'_u(u, v)),$$
$$\overline{r}'_v(u, v) = (x'_v(u, v), y'_v(u, v), z'_v(u, v)),$$

Напомним, что *касательная плоскость к поверхности* Φ в точке $P \in \Phi$ - это плоскость, проходящая через точку P, которая содержит все касательные к кривым, проходящим через точку P и лежащим на поверхности Φ. *Нормаль к поверхности* Φ в точке $P \in \Phi$ - это прямая, проходящая через P и перпендикулярная касательной плоскости.

Если вектор-функция $\overline{\rho}(t) = (\rho_1(t), \rho_2(t)),\ t \in [t_1, t_2]$, непрерывно дифференцируема, $(\rho'_1)^2(t) + (\rho'_2(t))^2 \neq 0$ при любом $t \in [t_1, t_2]$, и множество значений $E(\overline{\rho}) \subset D$, то вектор-функция

$$\overline{f}(t) = (x(\rho_1(t), \rho_2(t)), y(\rho_1(t), \rho_2(t)), z(\rho_1(t), \rho_2(t)))$$

представляет параметризованную гладкую кривую C, лежащую на поверхности Φ.

Пусть координаты точки $P \quad x_0 = \varphi_1(u_0, v_0),\ y_0 = \varphi_2(u_0, v_0)$,
$z_0 = \varphi_3(u_0, v_0)$ и $(u_0, v_0) = (\rho_1(t_0), \rho_2(t_0))$. Тогда касательный вектор $\overline{f}'(t_0)$ к кривой C в точке P согласно правилу дифференцирования сложной функции может быть найден по формуле

$$\overline{f}'(t_0) = (x'_u(u_0, v_0)\rho'_1(t_0) + x'_v(u_0, v_0)\rho'_2(t_0), y'_u(u_0, v_0)\rho'_1(t_0) +$$

$$+ y'_v(u_0, v_0)\rho'_2(t_0), z'_u(u_0, v_0)\rho'_1(t_0) + z'_v(u_0, v_0)\rho'_2(t_0)).$$

Таким образом

$$\overline{f}'(t_0) = \rho'_1(t_0)\overline{r}'_u(u_0, v_0) + \rho'_2(t_0)\overline{r}'_v(u_0, v_0),$$

т. е. любой касательный вектор в точке M_0 к кривой, лежащей на поверхности Φ, является линейной комбинацией двух векторов $\overline{r}'_u(u_0, v_0)$ и

$\overline{r}'_v(u_0, v_0)$, и эти вектора, отложенные от точки M_0, лежат в касательной плоскости к поверхности.

Тогда векторное произведение $\overline{r}'_u(u_0, v_0) \times \overline{r}'_v(u_0, v_0)$ является нормальным вектором к поверхности в точке M_0, и касательная плоскость может быть задана уравнением в общем виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

в котором A, B, C - координаты вектора $\overline{r}'_u(u_0, v_0) \times \overline{r}'_v(u_0, v_0)$. Используя правило вычисления векторного произведения в прямоугольных координатах, получаем

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u_0, v_0) = y'_u(u_0, v_0)z'_v(u_0, v_0) - y'_v(u_0, v_0)z'_u(u_0, v_0),$$

$$B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u_0, v_0) = z'_u(u_0, v_0)x'_v(u_0, v_0) - z'_v(u_0, v_0)x'_u(u_0, v_0),$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) = x'_u(u_0, v_0)y'_v(u_0, v_0) - x'_v(u_0, v_0)y'_u(u_0, v_0), ,$$

1.2 Двусторонние поверхности.

Пусть Φ - гладкая поверхность с параметрическим представлением

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D. \tag{1}$$

Для произвольной точки $(u, v) \in D$ вектор $\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v = (A, B, C)$, где

$$\begin{aligned} A = A(u, v) &= \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \\ B = B(u, v) &= \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \\ C = C(u, v) &= \frac{D(x, y)}{D(u, v)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим единичный вектор

$$\overline{n} = \frac{\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}. \tag{3}$$

Координаты вектора $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Определение 1.1. *Вектор $\overline{n} = \overline{n}(\overline{r})$ называют **нормалью к поверхности** Φ, отвечающей параметризации $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$.*

Заметим, что вектор-функция $\overline{n}(\overline{r})$ является непрерывной. Если задана другая параметризация $\overline{\rho}$ поверхности Φ, то нормаль к поверхности Φ либо не меняется во всех точках Φ, либо меняет свое направление сразу во всех точках Φ. Поэтому говорят, что нормаль к поверхности, отвечающая некоторой параметризации этой поверхности, выделяет на ней ее сторону. Поверхность с выделенной стороной называется **двусторонней поверхностью.**

Определение 1.2. *Выделение одной из сторон поверхности Φ с помощью параметризации называется **ориентацией поверхности** Φ.*

Для поверхности заданной явно уравнением $z = f(x, y),\ (x, y) \in D$, имеем

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \quad (x, y) \in D. \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

Тогда

$$\overline{r}'_u = (1, 0, f'_u), \quad \overline{r}'_v = (0, 1, f'_v)$$

и

$$\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v = (-f'_u, -f'_v, 1).$$

После нормировки получим

$$\cos\alpha = \frac{-f'_u}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{-f'_v}{\sqrt{1+(f'_u)^2+(f'_v)^2}}, \tag{5}$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(f'_u)^2+(f'_v)^2}},$$

Если поверхность,заданна неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, то вектор $(F_x,\ F'_y,\ F'_z)$ ортогонален к касательной плоскости. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}, \tag{6}$$
$$\cos\gamma = \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}.$$

1.3 Площадь поверхности.

Наша задача - определить меру, то есть понятие площади гладкой поверхности.

Для простоты рассуждений предположим, что плоское множество D есть замкнутый квадрат со сторонами, параллельными осям координат. Построим разбиение T квадрата D на равные квадраты $D_{k,l},\ k,l=1,\ldots,n$, со стороной h ($\mu(D_{k,l})=h^2$). Пусть точка $(u_{k,l},v_{k,l})$ - левая нижняя вершина квадрата $D_{k,l}$.

Заменим отображение $\Delta\overline{r}=\overline{r}(u,v)-\overline{r}(u_{k,l},v_{k,l})$ дифференциалом $d\overline{r}(u_{k,l},v_{k,l})$. Тогда образом квадрата $D_{k,l}$ будет параллелограмм с вершиной в точке $\overline{r}(u_{k,l},v_{k,l})$, построенный на векторах $\overline{r}'_u(u_{k,l},v_{k,l})h$ и $\overline{r}'_v(u_{k,l},v_{k,l})h$. Площадь этого параллелограмма равна модулю векторного произведения

$$\left|\overline{r}'_u(u_{k,l},v_{k,l})h\times\overline{r}'_v(u_{k,l},v_{k,l})h\right| = \left|\overline{r}'_u(u_{k,l},v_{k,l})\times\overline{r}'_v(u_{k,l},v_{k,l})\right|h^2 =$$
$$= \left|\overline{r}'_u(u_{k,l},v_{k,l})\times\overline{r}'_v(u_{k,l},v_{k,l})\right|\mu(D_{k,l}).$$

Построим сумму

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left|\overline{r}'_u(u_{k,l},v_{k,l})\times\overline{r}'_v(u_{k,l},v_{k,l})\right|\mu(D_{k,l}).$$

Определение 1.3. *Предел $\sigma(T)$ при стремлении диаметра разбиения к нулю ($h \to 0$) называют **площадью поверхности** Φ. Обозначим ее через S.*

В то же время сумма $\sigma(T)$ является интегральной суммой для двойного интеграла по области D от функции $|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|$. Таким образом, для площади поверхности Φ имеем равенство

$$S = \iint\limits_D |\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| dudv. \tag{7}$$

Поскольку

$$|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

то

$$S = \iint\limits_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv. \tag{8}$$

Введем функции

$$E = (r'_u)^2 = (x'_u(u,v))^2 + (y'_u(u,v))^2 + (z'_u(u,v))^2,$$

$$F = r'_u r'_v = x'_u(u,v)x'_v(u,v) + y'_u(u,v)y'_v(u,v) + z'_u(u,v)z'_v(u,v),$$
$$G = (r'_v)^2 = (x'_v(u,v))^2 + (y'_v(u,v))^2 + (z'_v(u,v))^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|^2 = (r'_u)^2 (r'_v)^2 - (r'_u r'_v)^2 = EG - F^2.$$

Поэтому равенство (8) можно переписать в виде

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{9}$$

В случае поверхности Φ, заданной явно уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, будем иметь равенство

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2} dudv. \tag{10}$$

1.4 Поверхностный интеграл первого рода.

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в точках гладкой поверхности Φ, имеющей параметрическое представление (1)

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \ \ (u, v) \in D.$$

Пусть τ - набор измеримых по Жордану множеств $D_1, \ldots, D_n$ являющийся разбиением множества D, Δ_τ - диаметр разбиения, $\Phi_i, \ i = 1, \ldots, n$, - части поверхности, соответствующие множествам $D_i, \ i = 1, \ldots, n$, ΔS_i - их площади, и точки $(u_i, v_i) \in D_i, \ i = 1, \ldots, n$.

Построим сумму

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\Delta S_i$$

Определение 1.4. *Если существует предел I при $\Delta_\tau \to 0$ интегральной суммы $\sigma(\tau)$, то он называется* ***поверхностным интегралом первого рода*** *от функции f по поверхности Φ и обозначается символом*

$$I = \iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)dS.$$

Теорема 1.4.1. *Пусть Φ - гладкая поверхность, имеющая параметрическое представление (1), и функция $f(x, y, z)$ непрерывна во всех точках Φ. Тогда поверхностный интеграл первого рода существует и может быть вычислен по формуле*

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}dudv. \qquad (11)$$

Доказательство. Обозначим

$$I^* = \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}dudv.$$

Имеем

$$\left|I^* - \sigma(\tau)\right| = \left|I^* - \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i),z(u_i,v_i))\Delta S_i\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} \big| f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) -$$

$$- f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i),z(u_i,v_i))\big|\sqrt{EG-F^2}dudv \leq$$

$$\leq \max_{(u,v)\in D}\sqrt{EG-F^2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\mu(D_i),$$

где ω_i - колебание функции f на множестве D_i. Последняя часть цепочки неравенств стремится к нулю при $\Delta_\tau \to 0$ в силу непрерывности функций f и $\sqrt{EG-F^2}$ на замкнутом множестве D. Таким образом, предел интегральной суммы $\sigma(\tau)$ при $\Delta_\tau \to 0$ равен числу I^*. $\square$

Замечание. В случае поверхности Φ, заданной явно уравнением $z=\varphi(x,y)$, формула (11) принимает вид

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)dS =$$

$$= \iint\limits_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}dxdy, \qquad (12)$$

где D - проекция поверхности Φ на плоскость xOy.

1.5 Поверхностный интеграл второго рода.

Пусть Φ - гладкая поверхность с параметрическим представлением (1)

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v)), \quad (u,v)\in D,$$

и на поверхности Φ заданы функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. Определим **поверхностные интегралы второго рода**:

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz := \iint\limits_{D} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))A(u,v)dudv, \qquad (13)$$

$$\iint\limits_{\Phi} Q(x,y,z)dzdx := \iint\limits_{D} Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))B(u,v)dudv, \qquad (14)$$

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy := \iint\limits_{D} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))C(u,v)dudv, \qquad (15)$$

или

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy :=$$

$$= \iint\limits_{D} \big(P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))A(u,v)+Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))B(u,v)+$$

$$+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))C(u,v)\big)dudv. \qquad (16)$$

Используя направляющие косинусы вектора $\overline{n}$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

преобразуем равенство (16)

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} \big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big)dS. \qquad (17)$$

Обратим внимание на следующий факт. Введем вектор-функцию $\overline{F} = (P,Q,R)$. Тогда подинтегральная функция в интеграле из правой части равенства (17) является скалярным произведением $\overline{F}\overline{n}$.

На примере интеграла (15) сформулируем основные свойства поверхностного интеграла второго рода.

1. При изменении стороны поверхности (при смене ориентации поверхности) интеграл меняет знак.

2. Интеграл обладает свойством линейности:

$$\iint\limits_{\Phi} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j R_j(x,y,z)dxdy = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \iint\limits_{\Phi} R_j(x,y,z)dxdy.$$

3. Если поверхность Φ разбита на конечное число частей $\Phi_k \subset \Phi$, $k = 1, \ldots, N$, не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{\Phi_k} R(x,y,z)dxdy.$$

4. Интеграл

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy$$

по цилиндрической поверхности Φ с образующей, параллельной оси Oz, равен нулю.

Рассмотрим случай явного задания поверхности Φ уравнением $z = f(x,y)$. Если выбрана ее верхняя сторона, т. е.

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

то

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)\cos\gamma dS = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,f(x,y))dxdy.$$

1.6 Формула Стокса

Пусть Φ - гладкая поверхность с параметрическим представлением (1)

$$\overline{r} = \overline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$

где функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ дважды непрерывно дифференцируемы в замкнутой области D, ограниченной гладким контуром L^*.

Контуру L^* при отображении $\overline{r}(u,v)$ сответствует контур L, ограничивающий поверхность Φ. Обходу контура L^* на плоскости соответствует обход контура L, и наоборот. Условимся считать положительным такое направление обхода контура L, которому соответствует положительное направление обхода контура L^*. Если единичный вектор $\overline{n}$ нормали к поверхности определить формулой (3), то при положительном обходе контура L поверхность будет оставаться слева, если смотреть с конца вектора $\overline{n}$. Таким образом, положительное направление обхода границы поверхности согласуется с выбором ее стороны.

Пусть в некоторой области G, целиком содержащей поверхность Φ, заданы непрерывно дифференцируемые функции P, Q, R. Тогда имеет место **формула Стокса**

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_\Phi \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \quad (18)$$

Докажем, что

$$\oint\limits_L Pdx = \iint\limits_\Phi \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy. \quad (19)$$

Сначала преобразуем криволинейный интеграл второго рода по контуру L в левой части (19). Пусть контур L^* задан параметрическими уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in T = [t_1, t_2].$$

Тогда параметрические уравнения, задающие контур L, имеют вид

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)), \qquad t \in T.$$

В соответствии с формулами для вычисления криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\oint\limits_L Pdx = \int\limits_{t_1}^{t_2} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t)\right)dt =$$

$$= \oint\limits_{L^*} P\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right).$$

К интегралу в правой части этого равенства применим *формулу Грина*:

$$\oint\limits_{L^*} P\frac{\partial x}{\partial u}du + P\frac{\partial x}{\partial v}dv = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial}{\partial u}(P\frac{\partial x}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v}(P\frac{\partial x}{\partial u})\right)dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} \left((\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u})\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)dudv-$$

$$- \iint\limits_{D} \left((\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v})\frac{\partial x}{\partial u} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\right)dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)dudv - \iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C\right)dudv = \iint\limits_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\oint\limits_{L} Qdy = \iint\limits_{\Phi} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz,$$

$$\oint\limits_{L} Rdx = \iint\limits_{\Phi} \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx.$$

Скадывая доказанные равенства, получим равенство (18).

Формула Стокса справедлива в случае, когда контур L^* является кусочно гладким.

Отметим, что если поверхность Φ является плоской областью и лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости xOy, то формула Стокса переходит в формулу Грина. Доказательство формулы Стокса для поверхностей, ограниченных несколькими контурами, аналогично доказательству формулы Грина для многосвязных областей.

1.7 Формула Остроградского - Гаусса

Формула Остроградского - Гаусса устанавливает связь между поверхностным интегралом по замкнутой поверхности и тройным интегралом.

Предварительно напомним понятие области в прстранстве $\mathbb{R}^3$, правильной в направлении оси, и простой области.

Область является *правильной в направлении оси* Oz, если она ограничена двумя поверхностями Φ_1 и Φ_2 вида $z = \varphi_1(x, y)$ и $z = \varphi_2(x, y)$, где функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ определены в замкнутой области D_{xy} и удовлетворяют неравенству $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y),\ (x, y) \in D_{xy}$, а также цилиндрической поверхностью Φ_3 с образующей, параллельной оси Oz. Положительная ориентация границы такой области будет означать выбор внешней стороны поверхности (т. е. соответствующей внешней нормали).

Аналогично определяются области, правильные относительно осей Ox и Oy.

Область будем называть *простой*, если ее можно разбить на конечное число частичных областей, правильных относительно оси Ox и не имеющих общих внутренних точек. И то же самое можно сделать относительно двух других осей координат. Положительная ориентация границы простой области будет означать выбор внешней стороны поверхности.

Пусть V - простая замкнутая область, граница Φ которой положительно ориентирована. Если функции $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в области G, содержащей V, то справедлива **формула Остроградского - Гаусса**

$$\iint\limits_{\Phi} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy =$$

$$= \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \tag{20}$$

Формула Остроградского - Гаусса распадается на три самостоятельных равенства, соответствующие трем подынтегральным функциям P, Q и R. Эти равенства доказываются схожим образом. Докажем одно из них, например, равенство

$$\iint\limits_{\Phi} R(x, y, z)dxdy = \iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz.$$

Докажем это равенство сначала для замкнутой области V, являющейся правильной в направлении оси Oz. По правилу вычисления тройного интеграла имеем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,\varphi_2(x,y))dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,\varphi_1(x,y))dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Phi_2} Rdxdy + \iint\limits_{\Phi_1} Rdxdy + \iint\limits_{\Phi_3} Rdxdy = \iint\limits_{\Phi} Rdxdy.$$

Мы учли, что для поверхности Φ_2 нужно брать верхнюю сторону, а для поверхности Φ_1 - нижнюю. К этим интегралам добавили равный нулю поверхностный интеграл по внешней стороне боковой цилиндрической поверхности Φ_3 с образующей, параллельной оси Oz.

Далее, простую область V разобьем на частичные, правильные в направлении оси Oz области $V_k,\ k = 1, \ldots, m$, ограниченные кусочно гладкими поверхностями Φ_k. В силу доказанного имеем

$$\iint\limits_{\Phi_k} R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{V_k} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz,\ k = 1, \ldots, m.$$

Просуммировав эти равенства, получим

$$\sum_{k=1}^{m} \iint\limits_{\Phi_k} R(x,y,z)dxdy = \sum_{k=1}^{m} \iiint\limits_{V_k} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Сумма в левой части равенства равна интегралу по поверхности Φ, так как по частям границ Φ_k частичных областей V_k, не входящим в поверхность Φ, интегрирование проводится дважды с выбором противоположных сторон поверхности, а такие интегралы взаимно уничтожаются.

Таким образом формула Остроградского - Гаусса полностью доказана.

Формулу Остроградского - Гаусса можно также записать в виде

$$\iint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS == \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \quad (21)$$

где $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ - направляющие косинусы единичного вектора нормали к поверхности Φ.

2 Ряды Фурье

2.1 Тригонометрический ряд и ряд Фурье.

Определение 2.1. *Функциональный ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{22}$$

где $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ *- вещественные числа, называется тригонометрическим рядом, а эти числа - его коэффициентами.*

В отличие от степенного ряда, в тригонометрическом ряде вместо простейших функций $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ взяты тригонометрические функции

$$1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots. \tag{23}$$

Система функций (23) называется *тригонометрической системой.*

Обратим внимание, что наименьший общий период все функций системы равен 2π. Поэтому любая частная сумма ряда (22) является периодической функцией с периодом 2π. Отсюда следует, что если ряд (22) сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$, то он сходится на всей числовой прямой и его сумма является 2π-периодической функцией. Поэтому тригонометрические ряды особенно удобны при изучении периодических функций, описывающих различные периодические процессы в природе и технике.

Определение 2.2. *Две функции* f *и* g*, интегрируемые на отрезке* $[a, b]$*, называют взаимно ортогональными, если*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Теорема 2.1.1. *(об ортогональности тригонометрической системы). Любые две функции тригонометрической системы* (23) *взаимно ортогональны на отрезке* $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Действительно,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos kx dx = \frac{1}{2k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin kx dx = -\frac{1}{2k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+n)x + \cos(k-n)x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

при $k \neq n$.

Аналогично,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = 0$$

при $k \neq n$, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0.$$

$\square$

Отметим также, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \big(1 + \cos 2kx\big) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \big(1 - \cos 2kx\big) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(\frac{1}{2}\big)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Определение 2.3. *Обозначим через $R_{2\pi}$ класс функций, которые заданы на всей числовой прямой, интегрируемы на каждом конечном отрезке числовой прямой и имеют период 2π.*

Теорема 2.1.2. *Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Тогда при любом $a \in \mathbb{R}$*

$$\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int\limits_a^{0} f(x)dx + \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx + \int\limits_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx.$$

Сделаем в последнем интеграле замену, положив $x = t + 2\pi$,

$$\int\limits_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx = \int\limits_0^{a} f(t+2\pi)dt = -\int\limits_a^{0} f(t)dt.$$

Тогда

$$\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx.$$

□

Теорема 2.1.3. *Если 2π-периодическая функция f разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big), \tag{24}$$

то его коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \tag{25}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \tag{26}$$

Доказательство. Для доказательства первого равенства нужно почленно проинтегрировать ряд (24). Умножив обе части равенства (24) на $\cos nx$ (от этого равномерная сходимость ряда не нарушится) и почленно проинтегрировав, используя теорему об ортогональности тригонометрической системы, получим равенство для коэффициентов a_n. Аналогично получаем равенство для коэффициентов b_n. $\square$

Определение 2.4. *Пусть функция f определена и интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда числа $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots,$ найденные по формулам (25) и (26), называются коэффициентами Фурье, а ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

с этими коэффициентами называется рядом Фурье функции f.

Таким образом, любой интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f можно поставить в соответствие ряд Фурье. Однако, это не означает, что всякая такая функция является суммой этого ряда.

Если ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$ есть ряд Фурье функции f, то будем писать

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

2.2 Интеграл Дирихле.

Лемма 2.2.1. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{27}$$

Доказательство. Положим $S = \frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$ и умножим обе части этого равенства на $2\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогда

$$S \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + \ldots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha.$$

Поскольку $2\sin A\cos B = \sin(A+B) - \sin(B_A)$, то

$$S \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + \left(\sin\frac{3}{2}\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\sin\frac{5}{2}\alpha - \sin\frac{3}{2}\alpha\right) + \ldots +$$

$$+\left(\sin\frac{2n+1}{2}\alpha-\sin\frac{2n-1}{2}\alpha\right)=\sin\frac{2n+1}{2}\alpha.$$

Поэтому при $\alpha\neq 2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$

$$S=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Равенство, утверждаемое в лемме, верно и при $\alpha=2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$, если понимать его в предельном смысле. Действительно,

$$\lim_{\alpha\to 2\pi k}\big(\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha\big)=\frac{1}{2}+n=\frac{2n+1}{2}$$

и

$$\lim_{\alpha\to 2\pi k}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2n+1}{2}.$$

$\square$

Определение 2.5. *Фунцию*

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (28)$$

называют ядром Дирихле.

