Základy spojité optimalizace

Ladislav Láska

23. března 2010

Obsah

1 Úvod

1.1 Úloha, cílová funkce, množina řešení

Definice Úloha matematického programování (optimalizace) rozumíme úlohu

$$\min_{x \in M} f(x)$$

kde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definice Funkci $f(x)$ nazýváme **cílovou**, účelovou, kriteriální, objektivní funkcí.

Definice Množinu M nazýváme množinou přípustných řešení. Prvek $x \in M$ nazýváme přípustným řešením optimalizační úlohy. Prvek $x_0 \in M$ nazveme optimálním řešením.

1.2 Dělení na jednotlivé disciplíny optimalizace

1. Volný extrém - $\min_M f(x)$
2. Vázaný extrém - $\min_M f(x), M \subset \mathbb{R}^n$
   (a) Lineární programování:
   $\min_M cx$, $M = \{x | A_x\{=, \leq, \geq\}b\}$, kde $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in b^m$
   (b) Nelineární programování:
   $\min_M f(x), M = \{x | g_j(x) < 0 (j = 1, ..., m)\}, f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
      i. Konvexní a zobecněné konvexní programování - f, g_j konvexní, dále pak kvadratické a hyperbolické programování
      ii. Nekonvexní (speciální typy)
   (c) Celočíselné programování:
   Lineární/nelineární programování, navíc podmínky pro celočíselnost $Ax * b$, aby $x \in \mathbb{N}$.
   (d) Parametrické programování:
   Lineární/nelineární programování, navíc parametr $\min_{M(U)} c(\lambda)^T x$, $c(x) = c + C\lambda$, $M(U) = \{x | A(U)x * b(U)\}$
   (e) Vícekriteriální (vektorové) programování:
   $\min_M f(x)$, $f(x) = \{f_1(x), .., f_s(x)\}$
   (f) Dynamické programování - hledání optimální strategie
   (g) Spojité programování (optimalizační procesy)
   (h) Teorie her - optimální strategie dvou hráčů
   (i) Semidefinitní programování - nekonečně mnoho podmínek

1.3 Motivační úloha

1.3.1 Lineární programování

$V_1, ..., V_n$ - výrobci vyrábějící výrobek V v množstvích $a_i > 0$
$S_1, ..., S_k$ - spotřebitelé požadující výrobek V v množstvích $b_j > 0$.
Známe cenu za dopravu jednotky výrobku V z V_i do S_j - $c_{i,j} \geq 0$.

Předpoklad: ceny za dopravu rostou lineárně.

Cíl: minimalizovat celkové náklady na dopravu.

Hledáme: množství $x_{i,j} \geq 0$ - kolik výrobce V_i dodá S_j.

Cílová funkce

$$f(x) = \sum_i \sum_j c_{i,j} x_{i,j} \tag{1}$$

na množině řešení

$$M = \{x_{i,j} | \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j \forall j, \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = a_i \forall i, \sum_i a_i = \sum b_j, x_{i,j} \geq 0 \forall i \forall j\} \tag{2}$$

Všechno je lineární - úloha lineárního programování.

1.3.2 Celočíslené programování

Pokud nelze položky libovolně dělit (například lidi), můžeme přidat celočíselnou podmínku do množiny řešení:

$$x_{i,j} \mathbb{N}_0 \forall i \forall j \tag{3}$$

1.3.3 Nelineární programování

Zrušíme předpoklad lineárního růstu cen (tedy cena závisí na množství)

$$f(x) = \sum_i \sum_j c_{i,j}(x_{i,j}) x_{i,j} \tag{4}$$

$c_{i,j} = C_{i,j} + c_{i,j} x_{i,j}$

1.3.4 Parametrické programování

Produkce není pevná a závisí na parametru: $a_i = \lambda a_i'$. Ostatní vztahy můžou zůstat třeba jako u lineárního programování.

1.3.5 Vícekriteriální programování

Minimalizovat ceny za dopravu, maximalizovat zisky Z.

$$\min\{f(x), g(x)\} \tag{5}$$

$$f(x) = \sum_i \sum_j c_{i,j} x_{i,j} \tag{6}$$

$$g(x) = -Z(x_{i,j}) \tag{7}$$

1.3.6 Dynamické programování

Ceny závisí na rozhodnutí.

2 Volný extrém

Hledání $\min f(x)$.

