火箭刹车高度与速度关系推导

令 初始质量:m;推力:F;燃料流量:Q;初始速度: v_0

由冲量定理

$$(m - Qt) dv = (F - G) dt$$

整理得

$$dv = \frac{Fdt}{m - Qt} - gdt$$

代换得

$$dv = -rac{F}{Q}rac{d\left(Qt - m
ight)}{Qt - m} - gdt$$

积分得

$$v=-rac{F}{Q}ln\left(m-Qt
ight) -gt+C$$

已知t=0时, $v=v_0$, 代入解得

$$v = -\frac{F}{Q}ln\left(1 - \frac{Qt}{m}\right) - gt + v_0$$

即

$$ds = \left(-rac{F}{Q}ln\left(1-rac{Qt}{m}
ight) - gt + v_0
ight)dt$$

上式再积分得

$$s = rac{mF}{Q^2}igg(igg(1-rac{Qt}{m}igg)lnigg(1-rac{Qt}{m}igg) + rac{Qt}{m}igg) - rac{g}{2}t^2 + v_0t + C$$

已知t=0时,s=0,代入解得

$$s = rac{mF}{Q^2}igg(igg(1-rac{Qt}{m}igg)lnigg(1-rac{Qt}{m}igg) + rac{Qt}{m}igg) - rac{g}{2}t^2 + v_0t$$

由v-t式, v=0时

$$-rac{F}{Q}ln\left(1-rac{Qt_{v=0}}{m}
ight)-gt_{v=0}+v_0=0$$

 $t_{v=0}$ 可由Newton迭代法求得

此时

$$s = rac{mF}{Q^2}igg(igg(1 - rac{Qt_{v=0}}{m}igg) ln igg(1 - rac{Qt_{v=0}}{m}igg) + rac{Qt_{v=0}}{m}igg) - rac{g}{2}t_{v=0}^2 + v_0t_{v=0}$$