Отметим, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n(x)dx=1. \qquad (29)$$

Пусть теперь функция $f\in R_{2\pi}$. Рассмотрим частную сумму ее ряда Фурье в фиксированной точке x

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos kx+b_k\sin kx\big).$$

Подставив вместо коэффициентов их выражения

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)dt,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

получим

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\big(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx\big)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

Сделаем в интеграле замену $t = x + u$, (u - новая переменная). Тогда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du =$$

(сделаем замену переменных во втором интеграле $u = -y$, затем переобозначим переменное y вновь на u)

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\big(f(x+u) + f(x-u)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\big(f(x+u) + f(x-u)\big)D_n(u)du.$$

Таким образом, мы доказали так называемую теорему Дирихле.

Теорема 2.2.1. *(Дирихле). Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Тогда частная сумма ряда Фурье функции f может быть представлена в следующем виде*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\big(f(x+t) + f(x-t)\big)D_n(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2\sin \frac{t}{2}}.$$

Интеграл в равенстве (30) называют *интегралом Дирихле.*

2.3 Теорема Римана-Лебега и принцип локализации Римана.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 2.3.1. *(Римана-Лебега). Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} \int\limits_a^b f(t)\sin\lambda t dt = 0, \quad \lim_{|\lambda|\to+\infty} \int\limits_a^b f(t)\cos\lambda t dt = 0. \tag{31}$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Второе равенство доказывается аналогично.

Пусть $\epsilon > 0$. Построим разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, такое, что выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k (t_k - t_{k-1}) < \epsilon/2,$$

где ω_k - колебание функции f на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$. Это возможно в силу интегрируемости функции f на отрезке.

Тогда далее имеем

$$J(\lambda) = \int\limits_a^b f(t)\sin\lambda t dt = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\sin\lambda t dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big(f(t) - f(t_{k-1})\big)\sin\lambda t dt + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t_{k-1})\sin\lambda t dt.$$

Если $t \in [t_{k-1}, t_k]$, то $|f(t) - f(t_{k-1})| \le \omega_k$. Следовательно,

$$\Big|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big(f(t) - f(t_{k-1})\big) \sin\lambda t dt\Big| \le \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big|f(t) - f(t_{k-1})\big|\big|\sin\lambda t\big| dt \le \omega_k(t_k - t_{k-1})$$

и

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big(f(t) - f(t_{k-1})\big) \sin\lambda t dt\Big| \le \sum_{k=1}^{n} \omega_k(t_k - t_{k-1}) < \epsilon/2.$$

Функция f ограничена. Пусть $M = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Тогда $|f(t_{k-1})| \le M$ и

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t_{k-1}) \sin\lambda t dt\Big| \le \sum_{k=1}^{n}\Big|f(t_{k-1})\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sin\lambda t\Big| dt \le M\sum_{k=1}^{n}\Big|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sin\lambda t\Big| dt =$$

$$= M\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos\lambda t_{k-1} - \cos\lambda t_k}{\lambda}\right| \le M\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{|\lambda|} = \frac{2Mn}{|\lambda|}.$$

Тогда найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что при $|\lambda| > \lambda_0$ выполняется неравенство $\frac{2Mn}{|\lambda|} < \epsilon/2$.

Таким образом, при $|\lambda| > \lambda_0$ выполняется неравенство $|J(\lambda)| < \epsilon$. А это означает, что

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} J(\lambda) = 0.$$

□

Следствие. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда для ее коэффициентов Фурье справедливы соотношения

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt \to 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt \to 0$$

при $n \to \infty$.

Замечание. Теорема Римана-Лебега допускает обобщение.

Если функция f определена на промежутке $(a, b]$ (или на (a, b)) и интеграл

$$\int\limits_a^b |f(t)| dt$$

существует как несобственный, то условие (31) выполняется.

Теорема 2.3.2. *(принцип локализации Римана). Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Тогда при любом $a \in (0,\pi)$ частная сумма ряда Фурье функции f может быть представлена в следующем виде*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^a \big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt + \alpha_n(x), \tag{32}$$

где

$$\alpha_n(x) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Представим правую часть равенства (30) в виде суммы двух интегралов

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt =$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^a \big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_a^\pi \big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Обозначим

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^\pi \big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

На отрезке $[a,\pi]$ функция $\sin\frac{t}{2}$ непрерывна и справедлива оценка

$$|\sin\frac{t}{2}| \geq \sin\frac{a}{2} > 0.$$

Поэтому функция

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}$$

интегрируема на отрезке $[a,\pi]$. Тогда по теореме Римана-Лебега
$\alpha_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. □

Так как число a в предыдущей теореме можно взять сколь угодно малым, то эту теорему называют принципом локализации. Другими словами, поведение ряда Фурье функции f в конкретной точке x зависит только от значений, принимаемых этой функцией в сколь угодно малой окрестности точки x.

Следовательно, если функции f и g равны между собой в некоторой окрестности $(x-a, x+a)$ $(0 < a < \pi)$, то в точке x ряды Фурье этих функций ведут себя одинаково, т. е. они или оба расходятся, или оба сходятся, причем к одному и тому же числу.

2.4 Признаки поточечной сходимости рядов Фурье.

Теорема 2.4.1. *(признак Дини). Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Если при некотором фиксированном x сходится интеграл*

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{t}dt, \tag{33}$$

где A - некоторое число, то в этой точке x ряд Фурье функции f сходится и имеет своей суммой число A.

Доказательство. Используя равенство (29), получим

$$S_n(x)-A=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\frac{2n+1}{2}tdt.$$

Если сходится интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{t}dt,$$

то сходится и интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

(так как $\sin\frac{t}{2} \sim \frac{t}{2}$ при $t \to 0$). Тогда, согласно обобщению теоремы Римана-Лебега, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{2n+1}{2} t dt = 0,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = A.$$

□

Замечание. В признаке Дини вместо существования интеграла $\int\limits_0^\pi$ можно говорить о существовании интеграла $\int\limits_0^a$, где $0 < a < \pi$, так как оба эти интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Следствия признака Дини.

1. *Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и дифференцируема в точке x. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

Доказательство. Согласно признаку Дини нам следует доказать сходимость интеграла

$$\int\limits_0^\pi \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t} dt. \tag{34}$$

Точка $t = 0$ является единственной особой точкой для этого интеграла. Имеем

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x)}{-t} \right) = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Следовательно, подинтегральная функция в (34) ограничена в правой полуокрестности точки $t = 0$. Значит, несобственный интеграл (34) сходится. □

2. *Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существуют односторонние левая производная $f'_{л}(x)$ и правая производная $f'_{п}(x)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

Доказательство. В этом случае

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x)}{-t} \right) = f'_{\text{П}}(x) - f'_{\text{Л}}(x),$$

что является конечным числом. Из этого делаем выводы как в пункте 1. □

3. *Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существуют следующие четыре конечных предела*

$$f(x+0) = \lim_{t\to x+0} f(t), \quad f(x-0) = \lim_{t\to x-0} f(t),$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} = \alpha,\ \lim_{t\to+0} \frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t} = \beta.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Доказательство. Возьмем

$$A = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

и как в предыдущих пунктах придем к выводу о сходимости интеграла (33). □

2.5 Некоторые особенности рядов Фурье

Ряды Фурье четных и нечетных функций.

Пусть функция $f \in R([-\pi, \pi])$ является четной. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx, \tag{35}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \tag{36}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{37}$$

Таким образом, ряд Фурье четной функции не содержит синусов кратных дуг, т. е.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

причем коэффициенты $a_0, a_n, \dots$ вычисляются по формулам (35) и(36).

Пусть функция $f \in R([-\pi, \pi])$ является нечетной. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \tag{38}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \tag{39}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \tag{40}$$

Таким образом, ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы кратных дуг, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

причем коэффициенты $b_1, b_2, \dots$ вычисляются по формуле (40).

Разложение в ряд Фурье на промежутке $[0, \pi]$.

Пусть функция f определена и интегрируема на отрезке $[0, \pi]$.

1. Построим новую функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), x \in [0, \pi], \\ f(-x), x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Функция F является четной, и согласно предыдущему пункту

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

причем

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} F(x) dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} F(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, на $[0, \pi]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

2. Построим функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), x \in [0, \pi], \\ -f(-x), x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Тогда

$$F(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

причем

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} F(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, на $[0, \pi]$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Разложение в ряд Фурье на промежутке $[a, a+2\pi]$.

При разложении в ряд Фурье функции, заданной на отрезке $[a, a+2\pi]$, для вычисления коэффициентов в качестве пределов интегрирования следует брать концы этого отрезка.

Разложение в ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l, l]$. Положим $x = \frac{lt}{\pi}$. Эта линейная функция осуществляет взаимно однозначное отображение отрезка $[-\pi, \pi]$ на отрезок $[-l, l]$. Поэтому функция $\varphi(t) = f(\frac{lt}{\pi})$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Поэтому

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nt + b_n \sin nt\big),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\frac{lt}{\pi}\big) dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\frac{lt}{\pi}\big) \cos nt dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\frac{lt}{\pi}\big) \sin nt dt, n = 1, 2, \dots .$$

Теперь вернемся к прежней переменной, т. е. положим $t = \frac{\pi x}{l}$. Будем иметь

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right)$$

и

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx,\ a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$n = 1, 2, \dots .$$

2.6 Метод средних арифметических и теорема Фейера.

Метод средних арифметических.

Определение 2.6. *Рассмотрим числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{41}$$

Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, *и*

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}.$$

Если существует конечны предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, *то говорят, что ряд* (41) *суммируется методом средних арифметических и число* S *называют его обобщенной суммой.*

Теорема 2.6.1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$.

Средние Фейера и теорема Фейера.

Определение 2.7. *Пусть функция* $f \in R_{2\pi}$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big),$$

и

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big).$$

Средними Фейера называют

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}. \tag{42}$$

Теорема 2.6.2. *Пусть функция* $f \in R_{2\pi}$. *Тогда верно представление*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \big(f(x+t) + f(x-t)\big)\Phi_n(t)dt, \tag{43}$$

где функция
$$\Phi_n(t) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} D_k(t)}{n+1} = \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2})t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} \tag{44}$$
называется ядром Фейера.

(При $t = 2\pi k$ равество (44) понимается в предельном смысле.)

Доказательство. В силу теоремы Дирихле и определения средних Фейера нам достаточно доказать равенство (44). Согласно формуле (28) имеем
$$\Phi_n(t) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} D_k(t)}{n+1} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k+\frac{1}{2})t}{2(n+1)\sin\frac{t}{2}}.$$
Тогда
$$\big(2\sin\frac{t}{2}\big)^2(n+1)\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\sin(k+\frac{1}{2})t =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\big(\cos kt - \cos(k+1)t\big) = 1 - \cos(n+1)t = 2\sin^2\big(\frac{n+1}{2}\big)t$$
и, следовательно, верно равенство (44). □

Заметим, что в силу равенства (29) и четности ядер Дирихле и Фейера имеем равенство
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi_n(t)dt = 1. \tag{45}$$

Теорема 2.6.3. *(о суммируемости ряда Фурье методом средних арифметических в точках разрыва). Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существует предел*
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} = S.$$
Тогда в точке x
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x) = S.$$

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $t \in (0, \delta)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - S\right| < \epsilon.$$

Тогда, используя равенства (43), (44) и (45), получим оценку

$$\left|\sigma_n(x) - S\right| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|f(x+t)+f(x-t)-2S\right|\Phi_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \left|f(x+t)+f(x-t)-2S\right|\Phi_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi \left|f(x+t)+f(x-t)-2S\right|\Phi_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}2\epsilon\int\limits_0^\pi \Phi_n(t)dt + \frac{1}{\pi 2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}\int\limits_0^\pi \left|f(x+t)+f(x-t)-2S\right|dt =$$

$$= \epsilon + \frac{1}{\pi 2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}\int\limits_0^\pi \left|f(x+t)+f(x-t)-2S\right|dt.$$

Поскольку интеграл

$$\int\limits_0^\pi \left|f(x+t)+f(x-t)-2S\right|dt$$

представляет собой конкретное конечное число, то найдется номер n_ϵ такой, что при всех $n > n_\epsilon$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\pi 2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}\int\limits_0^\pi \left|f(x+t)+f(x-t)-2S\right|dt < \epsilon.$$

Тогда окончательно имеем

$$\left|\sigma_n(x) - S\right| < 2\epsilon$$

при всех $n > n_\epsilon$. □

Следствие 1. *Если функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x функция непрерывна, то в точке x*
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x).$$

Следствие 2. *Если функция $f \in R_{2\pi}$ и точка x является точкой разрыва первого рода функции f, то в точке x*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Теорема 2.6.4. *(Фейера). Если функция f 2π-периодическая и непрерывная, то последовательность средних Фейера (σ_n) равномерно сходится к функции f.*

Доказательство. Если функция f 2π-периодическая и непрерывная, то она равномерно непрерывная и ограниченная. Пусть $\epsilon > 0$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $t \in (0, \delta)$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство
$$\big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big| < \epsilon.$$
И пусть число $M > 0$ такое, что при всех $x \in \mathbb{R}$ $\quad |f(x)| \le M$. Тогда

$$\big|\sigma_n(x) - f(x)\big| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big|\Phi_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \big|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\big|\Phi_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi \big|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\big|\Phi_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{\epsilon}{\pi}\int\limits_0^\pi \Phi_n(t)dt + \frac{4M}{\pi}\int\limits_\delta^\pi \Phi_n(t)dt \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{4M(\pi-\delta)}{\pi 2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} <$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

Найдется номер n_ϵ такой, что при всех $n > n_\epsilon$ выполняется неравенство

$$\frac{2M}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Поэтому при всех $n > n_\epsilon$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\left|\sigma_n(x) - f(x)\right| < \epsilon,$$

т. е. $\sigma_n \rightrightarrows f$. $\square$

Замечание. Если функция f непрерывна в точке x_0, то ряд Фурье в точке x_0 не может сходится к числу, отличному от $f(x_0)$. Действительно, по первому следствию теоремы (2.6.3)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$$

и тогда в силу теоремы (2.6.1)

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0).$$

2.7 Теоремы Вейерштрасса.

Теорема 2.7.1. *(вторая теорема Вейерштрасса). Если функция f 2π-периодическая и непрерывная, то существует последовательность тригонометрических многочленов (T_n), которая сходится к функции f равномерно на всей числовой прямой.*

Доказательство. В качестве последовательность тригонометрических многочленов (T_n) можно взять последовательность средних Фейера (σ_n), которая согласно теореме Фейера равномерно сходится к функции f. $\square$

Другие формулировки второй теоремы Вейерштрасса.

1. Если функция f 2π-периодическая и непрерывная, то для любого $\epsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен T_ϵ такой, что при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|f(x) - T_\epsilon(x)| < \epsilon$.

2. Если функция f 2π-периодическая и непрерывная, то она разлагается в равномерно сходящийся ряд из тригонометрических многочленов.

   Доказательство. Пусть последовательность тригонометрических многочленов

   $$T_n \rightrightarrows f.$$

Положим

$$Q_1(x) = T_1(x),\ Q_n(x) = T_n(x) - T_{n-1}(x),\ n = 2, 3, \dots$$

Ясно, что $Q_n(x)$ - это тригонометрические многочлены,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$$

и ряд равномерно сходится. □

Теорема 2.7.2. *(первая теорема Вейерштрасса). Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен P_ϵ такой, что при всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x) - P_\epsilon(x)| < \epsilon$.*

Доказательство. Построим функцию

$$\varphi(t) = f\big(a + \frac{b-a}{\pi}t\big) \quad \text{при всех} \quad t \in [0, \pi].$$

Продолжим ее четным образом на промежуток $[\pi, 0)$, т. е.

$$\varphi(t) = \varphi(-t) \quad \text{при всех} \quad t \in [-\pi, 0).$$

Далее, продолжим эту функцию на всю числовую прямую периодически с периодом 2π, т. е.

$$\varphi(t + 2\pi n) = \varphi(t) \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{и всех} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что 2π-периодическая функция $\varphi(t)$ непрерывна на всей числовой прямой. Мы можем воспользоваться второй теоремой Вейерштрасса.

Пусть $\epsilon > 0$. Тогда найдется тригонометрический многочлен T_ϵ такой, что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$|\varphi(t) - T_\epsilon(t)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{46}$$

Тригонометрический многочлен разлагается в степенной ряд

$$T_\epsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$$

с бесконечным радиусом сходимости. На отрезке $[0,\pi]$ (как и на любом другом отрезке) ряд сходится равномерно. Поэтому найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что при всех $t \in [0,\pi]$ выполняется неравенство

$$\Big|T_\epsilon(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k t^k\Big| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{47}$$

Обозначим

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k.$$

Это есть алгебраический многочлен.

Опираясь не неравенства (46) и (47), получим оценку

$$|\varphi(t) - P(t)| = |(\varphi(t) - T_\epsilon(t)) + (T_\epsilon(t) - P(t))| \leq$$

$$\leq |\varphi(t) - T_\epsilon(t)| + |T_\epsilon(t) - P(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

справедливую при всех $t \in [0,\pi]$. Положим теперь

$$P_\epsilon(x) = P\Big(\frac{x-a}{b-a}\pi\Big), \quad x \in [a,b].$$

Функция $P_\epsilon(x)$ является алгебраическим многочленом. Поскольку при $x \in [a,b]$

$$f(x) = \varphi\Big(\frac{x-a}{b-a}\pi\Big),$$

то окончательно имеем неравенство

$$\big|f(x) - P_\epsilon(x)\big| < \epsilon$$

при всех $x \in [a,b]$. □

Другие формулировки первой теоремы Вейерштрасса.

1. Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует последовательность алгебраических многочленов (P_n), которая сходится к функции f равномерно на отрезке $[a,b]$.

2. Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она разлагается в равномерно сходящийся ряд из алгебраических многочленов.

2.8 Сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном.

Определение 2.8. *Пусть функции f и f_n, $n \in \mathbb{N}$, интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Говорят, что последовательность (f_n) сходится в среднем к функции f на отрезке $[a, b]$, если*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)^2 dx = 0.$$

Задание. Доказать, что из равномерной сходимости последовательности (f_n) к функции f на отрезке $[a, b]$ вытекает сходимость в среднем квадратичном.

Теорема 2.8.1. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда при любом $\epsilon > 0$ существует такая непрерывная на отрезке функция g, принимающая заданные значения в точках a и b, что*

$$\int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2 dx < \epsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение P отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, $d = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$, ω_i - колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

Так как функция f интегрируема, то она ограничена, т. е. $|f(x)| \le M$ при всех $x \in [a, b]$. Согласно критерию интегрируемости

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

Определим функцию $g(x)$ следующим образом: на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ функция $g(x)$ является линейной, принимающей заданные значения в точках $x_0 = a$ и $x_n = b$ изначения $g(x_i) = f(x_i)$ при $i = 1, \ldots, n-1$.

Очевидно, что функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$, $i=2,\ldots,n-1$, справедливо неравенство

$$|f(x)-g(x)|\le\omega_i,$$

откуда

$$\big(f(x)-g(x)\big)^2\le\big(|f(x)+|g(x)|\big)|f(x)-g(x)|\le 2M\omega_i.$$

На отрезках $[x_0,x_1]$, $[x_{n-1},x_n]$ имеем

$$\big(f(x)-g(x)\big)^2\le\big(|f(x)+|g(x)|\big)^2\le(M+M_1)^2,$$

где $M_1=\max(M,|g(a)|,|g(b)|)$. Поэтому

$$\int\limits_a^b\big(f(x)-g(x)\big)^2dx=\sum_{i=1}^n\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\big(f(x)-g(x)\big)^2dx\le$$

$$\le 2M\sum_{i=2}^{n-1}\omega_i\Delta x_i+2(M+M_1)^2d.$$

Правая часть неравенства стремится к нулю при $d\to 0$. Следовательно, при любом $\epsilon>0$ найдется такое разбиение P отрезка $[a,b]$, что

$$\int\limits_a^b\big(f(x)-g(x)\big)^2dx<\epsilon.$$

□

Теорема 2.8.2. *(о наилучшем приближении). Пусть функция f интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тогда среди всех тригонометрических многочленов порядка не выше n наименьшее среднее квадратическое отклонение от функции f имеет n-ая частная сумма ее ряда Фурье*

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^n\big(a_k\cos kx+b_k\sin kx\big).$$

При этом

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-S_n(x)\big)^2dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^n\big(a_k^2+b_k^2\big)\right].\qquad(48)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный тригонометрический многочлен порядка не выше n

$$T(x) = \frac{p_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(p_k \cos kx + q_k \sin kx\big)$$

и вычислим среднее квадратическое отклонение $T_n(x)$ от $f(x)$:

$$r_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - T_n(x)\big)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx -$$

$$-2\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx$$

Имеем

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{p_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(p_k \cos kx + q_k \sin kx\big)\right] dx =$$

$$= \frac{a_0 p_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k p_k + b_k q_k\big)$$

и

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{p_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(p_k \cos kx + q_k \sin kx\big)\right]^2 (x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{p_0^2}{4} dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \big(p_k^2 \cos^2 kx + q_k^2 \sin^2 kx\big)\Big] dx$$

(мы воспользовались свойством ортогональности тригонометрической системы), откуда

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx = \frac{p_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(p_k^2 + q_k^2\big).$$

Следовательно,

$$r_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - a_0 p_0 - 2 \sum_{k=1}^{n} \big(a_k p_k + b_k q_k\big) + \frac{p_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(p_k^2 + q_k^2\big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right] +$$

$$+\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) - a_0 p_0 - 2\sum_{k=1}^{n}\left(a_k p_k + b_k q_k\right) + \frac{p_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(p_k^2 + q_k^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right] +$$

$$+\left[\frac{(a_0 - p_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k - p_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(b_k - q_k)^2\right].$$

Остались заметить, что величина $r_n(x)$ минимальна, если выражение

$$\left[\frac{(a_0 - p_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k - p_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(b_k - q_k)^2\right] = 0,$$

Последнее происходит при $p_0 = a_0,\ p_k = a_k,\ q_k = b_k,\ k = 1, \ldots, n$, т. е. в случае, если тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = S_n(x).$$

При этом

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x) - S_n(x)\big)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right].$$

$\square$

Следствие. Неравенство Бесселя. *Если функция f интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Доказательство. Поскольку левая часть равенства (48) неотрийательна, то

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\leq\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

при любом $n\in\mathbb{N}$. Осталось перейти к пределу при $n\to\infty$. □

Теорема 2.8.3. *Для любой функции f интегрируемой на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right).$$

Доказательство. Обозначим

$$\rho_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right].$$

Согласно равенству (48)

$$\rho_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-S_n(x)\big)^2dx.$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n=0.$$

Прежде всего отметим, что последовательность (ρ_n) является невозрастающей.