2.1 Postačující podmínka

Jestliže má funkce $f(x)$ v $x_0 \in \mathbb{R}^n$ spojisté 2. parciální derivace, $\nabla f(x_0) = 0$, $\nabla^2 f(x_0)$ (Hessova matice) je pozitivně definitní, potom má reálná funkce $f(x)$ v x_0 ostré lokální minimum.

2.2 Penalizační metody

Máme úlohu

$$\min_M f(x), \quad M = \{x | g_j(x) \leq 0, j = 1, ..., n\} \tag{1}$$

Hledáme penalizační funkci $p(x)$ vyjadřující pokutu za to, že pracujeme s $x \in M$. $p(x)$ je vytvořená z podmínek g_j a řešíme posloupnost úloh na volný extrém:

$$\min\{f(x) + \alpha_k p(x)\} \tag{2}$$

Po p(x) požadujeme:

$$p(x) > 0 : \quad x \notin M \tag{3}$$

$$p(x) = 0 : \quad x \in M \tag{4}$$

$$p(x) \quad \text{spojitá} \tag{5}$$

Posloupnost takovýchto úloh za jistých okolností konverguje k optimálnímu řešení.

Příklad

$$\sum_{j=1}^{n}(g_j^+(x))^2, \quad g_j^+(x) = \max\{g_j(x), 0\} \tag{6}$$

2.3 Bariérové metody

Hledáme bariérovou funkce $b(x)$, která nám zabrání vystoupit z množiny M. Řešíme tedy posloupnost úloh:

$$\min\{f(x) + \frac{1}{\beta_k}b(x)\}, \quad \beta_k \to \infty \tag{1}$$

A po funkce b(x) požadujeme:

$$b(x) \leq 0: \quad x \in M \lim_{x \to \partial M} b(x) = \infty \tag{2}$$

kde ∂M je hranice množiny.

Příklad

$$b(x) = -\sum_j \frac{1}{g_j(x)} \tag{3}$$

$$b(x) = -\sum_j \log(-g_j(x)) \tag{4}$$

2.4 Penalizačně-bariérové (SUMT)

Rozdělíme množinu {1 ... m } na I_1 disjunktní I_2. Řešíme posloupnost úloh:

$$\min\{f(x) + \alpha_k \sum_{j \in I_1} \varphi(g_j(x)) + \frac{1}{\beta_k}\sum_{j \in I_2} \psi(g_j(x))\} \tag{1}$$

3 Metody hledání lokálního minima

3.1 Gradientní

Podle věty o přírůstku funkce funkce roste nejvíce ve směru gradientu:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0 + \theta(x - x_0))^T(x - x_0) \tag{1}$$

Počítáme:

$$x_{k+1} = x_k - \zeta \nabla f(x_k), \text{ kde } \zeta \text{ je řešením} \tag{2}$$

$$\min_{\zeta \leq 0} f(x_k - \zeta \nabla f(x_k)) \tag{3}$$

3.2 Newtonova metoda

$$f(x) \doteq f(x_k) + \nabla f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)\nabla^2 f(x_k)(x - x_k) \tag{1}$$

$$\nabla f(x) = 0 \tag{2}$$

$$0 + \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) - 0 \tag{3}$$

$$x_{k+1} = x_k - \nabla f(x_k)(\nabla^2 f(x_k))^2 \tag{4}$$

$$x_1 = 0 \tag{5}$$

3.3 Lemkeho metoda

Nápad: vezmeme výchozí řešení x a vzdálenost ρ, metodou půlení přibližujeme.
Požadavky: $\{x|f(x) \leq f(x_1)\}$ je omezená.
Problém vhodně zvolit x_1.

Metoda K x_1 sestavíme $x_1 + \rho e^i$ pro $\rho > 0$ a spočítáme funkční hodnoty $f(x_1 + \rho e_i)$ a porovnáme s funkční hodnotou v x_1. Pokud:

1. $f((x_1 + \rho e_i) \geq f(x_1) \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho}{2}$
2. $\exists j$: $y := f(x_1 + \rho e_j) < f(x_1) \quad \Rightarrow$ opakujeme pro y

4 Lineární programování

Definice Úlohou pro lineární programování v rovnicovém tvaru rozumíme úlohu:

$$\min_M c^T x, \quad M = \{x|Ax = b, x \geq o\}, \tag{1}$$

$$\text{kde} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n, \text{rank}(A) = m, 1 \leq m < n, b \geq 0 \tag{2}$$

Definice Úlohou lineárního programování normálním tvaru rozumíme

$$\min_M c^T x, M = \{x|Ax \leq b, x \geq 0\}, \tag{3}$$

$$\text{kde} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n, n, m \geq 1 \tag{4}$$

4.1 Podprostor

Tvrzení Množina

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b, a \neq 0\} \tag{1}$$

představuje podprostor dimenze $n - 1$ nazývaný **nadrovinou**.

