

火箭刹车高度与速度关系推导

令 初始质量: m ; 推力: F ; 燃料流量: Q ; 初始速度: v_0

由冲量定理

$$(m - Qt) dv = (F - G) dt$$

整理得

$$dv = \frac{F dt}{m - Qt} - g dt$$

代换得

$$dv = -\frac{F}{Q} \frac{d(Qt - m)}{Qt - m} - g dt$$

积分得

$$v = -\frac{F}{Q} \ln(m - Qt) - gt + C$$

已知 $t = 0$ 时, $v = v_0$, 代入解得

$$v = -\frac{F}{Q} \ln\left(1 - \frac{Qt}{m}\right) - gt + v_0$$

即

$$ds = \left(-\frac{F}{Q} \ln\left(1 - \frac{Qt}{m}\right) - gt + v_0\right) dt$$

上式再积分得

$$s = \frac{mF}{Q^2} \left(\left(1 - \frac{Qt}{m}\right) \ln\left(1 - \frac{Qt}{m}\right) + \frac{Qt}{m} \right) - \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + C$$

已知 $t = 0$ 时, $s = 0$, 代入解得

$$s = \frac{mF}{Q^2} \left(\left(1 - \frac{Qt}{m}\right) \ln\left(1 - \frac{Qt}{m}\right) + \frac{Qt}{m} \right) - \frac{g}{2} t^2 + v_0 t$$

由 $v - t$ 式, $v = 0$ 时

$$-\frac{F}{Q} \ln\left(1 - \frac{Qt_{v=0}}{m}\right) - gt_{v=0} + v_0 = 0$$

$t_{v=0}$ 可由Newton迭代法求得

此时

$$s = \frac{mF}{Q^2} \left(\left(1 - \frac{Qt_{v=0}}{m}\right) \ln\left(1 - \frac{Qt_{v=0}}{m}\right) + \frac{Qt_{v=0}}{m} \right) - \frac{g}{2} t_{v=0}^2 + v_0 t_{v=0}$$