Пусть $\epsilon>0$. Согласно теореме (2.8.1) можно найти непрерывную на отрезке $[-\pi,\pi]$ функцию $g(x)$, удовлетворяющую условию $g(-\pi)=g(\pi)$, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-g(x)\big)^2dx<\frac{\epsilon}{4}.$$

Согласно второй теореме Вейерштрасса существует тригонометрический многочлен (порядка m)

$$T_m(x) = \frac{p_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \big(p_k \cos kx + q_k \sin kx\big)$$

такой, что $|g(x) - T_m(x)| < \sqrt{\frac{\epsilon}{8}}$ при всех $x \in [-\pi, \pi]$. Тогда

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(g(x) - T_m(x)\big)^2 dx < \frac{\epsilon}{4},$$

и

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - T_m(x)\big)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\big(f(x) - g(x)\big) + \big(g(x) - T_m(x)\big)\Big]^2 dx \leq$$

$$\leq 2\frac{1}{\pi}\Big[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - g(x)\big)^2 dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(g(x) - T_m(x)\big)^2 dx\Big] <$$

$$< 2(\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4}) = \epsilon$$

(мы воспользовались неравенством $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$).

Далее, в силу теоремы (2.8.2) имеем

$$\rho_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - S_m(x)\big)^2 dx \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - T_m(x)\big)^2 dx.$$

Следовательно, $\rho_m < \epsilon$ и, поскольку последовательность (ρ_n) является невозрастающей, $\rho_n < \epsilon$ при всех $n \geq m$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. □

Определение 2.9. *Равенство*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k^2 + b_k^2\big), \tag{49}$$

справедливое для любой функции f, интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$, называют равенством Парсеваля , или условием замкнутости тригонометрической системы.

Следствие 1. Обобщенная формула замкнутости. *Пусть функции f, g интегрируемы на отрезке $[-\pi,\pi]$, и a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ - коэффициенты Фурье функции f, а p_0, p_n, q_n $(n = 1, 2, \ldots)$- коэффициенты Фурье функции g. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0 p_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k p_k + b_k q_k\big). \tag{50}$$

Доказательство. Согласно доказанной теореме имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k^2 + b_k^2\big), \tag{51}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g^2(x)dx = \frac{p_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(p_k^2 + q_k^2\big), \tag{52}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)+g(x)\big)^2 dx = \frac{(a_0+p_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big((a_k+p_k)^2 + (b_k+q_k)^2\big). \tag{53}$$

Вычитая равенства (51) и (52) из равенства (53), получаем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = a_0 p_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k p_k + b_k q_k\big).$$

□

2.9 Полнота тригонометрической системы.

Определение 2.10. *Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[-\pi,\pi]$. Если*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 0,$$

то будем говорить, что функция f эквивалентна нулю, и писать $f(x) \sim 0$.

Будем говорить, что функция f эквивалентна функции $g(x)$, и писать $f(x) \sim g(x)$, если $\big(f(x) - g(x)\big) \sim 0$.

Заметим, что в случае, когда $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то из условия $f(x) \sim 0$ вытекает, что $f(x) = 0$ при всех $x \in [-\pi, \pi]$, и в случае, когда функция $g(x)$ тоже непрерывна, то из условия $f(x) \sim g(x)$ вытекает, что $f(x) = g(x)$ при всех $x \in [-\pi, \pi]$, Для разрывных функций это не так.

Опираясь на данное определение и теорему (2.8.3), можно прийти к следующим выводам.

Теорема 2.9.1. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Все коэффициенты Фурье функции f равны нулю тогда и только тогда, когда $f(x) \sim 0$.*

Теорема 2.9.2. *Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[-\pi, \pi]$. Все коэффициенты Фурье у этих функций совпадают тогда и только тогда, когда $f(x) \sim g(x)$.*

Теорема 2.9.3. *(о полноте тригонометрической системы). Тригонометрическую систему*

$$1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

нельзя дополнить никакой непрерывной и отличной от тождественного нуля функцией $\varphi(x)$, которая была бы ортогональна всем функциям системы.

Теорема 2.9.4. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$. Если ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится на $[-\pi, \pi]$, то его сумма $S(x) = f(x)$ при всех $x \in [-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Так как ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится на $[-\pi, \pi]$ к функции $S(x)$, то этот тригонометрический ряд в силу теоремы (2.1.3) в то же время является рядом Фурье функции $S(x)$, т. е. функции $f(x)$ и $S(x)$ имеют один и тот же ряд Фурье. Следовательно $f(x) \sim S(x)$. Но поскольку $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны на $[-\pi, \pi]$, то $S(x) = f(x)$ при всех $x \in [-\pi, \pi]$. □

Теорема 2.9.5. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье.*

Доказательство. Пусть a_n и b_n - коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а α и β - коэффициенты Фурье функции $f'(x)$. Тогда применяя формулу интегрирования по частям будем иметь

$$\pi a_n = \int\limits_{\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int\limits_{\pi}^{\pi} f(x) d\big(\frac{\sin nx}{n}\big) =$$

$$= \left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int\limits_{\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} f'(x)dx = -\frac{\pi\beta_n}{n}.$$

Аналогично получим равенство

$$\pi b_n = \frac{\pi\alpha_n}{n}.$$

Итак,

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n}, \quad b_n = \frac{\alpha_n}{n}.$$

Поскольку $ab \leq a^2 + b^2$, то

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \beta_n^2, \quad |b_n| \leq \frac{1}{n^2} + \alpha^2.$$

Непрерывная по условию производная $f'(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, следовательно для ней выполняется равенство Парсеваля, т. е. сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

Поскольку ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

сходится, то в силу признака мажорации ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

сходится.

Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in [-\pi, \pi]$

$$\left|a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| \leq \left(|a_n| + |b_n|\right),$$

то в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда заключаем, что ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда по теореме (2.9.4) функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье.

□

3 Комплексная плоскость

3.1 Определение комплексных чисел

Рассмотрим множество $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар $z = (x, y)$ действительных чисел $x, y \in \mathbb{R}$. Введем на этом множестве операции, превращающие его в поле, обозначаемое $\mathbb{C}$ и называемое *полем комплексных чисел* . Каждый его элемент будем называть *комплексным числом* .

Суммой $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называют комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{54}$$

а произведением $z_1 z_2$ этих чисел - комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{55}$$

Комплексное число $(0, 1)$ называют мнимой единицей и обозначают $i = (0, 1)$. Согласно (55), имеем

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1, 0), \ i(y, 0) = (0, 1)(y, 0) = (0, y).$$

Каждую упорядоченную пару $(x, 0)$ отождествим с вещественным числом x. Тогда каждое комплексное число представим в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy. \tag{56}$$

Равенство $z = x + iy$ называют алгебраической или декартовой вормой записи комплексного числа. При этом x называют *действительной частью* комплексного числа z и обозначают $Re\ z$, а y - *мнимой частью* и обозначают $Im\ z$.

Комплексное число $z = 0$ в том и только том случае, если
$Re\ z = Im\ z = 0$

Комплексному числу $z = x+iy$ соответствует точка $M(x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Далее эту точку с координатами x и y будем обозначать так же, как и соответствующее ей комплексное число $z = x + iy$.

Нетрудно убедится в том, что операции сложения и умножения обладают свойствами коммутативности и ассоциативности, а умножение обладает свойством дистрибутивности относительно сложения.

Используя алгебраическую форму записи перепишем равенства (54) и (55) в следующем виде

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ называют комплексно сопряженными. Отметим, что

$$z + \overline{z} = 2x = 2Rez,\ z\overline{z} = x^2 + y^2,\ z - \overline{z} = 2iy = 2iImz.$$

Для сложения и умножения существуют обратные операции: вычитания и деления (кроме деления на нуль) соответственно, которые в декартовой форме записываются следующим образом

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{57}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ z_2 \neq 0. \tag{58}$$

3.2 Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Воспользуемся полярными координатами точки z. Полярный радиус r равен длине радиус-вектор точки z, а полярный угол φ равен углу между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором точки z. Поскольку

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

то
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (59)$$
Эта форма записи комплексного числа называется тригонометрической.

Полярный радиус r и полярный угол φ называют соответственно *модулем* и *аргументом комплексного числа* и обозначают $|z|$ и $Argz$. Отметим, что модуль комплексного числа определен однозначно, а аргумент - с точностью до слагаемого, кратного 2π. Нетрудно увидеть, что
$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \mathrm{tg}(Argz) = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x} \text{ при } x \neq 0.$$
При $x = 0,\ y \neq 0$ имеем мнимое число $z = iy$, и в этом случае $Argz = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, при $y > 0$ и $Argz = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ при $y < 0$. Для числа $z = 0$ аргумент не определен, а $|z| = 0$.

Для модулей комплексных чисел справедливы неравенства
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

Главное значение аргумента комплексного числа, обозначаемое $argz$, есть значение аргумента, удовлетворяющее условию
$$-\pi < argz \leq \pi.$$
Тогда
$$Argz = argz + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Используя тригонометрическую функцию $\mathrm{arctg}\,x$, можно записать
$$argz = \begin{cases} \mathrm{arctg}(\frac{y}{x}),\ x > 0; \\ \pi + \mathrm{arctg}(\frac{y}{x}),\ x < 0,\ y \geq 0; \\ -\pi + \mathrm{arctg}(\frac{y}{x}),\ x < 0,\ y < 0; \\ \frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y > 0; \\ -\frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на слагаемое, кратное 2π.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Используя тригонометрические формулы, легко доказать равенства
$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \qquad (60)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{61}$$

Применяя метод математической индукции, можно доказать *формулу Муавра*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{62}$$

Число w называют корнем степени n из числа z и обозначается символом $\sqrt[n]{z}$, если $w^n = z$. Обозначим $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тогда

$$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k,$$

и, следовательно,

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, среди возможных значений $\sqrt[n]{z}$ различными будут n значений, соответствующих значениям $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Заметим, что все значения $\sqrt[n]{z}$ расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. При этом радиус-вектор одной из вершин образует с осью Ox угол $arg z/n$.

3.3 Показательная форма записи комплексного числа

Следуя Эйлеру, обозначим

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{63}$$

Тогда число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ запишем в виде $z = re^{i\varphi}$. Такая форма записи числа называется *показательной*.

Из равенств $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ следуют формулы

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \tag{64}$$

которые называют *формулами Эйлера*.

Равенства (60),(61) и (62) можно переписать в показательной форме

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \tag{65}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \tag{66}$$

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{67}$$

3.4 Топология комплексной плоскости

На комплексной плоскости будем использовать известную *евклидову метрику*, в которой под расстоянием между точками $z_1 = x_1 + y_1$ и $z_2 = x_2 + y_2$ понимают

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Эта метрика определяет естественную топологию на $\mathbb{C}$, в которой база окрестностей произвольной точки $z_0 \in \mathbb{C}$ задается кругами с центром в z_0 :

$$U_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}, \quad \epsilon > 0.$$

Приведем некоторые понятия, которые потребуются далее.

Путь и кривая на комплексной плоскости.

Определение 3.1. *Непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ действительной оси в $\mathbb{R}^2$ называют путем. Будем его записывать в комплексном виде $z = \gamma(t)$, где $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. Точки $A = \gamma(a)$ и $B = \gamma(b)$ будем называть соответственно началом и концом пути.*

Определение 3.2. *Пусть $\gamma : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ и $\gamma^* : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ два пути. Назовем их эквивалентными, если найдется непрерывное возрастающее отображение τ отрезка $[a_1, b_1]$ на отрезок $[a_2, b_2]$ такое, что*

$$\gamma(t) = \gamma^*(\tau(t)) \text{при всех } t \in [a_1, b_1].$$

Класс эквивалентных путей называют кривой.

Определение 3.3. *Путь γ называют простым или жордановым, если γ осуществляет взаимно однозначное отображение отрезка $[a, b]$ на его образ $\gamma([a, b])$.*

Путь γ называют замкнутым жордановым путем, если $\gamma(a) = \gamma(b)$ и γ осуществляет взаимно однозначное отображение полуинтервала $[a, b)$ на его образ $\gamma([a, b))$.

Рассматривая путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ как отображение в евклидову плоскость, определим понятие гладкого и кусочно гладкого пути.

Определение 3.4. *Путь γ называют непрерывно дифференцируемым, если функция γ непрерывно дифференцируема, т. е. непрерывно дифференцируемы функции γ_1 и γ_2.*

Путь γ называют гладким, если он непрерывно дифференцируем и при всех $t \in [a, b]$ $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t) \neq 0$.

Путь γ называют кусочно гладким, если отрезок $[a, b]$ можно разбить точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

на конечное число отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ так, что сужение γ на каждый из них является гладким путем.

Эквивалентность гладких и кусочно гладких путей определяется так же, как в случае непрерывных путей, но с дополнительным условием, что функция τ гладкая (т. е. непрерывно дифференцируема и ее производная положительна) и кусочно гладкая соответственно.

Области на комплексной плоскости

Определение 3.5. *Множество $D \subset \mathbb{C}$ называют областью, если это множество открытое и линейно связное. Линейная связность означает, что для любых двух точек множества D найдется путь, соединяющий их и лежащий в D.*

Все точки комплексной области по отношению к данной области D можно разделить на три класса: точки самой области (они же внутренние точки области), граничные точки области и внешние точки области. Множество всех граничных точек области D составляет границу, которую будем обозначать ∂D. Объединение $D \bigcup \partial D$ будем называть замкнутой областью.

Французский математик К. Жордан показал, что любая простая замкнутая кривая на плоскости делит плоскость на две не пересекающиеся области: первая не ограничена, ее называют внешней по отношению к кривой (*внешностью кривой*), а вторая ограничена, ее называют внутренней по отношению к кривой (*внутренностью кривой*). Для обеих этих областей кривая является границей.

Область D называют *односвязной*, если она обладает следующим свойством: для любой простой замкнутой кривой, лежащей в D, внутренность этой кривой также целиком принадлежит D. Область, не обладающую этим свойством, называют *многосвязной*.

Уточним определение окрестности бесконечно удаленной точки

$$O(\infty) = \big\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\big\},\ r > 0.$$

3.5 Бесконечно удаленная точка. Сфера Римана.

Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $O\xi\eta\chi$, оси $O\xi$ и $O\eta$ которой совпадают с осями Ox и Oy системы координат Oxy комплексной плоскости, и рассмотрим сферу S единичного диаметра с уравнением

$$\xi^2 + \eta^2 + (\chi - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Эта сфера касается комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в начале координат.

Каждому комплексному числу $z = x+iy$, изображаемому в плоскости $\mathbb{C}$ точкой (x, y), поставим в соответствие точку $Z(\xi, \eta, \chi)$ пересечения со сферой S луча, соединяющего „северный полюс“$N(0, 0, 1)$ сферы с точкой z. Точку Z называют *сферическим изображением комплексного числа* z. При такой геометрической интерпретации „южному полюсу“сферы соответствует число $z = 0$.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между точками множеств $\mathbb{C}$ и $S \setminus \{N\}$, поскольку точке N не соответствует ни одна точка $z \in \mathbb{C}$. Условимся считать, что точка N соответствует *бесконечно удаленная точка* $z = \infty$.

Множество $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ называют расширенной комплексной плоскостью и обозначают $\overline{\mathbb{C}}$. База окрестностей точки ∞ задается внешностями кругов $\big\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\big\} \bigcup \{\infty\},\ \ r > 0.$

Далее будем отождествлять расширенную комплексную плоскость со сферой S, называемой *сферой Римана.* Сфера Римана, будучи ограниченным и замкнутым множеством, является компактным множеством. Поэтому расширенную комплексную плоскость называют еще компактифицированной комплексной плоскостью.

Отображение, ставящее каждому комплексному числу его сферическое изображение, обладает важным свойством. Можно доказать, что при этом отображении окружности на комплексной плоскости переходят в окружности на сфере Римана, не проходящие через „северный полюс“. И наоборот, окружностям на сфере Римана, не проходящим через „северный полюс“, соответствуют окружности на комплексной плоскости. Прямые же на комплексной плоскости отображаются в окружности на S, проходящие через „северный полюс“.

4 Последовательности и ряды комплексных чисел

4.1 Последовательности и ряды комплексных чисел

Теория последовательностей комплексных чисел - это по существу теория последовательностей в $\mathbb{R}^2$.

Определения ограниченной, сходящейся, фундаментальной и т.д. последовательности фактически остаются теми же. Теоремы притерпевают лишь некоторые формальные изменения. Например, последовательность $(z_n) = (x_n + iy_n)$ сходится к числу $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$. В теореме об арифметических действиях над сходящимися последовательностями появится операция умножения и деления.

Аналогичные вещи наблюдаются и в теории числовых рядов. Каждому ряду с комплексными числами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) \tag{68}$$

соответствует два ряда с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \tag{69}$$

При этом ряд (68) сходится тогда и только тогда, когда ряды (69) сходятся.

Дословно повторяется определение абсолютно сходящегося ряда. Для исследования ряда на абсолютную сходимость в нашем распоряжении доказанные ранее признаки(признак мажорации, признак Даламбера, признак Коши).

4.2 Степенные ряды

Ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \qquad (70)$$

называют степенным рядом. Комплексные числа $c_0, c_1, \ldots$ называют коэффициентами этого ряда.

Как и в вещественном случае, применяя признак Коши для исследования ряда на абсолютную сходимость, докажем следующую теорему.

Теорема 4.2.1. *(Коши-Адамара). Пусть*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = l. \qquad (71)$$

Тогда

1) *при* $l = 0$ *ряд* (70) *абсолютно сходится во всей комплексной плоскости* $\mathbb{C}$;

2) *при* $l = \infty$ *ряд сходится толко в точке* $z = z_0$ *и расходится при* $z \neq z_0$;

3) *при* $0 < l < \infty$ *ряд абсолютно сходится в круге* $\{|z - z_0| < 1/l\}$ *и расходится во внешности этого круга.*

Пусть $0 < l < \infty$. Круг с центром в точке z_0 и радиуса $1/l$, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится, а во внешности котого расходится, называют *кругом сходимости* степенного ряда, а число $R = 1/l$ - *радиусом сходимости.*

Эти определения распространяются и на крайние случаи: $l = 0$ ($R = \infty$) и $l = \infty$ ($R = 0$). В первом случае кругом сходимости является вся плоскость $\mathbb{C}$ и внешность его - пустое множество; во втором случае круг вырождается в точку z_0 и внешность его представляет всю плоскость, за исключением точки z_0. В случае $R > 0$ круг сходимости будем обозначать символом K_R.

Таким образом, во всех трех случаях, мы запишем формулу

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}, \qquad (72)$$

которую называют *формулой Коши-Адамара.*

Обратим внимание на то, что в точках окружности $\{|z-z_0|=R\}$ при $0<R<\infty$ ряд может вести себя по-разному.

Из теоремы Коши-Адамара как простое следствие вытекает следующая теорема.

Теорема 4.2.2. *(Абеля). Если степенной ряд* (70) *сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится абсолютно во всех точках z, удовлетворяющих неравенству*

$$|z-z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Замечание. Если для исследования степенного ряда использовать признак Даламбера, то можно получить еще одну формулу для вычисления радиуса сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \tag{73}$$

если предел в равенстве справа существует.

5 Функции комплексного переменного

5.1 Определение функции комплексного переменного

Определение 5.1. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{C}}$. Если каждому $z \in E$ поставлено в соответствие комплексное число $w \in \overline{\mathbb{C}}$, то говорят, что на множестве E определена функция комплексного переменного. Обозначим ее*

$$f : E \to \overline{\mathbb{C}} \quad \textit{или} \quad w = f(z).$$

Согласно этому определению всякая функция *однозначна.* Понятие многозначной функции мы введем позже.

Определение 5.2. *Функция $f : E \to \overline{\mathbb{C}}$ называется взаимно однозначной или* ***однолистной****, если она отображает различные точки в различные, т.е. из равенства $f(z_1) = f(z_2)$ следует равенство $z_1 = z_2$.*

Положим $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда задание функции $w = f(z)$ равносильно заданию пары функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ таких, что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ называют вещественной и мнимой частями функции f соответственно и записывают

$$Ref(z) = u(x, y), \quad Imf(z) = v(x, y).$$

Таким образом, отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ в то же время является отображением из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

Основные понятия теории функций комплексного переменного являются обобщением соответствующих понятий теории функций действительного переменного. Это обстоятельство, с одной стороны, несколько облегчает знакомство с функциями комплексного переменного, но, с другой стороны, требует повышенного внимания, так как обобщение всегда сопряжено с добавлением ряда особенностей, специфических для нового объекта исследования. Далее в каждом отдельном случае будем подчеркивать эти особенности.

5.2 Предел и непрерывность функций комплексного переменного

Что касается вопросов ограниченности функции, предела функции и непрерывности, то они решаются в рамках отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Только лишь к операциям, производимым над функциями, добавляются операции умножения и деления.

Пусть $A = A_1 + iA_2$. Тогда равенство

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \tag{74}$$

равносильно двум действительным равенствам

$$\lim_{z \to z_0} Ref(z) = A_1, \ \lim_{z \to z_0} Imf(z) = A_2.$$

Если $A \neq 0$, и выбрать надлежащим образом значение $Argf(z)$, то равенство (74) равносильно двум равенствам

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |A|, \ \lim_{z \to z_0} Argf(z) = ArgA.$$

Функцию f называют *непрерывной* в точке z_0, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{75}$$

В коплексный анализ переносятся оновные теремы о свойствах функций непрерывных в точке: теорема об арифметических действиях над непрерывными функциями и теорема о непрерывности сложной функции.

Укажем свойства функций комплексного переменного, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве K, т.е. на *компакте.*

1. Если функция f непрерывна на множестве K, то она ограничена на нем, т.е.
$$\exists C > 0\ \forall z \in K\ |f(z)| \le C.$$

2. Модуль всякой функции f, непрерывной на множестве K, достигает на K своих наибольшего и наименьшего значений, т.е.
$$\exists z_1, z_2 \in K\ \forall z \in K\ \ f(z_1)| \le |f(z)| \le |f(z_2)|.$$

3. Всякая функция f, непрерывная на множестве K, **равномерно непрерывна на нем**, т.е.
$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z_1, z_2 \in K\ (0 < |z_1 - z_2| < \delta\ \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon).$$

6 Дифференцируемость функции и производная

6.1 Комплексная дифференцируемость

6.1.1 $\mathbb{R}^2$-дифференцируемость.

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ как отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сопоставляющее каждой точке $z = x + iy$ точку

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Определение 6.1. *Функция f, определенная в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, называется $\mathbb{R}^2$-дифференцируемой в точке z_0, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух переменных.*

6.1.2 $\mathbb{C}$-дифференцируемость.

Определение 6.2. *Пусть функция f определена и конечна в некоторой окрестности точки z_0. Функция f называется $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0, если найдется комплексное число a такое, что выполняется равенство*

$$f(z) - f(z_0) = a \cdot (z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0), \tag{76}$$

где $\alpha(z) \to 0$ при $z \to z_0$.

Равенство (76) можно переписать в виде

$$f(z) - f(z_0) = a \cdot (z - z_0) + o(z - z_0) \text{ при } z \to z_0. \tag{77}$$

Выполнение равенства (**??**) равносильно также существованию предела

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0).$$

Определение 6.3. *Число*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{78}$$

называют производной функции f в точке z_0

Легко доказать следующую теорему.