Důkaz Protože $a \neq 0 \Rightarrow \exists a_1 \neq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{b}{a_1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1} x_i$. Tedy máme $n-1$ LN vektorů v R.

Tvrzení Množina $R^{n-\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^T x = b_i, i+1...\alpha\}$ představuje podprostor R^n dimenze $n-\alpha$.

4.2 Poloprostor

Definice Pro libovolnou nadrovinu $R = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b, a \neq b\}$ nazýváme:

1. $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x > b\}$ otevřeným kladným (pravým) poloprostorem $\mathbb{R}^n$ příslušným R.
2. $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x < b\}$ otevřeným záporným (levým) poloprostorem $\mathbb{R}^n$ příslušným R.
3. $\overline{H^+} = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq b\}$ uzavřeným kladným (pravým) poloprostorem $\mathbb{R}^n$ příslušným R.
4. $\overline{H^+} = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \leq b\}$ uzavřeným záporným (levým) poloprostorem $\mathbb{R}^n$ příslušným R.

Tvrzení Platí:

1. $H^+ \cup H^- \cup R = \mathbb{R}^n$
2. $\overline{H^+} = H^+ \cup R$, $\overline{H^-} = H^- \cup R$
3. $H^+ \cap H^- = H^+ \cap R = H^- \cap R = \emptyset$

Tvrzení Platí:

$$\dim \mathcal{H}_i^+ = \dim \overline{\mathcal{H}_i^+} = n \tag{1}$$
$$\text{kde } \mathcal{H}_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i > 0\} \tag{2}$$
$$\overline{\mathcal{H}_i^+} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \geq 0\} \tag{3}$$

Důkaz V každém takovém prostoru leží všechny jednotkové vektory.

Tvrzení Platí:

$$\dim \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{H}_i^+} = \dim \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i^+ = n \tag{4}$$

Důsledek Množina přípustných řešení lineárního programování:

$$M = \{x|Ax = b, x \geq 0\} \tag{5}$$

kde $b(A) = m$, $a \leq m < n$.
Taktéž lze zapsat jako:

$$M = \mathbb{R}^{n-m} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{H}_i^+} \tag{6}$$

Definice Každou množinu $M \subset \mathbb{R}^n$, která se dá popsat jako průnik konečného počtu nadrovin a uzavřených poloprostorů nazýváme konvexním polyedrem.

=====

====

4.3 Rozklad konvexního polyedru

Označme:

$$R^{n-m} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\} \tag{1}$$

$$R_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | x_\alpha = 0\} \tag{2}$$

$$\mathcal{H}_\alpha^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_\alpha > 0\} \overline{\mathcal{H}_\alpha^+} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_\alpha \geq 0\}, \alpha = 1, ..., n \tag{3}$$

Potom:

$$M = R^{n-m} \cap \bigcap_{\alpha=1}^{n} \overline{\mathcal{H}_\alpha^+} = \mathbb{R}^{n-m} \bigcap_{\alpha=1}^{n} \mathcal{H}_\alpha^+ \cup R_\alpha = \tag{4}$$

$$= \left(R^{n-m} \cap \bigcap_{\alpha=1}^{n} \mathcal{H}_\alpha^+ \right) \cup \left(R^{n-m} \cap R_1 \cap \bigcap_{\alpha=1}^{n} \mathcal{H}_\alpha^n \right) \cup ...?????????????????????? \tag{5}$$

Definice První člen rozkladu $(\mathbb{R}^n \cap \bigcap_{\alpha=1}^n \mathcal{H}_\alpha^+)$ nazýváme **vnitřkem** konvexního polyedru M. Ostatní členy rokladu nazýváme hraniční, každý prvek hranice, tj.

$$\left(\mathbb{R}^{n-m} \cap \bigcap_{\alpha \in I_1} \mathcal{H}_\alpha^n \cap \bigcap_{\alpha \in I_2} R_\alpha \right), \qquad I_1 \cup I_2 = \{1, ..., n\}, I_1 \cap I_2 = \emptyset \tag{6}$$

Pokud je $\neq 0$ a má dimenzi d, nazýváme stěnou M dimenze d. speciálně stěnu dimenze 0 nazýváme vrcholem M a stěnu dimenze 1 hranice M.

