

# Контрольная работа

## 3 семестр

### Задание 1

Вычислить поверхностный интеграл.

1.  $\iint_S (x + y + z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $x + 2y + 4z = 4$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
2.  $\iint_S (x + y + z) dS$ , где  $S$  - часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ .
3.  $\iint_S (x^2 + y^2 + z) dS$ , где  $S$  - часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ .
4.  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ , где  $S$  - сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
5.  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$ , где  $S$  - сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
6.  $\iint_S y dz dx$ , где  $S$  - внешняя сторона сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
7.  $\iint_S x^2 dy dz$ , где  $S$  - внешняя сторона сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
8.  $\iint_S (x^5 + z) dy dz$ , где  $S$  - внутренняя сторона полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z \leq 0$ .
9.  $\iint_S x^2 y^2 z dx dy$ , где  $S$  - внутренняя сторона полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z \leq 0$ .
10.  $\iint_S (z^2 - y^2) dy dz + (x^2 - z^2) dz dx + (y^2 - x^2) dx dy$ , где  $S$  - внешняя сторона полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z \geq 0$ .

### Задание 2

Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x)$  на указанном промежутке и нарисовать график суммы ряда.

1.  $f(x) = x$  на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

2.  $f(x) = |x|$  на интервале  $(-\pi, \pi)$ .
3. Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = \pi - 2x$ ,  $0 < x < \pi$ , продолжив ее на промежуток  $(-\pi, 0)$  четным образом, и нарисовать график суммы ряда.
4. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi/2, & \pi/2 < x \leq \pi, \end{cases}$$

продолжив ее на промежуток  $(-\pi, 0)$  четным образом, и нарисовать график суммы ряда.

5. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi/2, & \pi/2 < x \leq \pi, \end{cases}$$

продолжив ее на промежуток  $(-\pi, 0)$  нечетным образом, и нарисовать график суммы ряда.

6. Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = \pi - 2x$ ,  $0 < x < \pi$ , продолжив ее на промежуток  $(-\pi, 0)$  четным образом, и нарисовать график суммы ряда.
7. Разложить функцию  $f(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , в ряд Фурье по косинусам.
8. Разложить функцию  $f(x) = \cos 2x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , в ряд Фурье по синусам.
9. Разложить в ряд Фурье на  $(0, \pi)$  по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 - x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x \leq \pi, \end{cases}$$

и нарисовать график суммы ряда.

10. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x \leq \pi, \end{cases}$$

и нарисовать график суммы ряда.

### Задание 3

Найти сумму, произведение и частное комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$

1.  $z_1 = 1 + i, z_2 = 3 + 2i.$

2.  $z_1 = 2 - i, z_2 = 3 - i.$

Представить комплексное число в тригонометрической и показательной форме

3.  $z = 1 + i\sqrt{3}$

4.  $z = \sqrt{3} - i$

Найти все значения корней и построить их:

5.  $\sqrt[3]{i}$

7.  $\sqrt[4]{-1}$

9.  $\sqrt{1-i}$

6.  $\sqrt[3]{-8}$

8.  $\sqrt[6]{-1}$

10.  $\sqrt[3]{-1}$

### Задание 4

Разложить в ряд Лорана

1.  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)}$  в кольце  $0 < |z| < 3$

2.  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)}$  в окрестности  $z = \infty$ ;

3.  $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}$  в кольце  $0 < |z| < 1$

4.  $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}$  в окрестности  $z = \infty$ ;

5.  $f(z) = \frac{4z}{(z-1)^2(z+2)}$  в кольце  $0 < |z-1| < 3$

6.  $f(z) = \frac{4z}{(z-1)^2(z+2)}$  в окрестности  $z = \infty$ ;

7.  $f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+2)}$  в кольце  $1 < |z| < 2$
8.  $f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+2)}$  в окрестности  $z = \infty$ ;
9.  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} + \sin \frac{1}{z} + 6z^5$ ; в окрестности  $z = \infty$ ;
10.  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} + \sin \frac{1}{z} + 6z^5$ ; в окрестности  $z = 0$

### Задание 5

Найти вычеты указанных функций во всех изолированных особых точках и в бесконечности (если она не является предельной для особых точек).

- |                            |                                   |                              |
|----------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| 1. $\frac{1}{z^3 - z^5}$   | 4. $\frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}$ | 8. $\sin \frac{z}{z+1}$      |
| 2. $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ | 5. $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$      | 9. $\frac{\cos z}{(z-1)^2}$  |
| 3. $\frac{1}{z(1-z^2)}$    | 6. $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$       | 10. $\frac{1+z^8}{z^6(z+2)}$ |
|                            | 7. $z^3 \cos \frac{1}{z-2}$       |                              |

### Задание 6

Вычислить интеграл по границе области  $D$  с помощью вычетов

1. 
$$\int_{\partial D} \frac{1}{z^2(z-3)} dz, \quad D : |z| < 4;$$
2. 
$$\int_{\partial D} \frac{\sin \frac{2}{z}}{1+z} dz, \quad D : |z| < 2;$$
3. 
$$\int_{\partial D} \frac{z+1}{z^2(z-1)} dz, \quad D : |z| < 2;$$
4. 
$$\int_{\partial D} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz, \quad D : |z| < 2;$$

5.

$$\int_{\partial D} \frac{4z}{(z-1)^2(z+2)} dz, \quad D : |z| < 3;$$

6.

$$\int_{\partial D} \frac{z^3}{z^4-1} dz, \quad D : |z| < 2;$$

7.

$$\int_{\partial D} \frac{2z}{(z-1)(z+2)} dz, \quad D : |z| < 3;$$

8.

$$\int_{\partial D} \frac{z}{(z-1)(z^2-2)} dz, \quad D : |z| < 2.$$

9.

$$\int_{\partial D} \frac{z}{(z^2+2)(z-2)} dz, \quad D : |z| < 3.$$

10.

$$\int_{\partial D} \frac{z}{(z^2+1)(z+2)} dz, \quad D : |z| < 3.$$