Теорема 6.1.1. *Если функция f дифференцируема в точке z, то она непрерывна в этой точке.*

Замечание. В комплексный анализ без всяких изменений переносятся элементарные правила дифференцирования (производные суммы, произведения, частного, сложной и обратной функции); мы не будем останавливаться на их формулировках и доказательствах.

6.2 Условия Коши-Римана.

Теорема 6.2.1. *Функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда она $\mathbb{R}^2$-дифференцируема в точке z_0 и выполняются условия Коши-Римана*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Обозначим $h = z - z_0$. Согласно определению дифференцируемости имеем

$$f(z) - f(z_0) = ah + \alpha(h)h,$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Представив

$$a = a_1 + ia_2, \quad h = h_1 + ih_2, \quad \alpha(h) = \alpha_1(h) + i\alpha_2(h),$$

далее получим

$$f(z) - f(z_0) = (a_1 + ia_2)(h_1 + ih_2) + (\alpha_1(h) + i\alpha_2(h))(h_1 + ih_2) =$$

$$= (a_1h_1 - a_2h_2) + i(a_1h_2 + a_2h_1) +$$
$$+(\alpha_1(h)h_1 - \alpha_2(h)h_2) + i(\alpha_1(h)h_2 + \alpha_2(h)h_1).$$

С другой стороны,

$$f(z) - f(z_0) = (u(x, y) - u(x_0, y_0)) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0)) =$$

$$= (u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)) + i(v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)).$$

Следовательно,

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) = (a_1h_1 - a_2h_2) + (\alpha_1(h)h_1 - \alpha_2(h)h_2)$$

и

$$v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) = (a_1h_2 + a_2h_1) + (\alpha_1(h)h_2 + \alpha_2(h)h_1).$$

Поскольку $\alpha_1(h) \to 0$ при $h \to 0$ и $\alpha_2(h) \to 0$ при $h \to 0$, то функции u и v дифферкнцируемы в точке (x_0, y_0) и

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = a_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -a_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = a_2, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = a_1.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Достаточность. Обозначим

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = a_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -a_2.$$

В силу дифференцируемости функций u и v

$$u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0,y_0) = a_1h_1 - a_2h_2 + o(|h|),$$

$$v(x_0+h_1, y_0+h_2) - v(x_0,y_0) = a_2h_1 + a_1h_2 + o(|h|).$$

Умножив второе равенство на i и сложив с первым, получим

$$f(z) - f(z_0) = (a_1 + ia_2)(h_1 + ih_2) + (o(|h|) + io(|h|)) =$$

$$= ah + o(h),$$

что означает дифференцируемость функции f. □

Замечание. Так как предел в равенстве (78) не зависит от направления, то его можно вычислять в направлении оси Ox. Тогда

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

или в силу условия Коши-Римана

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Отметим, что условие (76) комплексной дифференцируемости более ограничительно по сравнению с дифференцируемостью в вещественном анализе. В то время, как примеры функций непрерывных, но нигде не дифференцируемых в смысле вещественного анализа, строятся с некоторым трудом (примеры Вейерштрасса или Пеано), нигде не дифференцируемыми в смысле комплексного анализа оказываются самые "простые" функции. Например, функция

$$f(z) = x + 2iy$$

в смысле $\mathbb{C}$ нигде не дифференцируема. Действительно для нее

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2,$$

и условия Коши-Римана нигде не выполняются.

6.3 Голоморфные функции.

Определение 6.4. *Функцию f называют голоморфной в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.*

Функцию называют голоморфной в области D если она голоморфна в каждой точке этой области.

6.4 Геометрический смысл производной. Конформные отображения.

Рассмотрим сначала комплексную функцию действительного переменного $z = \lambda(t)$, определенную и непрерывную на некотором отрезке $[a, b]$ вещественной оси. Эта функция, как известно, определяет некоторую непрерывную кривую L.

Пусть в некоторой точке $t_0 \in [a, b]$ существует производная $\lambda'(t_0) \neq 0$. Рассмотрим последовательность (t_n) точек, отличных от t_0, которая сходится к точке t_0. Обозначим $z_0 = \lambda(t_0),\ z_n = \lambda(t_n)$. Через точку z_n и точку z_0 проведем секущую кривой L. Очеводно, что эта секущая параллельна вектору

$$\frac{z_n - z_0}{t_n - t_0}.$$

Поскольку существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_0)}{t_n - t_0} = \lambda'(t_0) \neq 0,$$

то существует и предел

$$\lim_{n\to\infty} Arg \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_0)}{t_n - t_0} = Arg\ \lambda'(t_0).$$

То есть в точке z_0 к кривой L существует касательная, понимаемая как предельное положение секущих, проходящих через точку z_0, и угол наклона касательной к действительной оси совпадает с аргументом производной $\lambda'(t_0)$.

Пусть теперь функция $w = f(z)$ непрерывна в некоторой области, содержащей кривую L, и в точке z_0 имеет производную $f'(z_0) \neq 0$. Тогда функция $w = f(\lambda(t)) = \mu(t)$ определяет в плоскости w непрерывную кривую L^*, проходящую через точку $w_0 = f(z_0)$.

По правилу дифференцирования сложной функции функция $\mu(t)$ дифференцируема в точке t_0 и $\mu'(t_0) = f'(z_0)\lambda'(t_0) \neq 0$. Это означает, что кривая L^* имеет в точке w_0 касательную, угол наклона которой равен

$$Arg\ \mu'(t_0) = Arg\big(f'(z_0)\lambda'(t_0)\big) = Arg\ f'(z_0) + Arg\ \lambda'(t_0).$$

Отсюда вытекает, что при переходе от кривой L к ее образу L^* угол наклона касательной изменяется на величину

$$Arg\ \mu'(t_0) - Arg\ \lambda'(t_0) = Arg\ f'(z_0).$$

Если мы теперь рассмотрим две кривые, проходящие через точку z_0. Углом между кривыми в точке z_0 называют угол между касательными к этим кривым в точке z_0. Согласно предыдущим выкладкам углы наклона касательных к этим кривым изменятся на одну и ту же величину $Arg\ f'(z_0)$. Следовательно, угол между образами этих кривых в точке w_0 будет равен углу между самими кривыми в точке z_0.

Выясним теперь геометрической смысл модуля производной $|f'(z_0)| \neq 0$. С этой целью заметим, что

$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

Следовательно, с точностью до величин более высокого порядка малости, чем $|\Delta z|$, имеет место равенство $|\Delta w| \approx |f'(z_0)||\Delta z|$. Поэтому отображение f переводит малые окружности с центром в точке z_0 в кривые, отличающиеся от окружностей с центром $f(z_0)$ на малые более высокого порядка.

Определение 6.5. *Дифференцируемое в смысле $\mathbb{R}^2$ в точке $z_0 = x_0+iv_0$ отображение $f = u++iv$ называется **конформным** в этой точке, если афинное отображение*

$$u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$v - v_0 = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

сохраняет ориентацию и сохраняет углы .

Можно доказать, что *конформность отображения f в точке z_0 означает $\mathbb{C}$-дифференцируемость f в точке z_0 вместе с условием $f'(z_0) \neq 0$.*

Определение 6.6. *Отображение f называют конформным в области D, если оно взаимно однозначно (т.е. однолистно) и конформно в каждой точке $z \in D$.*

6.5 Голоморфность и конформность отображений расширенной комплексной плоскости.

Определение 6.7. *Функцию $f : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, определенную в окрестности точки $\infty \in \mathbb{C}$, называют голоморфной (конформной) в точке $z = \infty$, если функция*

$$g(z) = f\Big(\frac{1}{z}\Big)$$

голоморфна (конформна) в точке $z = 0$.

Определение 6.8. *Функцию $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, обращающаяся в бесконечность в точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, называют голоморфной (конформной) в точке z_0, если функция*

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}$$

голоморфна (конформна) в точке z_0.

В частности, если $f(\infty) = \infty$, то голоморфность f в точке $z_0 = \infty$ означает голоморфность функции

$$G(z) = \frac{1}{f(1/z)}$$

в нуле.

7 Элементарные функции в комплексной плоскости

В этом разделе мы дадим определения основных элементарных функций комплексного переменного и установим некоторые их свойства. Мы пока не будем касаться свойства непрерывности и дифференцируемости. Позже, изучив свойства суммы степенного ряда, мы вернемся к этим вопросам.

Определение 7.1. *Положим по определению для любого* $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{79}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{80}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{81}$$

Определения корректны, так как радиус сходимости каждого ряда $R = \infty$.

Нам следует убедится в том, что данное определение показательной функции не противоречит введенному ранее обозначению
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in \mathbb{R}$.

Действительно, при $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$= \cos x + i \sin x.$$

Более того, при $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z + i \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} i^{(2n)} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{(2n+1)} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = e^{iz}.$$

Итак, при любом $z \in \mathbb{C}$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{82}$$

Поскольку $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$, то

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{83}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{84}$$

Формулы (82), (83) и (84) называют формулами Эйлера.

Остановимся на некоторых свойствах введенных функций.

1. При любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{85}$$

Доказательство.

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}$$

□

2. Функция e^z периодическая, и ее период $T = 2\pi i$.

   Действительно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

3. Функции $\cos z$ и $\sin z$ имеют период 2π.

   Это следует из формул Эйлера.

   Для этих функций остаются в силе основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

   и т.п.

Определение 7.2. *Определим функции тангенс и котангенс равенствами*

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{86}$$

Определение 7.3. *Определим гиперболические функции*

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{87}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \tag{88}$$

Отметим ряд тождеств, связанных с гиперболическими функциями

$$\begin{aligned} \sin iz = i \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z, \\ \cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z, \\ \operatorname{tg} iz = iz \operatorname{th} z, \quad \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z, \\ \operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z, \quad \operatorname{cth} iz = -i \operatorname{ctg} z, \end{aligned}$$

а также

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

8 Многозначные функции

Самые простые задачи приводят к необходимости рассматривать многозначные функции. Например, уравнение $z = w^n$ при любом фиксированном $z \neq 0$ имеет, как нам уже известно, n различных решений.

Если каждому числу $z \in E$ поставлено в соответствие несколько комплексных чисел, обозначаемых $w = f(z)$, то говорят о *многозначной функции комплексного переменного,* заданной на множестве E. Говорят, что в области $D \subset E$ выделена *однозначная ветвь многозначной функции* $f(z)$, если в каждой точке этой области выбрано одно из возможных значений многозначной функции $f(z)$, причем так, что полученная однозначная функция является непрерывной в области D.

Многозначная функция может иметь как конечное число ветвей, так и бесконечное. Отметим, что не во всякой области, в которой определена многозначная функция, можно выделить ее однозначную ветвь.

8.1 Многозначная функция Arg z.

В теории функций комплексного переменного особая роль отводится многозначной функции $Arg\ z$. С этой функцией связаны многие другие многозначные функции: построение однозначных ветвей этих функций определяется выбором значения аргумента комплексного переменного.

Пусть кривая γ не проходит через точку $z = 0$. Угол поворота радиус-вектора точки z при ее движении вдоль кривой γ от начальной точки A до конечной точки B обозначим $\Delta_\gamma Arg\ z$.

Найдем формулу для приращения аргумента вдоль кривой.

Из формул $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ имеем

$$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi, \quad dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi,$$

откуда

$$rd\varphi = -\sin\varphi dx + \cos\varphi dy.$$

Следовательно,

$$d\varphi = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Рассмотрим интеграл от $d\varphi$ вдоль кривой γ, равный разности значений аргумента z в конечной и начальной точках кривой γ, или приращению аргумента $\Delta_\gamma Arg\ z$ вдоль γ. Итак,

$$\Delta_\gamma Arg\ z = \int\limits_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}. \tag{89}$$

Свойства приращения аргумента оказались связанными со свойствами криволинейного интеграла, стоящего в равенстве (89) справа. Исходя из свойств криволинейного интеграла, имее следующие свойства приращения аргумента.

1. $\Delta_\gamma Arg\ z = -\Delta_{-\gamma} Arg\ z$, где $-\gamma$ обозначает кривую γ, на которой направление обхода изменено на противоположное.

2. Если кривая γ составлена из двух кривых γ_1 и γ_2 так, что конечная точка γ_1 является начальной точкой γ_2, то $\Delta_\gamma Arg\ z = \Delta_{\gamma_1} Arg\ z + \Delta_{\gamma_2} Arg\ z$.

   В криволинейном интеграле в равенстве (89) подинтегральное выражение

   $$Pdx + Qdy = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

   Поскольку равество

   $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

   выполняется в любой области, не содержащей точки $z = 0$, то криволинейный интеграл в равенстве (89) в любой такой области не зависит от пути интегрирования. Учитывая это, приходим к следующим свойствам приращения аргумента.

3. $\Delta_{\gamma_1} Arg\ z = \Delta_{\gamma_2} Arg\ z$ для любых двух кривых γ_1 и γ_2, лежащих в односвязной области $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и имеющих общие начальную и конечную точки.

4. Приращение аргумента вдоль любой замкнутой кривой γ в односвязной области $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ равно нулю: $\Delta_\gamma Arg z = 0$.

   Если простая замкнутая кривая γ окружает точку $z = 0$ и обходится против часовой стрелки, то значение интеграла равно его *циклической постоянной* для точки $z = 0$. Циклическую постоянную в точке $z = 0$ можно вычислить, взяв в качестве γ окружность $|z| = R$. Несложный расчет приводит к значению 2π.

5. Приращение аргумента вдоль любой простой замкнутой кривой γ, внутренность которой содержит точку $z = 0$ и которая обходится против часовой стрелки, равно 2π: $\Delta_\gamma Arg\ z = 2\pi$.

Пусть D - односвязная область на комплексной плоскости, не содеожащая точку $z = 0$. Зафиксируем в этой области некоторую точку z_0 и выберем в этой точке одно из значений $\varphi_0 \in Arg\ z_0$. Положим

$$f(z) = \varphi_0 + \Delta_\gamma Arg\ z, \tag{90}$$

где γ - произвольная кривая с началом в точке z_0 и концом в точке z, лежащая в области D. Поскольку приращение аргумента не зависит от выбора кривой, соединяющей точки z_0 и z и лежащей в D, равенство (90) определяет в области D однозначную непрерывную функцию. Эта функция является однозначной ветвью многозначной функции $Argz$, определенной в области D. Очевидно, что таких ветвей бесконечно много и другие ветви многозначной функции $Arg\ z$ можно получить, добавляя к $f(z)$ слагаемые $2k\pi$:

$$(Arg\ z)_k = f(z) + 2k\pi = \varphi_0 + \Delta_\gamma Arg\ z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{91}$$

Выделение однозначной ветви многозначной функции $Arg\ z$ в области D возможно лишь тогда, когда эта область не содержит контуров, окружающих точку $z = 0$.

8.2 Логарифмическая функция

Рассмотрим произвольное комплексное число $z \neq 0$. Если $e^w = z$, то w называют *логарифмом комплексного числа* z и обозначают

$$w = Ln\ z.$$

При $w = u + iv$ получаем

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv}.$$

Следовательно, $e^u = |z|$, т. е. $u = \ln |z|$, и $v = Arg\ z = arg\ z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Итак,

$$Ln\ z = \ln |z| + i\ Arg\ z = \ln |z| + i(arg\ z + 2k\pi). \tag{92}$$

Значение $Ln\ z$, отвечающее в (92) значению $k = 0$, называют *главным значением логарифма* и обозначают $ln\ z$, т. е.

$$ln\ z = \ln\ |z| + i\ arg\ z.$$

Равенство (92) в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ определяет многозначную функцию, называемую *логарифмической функцией.* Ветви этой многозначной функции определяются ветвями функции $Arg\ z$. Стало быть, функция $Ln\ z$ допускает выделение ветви в любой области, в которой допускает выделение ветви многозначная функция $Arg\ z$.

Теперь можно определить *общую показательную функцию.* Пусть $a \neq 0$. Положим

$$a^z = e^{z\ Ln\ a}. \tag{93}$$

Как и в случае логарифма, выделяют *главное значение показательной функции* a^z, равное $e^{z\ ln\ a}$.

Соотношение

$$z^a = e^{a\ Ln\ z} \tag{94}$$

при фиксированном a определяет многозначную функцию в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, называемую *общей степенной функцией.*

8.3 Обратные тригонометрические функции

Функции *Arcsin* z, *Arccos* z, *Arctg* z, *Arcctg* z определяют как обратые к синусу, косинусу, тангенсу и котангенсу соответственно и называют обратными тригонометрическими функциями комплексного переменного.

Так, если $z = \cos w$, то w называют арккосинусом числа z и обозначают *Arccos* z. Для вычисления w воспользуемся представлением

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \frac{t + t^{-1}}{2}$$

(мы сделали замену $e^{iw} = t$). Тогда $t^2 - 2zt + 1 = 0$. У этого уравнения два корня $\xi_1, \xi_2 = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (в этой формуле квадратный корень имеет два значения в рамках комплексных чисел). А так как $t = e^{iw}$, то $iw = Ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$. Итак,

$$Arccos\ z = -iLn\big(z + \sqrt{z^2 - 1}\big). \tag{95}$$

Поскольку $\xi_1 \xi_2 = 1$, то $|\xi_1||\xi_2| = 1$ и $arg\xi_1 + arg\xi_2 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Главное значение аргумента комплексного числа есть число из промежутка $(-\pi, \pi]$. Поэтому либо $arg\xi_1 + arg\xi_2 = 0$, либо $arg\xi_1 + arg\xi_2 = 2\pi$. Значит, либо два аргумента отличаются лишь знаком, либо обо равны π.

Это рассуждение показывает, что из двух значений ξ_1 и ξ_2 одно имеет главное значение аргумента, принадлежащее отрезку $[0, \pi]$. Обозначим его через ξ. Ему соответствует значение многозначной функции *Arccos* z, равное $-i \ln \xi = -i \ln |\xi| + arg\ \xi$, которое называют **главным значением арккосинуса** и обозначают $\arccos z$.

Итак, по определению

$$\arccos z = arg\ \xi - i \ln |\xi|, \tag{96}$$

где $\xi = z + \sqrt{z^2 - 1}$ является числом, аргумент которого принадлежит отрезку $[0, \pi]$. Другие значения *Arccos* z либо отличаются от главного значения арккосинуса слагамым $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, либо формируются вторым значением выражения $z + \sqrt{z^2 - 1}$, равным $1/\xi$:

$$Arccos\ z = -iLn\big(\frac{1}{\xi}\big) = -i\big(-\ln |\xi| - i\ arg\ \xi + 2k\pi i\big) =$$

$$= -i\ arg\ \xi + i \ln |\xi| - 2k\pi = \arccos z - 2k\pi.$$

Таким образом, все значения $Arccos\ z$ описываются формулой

$$Arccosz = \pm \arccos z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{97}$$

Аналогично с помощью логарифмической функции можно выразить и другие обратные тригонометрические функции:

$$Arcsin\ z = -iLn\ i\big(z + \sqrt{z^2 - 1}\big), \tag{98}$$

$$Arctg\ z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1 + iz}{1 - iz}, \tag{99}$$

$$Arcctg\ z = -\frac{i}{2} Ln \frac{z + i}{z - i}. \tag{100}$$

Можно показать, что для любого значения $Arccosz$ существует такое значение $Arcsin\ z$, что сумма этих значений равна $\pi/2$. Аналогичное утверждение справедливо для пары функций $Arctg\ z$ и $Arctg\ z$. Именно в этом смысле и следует понимать равенства

$$Arcsin\ z + Arccos\ z = \frac{\pi}{2}, \quad Arctg\ z + Arcctg\ z = \frac{\pi}{2}.$$

9 Интегрирование функций комплексного переменного

9.1 Определение интеграла от функции комплексного переменного

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ - гладкий путь, а непрерывная функция f определена на γ. Интегралом от функции f вдоль пути γ называется

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \tag{101}$$

где в правой части интеграл от комплексной функции $f(\gamma(t))\gamma'(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ действительного аргумента t понимается как

$$\int\limits_{a}^{b} g_1(t)dt + i\int\limits_{a}^{b} g_2(t)dt.$$

Интеграл по кусочно гладкому пути определим как сумму интегралов по его гладким кускам.

Если положить $f = u + iv$, $\gamma' = \gamma_1' + i\gamma_2'$, то интеграл (101) можно переписать в виде криволинейного интеграла второго рода

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} udx - vdy + i\int\limits_{\gamma} vdx + udy.$$

Перечислим основные свойства интеграла.

1. Линейность. Если функции f и g непрерывны на кусочно гладком пути γ, то для любых комплексных постоянных α и β

   $$\int\limits_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha\int\limits_{\gamma} f(z)dz + \beta\int\limits_{\gamma} g(z)dz.$$

   Следует непосредственно из определения.

2. Аддитивность. Пусть γ_1 и γ_2 два кусочно гладких пути, $\gamma = \gamma_1 \bigcup \gamma_2$. Тогда

   $$\int\limits_{\gamma_1 \bigcup \gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$

3. Оценка интеграла. Для любой функции f, непрерывной на кусочно гладком пути γ, справедливо неравенство

   $$\Big|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\Big| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)|ds,$$

   где справа стоит криволинейный интеграл первого рода.

   Доказательство. Обозначим через J величину интеграла от f по γ, и пусть $J = |J|e^{i\varphi}$. Поскольку $|J| = Je^{-i\varphi}$, то

   $$|J| = \int\limits_{\gamma} e^{-i\varphi} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Так как интеграл справа является действительным числом, то

$$|J| = \int_a^b Re\{e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\}dt \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt = \int_\gamma |f(z)|ds.$$

□

Следствие. Если в условиях предыдущей теоремы $|f(z)| \leq M$ всуду на γ, где M - некоторая постоянная, то

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| \leq M|\gamma|$$

(через $|\gamma|$ мы обозначаем длину пути γ).

4. Пусть путь γ^- такой, что $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t),\ t \in [a,b]$, тогда

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

В этом случае говорят, что путь γ^- противоположно ориентирован пути γ.

Интеграл, введенный нами для пути γ, имеет смысл и для кривой Γ, под которой мы понимаем класс эквивалентных путей . Интеграл по кривой Γ мы определим как интеграл по любому пути из класса эквивалентных путей. Обратим внимание, что определение корректно, т. е. не зависит от выбора пути из этого класса. Класс путей эквивалентных пути γ^-, называют кривой Γ^-, противоположно ориентированной кривой Γ.

Приведем пример вычисления интеграла, который потребуется в дальнейшем.

Пример. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ - произвольный гладкий путь, соединяющий точки a и b. Вычислим интеграл вдоль пути γ от функции $f(z) = z^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница для комплекснозначных функций вещественного переменного (которая, очевидно, сохраняет силу), имеем

$$\int_\gamma z^n dz = \int_\alpha^\beta \gamma^n(t)\gamma'(t)dt = \frac{1}{n+1}\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\big(\gamma^{n+1}(t)\big)dt =$$

$$= \frac{\gamma^{n+1}(\beta) - \gamma^{n+1}(\alpha)}{n+1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_\gamma z^n dz$ зависит лишь от начала a и конца b пути γ. В частности, интеграл по замкнутому контуру будет равен нулю.