Tvrzení

$$\dim(\mathbb{R}^{n-m} \cap \bigcap_{\alpha=1}^{n} \mathcal{H}_\alpha^+) = n - m \tag{7}$$

1. $0 \leq \dim($ stěny $) \leq n - m - 1$
2. Stěn všech dimenzní je konečný počet.
3. Průnik libovolných 2 stěn $S_1 \cap S_1 = \emptyset$.
4. Uzávěr každé stěny dimenze d je konvexní polyedr dimenze d.

$$M = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\} \tag{8}$$

Protože $\text{rank}(A) = m \Rightarrow \exists$ konečný počet $\text{rank}(A_B) = m, A_B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ Označíme $A = (A_B A_N)$, kde A_B je regulární. Analogicky rozdělíme x $= (X_B, X_N)$. Pak můžeme přepsat rovnici $Ax = b \to A_B X_B + A_N X_N = b$, tedy

$$X_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N X_N \tag{9}$$

Položíme-li všechny $X_N = 0$, získáváme jednoznačně určené $X_B = A_B^{-1} b$

Definice Prvek $x = (X_b, X_n) \subset M$ s vlastností $X_B = A_B^{-1} b > 0, X_N = 0$ nazveme nedegenerovaným přípustným bázickým řešením úlohy lineárního programování.

Poznámka Přípustné (nedegenerované) bázické řešení má $n - m$ souřadnic rovných 0.

Definice B nazýváme **bází**, proměnné $x_\alpha, \alpha \in B$ nazýváme **bázickými** proměnnými a $x_\alpha, \alpha \in N$ **nebázickými** proměnnými.

Tvrzení Bází B je konečný počet. $|B| = m, |N| = n - m, B \cup N = \{1, ..., n\}$

Poznámka Protože vrchol je množina

$$\mathbb{R}^{n-m} \cap \bigcap_{\alpha \in I_1} R_\alpha \cap \bigcap_{\alpha \in I_2} \mathcal{H}_\alpha^+ \tag{10}$$

a protože $I_1 \cup I_2 = \{1, ..., n\}$ a $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, potom jistě $I_1 = n - m$, protože $R_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | x_\alpha = 0\}$.

Tvrzení Geometrickému pojmu **vrchol** odpovídá algebraický pojem **přípustné nedegenerované bázické řešení**.

Tvrzení Konvexní polyedr má alespoň jeden vrchol.

Důkaz Z rozkladu M můžeme vybrat vždy $|I_1| = n-m$. $R_\alpha = \{x|x_\alpha = 0\}$, $\alpha \in \{1, ..., n\}$, tedy aby

$$\mathbb{R}^{n-m} \cap \bigcap_{\alpha \in I_1} R^\alpha \cap \bigcap_{\alpha \notin I_1} \mathcal{H}^+_\alpha \tag{11}$$

měla dimenzi 0.

4.4 1. Základní věta lineárního programování

Lemma Je-li $M \neq \emptyset$ omezený konvexní polyedr o vrcholech $\mathbf{x}^i$, $i = \{1, ..., p\}$. Potom můžu psát

$$M = \{\mathbf{x}|A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n|\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{x}^i, x_i \geq 0, \sum_{1}^{p} x_i = 1\} \tag{1}$$

Věta Existuje-li řešení úlohy lineárního programování, pak je ho dosaženo alespoň v jednom vrcholu konvexního polyedru M.

Důkaz

1. Uvažujme, že M je omezený. Potom podle lemmatu platí pro $x \in M$ zápis:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{x}^i, x_i \geq 0, \sum_{i} x_i = 1 \tag{2}$$

pro

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T \sum_{i}^{p} x_i \mathbf{x}^i = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{c}^T \mathbf{x}^i \tag{3}$$

Označíme-li:

$$\min_{i \in \{1,...,p\}} \mathbf{c}^T\mathbf{x}^i = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^i \tag{4}$$

Potom můžeme psát

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{i_0} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{i_0} \tag{5}$$

2. Pokud je M neomezený, zvolíme $k >> 0$ a definujme omezený konvexní polyedr:

$$M^* = M \cup \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | 1^T \mathbf{x} \leq k\}, 1^T = (1, ..., 1) \tag{6}$$

Pro k musí platit (abychom neodřízli vrchol):

$$k > \max_{i=\{1,...,k\}} \{1^T \mathbf{x}^T\} \tag{7}$$

Nyní podle 1. části důkazu existuje alespoň jeden vrchol M^*, který dává optimální řešení. Potom

   (a) Vrchol je v původní množině M, je tvrzení dokázáno.

