Základy spojité optimalizace

Ladislav Láska

23. února 2010

Obsah

1 Úvod

1.1 Úloha, cílová funkce, množina řešení

Definice Úloha matematického programování (optimalizace) rozumíme úlohu

$$\min_{x \in M} f(x)$$

kde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definice Funkci $f(x)$ nazýváme **cílovou**, účelovou, kriteriální, objektivní funkcí.

Definice Množinu M nazýváme množinou přípustných řešení. Prvek $x \in M$ nazýváme přípustným řešením optimalizační úlohy. Prvek $x_0 \in M$ nazveme optimálním řešením.

1.2 Dělení na jednotlivé disciplíny optimalizace

1. Volný extrém - $\min_M f(x)$
2. Vázaný extrém - $\min_M f(x), M \subset \mathbb{R}^n$
   (a) Lineární programování:
   $\min_M cx$, $M = \{x | A_x\{=, <, >\}b\}$, kde $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in b^m$
   (b) Nelineární programování:
   $\min_M f(x), M = \{x | g_j(x) < 0 (j = 1, ..., m)\}, f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
      i. Konvexní a zobecněné konvexní programování - f, g_j konvexní, dále pak kvadratické a hyperbolické programování
      ii. Nekonvexní (speciální typy)
   (c) Celočíselné programování:
   Lineární/nelineární programování, navíc podmínky pro celočíselnost $Ax * b$, aby $x \in \mathbb{N}$.
   (d) Parametrické programování:
   Lineární/nelineární programování, navíc parametr $\min_{M(U)} c(\lambda)^T x$, $c(x) = c + C\lambda$, $M(U) = \{x | A(U)x * b(U)\}$
   (e) Vícekriteriální (vektorové) programování:
   $\min_M f(x)$, $f(x) = \{f_1(x), .., f_s(x)\}$
   (f) Dynamické programování - hledání optimální strategie
   (g) Spojité programování (optimalizační procesy)
   (h) Teorie her - optimální strategie dvou hráčů
   (i) Semiinfinitní programování - nekonečně mnoho podmínek

1.3 Motivační úloha

1.3.1 Lineární programování

$V_1, ..., V_n$ - výrobci vyrábějící výrobek V v množstvích $a_i > 0$
$S_1, ..., S_k$ - spotřebitelé požadující výrobek V v množstvích $b_j > 0$.
Známe cenu za dopravu jednotky výrobku V z V_i do S_j - $c_{i,j} \geq 0$.

Předpoklad: ceny za dopravu rostou lineárně.

Cíl: minimalizovat celkové náklady na dopravu.

Hledáme: množství $x_{i,j} \geq 0$ - kolik výrobce V_i dodá S_j.

Cílová funkce

$$f(x) = \sum_i \sum_j c_{i,j} x_{i,j} \tag{1}$$

na množině řešení

$$M = \{x_{i,j} | \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j \forall j, \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = a_i \forall i, \sum_i a_i = \sum b_j, x_{i,j} \geq 0 \forall i \forall j\} \tag{2}$$

Všechno je lineární - úloha lineárního programování.

1.3.2 Celočíslené programování

Pokud nelze položky libovolně dělit (například lidi), můžeme přidat celočíselnou podmínku do množiny řešení:

$$x_{i,j} \mathbb{N}_0 \forall i \forall j \tag{3}$$

1.3.3 Nelineární programování

Zrušíme předpoklad lineárního růstu cen (tedy cena závisí na množství)

$$f(x) = \sum_i \sum_j c_{i,j}(x_{i,j}) x_{i,j} \tag{4}$$

$c_{i,j} = C_{i,j} + c_{i,j} x_{i,j}$

1.3.4 Parametrické programování

Produkce není pevná a závisí na parametru: $a_i = \lambda a'_i$. Ostatní vztahy můžou zůstat třeba jako u lineárního programování.

1.3.5 Vícekriteriální programování

Minimalizovat ceny za dopravu, maximalizovat zisky.

$$\min\{f(x), g(x)\} \tag{5}$$

$$f(x) = \sum_i \sum_j c_{i,j} x_{i,j} \tag{6}$$

$$g(x) = -Zisk(x_{i,j}) \tag{7}$$