9.2 Интегральная теорема Коши

В этом пункте мы приступим к доказательству центральной теоремы теории функций комплексного переменного.

9.2.1 Теорема Коши для треугольника.

Теорема 9.2.1. *Пусть функция f голоморфна в области D и замкнутый треугольник $T \subset D$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Доказательство. От противного. Предположим, что

$$\Big|\int\limits_{\partial T} f(z)dz\Big| = M > 0.$$

Разобьем треугольник T на четыре треугольника средними линиями. Очевидно, что интеграл по границе треугольника T равен сумме интегралов по положительно ориентированным границам маленьких треугольников. Поэтому найдется хотя бы один маленький треугольник - обозначим его через T_1 - такой, что

$$\Big|\int\limits_{\partial T_1} f(z)dz\Big| \geq \frac{M}{4}.$$

Треугольник T_1 снова разобьем средними линиями на четыре треугольнока и по тем же соображениям выберем - обозначим его T_2 -тот, для которого

$$\Big|\int\limits_{\partial T_2} f(z)dz\Big| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Продолжая это рассуждение, получим последовательность вложенных друг в друга замкнутых треугольников (T_n) таких, что справедливо неравенство

$$|\int\limits_{\partial T_n} f(z)dz| \geq \frac{M}{4^n}. \tag{102}$$

Эти треугольники имеют общую точку z_0, принадлежащую T, а следовательно, и D. Так как функция дифференцируема в точке z_0, то для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое , что справедливо разложение

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0)$$

где для всех z из окрестности $U = \{|z - z_0| < \delta\}$ будет $|\alpha(z)| < \epsilon$. В U найдется найдется треугольник построенной последовательности, пусть это будет треугольник T_n. Тогда

$$\int\limits_{\partial T_n} f(z)dz = \int\limits_{\partial T_n} f(z_0)dz + \int\limits_{\partial T_n} f'(z_0)(z - z_0)dz +$$

$$+ \int\limits_{\partial T_n} \alpha(z)(z - z_0)dz.$$

Первые два интеграла равны нулю (см. пример в разделе (9.1)). Поэтому

$$\int\limits_{\partial T_n} f(z)dz = |\int\limits_{\partial T_n} \alpha(z)(z - z_0)dz| < \epsilon|\partial T_n|^2.$$

Согласно построению $|\partial T_n| = |\partial T|/2^n$, где $|\partial T|$ - периметр треугольника T. Следовательно,

$$\int\limits_{\partial T_n} f(z)dz = |\int\limits_{\partial T_n} \alpha(z)(z - z_0)dz| < \epsilon\frac{|\partial T|^2}{4^n}.$$

Учитывая (102), получаем неравенство

$$M < \epsilon|\partial T|^2,$$

откуда в силу произвольности числа ϵ заключаем, что $M = 0$ вопреки начальному предположению. □

9.2.2 Теорема Коши.

Рассуждая по индукции теорему Коши можно распространить на случай замкнутой ломаной.

Теорема 9.2.2. *Пусть функция f голоморфна в односвязной области D и замкнутая ломаная $L \subset D$. Тогда*

$$\int\limits_L f(z)dz = 0.$$

Теорема 9.2.3. *Пусть функция f голоморфна в односвязной области D и Γ - кусочно гладкая замкнутая кривая, лежащая в D. Тогда*

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь замкнутую область $E \subset D$, содержащую Γ. Пусть для определенности E состоит из точек, расстояние которых от Γ не превосходит некоторого $\delta > 0$. Заметим также, что число δ должно быть меньше рассояния между Γ и границей D.

Функция f, будучи напрерывной на E, равномерно непрерывна на нем. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ найдется $\rho > 0$ такое, что $|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| < \epsilon$, если $|\zeta_1 - \zeta_2| < \rho$ и $\zeta_1, \zeta_2 \in E$. Фиксируем на Γ в определенном направлении точки $z_0, z_1, \ldots, z_n = z_0$, разбивающие ее на дуги $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ так, что максимальная их длина $\max\limits_{0 \le j \le n-1} |\gamma_j| < \min(\delta, \rho)$. Каждые две точки z_j и z_{j+1} $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ отрезком прямой l_j. Совокупность этих отрезков составляет замкнутую ломаную L, вписанную в Γ и лежащую в E. В силу теоремы (9.2.2)

$$\int\limits_L f(z)dz = 0.$$

Тогда

$$|\int\limits_\Gamma f(z)dz| = |\int\limits_\Gamma f(z)dz - \int\limits_L f(z)dz| =$$

$$= |\sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_{\gamma_j} f(z)dz - \sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_{l_j} f(z)dz| \le \sum_{j=0}^{n-1} |\int\limits_{\gamma_j} f(z)dz - \int\limits_{l_j} f(z)dz|.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\gamma_j} f(z_j)dz = f(z_j)(z_{j+1} - z_j) = \int\limits_{l_j} f(z_j)dz.$$

Используя это, получим

$$\Big|\int\limits_{\gamma_j} f(z)dz - \int\limits_{l_j} f(z)dz\Big| \le \Big|\int\limits_{\gamma_j}(f(z)dz - f(z_j))dz\Big| + \Big|\int\limits_{l_j}(f(z_j)dz - f(z))dz\Big| \le$$

$$\le \sup_{z\in\gamma_j}|f(z) - f(z_j)||\gamma_j| + \sup_{z\in l_j}|f(z) - f(z_j)||l_j|.$$

Поскольку расстояние между любыми двумя точками дуги γ_j или отрезка l_j меньше, чем ρ, то

$$\sup_{z\in\gamma_j}|f(z) - f(z_j)| < \epsilon, \quad \sup_{z\in l_j}|f(z) - f(z_j)| < \epsilon.$$

Следовательно,

$$\Big|\int\limits_{\gamma_j} f(z)dz - \int\limits_{l_j} f(z)dz\Big| < \epsilon(|\gamma_j| + |l_j|) \le 2\epsilon|\gamma_j|$$

и

$$\Big|\int\limits_{\Gamma} f(z)dz\Big| \le 2\epsilon\sum_{j=0}^{n-1}|\gamma_j| = 2\epsilon|\Gamma|.$$

Поскольку ϵ произвольно мало, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

□

Приведем еще один вариант формулировки теоремы Коши для простого замкнутого контура.

Теорема 9.2.4. *Пусть функция f голоморфна в области D и Γ - замкнутый простой контур, лежащий вместе со своей внутренностью в D. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

9.2.3 Теорема Коши для составного контура.

Определение 9.1. *Пусть на плоскости даны простые замкнутые кривые* $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *причем все кривые* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *лежат внутри* Γ *и каждая кривая* γ_j *лежит во внешности любой другой кривой* γ_i, $i \neq j$. *Множество точек плоскости, расположенных внутри* Γ *и вне* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, *представляет собой многосвязную область* D, *границу которой составляют контуры* $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$. *При этом контур* Γ *называют внешней границей области, а совокупность контуров* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *- внутренней границей многосвязной области. Положительной ориентацией границы области называют такой обход границы, при котором область остается слева. Движение в противоположном направлении называют отрицательным обходом.*

Границу ∂D *такой многосвязной области* D *с положительным обходом будем называть* ***составным контуром***.

Теорема 9.2.5. *(Коши для составного контура). Пусть функция* f *голоморфна в области* G, D *- многосвязная область, граница* ∂D *которой является составным контуром, и* $\overline{D} \in G$. *Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0. \tag{103}$$

Доказательство. Соединим гладкими кривыми, лежащими в G, контуры Γ с γ_1, γ_1 с γ_2 и т.д. γ_n с Γ. В результате мы можем рассмотреть два замкнутых контура, удовлетворяющих теореме (9.2.4), интегралы по которым будут равны нулю. Остается заметить, что сумма интегралов по этим двум контурам представляет собой в то же время интеграл по составному контуру ∂D. □

Следствие. В условиях теоремы формулу (103) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{\gamma_n} f(z)dz, \tag{104}$$

где все контуры проходятся против часовой стрелки.

9.3 Интеграл и первообразная

Определение 9.2. *Первообразной функции* f *в области* D *называется такая голоморфная в этой области функция* F, *что в каждой точке*

$z \in D$
$$F'(z) = f(z). \tag{105}$$

Если F - первообразная функции f в области D, то при любой постоянной C функция $F(z) + C$ также является первообразной функции f в области D.

С другой стороны, если F_1 и F_2 - первообразные функции f в области D, то найдется постоянная C такая, что $F_1(z) = F_2(z) + C, \quad z \in D$.

Действительно, рассмотрим функцию $\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z)$. Она дифференцируема в области D и $\Phi'(z) = 0, \quad z \in D$. Пусть $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда в области D имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

и, следовательно,

$$u(x, y) = C_1, \quad v(x, y) = C_2,$$

т. е.

$$\Phi(z) = C_1 + iC_2.$$

Подведем итог.

Теорема 9.3.1. *Если F - какая-либо первообразная функции f в области D, то совокупность всех первообразных функции f описывается формулой*

$$F(z) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Теорема 9.3.2. *Пусть функция f непрерывна в односвязной области D и интеграл по любой кусочно гладкой кривой, лежащей в D, зависит лишь от положения начальной и конечной точек. Тогда при любом $z_0 \in D$ функция*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in D,$$

является голоморфной в области и

$$F'(z) = f(z), \quad z \in D.$$

Доказательство. Пусть точка $z_1 \in D$ и z принадлежит окрестности точки z_0, содержащейся в D. Зафиксируем некоторую кривую γ, лежащую в D и соединяющую точку z_0 с точкой z_1. Соединим точку z_1 с z прямолинейным отрезком. Тогда

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) + \int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

Учитывая, что

$$\int_{z_1}^{z} f(z_1)d\zeta = f(z_1)(z - z_1),$$

получим равенство

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) = \frac{1}{z - z_1} \int_{z_1}^{z} (f(\zeta) - f(z_1))d\zeta.$$

В силу непрерывности функции f для произвольного $\epsilon > 0$ существует такое δ, что для любого z при условии $|z - z_1| < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(z) - f(z_1)| < \epsilon$. Если ζ принадлежит отрезку, соединяещему точки z_1 и z, то $|f(\zeta) - f(z_1)| < \epsilon$. Поэтому

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| = \frac{1}{|z - z_1|} \left| \int_{z_1}^{z} (f(\zeta) - f(z_1))d\zeta \right| \leq \frac{1}{|z - z_1|} \epsilon |z - z_1| = \epsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{z \to z_1} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z_1),$$

т.е. $F'(z_1) = f(z_1)$, при том, что z_1 - произвольная точка области D.

$\square$

Теорема 9.3.3. *Всякая функция f, голоморфная в односвязной области D имеет в ней первообразную.*

Доказательство. Рассмотрим любые две кусочно гладкие кривые γ_1 и γ_2, соединяющие точки A и B в области D. Тогда кривые γ_1 и γ_2^-, образуют замкнутый контур, интеграл по которому в силу теоремы Коши для односвязной области равен 0, т. е.

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2^-} f(z)dz = 0$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz,$$

т. е. интеграл не зависит от кривой, соединяющей точки. Поскольку голоморфная функция непрерывна, то, применяя теорему (9.3.2), приходим к требуемому заключению. □

Теперь не составит труда доказать формулу Ньютона-Лейбница.

Теорема 9.3.4. *(формула Ньютона-Лейбница). Пусть функция f голоморфна в односвязной области D. Тогда для любых $z_1,\ z_2 \in D$ справедлива формула*

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \qquad (106)$$

где Φ - произвольная первообразная функции f в области D.

Доказательство. Доказать самостоятельно! □

9.4 Интегральная формула Коши

Теорема 9.4.1. *(интегральная формула Коши). Пусть функция f голоморфна в области G и Γ - замкнутая кусочно гладкая кривая Жордана, принадлежащая G вместе со своей внутренностью D. Тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедлива интегральная формула Коши*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \qquad (107)$$

Доказательство. Построим окружность γ_ρ с центром в точке z_0 радиуса ρ, столь иалого, чтобы круг $\{|z-z_0| \leq \rho\}$ лежал внутри Γ. Тогда согласно теореме Коши для составного контура будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \qquad (108)$$

Следовательно, для доказательства формулы (107) достаточно доказать равенство
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$
или
$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{1}{z - z_0} dz =$$
$$= \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$
В силу непрерывности функции f в точке z_0 для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что
$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \text{ если } |z - z_0| < \delta.$$
Тогда, если радиус $\rho < \delta$, то $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ для всех $z \in \gamma_\rho$. Поэтому
$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz < \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$
Следовательно,
$$\lim_{\rho \to 0} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$
Но, как видно из равенства (108), интеграл
$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$
не зависит от ρ. Следовательно,
$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$
□

Замечание. Если в условиях теоремы (9.4.1) взять точку $z_0 \in G \setminus \overline{D}$, то в силу интегральной теоремы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

Интегральная формула Коши выражает интересный факт: значения функции f в области D полностью определяются ее значениями на границе $\partial D = \Gamma$. Этот факт принципиально отличает голоморфные функции от $\mathbb{R}$- дифференцируемых функций.

10 Ряды Тейлора

10.1 Функциональные ряды. Равномерная сходимость

Понятие равномерной сходимости функциональных рядов вещественнозначных функций и основные их свойства распространяются и на ряды с комплекснозначными функциями. Равномерную норму функции на множестве E определим аналогичным образом

$$\|f\| = \sup_{z \in E} |f(z)|. \tag{109}$$

Функциональная последовательность (f_n) функций, определенных на множестве E, называется равномерно сходящейся к функции f, если

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0. \tag{110}$$

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ называется равномерно сходящимся, если последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ его частных сумм равномерно сходится.

Теорема 10.1.1. *(признак Вейерштрасса). Если при всех $n \in \mathbb{N}$ $||f_n|| \leq a_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ сходится равномерно.*

Теорема 10.1.2. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно и все функции f_n непрерывны в точке в точке z_0, то сумма ряда $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ также непрерывна в точке z_0.*

Теорема 10.1.3. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится равномерно,* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, *и все функции* f_n *непрерывны в области* G *то для любой кусочно гладкой кривой* Γ, *лежащей в* G, *справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma} f_n(z)dz.$$

10.2 Свойства суммы степенного ряда

Рассмотрим степенной ряд

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \tag{111}$$

Теорема 10.2.1. *(о равномерной сходимости степенного ряда внутри круга сходимости). Пусть радиус сходимости степенного ряда* (111) $R > 0$. *Тогда при любом* $r < R$ *ряд сходится равномерно в замкнутом круге* $\{|z - z_0| \leq r\}$.

Теорема 10.2.2. *(о непрерывности суммы степенного ряда). Пусть степенной ряд* (111) *имеет радиус сходимости* $R > 0$. *Тогда сумма степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

непрерывна в круге сходимости.

Доказательство. Пусть точка z_1 принадлежит кругу сходимости K_R. Тогда найдется число $r < R$ такое, что точка z_1 принадлежит замкнутому кругу $\{|z - z_0| \leq r\}$. Согласно теореме (10.2.1) ряд сходится равномерно в нем. Поскольку все члены ряда являются функциями непрерывными в точке z_1, то сумма ряда также непрерывна в этой точке. Осталось заметить, что z_1 - произвольная точка круга сходимости. □

Теорема 10.2.3. *(о голоморфности суммы степенного ряда). Пусть степенной ряд* (111) *имеет радиус сходимости* $R > 0$. *Тогда сумма степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

голоморфна в круге сходимости и выполняется равенство

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}, \tag{112}$$

причем радиус сходимости ряда (112) *также равен* R.

Доказательство. Вычисляя радиус сходимости ряда, стоящего в правой части равенства (112), по формуле Коши-Адамара, мы получим число R. Обозначим сумму этого степенного ряда через

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}. \tag{113}$$

Функция g непрерывна в круге сходимости. На любой замкнутой кусочно гладкой кривой Γ ряд сходится равномерно и, следовательно его можно интегрировать почленно. Поскольку интеграл от каждого члена ряда, являющегося функцией голоморфной, равен нулю, то

$$\int\limits_{\Gamma} g(z)dz = 0.$$

Поэтому интеграл от функции g не зависит от кривой, соединяющей точки, а зависит только о начальной и конечной точек. Таким образом функция g удовлетворяет условиям теоремы (9.3.2). Следовательно, у функции g в круге сходимости существует первообразная функция

$$G(z) = \int\limits_{z_0}^{z} g(\zeta)d\zeta$$

Функция G голоморфна и $G' = g$ в круге сходимости. В то же время почленное интегрирование ряда (113) дает

$$G(z) = \int\limits_{z_0}^{z} g(\zeta)d\zeta = f(z) - c_0.$$

Следовательно, функция f голоморфна в круге и $f' = g$.

$\square$

Следствие. Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, определенные равенствами (79)-(81), голоморфны во всей комплексной плоскости и справедливы равенства

$$(e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Используя теорему (10.2.3), с помощью метода математической индукции придем к следующему заключению.

Теорема 10.2.4. *(о бесконечной дифференцируемости суммы степенного ряда). Пусть степенной ряд* (70) *имеет радиус сходимости* $R > 0$. *Тогда в любой точке* $z \in K_R$ *сумма степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

дифференцируема произвольное число раз. Причем при любом $p \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-p)!} (z - z_0)^{n-p}, \tag{114}$$

и радиус сходимости ряда в равенстве (114) *равен* R.

Следствие 1. Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, определенные равенствами (79)-(81), бесконечно дифференцируемы во всей комплексной плоскости.

Следствие 2. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

и радиус сходимости ряда $R > 0$. Тогда

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ при } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{115}$$

Доказательство. Положив в равенстве (70) $z = z_0$, получим $f(z_0) = c_0$. Полагая далее в равенстве (114) $z = z_0$, получим $f^{(p)}(z_0) = c_p p!$, т. е. при любом $p \in \mathbb{N}$

$$c_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}.$$

□

Определение 10.1. *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

называют рядом Тейлора функции f с центром в точке z_0.

Опираясь на доказанные теоремы, можно сделать выводы.

1. Каждый степенной ряд с положительным радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

2. Если функция f в некоторой окрестности точки z_0 разлагается в степенной ряд, то это разложение единственно.

   Доказательство. Пусть

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{и} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

   Тогда, по доказанному, будем иметь

   $$c_n = b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

   □

3. Если функция f в некоторой окрестности точки z_0 разлагается в степенной ряд, то в этой окрестности функция f бесконечно дифференцируема..

Определение 10.2. *Функцию f назовем аналитической в точке z_0, если в некоторой окрестности этой точки она разлагается в степенной ряд.*

10.3 Разложение функции в ряд Тейлора

Ранее было доказано, что сумма степенного ряда является голоморфной функцией в круге сходимости. Опираясь на интегральную формулу Коши, мы можем доказать, что каждая функция, голоморфная в круге, может быть разложена в нем в степенной ряд.

Теорема 10.3.1. *(Тейлора). Если функция f голоморфна в круге $K = \{|z-z_0| < R\}$, то в этом круге функция f разлагается в степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{116}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \tag{117}$$

$$\gamma_r = \{|\zeta - z_0| = r\}, \quad 0 < r < R, \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Доказательство. Пусть точка z принадлежит кругу K. Зафиксируем ее. Выберем число r так, что $r < R$ и $|z - z_0| < r$. Обозначим $\gamma_r = \{|\zeta - z_0| = r\}$. Согласно интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Преобразуем выражение $1/(\zeta - z)$ следующим образом:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Поскольку

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} = q < 1,$$

то

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n.$$

Тогда

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{118}$$

Рассмотри функциональный ряд из равенства (118). Для его членов справедлива оценка

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \le \frac{1}{r} q \quad \text{при} \quad \zeta \in \gamma_r.$$

Поскольку $0 < q < 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, то согласно признаку Вейерштрасса функциональный ряд сходится равномерно на γ_r. Если все члены ряда умножить на непрерывную (значит, ограниченную на γ_r) функцию $f(\zeta)$, то равномерная сходимость не нарушится. По этой причине ряд можно почленно проинтегрировать

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Обозначив

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

будем иметь равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

□

Замечание. Поскольку, как доказано ранее, имеет место равенство

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{119}$$

Обратим внимание, что коэффициенты c_n не зависят от радиуса r $(0 < r < R)$ окружности, по которой ведется интегрирование в формуле (117).

Следствие (неравенства Коши). Если функция f удовлетворяет условиям теоремы и при всех $\zeta \in \gamma_r$ $|f(\zeta)| \leq M$, то справедливы неравенства

$$|c_n| \leq \frac{M}{r_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{120}$$

Доказательство. Из формулы (117) следует оценка

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{M}{r^n}.$$

□

Используя неравенство Коши, можно доказать интересную теорему.

Теорема 10.3.2. *(Лиувилля). Если функция f голоморфна во всей комплексной плоскости и ограничена, то она постоянна.*

Доказательство. Пусть при любом $z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq M$. По теореме Тейлора функция всюду в комплексной плоскости представляется степенным рядом и его коэффициенты имеют оценки

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n},$$

где число r может быть выбрано произвольно. Поскольку при $n = 1, 2, \dots$ правая часть неравенства стремится к 0 при $r \to \infty$, то эти коэффициенты равны нулю. Таким образом, $f(z) = c_0$. □

10.4 Теорема Морера

Теорема 10.4.1. *(Морера). Пусть функция f непрерывна в односвязной области D и интеграл от f по любому замкнутому контуру, лежащему в D, равен нулю. Тогда функция f голоморфна в области D.*

Доказательство. В силу теоремы (9.3.2) функция

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,$$

где z_0 - произвольная точка области D, дифференцируема в D и $F'(z) = f(z), \quad z \in D$.

Согласно теореме Тейлора (10.3.1) в окрестности каждой точки области D функция F разлагается в степенной ряд и является, таким образом, бесконечно дифференцируемой в ней функцией. Следовательно, функция $f = F'$ дифференцируема в D, т. е. голоморфна в D. □

Замечание. В теореме Морера условие равенства нулю интеграла от f по любому замкнутому контуру, лежащему в D, можно заменить на условие равенства нулю интеграла от f по границе любого замкнутого треугольника лежащего в D. Из последнего предположения и условия непрерывности функции будет вытекать, как это было установлено при доказательстве интегральной теоремы Коши, что обращается в нуль интеграл вдоль любого замкнутого многоугольника, а затем и любого замкнутого контура.

10.5 Эквивалентные определения голоморфной функции

Теорема 10.5.1. *Следующие условия попарно эквивалентны:*

(1) функция f голоморфна в точке z_0, т. е. $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности U точки z_0;

(2) функция f аналитична в точке z_0, т. е. разлагается в степенной ряд по степеням $z - z_0$ в некоторой окрестности U точки z_0;

(3) функция непрерывна в некоторой окрестности U точки z_0 и интеграл от f по границе любого замкнутого треугольника, лежащего в U, равен нулю.

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$: теорема Тейлора (10.3.1).

$(2) \Rightarrow (3)$: теорема о голоморфности суммы степенного ряда (10.2.3).

$(1) \Rightarrow (3)$: интегральная теорема Коши.

$(3) \Rightarrow (1)$: теорема Морера. $\square$

Замечание. Термин *функция голоморфная в точке (области)* употребляется наравне с термином *функция аналитическая в точке (области).*

10.6 Разложение голоморфной функции в окрестности нуля.

Теорема 10.6.1. *Пусть функция f голоморфна в точке $a \in \mathbb{C}$,* $f(a) = 0$, *но f не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки a.*

Тогда в некоторой окрестности U точки a функция f представляется в виде

$$f(z) = (z-a)^n g(z), \tag{121}$$

где n - некоторое натуральное число, а функция g голоморфна в U и отлична от нуля всюду в U.

Доказательство. Функция f в окрестности K_R точки a разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

поскольку $c_0 = f(a) = 0$. Все коэффициенты c_k не могут равнятся нулю (иначе, функция f будет тождественным нулем в окрестности точки a).

Пусть

$$n = \min\{k \geq 1 : c_k \neq 0\}.$$

Тогда

$$f(z) = c_n (z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots .$$

Рассмотрим ряд

$$g(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \dots,$$

сходящийся в том же круге K_R. Поскольку функция g непрерывна в K_R и $g(a) = c_n \neq 0$, то найдется окрестность $U \subset K_R$ точки a, в которой $g(z) \neq 0$.

Осталось отметить, что $f(z) = (z-a)^n g(z)$. □

Определение 10.3. *Натуральное число*

$$n = \min\{k \geq 1 : c_k \neq 0\} = \min\{k \geq 1 : f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

из теоремы (10.6.1) *называется порядком нуля голоморфной функции f в точке a.*

Следствие (изолированность нулей голоморфной функции). Если функция f голоморфна в области D и обращается в нуль в точке $a \in D$, то либо f тождественно равна нулю в окрестности a, либо существует окрестность U точки a такая, что $f(z) \neq 0$ для всех $z \in U \setminus \{a\}$.

10.7 Теорема единственности

Теорема 10.7.1. *(единственности). Пусть функции f_1, f_2 голоморфны в области D, множество $E \subset D$ имеет, по крайней мере, одну предельную точку $a \in D$ и*

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \textit{при всех} \quad z \in E.$$

Тогда

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \textit{при всех} \quad z \in D.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f = f_1 - f_2$. Тогда

$$f(z) = 0 \quad \text{при всех} \quad z \in E.$$

Пусть Γ - граница области D и число ρ_0 является расстоянием от точки a до границы Γ. В круге $K_{\rho_0} = \{|z-a|| < \rho_0\}$ функция f разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Поскольку точка a является предельной точкой нулей функции f, то в силу следствия теоремы (10.6.1) функция f тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки a. Согласно формулам для коэффициентов степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ все $c_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому функция f тождественно равна нулю в круге K_{ρ_0}.

Докажем теперь, что $f(b) = 0$ в произвольной точке $b \in D$. Соединим точки a и b кусочно гладкой кривой $\gamma \subset D$. Пусть число ρ является расстоянием между γ и Γ. Очевидно, что $0 < \rho \leq \rho_0$. Разобьем кривую γ на дуги точками $a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$ так, что $|z_i - z_{i-1}| < \rho,\ i = 1, \ldots, n$, и построим круги $K_j = \{|z - z_i| < \rho\}$. Очевидно, что $z_j \in K_{i-1} \bigcap K_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Во всех точках круга K_0 функция f обращается в нуль. Центр круга K_1 точка z_1 принадлежит кругу K_0 и, следовательно, является предельной точкой нулей функции f. По доказанному в первой части теоремы функция f тождественно равна нулю в круге K_1. Далее по индукции функция f тождественно равна нулю и в круге K_n, а значит, и в точке b. $\square$

10.8 Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.

Определение 10.4. *Говорят, что функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

сходится равномерно внутри области D, если он скодится равномерно на любом компакте $K \subset D$.

Теорема 10.8.1. *(Вейерштрасса). Пусть ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

сходится равномерно внутри области D и все его члены f_n, $n \in \mathbb{N}$, являются функциями голоморфными в D. Тогда его сумма $f(z)$ голоморфна в D и при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место разложение

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z),$$

где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ также сходится равномерно внутри D.

Доказательство. Рассмотрим произвольный круг $U = \{|z - z_0| < \rho\}$, замыкание которого $\overline{U} \subset D$. Из равномерной сходимости ряда для f ясно, что функция f непрерывна в U и для всякого замкнутого треугольника $T \subset D$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\partial T} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\partial T} f_n(z)dz = 0.$$

Согласно теореме Морера функция f голоморфна в круге U, а в силу произвольности U голоморфна в D.

Далее, если $z \in U$, то

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

Поскольку

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}},$$

причем ряд при фиксированном z сходится равномерно на окружности $\{|\zeta-z|=\rho\}$ и его можно почленно интегрировать, то

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z).$$

Докажем теперь, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно на $\overline{U}=\{|z-z_0|\le\rho\}$. Рассмотрим круг $\overline{K}=\{|z-z_0|\le\rho'\}$, где $\rho'>\rho$ и $\overline{K}\subset D$. Для каждой точки $z\in\overline{U}$ имеем

$$\left|f^{(k)}(z)-\sum_{n=1}^{N}f_n^{(k)}(z)\right|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\rho'}\frac{f(\zeta)-\sum\limits_{n=1}^{N}f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right|\le$$

$$\le\frac{k!}{2\pi}\frac{2\pi\rho'}{(\rho'-\rho)^{k+1}}\sup_{|\zeta-z_0|=\rho'}\left|f(\zeta)-\sum_{n=1}^{N}f_n(\zeta)\right|.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(\zeta)$ сходится равномерно на окружности $|\zeta-z_0=\rho'$, то выражение

$$\sup_{|\zeta-z_0|=\rho'}\left|f(\zeta)-\sum_{n=1}^{N}f_n(\zeta)\right|$$

сколь угодно мало при достаточно большом N. Следовательно, для любого $\epsilon>0$ и любого $z\in\overline{U}$

$$\left|f^{(k)}(z)-\sum_{n=1}^{N}f_n^{(k)}(z)\right|<\epsilon,\quad\text{если}\quad N>N_0(\epsilon),$$

т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно на $\overline{U}$.

Поскольку произвольный компакт можно покрыть конечным набором замкнутых кругов, то в силу доказанного ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно на любом компакте, содержащемся в D. $\square$

10.9 Понятие об аналитическом продолжении

Определение 10.5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функция $f(z)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{C}$;*

2) *функция $F(z)$ аналитическая в области $D \subset \mathbb{C}$;*

3) *$F(z) = f(z)$ при $z \in E$.*

   Тогда функцию $F(z)$ называют аналитическим продолжением функции $f(z)$ (с множества E в область D).

Следствием теоремы единственности является следующее утверждение.

Теорема 10.9.1. *Если множество E имеет предельную точку, принадлежащую области D, то аналитическое продолжение $F(z)$ функции $f(z)$ с множества E в область D единственно.*

Пример. Степенной ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$
сходится в единичном круге $\{|z| < 1\}$ и его сумма $f(z) = 1/(1-z)$. Функция $F(z) = 1/(1-z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости за исключением точки $z = 1$. Согласно определению (10.8.1) и теореме (10.5), функция $F(z)$ является аналитическим продолжением функции $f(z)$ из круга $\{|z| < 1\}$ на область $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, причем единственным продолжением.

Примером аналитического продолжения функций $e^x,\ \cos x,\ \sin x$, определенных на множестве $E = \mathbb{R}$, являются функции $e^z,\ \cos z,\ \sin z$, аналитические на все плоскости $\mathbb{C}$. Эти продолжения были получены заменой действительного переменного x в степенных разложениях этих функций комплексным переменным z.

11 Ряды Лорана

11.1 Ряды Лорана.

Определение 11.1. *Рядом Лорана называется ряд вида*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{122}$$

понимаемый как сумма двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{123}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}. \tag{124}$$

Ряд (123) является обычным степенным рядом. Тогда число

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

является его радиусом сходимости.

Ряд (124) заменой $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$ приводится к степенному ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n. \tag{125}$$

и пусть

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}}$$

его радиус сходимости, т. е. ряд (125) сходится в круге $\{|\zeta| < \rho\}$. Следовательно, ряд (124) сходится в области $\{|z-z_0| > \frac{1}{\rho}\}$.

Обозначим

$$r = \frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}.$$

Если $r < R$, то ряд (122) сходится в кольце $\{r < |z-z_0| < R\}$.

Отметим так называемые вырожденные варианты кольца:

1) при $r > 0$, $R = +\infty$ кольцом сходимости является внешность окружности $\{|z - z_0| = r\}$;

2) при $r = 0$, $R = +\infty$ кольцом сходимости является вся комплексная плоскость, за исключением точки z_0;

2) при $r = 0$, $0 < R < +\infty$ кольцом сходимости является проколотый круг $\{0 < |z - z_0| < R\}$.

Из равномерной сходимости степенного ряда внутри круга сходимости вытекает равномерная сходимость ряда Лорана внутри кольца. Так как каждый член ряда (122) в кольце сходимости является голоморфной функцией, то по теореме Вейерштрасса (10.8.1) сумма ряда Лорана в кольце сходимости также является голоморфной, причем ряд Лорана в этом кольце можно почленно дифференцировать любое число раз и почленно интегрировать по любой кусочно-гладкой кривой, лежащей в кольце сходимости.

Теорема 11.1.1. *(о разложении голоморфной функции в ряд Лорана). Пусть функция $f(z)$ голоморфна в кольце $V = \{r < |z - z_0| < R\}$, где $0 \le r < R \le +\infty$. Тогда в этом кольце справедливо разложение*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{126}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{127}$$

где γ_ρ - окружность $\{|\zeta - z_0| = \rho\}$, $r < \rho < R$, и не зависят от ρ.

Доказательство. Независимость коэффициентов c_n от ρ вытекает из теоремы Коши для составного контура.

Возьмем произвольную точку $z \in V$ и выберем r_1 и R_1 такие, что $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$. Обозначим $\Gamma_1 = \{|\zeta - z_0| = R_1\}$, $\Gamma_2 = \{|\zeta - z_0| = R_1\}$ и построим окружность $L = \{|\zeta - z| = r'\}$, которая лежит в кольце $\{r_1 < |\zeta - z_0| < R_1\}$. По теореме Коши для составного контура имеем равенство

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta + \int\limits_{L} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta,$$

а в силу интегральной формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta = f(z).$$

Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta = f(z).$$

Если $\zeta \in \Gamma_1$, то $|z-z_0| < |\zeta - z_0|$, и, следовательно, $|z-z_0|/|\zeta-z_0| < 1$. Поэтому, согласно (118),

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Далее так же, как в доказательстве теоремы (10.3.1), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Если же $\zeta \in \Gamma_2$, то $|z - z_0| > |\zeta - z_0|$, и, следовательно, $|\zeta - z_0|/|z - z_0| < 1$. В этом случае имеем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} =$$

$$= -\frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^n}.$$

Тогда, опираясь на равномерную сходимость ряда на Γ_2, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(z - z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^n}d\zeta =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n d\zeta \right).$$

Заменив индекс суммирования $m = -(n+1)$, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = -\sum_{m=-\infty}^{-1} (z-z_0)^m \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \right).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = -1, -2, -3, \ldots$$

Осталось заметить, что в формулах для вычисления коэффициентов контуры интегрирования можно заменить на любую окружность $\gamma_\rho = \{|\zeta - z_0| = \rho\}$, $r < \rho < R$. □

Следствие. *Если функция f голоморфна в круге $K_R(z_0) = \{|z - z_0| < R\}$, то ее ряд Лорана с центром в точке z_0 совпадает с ее рядом Телора с центром в точке z_0.*

Доказательство. Действительно, при $n = -1, -2, \ldots$ функция $f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1}$ является голоморфной в круге $K_R(z_0)$, и по теореме Коши интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю, т. е. $c_n = 0$, $n = -1, -2, \ldots$ □

Теорема 11.1.2. *(неравенства Коши для коэффициентов Лорана). Пусть функция*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

голоморфна в кольце $\{r < |z - z_0| < R\}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{Z}$ и всех $\rho \in (r, R)$ справедливы неравенства

$$|c_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \text{ где } M(\rho) = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|. \tag{128}$$

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство неравенств Коши для коэффициентов Тейлора. □

Определение 11.2. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

в кольце $\{r < |z - z_0| < R\}$. *Рассмотрим в отдельности два ряда, из которых состоит ряд Лорана.*

Ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называют правильной частью ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называют главной частью ряда Лорана.

12 Изолированные особые точки

Определение 12.1. *Точка* $a \in \mathbb{C}$ *называется изолированной особой точкой функции* $f(z)$, *если* f *голоморфна в некоторой проколотой окрестности* $V = \{0 < |z - a| < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$, *точки* a.

Изолированная особая точка a *называется:*

1) ***устранимой***, *если существует конечный предел*

$$\lim_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C};$$

2) ***полюсом***, *если существует предел*

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty;$$

3) ***существенно особой точкой*** *во всех остальных случаях, т. е. когда не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции* f *в точке* a.

Примеры. Точка $a = 0$ является:

1) устранимой особой точкой для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$;

2) полюсом для функции $f(z) = \frac{1}{z}$;

3) существенно особой точкой для функции $f(z) = e^{1/z}$;

4) неизолированной особой точкой для функции $f(z) = \operatorname{ctg}(\frac{1}{z})$.

12.1 Описание устранимых особых точек.

Теорема 12.1.1. *Для функции f, голоморфной в проколотой окрестности $V = \{0 < |z - a| < \epsilon\}$ точки a, следующие утверждения эквивалентны:*

(1) ;

(2) функция $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $V' = \{0 < |z - a| < \epsilon'\}, \epsilon' > 0$, точки a;

(3) коэффициенты c_n ряда Лорана функции f в проколотой окрестности V при $n = -1, -2, \dots$ равны нулю, т. е. у ряда Лорана функции f отсутствует главная часть;

(4) можно доопределить функцию $f(z)$ в точке $z = a$ таким образом, что полученная функция станет голоморфной в полной окрестности $U = \{|z - a| < \epsilon\}$ точки a.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (3). Если

$$|f(z)| \le M \quad \text{при} \quad 0 < |z - a| < \epsilon',$$

то по неравенствам Коши имеем

$$|c_{-n}| \le M\rho^n \text{ при всех } n = 1, 2, \dots \text{ и всех } \rho \in (0, \epsilon').$$

Переходя к пределу при $\rho \to 0$, получим равенство $c_{-n} = 0$ при всех $n = 1, 2, \dots$.

(3) $\Rightarrow$ (4). По условию имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{при} \quad 0 < |z-a| < \epsilon. \tag{129}$$

Положим $f(a) = c_0$. Тогда равенство (129) будет верно в полной окрестности $U = \{|z-a| < \epsilon\}$ точки a.

(4) $\Rightarrow$ (1). Очевидно. □

12.2 Описание полюсов.

Теорема 12.2.1. *Точка a является полюсом функции f, голоморфной в проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < \epsilon\}$ этой точки, тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения f в окрестности V содержит лишь конечное число отличных от нуля членов, т. е.*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{130}$$

при некотором $N \in \mathbb{N}$, причем $c_{-N} \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. По определению полюса

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty,$$

следовательно, $f(z) \neq 0$ при $0 < |z-a| < \epsilon'$, и функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

голоморфна в проколотой окрестности $V' = \{0 < |z-a| < \epsilon'\}$. При этом

$$\lim_{z \to a} g(z) = 0.$$

По теореме (12.1.1) функция g голоморфна в полной окрестности $U' = \{|z-a| < \epsilon'\}$, если доопределить ее в точке a, положив $g(a) = 0$. Обозначим через N порядок нуля $g(z)$ при $z = a$. Тогда при $0 < |z-a| < \epsilon'$ будем иметь

$$g(z) = (z-a)^N h(z),$$

где функция h голоморфна в U' и $h(z) \neq 0$ при $0 < |z-a| < \epsilon''$. Функкия $1/h(z)$ будет голоморфной в круге $U'' = \{|z-a| < \epsilon''\}$. Разложим ее в ряд Тейлора

$$\frac{1}{h(z)} = b_0 + b_1(z-a) + \ldots,$$

причем $b_0 = 1/h(a) \neq 0$. Тогда

$$f(z) = (z-a)^{-N} \cdot \frac{1}{h(z)} = b_0(z-a)^{-N} + \ldots,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n = (z-a)^{-N}\big(c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \ldots\big) =$$

$$= (z-a)^{-N} g(z),$$

где функция g голоморфна в окрестности $U = \{|z-a| < \epsilon\}$ и $g(a) = c_{-N} \neq 0$. Следовательно,

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty,$$

□

Определение 12.2. *Число N из равенства* (130) *называется порядком полюса функции f в точке a.*

Замечание. Из доказательства теоремы ясно,

12.3 Описание существенно особых точек.

Теорема 12.3.1. *Функция*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

голоморфная в проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < \epsilon\}$ точки a, имеет существенную особенность в этой точке тогда и только тогда, когда найдется бесконечно много номеров $n \geq 1$ таких, что

$$c_{-n} \neq 0,$$

т. е. в главной части ряда Лорана бесконечно членов, отличных от нуля.

Теорема 12.3.2. *(Сохоцкого). Если $a \in \mathbb{C}$ - существенно особая точка функции f, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ можно найти последовательность точек $z_n \to a$ такую, что*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

Доказательство. Пусть $A = \infty$. Согласно теореме (12.1.1) функция f не может быть ограничена ни в какой проколотой окрестности точки a (иначе точка a была бы устранимой особой точкой для функции f). Поэтому найдется последовательность $z_n \to a$ такая, что $f(z_n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь $A \in \mathbb{C}$. Если в любой окрестности точки a найтется точка z такая, что $f(z) = A$, то утверждение теоремы очевидно. Если же это не так, то для функции

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

точка a является изолированной особой точкой. Точка a не может быть полюсом или устранимой особой точкой, так как в обоих случаях функция

$$f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$$

имела бы предел (возможно бесконечный) при $z \to a$, что противоречит определению существенно особой точки. Следовательно, точка a - существенно особая точка для функции $g(z)$. Но тогда, согласно первой части доказательства, найдется последовательность $z_n \to a$ такая, что

$$g(z_n) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует, что

$$f(z_n) = A + \frac{1}{g(z_n)} \to A \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

□

12.4 Бесконечно удаленная точка как особая.

Определение 12.3. *Точка $a = \infty$ называется изолированной особой точкой для функции $f(z)$, если в некоторой окрестности $\{|z| > R\},\ R > 0$, этой точки функция f голоморфна.*

Бесконечно удаленная точка может не являться изолированной особой точкой для функции. Так, например, для функции $f(z) = 1/\sin z$ точка $a = \infty$ является предельной точкой ее полюсов.

Тип особой точки $a = \infty$ устанавливает следующее определение, аналогичное определению (12.1).

Определение 12.4. *Изолированная особая точка $a = \infty$ называется:*

1) ***устранимой особой точкой*** *функции $f(z)$, если существует конечный предел*
$$\lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C};$$

2) ***полюсом*** *функции $f(z)$, если существует предел*
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty;$$

3) ***существенно особой точкой*** *функции $f(z)$ во всех остальных случаях, т. е. когда не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции f в точке $a = \infty$*

Замечание. Если точка $a = \infty$ является устранимой особой точкой функции$f(z)$, то, доопределив функцию в этой точке значением ее предела при $z \to \infty$, причисляют точку $a = \infty$ к точкам голоморфности функции f.

Определение 12.5. *Лорановским разложением функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки $a = \infty$ называют ряд Лорана по степеням z, в который эта функция разложена на множестве*
$\{|z| > R\},\ R > 0,$
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Сравнивая определения (12.1) и (12.4), заключаем, что тип особой точки $z = \infty$ функции $f(z)$ совпадает с типом особой точки $\zeta = 0$ для функции $f(\frac{1}{\zeta})$. Учитывая связь типа особой точки $\zeta = 0$ с видом лорановского разложения функции $f(\frac{1}{\zeta})$ в окрестности точки $\zeta = 0$, приходим к следующим выводам.

Теорема 12.4.1. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| > R.$$

Точка $a = \infty$ является:

(1) *устранимой особой точкой функции $f \iff c_n = 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots;$*

(2) *полюсом функции $f \iff$ существует $N \geq 1$ такое, что $c_N \neq 0$, но $c_n = 0$ при всех $n \geq N+1$*

(число N называют порядком полюса в ∞);

(3) *существенно особой точкой функции $f \iff c_n \neq 0$ для бесконечного множества натуральных $n \geq 1$.*

В силу этих результатов *главной частью* (т. е. частью, определяющей тип особой точки) ряда Лорана функции f в проколотой окрестности ∞ является ряд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

а *правильной частью* - ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n.$$

12.5 Классификация голоморфных функций по их особым точкам.

Определение 12.6. *Функция, голоморфная во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется целой.*

Теорема 12.5.1. *Если целая функция $f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ устранимую особую точку, то функция f является константой в $\mathbb{C}$.*

Если целая функция $f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ полюс порядка N, то функция f является многочленом порядка N.

Доказательство. Если целая функция $f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ устранимую особую точку, то функция f ограничена в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. при $|z| > R$. В круге $|z| \leq R$ эта функция ограничена как непрерывная на ограниченном и замкнутом множестве. Следовательно, $f(z)$ ограничена на всей комплексной плоскости и, будучи на $\mathbb{C}$ голоморфной, является в силу теоремы Лиувилля постоянной, т. е. $f(z) = const$.

Пусть теперь целая функция $f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ полюс порядка N. Обозначим через

$$P(z) = \sum_{n=1}^{N} c_n z^n$$

главную часть ряда Лорана функции f в поколотой окрестности точки ∞. Функция $P(z)$ является многочленом порядка N. Рассмотрим функцию

$$g(z) = f(z) - P(z).$$

Она является целой и имеет устранимую особенность в точке ∞. Следовательно, по первой части доказательства функция g является константой, т. е. $g(z) = c_0$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n.$$

□

Определение 12.7. *Целые функции, для которых $z = \infty$ является существенно особой точкой, называются трансцендентными.*

Трансцендентными функциями являются, например, функции
$e^z, \ \cos z, \ \sin z$.

Используя теорему (12.5.1), нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 12.5.2. *(основная теорема алгебры). Всякий многочлен степени $n \geq 1$*

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n, \ \ a_0 \neq 0,$$

имеет по крайней мере один нуль.

Доказательство. Пусть многочлен $P_n(z)$ не имеет нулей. Тогда функция $g(z) = 1/P_n(z)$ является целой. Так как $g(z) \to 0$ при $z \to \infty$, то точка ∞ является устранимой особой точкой функции g. Согласно теореме (12.5.1) $g(z) = const$ и, следовательно, $P_n(z) = const$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Определение 12.8. *Функция f называется мероморфной в области $D \subset \mathbb{C}$, если она не имеет в D других особенностей, кроме полюсов.*

В каждом круге $|z| < n$, $n \in \mathbb{N}$, мероморфная функция может иметь лишь конечное число полюсов. Иначе существовала бы их конечная предельная точка, которая представляла бы собой неизолированную особую точку, что противоречит определению (12.8). Следовательно, мероморфная функция может иметь не более чем счетное множество полюсов. Примерами мероморфных функций со счетным множеством полюсов будут функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $1/\sin z$, $1/(e^z - 1)$. Рациональная функция, т. е. отношение двух многочленов, является мероморфной функцией и имеет на расширенной комплексной плоскости лишь конечное число полюсов. Справедливо и обратно утверждение.

Теорема 12.5.3. *Если функция имеет конечное число изолированных особых точек в расширенной комплексной плочкости $\mathbb{C}$ и все они - полюсы, то эта функция рациональная.*

Доказательство. Пусть точки a_j, $j = 1, \ldots, n$, являются полюсами функции $f(z)$ и

$$g_j(z) = \frac{c^{(j)}_{-m_j}}{(z - a_j)^{m_j}} + \frac{c^{(j)}_{-m_j+1}}{(z - a_j)^{m_j - 1}} + \ldots + \frac{c^{(j)}_{-1}}{(z - a_j)}$$

есть главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки a_j, $j = 1, \ldots, n$. Обозначим

$$g(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m$$

главную часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$, если эта точка является полюсом. Если $z = \infty$ является устранимой особой точкой, то положим $g(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим теперь функцию

$$h(z) = f(z) - g(z) - \sum_{j=1}^{n} g_j(z).$$

Она является голоморфной во всей расширенной плоскости $\mathbb{C}$, и, следовательно, $h(z) = const = c_0$. Таким образом,

$$f(z) = c_0 + g(z) + \sum_{j=1}^{n} g_j(z),$$

т .е. $f(z)$ является рациональной функцией. $\square$

13 Вычеты в изолированных особых точках

13.1 Вычет в конечной точке.

Определение 13.1. *Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < \epsilon\}$ точки $a \in \mathbb{C}$.*

Вычетом функции f в точке a называют число

$$res_a f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} f(z)dz, \tag{131}$$

где $0 < r < \epsilon$ и окружность ориентирована против часовой стрелки.

Заметим, что в силу теоремы Коши интеграл не зависит от радиуса r. Кроме того, вместо окружности можно взять любой контур, охватывающий точку a и лежащий в V.

Замечание.*Если функция f голоморфна в точке a (то же самое, что точка a является устранимой особой точкой), то $res_a f(z) = 0$.*

Теорема 13.1.1. *(Коши о вычетах). Пусть простой контур L вместе со своей внутренностью D лежит в области G и функция f голоморфна в области G всюду, за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D$. Тогда*

$$\int\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z). \tag{132}$$

Доказательство. Построим окружности $L_k,\ k = 1, \ldots, n$, с центрами в точках a_k таких радиусов, чтобы эти окружности не пересекались друг с другом и все лежали в области D. По теореме Коши для составного контура и определению (13.1) имеем

$$\int\limits_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{L_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z).$$

□

Таким образом, вычисление интеграла по контуру сводится к вычислению вычетов подинтегральной функции в изолированных особых точках, охватываемых этим контуром. Оказывается, что вычет функции в особой точке легко вычислить, если известно лорановское разложение функции в окрестности этой особой точки.

Теорема 13.1.2. *Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ равен коэффициенту c_{-1} лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки a.*

Доказательство. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности $\{0 < |z - a| < r\}$ точки a. Тогда

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L f(z)dz,$$

где в качестве контура L можно взять любую окружность $\{|z - a| = \rho\}$ радиуса $\rho < r$. Но правая часть равенства есть $res_a f(z)$. □

13.2 Вычисление вычета в полюсе.

Рассмотрим сначала случай простого полюса (полюса первого порядка) функции $f(z)$ в точке a. Тогда лорановское разложение функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Отсюда имеем $c_{-1} = \lim\limits_{z \to a} f(z)(z - a)$, то есть

$$res_a f(z) = \lim_{z \to a} f(z)(z - a). \tag{133}$$

При вычислениях особенно удобна следующая модификация формулы (133). Пусть функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{134}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - функции, голоморфные в окрестности точки a и удовлетворяющие условиям

$$\varphi(a) \neq 0, \quad \psi(a) = 0, \quad \psi'(a) \neq 0. \tag{135}$$

Тогда
$$res_a f(z) = \lim_{z\to a} f(z)(z-a) = \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)(z-a)}{\psi(z)} =$$
$$= \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$
Итак, если функция $f(z)$ имеет представление (134), удовлетворяющее условиям (135), то
$$res_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (136)$$

Пусть теперь точка a является полюсом функции $f(z)$ порядка m. Тогда в проколотой окрестности точки a

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

причем $c_{-m} \neq 0$. Умножив это равенство на $(z-a)^m$, получим

$$f(z)(z-a)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+m}.$$

Тогда
$$res_a f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big(f(z)(z-a)^m\big). \qquad (137)$$

Для вычисления вычета в существенно особой точке аналогичных формул нет. В этом случае нужно непосредственно найти коэффициент c_{-1} лорановского разложения функции в окрестности этой точки.

13.3 Вычет в бесконечно удаленной точке.

Определение 13.2. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $\{|z| > R\}$ и имеет точку $z = \infty$ своей изолированной особой точкой.*

Вычетом функции f в бесконечности называется число
$$res_\infty f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_r^-} f(z)dz, \qquad (138)$$

где окружность $L = \{|z| = r\}$ радиуса $r > R$ проходится по часовой стрелке.

Нетрудно видеть, что вычет в бесконечности функции f, имеющей в области $\{|z| > R\}$ лорановское разложение

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

равен

$$res_\infty f(z) = -c_{-1}.$$

Отметим, что в случае, когда $z = \infty$ - устранимая особая точка функции $f(z)$, вычет в ней может быть отличен от нуля. Этим бесконечно удаленная точка отличается от конечных особых точек.

Если точка ∞ является устранимой особой точкой, то нетрудно доказать формулу

$$res_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} z\big(f(\infty) - f(z)\big). \tag{139}$$

13.4 Теорема о полной сумме вычетов.

Теорема 13.4.1. *(о полной сумме вычетов). Пусть функция f голоморфна во все плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда справедливо равенство*

$$res_\infty f(z) + \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z) = 0. \tag{140}$$

Доказательство. Пусть окружность $L = \{|z| = R\}$ достаточно большего радиуса содержит внутри себя все особые точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Применяя теорему Коши о вычетах, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z).$$

Осталось заметить, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(z)dz = -res_\infty f(z).$$

□

14 Основы геометрической теории функций комплексного переменного

14.1 Принцип аргумента.

Пусть функция $f(z)$ является голоморфной в проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < r\}$ точки a и не имеет нулей в V. Сама точка a может быть как точкой голоморфности этой функции, так и ее изолированной особой точкой.

Определение 14.1. ***Логарифмическим вычетом*** *функции f в точке a называется вычет функции $f'(z)/f(z)$ в этой точке, т.е. значение*

$$res_a \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

где в качестве контура L можно взять любую окружность с центром в точке $z = a$, целиком лежащую в указанной проколотой окрестности этой точки.

Ясно, что логарифмический вычет функции $f(z)$ может быть отличен от нуля в ее изолированных особых точках, а также в ее нулях, поскольку точка $z = a$ будет особой точкой функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ лишь в указанных случаях.

Теорема 14.1.1. *Логарифмический вычет функции f в нуле порядка n равен n.*

Доказательство. Пусть точка a является нулем порядка n функции f. Тогда в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ голоморфна в точке a и не имеет нулей в некоторой окрестности этой точки. Следовательно,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1}\varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z)}{(z-a)^n \varphi(z)} =$$

$$= \frac{1}{z-a} \cdot \frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Функция
$$\psi(z) = \frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$
голоморфна в точке a и $\psi(a) = n$. Поэтому
$$res_a \frac{f'(z)}{f(z)} = n.$$
$\square$

Следствие. *Логарифмический вычет функции f в полюсе порядка p равен $-p$.*

Доказательство. Пусть точка a является полюсом порядка p функции f. Тогда эта точка является нулем прядка p функции $g(z) = 1/f(z)$. Поскольку $f'/f = -g'/g$, то в силу предыдущей теоремы логарифмический вычет функции f равен $-p$. $\square$

Теорема 14.1.2. *Пусть D - область с простой границей и функция f мероморфна в области $G \supset \overline{D}$ и не имеет нулей и полюсов на $L = \partial D$. Обозначим через N и P соответственно полное число нулей и полюсов в области D (с учетом их кратностей). Тогда*
$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P. \tag{141}$$

Доказательство. Поскольку функция f имеет в области D лишь конечное число нулей $a_1, \dots, a_k$ и полюсов $b_1, \dots, b_l$, то функция $f'(z)/f(z)$ голоморфна всюду в окрестности $\overline{D}$, за исключением точек $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$. Применяя теорему Коши о вычетах, а также теорему (14.1.1) и ее следствие, будем иметь
$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^{k} res_{a_i} \frac{f'}{f} + \sum_{j=1}^{l} res_{b_j} \frac{f'}{f} = N - P.$$
$\square$

Теореме (14.1.2) можно дать геометрическую интерпретацию. Так как по условию теоремы функция $f(z)$ голоморфна на контуре ∂D, то на этом контуре имеем

$$\int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int\limits_L dLn\ f(z), \tag{142}$$

где под $Ln\ f(z)$ понимается ветвь многозначной логарифмической функции $Ln\ f(z) = ln\ |f(z)| + i\ Arg\ f(z)$, заданная своим значением в некоторой точке z_0 контура. Так как функция $ln\ |f(z)|$ однозначна и непрерывна, то для выделения такой ветви достаточно выделить ветвь функции $Arg\ f(z)$, задав значение аргумента в точке z_0. При этом для произвольной точки $z_1 \in L$ будем иметь

$$Arg\ f(z_1) = Arg\ f(z_0) + \Delta_\gamma Arg\ f(z), \tag{143}$$

где $\Delta_\gamma Arg\ f(z)$ - приращение функции $Arg\ f(z)$ при движении точки $z \in L$ из положения z_0 в положение z_1 вдоль дуги γ контура L в положительном направлении.

Если контур L можно задать в виде $z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, то, используя (142) и (143), находим

$$\int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int\limits_\alpha^\beta dLn\ f(z(t)) = Ln\ f(z(\beta)) - Ln\ f(z(\alpha)) =$$

$$= ln\ |f(z(\beta))| + i\ Arg\ f(z(\beta)) - ln\ |f(z(\alpha))| - i\ Arg\ f(z(\alpha)) =$$

$$= i\Delta_L Arg\ f(z),$$

поскольку в силу замкнутости контура и однозначности функции $ln\ |f(z)|$ имеем $= ln\ |f(z(\beta))| = ln\ |f(z(\alpha))|$. Величина $\Delta_L Arg\ f(z)$ есть приращение аргумента $Arg\ w$ вдоль кривой в плоскости переменной w, которую проходит точка $w = f(z)$, когда точка z проходит в положительном направлении контур L. Тогда приходим к равенству

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_L Arg\ f(z), \tag{144}$$

называемое *принципом аргумента.* При этом величина $\frac{1}{2\pi}\Delta_L Arg\ f(z)$ равна числу поворотов радиус-вектора точки $w = f(z)$ вокруг точки $w = 0$, когда точка z проходит в положительном направлении контур L.

Следующая терема позволяет вычислять число нулей голоморфной функции в области, отбрасывая "малые"слагаемые.

Теорема 14.1.3. *(Руше). Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в области G, содержащей замыкание области D, ограниченной простым контуром L, и во всех точках этого контура удовлетворяют неравенству*

$$|g(z)| > |f(z)|,\ z \in L.$$

Тогда их сумма $g(z)+f(z)$ и функция $g(z)$ имеют в D одинаковое число нулей (с учетом их кратности).

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что $|g(z)| > 0$ на контуре L, и тогда $|g(z)+f(z)| \geq |g(z)| - |f(z)| > 0$. Итак функции $g(z)$ и $g(z)+f(z)$ отличны от нуля на L. Запишем

$$g(z)+f(z) = g(z)\left(1 + \frac{f(z)}{g(z)}\right),$$

откуда

$$\Delta_L Arg\big(g(z)+f(z)\big) = \Delta_L Arg\ \ g(z) + \Delta_L Arg\ \left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right).$$

Поскольку $|f(z)/g(z)| < 1$ на L, то при движении точки z по контуру L радиус-вектор точки $w = 1+f(z)/g(z)$ не может повернуться в плоскости w вокруг точки $w = 0$. Следовательно,

$$\Delta_L Arg\ \left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right) = 0$$

и

$$\Delta_L Arg\big(g(z)+f(z)\big) = \Delta_L Arg\ g(z).$$

В силу принципа аргумента отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

Теорема Руше позволяет получить простое доказательство *основной теоремы алгебры.*

Теорема 14.1.4. *(основная теорема алгебры). Любой многочлен P_n степени $n \geq 1$ имеет в $\mathbb{C}$ ровно n нулей.*

Доказательство. Так как P_n имеет полюс в бесконечности, то все его корни лежат в некотором круге $\{|z| < R\}$. Пусть $P_n = f + g$, где $f(z) = a_0 z^n$ $(a_0 \neq 0)$ и $g(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Увеличивая в случае надобности R, можно добиться того, что на окружности $\{|z| = R\}$ будет выполняться неравенство $|f(z)| > |g(z)|$. По теореме Руше P_n имеет в круге $\{|z| < R\}$ столько же нулей, сколько функция $f(z) = a_0 z^n$, т. е. ровно n. □

14.2 Принцип сохранения области и обращение голоморфных функций.

Теорема 14.2.1. *(принцип сохранения области). Если функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$ и не равна тождественно константе, то и образ $D^* = f(D)$ является областью.*

Доказательство. Докажем, что множество D^* линейно связно. Пусть $w_1,\ w_2$ - произвольные точки D^* и $z_1,\ z_2 \in D$ - их прообразы при отображении f, т. е. $f(z_1) = w_1,\ f(z_2) = w_2$. В силу связности D существует непрерывный путь $\gamma : I \to D$ с началом в точке z_1 и концом в точке z_2. Тогда $f \circ \gamma$ есть непрерывный путь в D^*, соединяющий точки w_1 и w_2.

Докажем, что множество D^* открыто. Пусть w_0 - произвольная точка из D^*. Укажем круг U^* с центром в этой точке, целиком лежащий в D^*.

Пусть $z_0 \in D$ - один из прообразов w_0 при отображении f. Выберем $r > 0$ так, что круг $U = \{|z - z_0| < r\}$ вместе со своим замыканием принадлежит D и не содержит других прообразов точки w_0, кроме точки z_0 (это возможно, так как нули голоморфной функции $f(z) - w_0$ изолированы в силу условия теоремы). Положим

$$r^* = \min_{z \in \partial U} |f(z) - w_0|.$$

Заметим, что $r^* > 0$, так как $f(z) \neq w_0$ на ∂U. Покажем, что круг $U^* = \{|w - w_0| < r^*\}$ содержится в D^*. Это означает, что каждая точка $w \in U^*$ имеет прообраз в U. Представим функцию $f(z) - w$ в виде

$$f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w).$$

Тогда при $z \in \partial U$ будем иметь

$$|f(z) - w_0| \geq r^* > |w_0 - w|,$$

и к функциям $f(z) - w_0$ и $w_0 - w$ в круге U применима теорема Руше. Согласно этой теореме $f(z) - w$ имеет в U столько же нулей, сколько и $f(z) - w_0$, т. е. по крайней мере один. Следовательно, $U^* \subset f(U)$ и, тем более, $U^* \subset D^*$. □

Теорема 14.2.2. *(теорема об обратной функции). Пусть функция f голоморфна в точке z_0, $w_0 = f(z_0)$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда*

1) *существует круг $K' = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \mu\}$, в котором определена функция $\psi(w)$, обратная к функции $f(z)$;*

2) *функция ψ голоморфна в круге K';*

3) *в круе K' справедлива формула*

$$\psi'(w) = \frac{1}{f'(\psi(w))}. \tag{145}$$

Доказательство. Так как функция f голоморфна в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то существует окрестность точки z_0, в которой функция $f(z) = w_0$ не имеет нулей, кроме точки z_0 (см. теорему (10.6.1) и ее следствие). В указанной окрестности выберем замкнутый круг $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$, настолько малого радиуса, что $f'(z) \neq 0$ в $\overline{K}$.

Функция $|f(z) - w_0|$ в силу своей непрерывности достигает на окружности $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ наименьшего значения

$$\mu = \inf_{z \in \gamma} |f(z) - w_0| > 0. \tag{146}$$

Рассмотрим круг $K' = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \mu\}$ и выберем в нем произвольную точку w_1. Функция $g(z) = f(z) - w_1$ может быть представлена в виде

$$g(z) = f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1),$$

где функции $f(z) - w_0$ и постоянная функция $h(z) = w_0 - w_1$ голоморфны в замкнутом круге $\overline{K}$ и на его границе γ удовлетворяют неравенству

$$|f(z) - w_0| \geq \mu > |w_0 - w_1| = |h(z)|.$$

В силу теоремы Руше функции $f(z) - w_0$ и $g(z) = f(z) - w_0 + h(z)$ вкруге $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ имеют одинаковое число нулей с учетом их кратности, т.е. один нуль, так как функция $f(z) - w_0$ имеет в этом круге один простой нуль в точке z_0. Это значит, что функция $f(z)$ принимает в этом круге значение w_1 только один раз. так как точка $w_1 \in K'$ выбиралась произвольно, заключаем, что в круге K' определена функция $z = \psi(w)$, которая каждой точке $w \in K'$ ставит в соответствие ее прообраз z при отображении $w = f(z)$, т.е. функция, обратная к функции $w = f(z)$.

Проведенные рассуждения можно сформулировать следующим образом. Каков бы ни был круг K радиуса r с центром в точке z_0 существует круг K' радиуса μ с центром в точке w_0, образ которого при отображении $z = \psi(w)$ целиком содержится круге KK. Это означает, что функция $\psi(w)$ является непрерывной в точке w_0. Эти рассуждения можно провести для любо точки в круге K', т.е. функция $\psi(w)$ непрерывна в круге K'.

Рассуждая как при выводе формулы производной обратной функции в вещественном случае, нетрудно получить формулу (145). $\square$

Теорема 14.2.3. *Пусть функция f голоморфна в точке z_0, $w_0 = f(z_0)$, и ее производная $f'(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка $m-1$, $m > 1$. Тогда существуют такие круги $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ и $K' = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \mu\}$, что для любого числа $w \in K'$, $w \neq w_0$, уравнение $f(z) = w$ имеет в круге K ровно m различных корней.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функия $f(z) - w_0$ имеет в точке z_0 нуль порядка m. Как в доказательстве теормы об обратной функции выберем замкнутый круг $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$, в котором у функций $f(z) - w_0$ и $f'(z)$ нет нулей, кроме точки z_0. Выбрав число μ согласно формуле (146) и повторяя рассуждения из доказательства теоремы об обратной функции, заключаем. что для любой точки $w_1 \in K'$ функция $f(z) - w_1$ имеет в круге K столько же нулей с учетом их кратности, что и функция $f(z) - w_0$, т.е. m. Поскольку все эти нули простые (т.к. $f'(z) \neq 0$ при $z \neq z_0$), то функция $f(z) - w_1$ имеет m различных нулей, а уравнение $f(z) = w_1$ имеет ровно m различных корней. $\square$

Определение 14.2. *Функцию $f(z)$ называют **однолистной в точке** $z = z_0$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ однолистна.*

Сопоставляя теоремы (14.2.2) и (14.2.3), можно сделать вывод.

Теорема 14.2.4. *Функция $f(z)$ голоморфная в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ однолистна в этой точке тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$.*

Замечание. Необходимым условием однолистности функции в области является ее однолистность в каждой точке области (т.е. локальная однолистность). Однако это условие не является достаточным. Примером, подтверждающим это, является функция e^z.

Проверка однолистности функции в области значительно сложнее, чем в точке.

14.3 Принцип максимума модуля.

Теорема 14.3.1. *(принцип максимума модуля). Если функция f голоморфна в области D и ее модуль $|f|$ достигает максимума в точке $z_0 \in D$, то $f \equiv const$.*

Доказательство. Допустим, что f не равна тождественно константе и рассмотрим круг $U = \{|z - z_0| < r\}$, вместе со своим замыканием содержащийся в , в котором $|f|$ достигает своего максимума, т. е.

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \text{при всех} \quad z \in U.$$

Тогда согласно принципу сохранения области множество $f(U)$ содержит целый круг U^* с центром в точке $w_0 = f(z_0)$. Выбрем в этом круге произвольную точку w_1, удовлетворяющую условию $|w_1| > |w_0|$. Тогда ее прообраз $z_1 \in U$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z_1)| > |f(z_0)|.$$

Это означает, что функция $|f|$ не имеет локального максимума в точке z_0. Противоречие. □

Опираясь на принцип максимума модуля, легко доказать следующую теорему.

Теорема 14.3.2. *Функция f, голоморфная в ограниченной области D и непрерывная в ее замыкании $\overline{D}$, достигает максимума модуля на границе ∂D области D.*

Замечание. Последние две теоремы неверны для минимума модуля голоморфной функции. Пример: функция $f(z) = z$ в единичном круге $\{|z| < 1\}$.

14.4 Теорема Римана и принцип соответствия границ

Любая голоморфная и однолистная в области D функция осуществляет конформное отображение этой области, ибо по доказанному ранее из однолистности следует, что $f'(z) \neq 0$ ни в одной точке D.

Теперь мы рассмотрим более трудную и более важную для практических целей задачу:

Даны две области D_1 и D_2 и требуется найти (однолистное) конформное отображение $f : D_1 \to D_2$ одной из них на другую.

Определение 14.3. *Конформное отображение f области D_1 на D_2 называют (конформным)* ***изоморфизмом****, а области, допускающие такое отображение, -* ***изоморфными****. Изоморфизм области на себя называют* ***автоморфизмом****.*

Основной результат этого пункта

Теорема 14.4.1. *(Римана). Любая односвязная область, граница которой содержит более одной точки, изоморфна единичному кругу.*

Доказательство этой теоремы весьма трудоемко. По этой причине мы не будем его проводить.

Поскольку отображение, обратное конформному отображению, в свою очередь является конформным, легко сделать следующее заключение.

Следствие. *Любые области, границы которых состоят более чем из одной точки, изоморфны.*

Важным теоретическим положением, характеризующим поведение конформного отображения вблизи границы области, является следующая теорема.

Теорема 14.4.2. *(принцип соответствия грагиц). Пусть D_1 и D_2 - односвязные области, ограниченные простыми кусочно гладкими контурами Γ_1 и Γ_2, а функция f конформно отображает область D_1 на D_2. Тогда:*

1) *функция f имеет непрерывное продолжение на границу Γ_1 области D_1, т.е. ее можно так доопределить в точках контура Γ_1, что получится функция, непрерывная в замыкании $\overline{D_1}$;*

2) *функция f, доопределенная на границе, отображает контур Γ_1 взаимно однозначно на контур Γ_2, причем так, что положительному обходу контура Γ_1 будет соответствовать положительный обход контура Γ_2.*

Верно также и обратное утверждение.

Теорема 14.4.3. *Пусть функция f голоморфна в односвязной области D_1ß$\mathbb{C}$, ограниченной кусочно гладким контуром Γ_1, и непрерывна в замыкании $\overline{D_1}$. Если функция f осуществляет взаимно однозначное отображение контура Γ_1 на некоторый простой кусочно гладкий контур Γ_2, то f отображает область D_1 конформно на область D_2, ограниченную контуром Γ_2, причем обходу контура Γ_1 в положительном направлении соответствует обход контура Γ_2 также в положительном направлении.*

15 Конформные отображения

Теория конформных отображений подчинена решению двух задач:

1) найти образ области при заданном отображении;

2) найти конформное отображение одной заданной области на другую.

Практические пути решения открывает прежде всего принцип соответствия границ, согласно которому конформное отображение одной области на другую определяется непрерывным и взаимно однозначным соответствием между их границами. Для решения первой задачи нужно найти образ границы заданной области, а для решения второй - аналитическую функцию, устанавливающую взаимно однозначное соответствие между границами двух областей.

В теории конформных отображений нет универсального метода, обеспечивающего решение какой-либо из двух задач. Решение конкретной задачи можно найти, хорошо зная конформные отображения, осуществляемые элементарными аналитическими функциями, а также конформные отображения типовых областей.

Перейдем к рассмотрению конформных отображений, осуществляемых основными элементарными функциями.

15.1 Дробно-линейные функции

Геометрия евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ тесно связана с линейными преобразованиями, переводящими прямые на плоскости снова в прямые. В случае комплексной плоскости $\mathbb{C}$ эту роль выполняют линейные преобразования вида $z \to az+b$ с комплексными a, b.

Геометрия расширенной комплексной плоскости связана с дробно-линейными преобразованиями вида

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{с комплексными} \ \ a, b, c, d.$$

Роль "прямых"в геометрии $\overline{\mathbb{C}}$ играют обобщенные окружности, т.е. прямые или окружности на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Дробно-линейные отображения переводят обобщенные окружности снова в обобщенные окружности.

Линейное отображение.

Отображение, осуществляемое функцией

$$w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0, \tag{147}$$

называется *линейным отображением.*

Доопределим это отображение в бесконечно удаленной точке значением

$$w(\infty) = \infty. \tag{148}$$

Соотношения (147) и (148) определяют однолистное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$. Действительно, если $w_1 = az_1 + b$ и $w_2 = az_2 + b$, то $w_1 - w_2 = a(z_1 - z_2)$ и, следовательно, равенство $w_1 = w_2$ возможно только при $z_1 = z_2$.

Так как $dw/dz = a \neq 0$ при любых z, то отображение является конформным всюду в плоскости $\mathbb{C}$. Исследуем точку $z = \infty$. Согласно определению (6.8) рассмотрим функцию

$$G(z) = \frac{1}{\frac{a}{z} + b} = \frac{z}{a + bz}.$$

Вычислим

$$G'(z) = \frac{a}{(a+bz)^2}.$$

Поскольку $G'(0) = \frac{1}{a} \neq 0$, то отображение $G(z)$ конформно в точке 0. А значит линейное отображение $f(z) = az + b$ конформно в точке $z = \infty$.

Рассмотрим частные случаи этого отображения.

1. $w = z + b,\ b \in$. В этом случае происходит параллельный перенос всех точек комплексной плоскости на вектор, соответствующий комплексному числу b.

2. $w = e^{i\alpha} z,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Это отображение осуществляет преобразование поворота вокруг начала коодинат на угол α.

3. $w = rz,\ r > 0$. В этом случае отображение оставляет неизменным аргумент числа z, но его модуль изменяется в r раз. Такое отображение представляет собой преобразование подобия с центром подобия в точке $z = 0$ и коэффициентом подобия r.

Любая линейная функция $w = az + b$, может быть представлена в виде композиции трех линейных функций частного вида: $w_1 = e^{i\alpha} z$, $w_2 = rw_1,\ w = w_2 + b$. Так как каждое из трех составляющих отображений преобразует окружность в окружность, а прямую в прямую, то любое линейное отображение преобразует окружность в окружность и прямую в прямую.

Линейное отображение будет определено однозначно условиями, при которых однозначно определены параметры a и b. Например, при условиях $w(z_1) = w_1,\ w(z_2) = w_2$. Тогда параметры a и b будут удовлетворять системе уравнений $w_1 = az_1 + b$ и $w_2 = az_2 + b$, имеющей единственное решение. Соответствующее отображение имеет вид

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{149}$$

Линейное отображение будет определено однозначно и в том случае, когда в некоторой точке z_1 заданы значение функции w_1 и значение ее производной. При этих условиях отображение можно записать в виде $w - w_1 = a(z - z_1)$.

Дробно-линейное отображение

Отображение, которое осуществляется функцией

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{150}$$

называется *дробно-линейным.*

Отметим, что в случае $ad = bc$ числитель и знаменатель дроби $\frac{az+b}{cz+d}$ пропорциональны, т. е. отображение становится константой.

Если $c = 0$, то $d \neq 0$ и отображение (150) сводится к линейному отображению

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B.$$

Поэтому далее предполагаем, что $c \neq 0$.

Функция (150) определена для всех точек, кроме точек $z = -d/c$ и $z = \infty$. Определим его и в этих точках, положив

$$w(-d/c) = \infty, \qquad w(\infty) = \frac{a}{c}. \tag{151}$$

Теорема 15.1.1. *Функция* (150) *с дополнением* (151) *осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение расширенной комплексной плоскости* $\overline{\mathbb{C}}$ *на* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Доказать самостоятельно. □

Теорема 15.1.2. *Дробно-линейное отображение конформно в расширенной комплексной плоскости.*

Доказательство. Пусть $z \neq -d/c, \infty$. Тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

Следовательно, отображение конформно в этих точках.

Проверим конформность в точке $z = -\frac{c}{d}$. Для этого нужно доказать конформность отображения

$$F(z) = \frac{cz+d}{az+b}$$

в точке $z = -\frac{c}{d}$. Так как

$$F'(z) = \frac{bc - ad}{(az+b)^2} \text{ и } F'(-\frac{c}{d}) = \frac{c^2}{bc - ad} \neq 0,$$

то отображение F конформно в точке $z = -\frac{c}{d}$.

Конформность $w = f(z)$ в точке $z = \infty$ эквивалентна конформности отображения

$$G(z) = f(\frac{1}{z}) = \frac{a + bz}{c + dz}$$

в нуле, которая проверяется так же, как и выше. □

Теорема 15.1.3. *Дробно-линейными отображениями являются:*

- *композиция двух дробно-линейных отображений;*

- *отображение, обратное к дробно-линейному отображению.*

Доказательство. Доказать самостоятельно. □

Определение 15.1. *Окружностью на $\overline{\mathbb{C}}$ будем называть любую окружность комплексной плоскости или любую прямую в $\mathbb{C}$, дополненную точкой $z = \infty$.*

Теорема 15.1.4. *(круговое свойство дробно-линейного отображения). Произвольное дробно-линейное отображение преобразует любую окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ в окружность на $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доказательство. Преобразуем дробно-линейное отображение к виду

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} = A + \frac{B}{z+D},$$

где

$$A = \frac{a}{c}, \quad B = \frac{bc-ad}{c^2}, \quad D = \frac{d}{c}.$$

Следовательно, дробно-линейное отображение является композицией трех отображений:

$$f_1(z) = z + D, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = A + Bz.$$

Отображения f_1 и f_3, как нам уже известно, обладают круговам свойством. Остается доказать, что круговам свойством обладает отображение f_2.

Уравнение любой окружности на $\overline{\mathbb{C}}$ можно записать в виде

$$E(x^2+y^2) + F_1 x + F_2 y + G = 0. \tag{152}$$

Переходя комплексному переменному $z = x + iy$ и учитывая, что

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i},$$

из (152) получим комплексное уравнение окружности на $\overline{\mathbb{C}}$

$$Ez\overline{z} + Fz + \overline{F}\overline{z} + G = 0, \tag{153}$$

в котором $F = (F_2 - iF_2)/2$. Чтобы получить уравнение образа окружности на $\overline{\mathbb{C}}$ при отображении f_2, достаточно подставить в (153) $z = 1/w$:

$$\frac{E}{w\overline{w}} + \frac{F}{w} + \frac{\overline{F}}{\overline{w}} + G = 0,$$

или

$$Gw\overline{w} + \overline{F}w + F\overline{w} + E = 0.$$

Мы пришли к уравнению того же вида, что и уравнение (153). Следовательно, образ окружности на $\overline{\mathbb{C}}$ при отображении $w = 1/z$ есть окружность на $\overline{\mathbb{C}}$. □

Замечание. Дробно-линейное отображение $w = \frac{az+b}{cz+d}$ преобразует окружность в прямую, если эта окружность проходит через точку $z = -\frac{d}{c}$, которая отображается в бесконечно удаленную точку. Если окружность не проходит через точку $z = -\frac{d}{c}$, то ее образом будет окружность. Аналогичным образом преобразуются прямые.

Прежде, чем говорить о другом важном геометрическом свойстве дробно-линйного отображения, дадим следующее определение.

Определение 15.2. *Точки z и z^* называют симметричыми относительно окружности Γ в $\mathbb{C}$, если они лежат на одном луче, выходящем из центра z_0 окружности Γ, и произведение их расстояний до центра окружности равно квадрату радиуса R окружности, т. е.*

$$arg(z - z_0) = arg(z^* - z_0), \quad |z - z_0||z^* - z_0| = R^2.$$

Из определения можно получить равенство

$$z^* - z_0 = \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}. \tag{154}$$

Так как при приближении точки z к центру окружности симметричная ей точка z^* стремится к бесконечно удаленной точке, то центр z_0 окружности Γ и бесконечно удаленную точку естественно считать симметричыми относительно окружности Γ.

Введенное понятие симметрии относительно окружности, которое в элементарной геометрии называют *инверсией*, можно рассматривать как развитие понятия симметрии относительно прямой.

Оставаясь в рамках элементарной геометрии, можно доказать следующую теорему.

Теорема 15.1.5. *(критерий симметричности точек). Две различные точки z и z^* симметричны относительно окружности (прямой) Γ тогда и только тогда, когда любая окружность или прямая, проходящая через эти точки, перпендикулярна Γ в точках пересечения.*

В силу конформности дробно-линейного отображения последняя теорема приводит нас к заключению.

Теорема 15.1.6. *(свойство сохранения симметричных точек). Произвольное дробно-линейное отображение преобразует любые точки z и z^*, симметричные относительно окружности Γ на $\overline{\mathbb{C}}$, в точки w и w_0, симметричные относительно образа Γ' этой окружности.*

В формулу дробно-линейного отображения

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

входят четыре комплексных коэффициента a, b, c, d. Однако на самом деле отображение зависит от трех комплексных параметров, ибо числитель и знаменатель дроби можно поделить на один из не равных нулю коэффициентов. Поэтому естественно ожидать, что при помощи дробно-линейного отображения можно единственным образом преобразовать три заданные точки в три заданные. Действительно, имеет место

Теорема 15.1.7. *Каковы бы ни были три различные точки $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ и три различные точки $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, существует, и притом только одно, дробно-линейное отображение L, $L(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ и $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$.

Докажем существование указанного дробно-линейного отображения.

Дробно-линейное отображение

$$f_1(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки $0, \infty, 1$ на $\overline{\mathbb{C}}$. Аналогично, дробно-линейное отображение

$$f_2(z) = \frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$$

переводит точки w_1, w_2, w_3 в точки $0, \infty, 1 \in \overline{\mathbb{C}}$.

Следовательно, дробно-линейное отображение $L(z) = f_2^{-1} \circ f_1(z)$, которое определяется как функция $w = w(z)$ из соотношения

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} \tag{155}$$

и есть искомое.

Докажем единственность отображения. Пусть дробно-линейное отображение f переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3. Тогда дробно-линейное отображение $F(z) = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$ оставляет точки $0, \infty, 1$ неподвижными. Из $F(\infty) = \infty$ следует, что $F(z) = Az + B$. Условие $F(1) = 1$ влечет $B = 0$. Условие $F(1) = 1$ влечет $A = 1$. Таким образом, $F(z) = z$ и, следовательно, $f = f_2^{-1} \circ f_1$, т.е.$f = L$.

Если среди точек $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ встречается ∞, то числитель и знаменатель дроби в (155), где появляется эта точка, нужно заменить единицей. Таким образом, теорема верна для $\overline{\mathbb{C}}$. □

15.2 Степенная функция.

Степенная функция

$$w = z^n, \tag{156}$$

где n - натуральное число, голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$. Ее производная $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1}$ при $n > 1$ отлична от нуля всюду при $z \neq 0$, следовательно, отображение (156) при $n > 1$ конформно в каждой точке $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Записывая функцию (156) в полярных координатах $z = re^{i\varphi},\ w = \rho e^{i\psi}$:

$$\rho = r^n, \ \ \psi = n\varphi, \tag{157}$$

мы видим, что осуществляемое степенной функцией отображение увеличивает в n раз углы с вершиной в точке $z = 0$ и поэтому при $n > 1$ не конформно в этой точке.

Из (157) водно, что любые две точки z_1 и z_2 с одинаковыми модулями и с аргументами, отличающимися на целое кратное $2\pi/n$:

$$|z_1| = |z_2|, \ \ arg\ z_1 = arg\ z_2 + k\frac{2\pi}{n} \tag{158}$$

(и только такие точки) при отображении (156) переходят в одну точку w. Следовательно, при $n > 1$ это отображение неоднолистно в $\mathbb{C}$. Для однолистности его в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ необходимо и достаточно, чтобы D не содержала никаких двух различных точек z_1 и z_2, связанных соотношениями (158).

Примером такой области может служить сектор

$$D = \Big\{0 < arg\ z < \frac{2\pi}{n}\Big\}.$$

Этот сектор отображается на область

$$D^* = \Big\{0 < arg\ w < 2\pi\Big\},$$

т.е. плоскость w с выброшенной положительной полуосью.

15.3 Функция Жуковского.

Функцией Жуковского называют рациональную функцию

$$w = \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big), \tag{159}$$

голоморфную в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ее производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\big(1 - \frac{1}{z^2}\big)$$

отлична от нуля всюду в этой области, кроме точек $z = \pm 1$. Следовательно, отображение (159) конформно в каждой конечной точке $z \neq 0, \pm 1$.

Точке $z = 0$ соответствует точка $w = \infty$, и конформность в этой точке следует из того, что производная

$$\frac{d}{dz}\big(\frac{1}{w}\big) = 2\frac{1 - z^2}{(1 + z^2)^2}$$

отлична от нуля при $z = 0$.

Конформность отображения $w = f(z)$ в точке ∞ сводится к конформности $w = f\big(\frac{1}{z}\big)$ в точке $z = 0$. В случае функции Жуковского $f(z) = f\big(\frac{1}{z}\big)$, и по только что доказанному отображение (159) конформно в точке $z = \infty$.

Выясним условие однолистности функции. Пусть z_1 и z_2 она переводит в одну точку, тогда

$$z_1 + \frac{1}{z_1} - \big(z_2 + \frac{1}{z_2}\big) = (z_1 - z_2)\big(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\big) = 0,$$

и при $z_1 \neq z_2$ мы получим $z_1 z_2 = 1$. Таким образом, для однолистности функции Жуковского в какой-либо области D необходимо и достаточно, чтобы она не содержала никакой пары точек z_1 и z_2, для которых

$$z_1 z_2 = 1 \quad \text{или} \quad z_2 = \frac{1}{z_1}. \tag{160}$$

Примерами таких областей, удовлетворяющих условию однолистности, являются единичный круг $D = \{|z| < 1\}$, внешность единичного круга $D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \ |z| > 1\}$, верхняя полуплоскость, нижняя полуплоскость.

Сделаем важное замечание. Пусть D_2 - область, в которую переходит область D_1 при отображении $\zeta = 1/z$. Функция Жуковского отображает обе области в одну и ту же область, так как для функции Жуковского верно тождество $f(z) = f(1/z)$.

Чтобы наглядно представить отображение (159), положим $z = re^{i\varphi}, \ w = u + iv$ и запишем (159) в виде

$$u = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\cos\varphi, \ \ v = \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\sin\varphi. \tag{161}$$

Следовательно, окружности $\{|z| = r_0\}, \ r_0 > 1$, функция Жуковского преобразует в эллипсы с полуосями $a_{r_0} = \frac{1}{2}\big(r_0 + \frac{1}{r_0}\big)$ и $b_{r_0} = \frac{1}{2}\big(r_0 - \frac{1}{r_0}\big)$, с фокусами в точках ± 1 (т.к. $a_{r_0}^2 - b_{r_0}^2 = 1$ для любого r_0). Причем обходу окружности против часовой стрелки соответствует обход эллипса тоже против часовой стрелки. При $r_0 \to 1$ имеем $b_0 \to 0$ и эллипсы стягиваются к отрезку $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Образом внешности единичного круга (а также самого единичного круга) будет вся плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ вещественной оси.

Отметим, что окружности радиуса $r_0 > 1$ и радиуса $1/r_0$ отображаются на один и тот же эллипс. Только во втором случае обходу окружности против часовой стрелки соответствует обход эллипса по часовой стрелке.

Лучи $\{\varphi = \varphi_0, \ 1 < r < \infty\}$ преобразуются в части гипербол $\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0}$ с теми же фокусами ± 1. В силу конформности семейство этих гипербол ортогонально описанному выше семейству эллипсов.

В точках $z = \pm 1$ отображение (159) не конформно. Поскольку для функции Жуковского справедливо равенство

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2,$$

то отображение (159) представляет собой композицию отображений

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1}, \;\; \omega = \zeta^2, \;\; w = \frac{1+\omega}{1-\omega}. \tag{162}$$

Первое и третье из отображений (162) дробно-линейны и конформны всюду в $\overline{\mathbb{C}}$; отображение $\omega = \zeta^2$ удваивает углы в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$, которым соответствуют точки $z = \pm 1$. Поэтому отображение Жуковского удваивает углы в этих точках.

15.4 Показательная функция

Рассмотрим отображение, осуществляемое показательной функцией

$$w = w(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}. \tag{163}$$

Как нам уже известно, показательная функция явяется голоморфной во всей комплексной плоскости:

$$\left(e^z\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Поскольку

$$\frac{dw}{dz} = e^z \neq 0, \;\; z \in \mathbb{C},$$

то данное отображение конформно во всей плоскости.

Оно не является однолистным во всей комплексной плоскости, так как показательная функция периодична с пероидом $2\pi i$. Функция не будет однолистной в любой области, содержащей вместе с точкой z_1 точку вида $z_2 = z_1 + 2\pi i$. Примером области однолистности является полоса $D = \{z \in \mathbb{C} : y_0 < Im\ z < y_0 + 2\pi\},\ y_0 \in \mathbb{R}$.

Полагая $w = \rho e^{i\psi}$, согласно (163) запишем отображение $w = e^z$ в виде

$$\rho = e^x, \quad \psi = y. \tag{164}$$

Отсюда видно, что это отображение преобразует прямые $\{y = y_0\}$ в лучи $\{\psi = y_0\}$, а отрезки $\{x = x_0,\ 0 < y < 2\pi\}$ - в окружности с выколотой точкой $\{\rho = e^{x_0},\ 0 < \psi < 2\pi\}$. Полоса $\{0 < y < 2\pi\}$ преобразуется, следовательно, в плоскость w с выброшенной положительной полуосью, а полоса $\{0 < y < \pi\}$ преобразуется в верхнюю полуплоскость.

15.5 Тригонометрические и гиперболические функции

Гиперболический косинус $ch\ z = (e^z + e^{-z})/2$ можно рассмотреть как композицию двух функций

$$ch\ z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \ \ \zeta = e^z.$$

Функцию

$$\cos z = ch(-iz)$$

можно представить как композицию отображений $\zeta = -iz$ (поворот вокруг точки $z = 0$ на угол $-\pi/2$) и $w = ch\ \zeta$. Фунция

$$\sin z = \cos(z - \pi/2)$$

является композицией отображения $\zeta = z - \pi/2$ (сдвиг) и $w = \cos\zeta$.

15.6 Однозначные ветви многозначных обратных функций

В этом пункте мы ограничимся пояснениями к построению ветвей многозначных обратных функций, порожденных некоторыми элементарными функциями.

Рассмотрим функцию $w = z^2$. Обратная к ней функция задается уравнением

$$z^2 = w$$

относительно переменного z. Как нам известно, это уравнение при $w \neq 0$ имеет два решения.

Таким образом, функция обратная к функции $w = z^2$ является двузначной. Заметим, что функция $w = z^2$ определена во все комплексной плоскости и множество ее значений есть вся комплексная плоскость. Возникает вопрос о том, как построить ветвь обратной двузначной функции.

Пусть D - плоскость с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси. Эту область можно описать следующим образом:

$$D = \{z = re^{i\varphi} : \ r > 0, \ -\pi < \varphi < \pi\}.$$

Тогда имеем (см. пункт (3.2))

$$w = \sqrt{r} e^{i(\varphi + 2k\pi)/2}, \ \ k = 0, 1.$$

При $k = 0$ получим функцию

$$f_0(z) = \sqrt{r} e^{i\varphi/2}, \ -\pi < \varphi < \pi,$$

которая отображает область D на правую полуплоскость $Re\, w > 0$. Эта функция непрерывна на D и является обратной функции $z = w^2$, так как $f_0^2(z) = z$.

При $k = 1$ получим функцию

$$f_1(z) = \sqrt{r} e^{i\varphi/2} e^{i\pi} = -\sqrt{r} e^{i\varphi/2}, \ -\pi < \varphi < \pi,$$

которая отображает область D на левую полуплоскость $Re\ w < 0$ и также является непрерывной обратной функцией.

В силу теоремы о дифференцируемости обратной функции рассматриваемые функции $f_0(z)$ и $f_1(z)$ голоморфны в D, причем

$$f_k'(z) = \frac{1}{(w^2)'}\bigg|_{w=f_k(z)} = \frac{1}{2f_k(z)}, \ \ k = 0, 1.$$

Итак, $f_0(z)$ и $f_1(z)$ - две ветви двузначной функции $w = \sqrt{z}$. Обычно обе эти ветви обозначают одним и тем же символом $\sqrt{z}$. Чтобы указать, какую из двух ветвей в конкретном случае имеют в виду, задают значение функции в какой-либо точке области D.

Если, например, в точке $z = 1$ задано значение $w = 1$, то речь идет о ветви $w = f_0(z)$. Если же в точке $z = 1$ задано значение $w = -1$, то речь идет о ветви $w = f_1(z)$.

Нетрудно убедится, что однозначные ветви функции $\sqrt{z}$ можно выделить и в том случае, когда областью является плоскость с разрезом по произвольному лучу $Arg\ z = \alpha$.