   (b) Vrchol není v původní množina M, potom musí ležet na hraně původního polyedru M (protože jsme přidali jednu lineární rovnici). Každá hrana omezeného konvexního polyedru M^* vychází z nějakého vrcholu M. Z vlastností, že $\mathbf{c}^T \mathbf{x} > \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{opt}$ plyne, že pro body této hrany $\{x | \mathbf{x}^1 + t(\mathbf{x}^{opt} - \mathbf{x}^1)\}$ s vlastností $t > 1$ platí, že $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \to -\infty$ a neexistuje řešení dané úlohy.

4.5 Simplexová tabulka

Známe-li libovolnou bázi B, přepíšeme množinu

$$M = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\} \quad = \{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}_B + A_B^{-1} A_N \mathbf{x}_N = A_B^{-1} \mathbf{b}, (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) \geq 0\} \tag{1}$$

Přípustné bázické řešení je pak $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) = (A_B^{-1} b, 0)$ a simplexová tabulka zachycující množinu M vypadá:

	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	
$\mathbf{x}_B$	E	$A_B^{-1} A_N$	$A_B^{-1} b \quad > 0$
	$0, ..., 0$	$\mathbf{c}_N - \mathbf{z}_N$	$-\mathbf{c}_0$

A cílová funkce:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N) \tag{2}$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^T (A_B^{-1} \mathbf{b} - A_B^{-1} A_N \mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \tag{3}$$

tedy

$$\forall x \in M \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_0 + (\mathbf{c} - Z_N) \mathbf{x}_N \tag{4}$$

kde $c_0 = \mathbf{c}^T (A_B^{-1} b, 0)$

4.6 Simplexová metoda

1. $\min_M \mathbf{c}^T\mathbf{x}$
2. $M = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, h(A) = m, 1 \leq m < n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n$
3. $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ Předpokládejme, že při výpočtu simplexové metody nenastává degenerace.
4. (obecný k-tý krok) Máme simplexovou tabulku. Předpokládejme, že bázické řešení je

$$x^k = (x_B, x_N) = d_0, o) \tag{1}$$

Množinu M a cílovou funkci přepíšeme:

$$M = \{x_0, x_N | x_B + Dx_N = d_0, x_B > 0, x_N \geq 0\} \tag{2}$$
$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_0 + (c_N - z_N)x_N \tag{3}$$

4.7 1. věta Simplexové metody

Věta Platí-li v k-tém kroku simplexové metody

$$c_N - z_N \geq 0 \tag{1}$$

v příslušné simplexové tabulce, potom je příslušné bázické řešení x^k optimální.

Důkaz

$$\forall x \in M : c_T x = c_0 + (c_N - z_N)x_n \geq c_0 = c^T x^k \tag{2}$$

4.8 2. věta Simplexové metody

Věta Existuje-li v k-tém kroku simplexové metody v simplexové tabulce index $h \in N$ tak, že $c_h - z_h < 0$ a příslušný h-tý sloupec matice D splňuje $d_h \leq o$, potom je cílová funkce $c^T x$ zdola neomezená na množině M a tedy řešení neexistuje.

Důkaz Hrana M vycházející z vrcholu $\mathbf{x}^k$ má popis $\{x | x_B = d_0 - td_h, x_j = 0, j \in N \setminus h, x_k = t \geq 0\}$

$$x \in h : c^T x = c_0 \underbrace{(c_h - z_B)}_{<0} t \to -\infty \tag{1}$$

4.9 3. věta Simplexové metody

Věta Nejsou-li splněny předpoklady první ani druhé věty simplexové metody, potom definujeme (r je index v simplexové tabulce):

$$\min_j (c_j - z_j) = c_r - z_r \tag{1}$$

a hledáme

$$\min_{d_{ir}>0} \left\{ \frac{d_{is}}{d_{ir}} \right\} = \frac{d_{so}}{d_{sr}} \tag{2}$$

a po transformaci tabulky s pivotem d_{sr} získáme nové přípustné bázické řešení x^{k+1} s vlastností $c^T x^{k+1} < c^T x^k$

Značení r-tý sloupec nazýváme klíčovým sloupcem a s-tý řádek nazýváme klíčovým řádkem.

Důkaz Proměnná x_s se stane nebázickou a nebázická proměnná x_r se stane bázickou, tedy z s-té rovnice vypočítáme x_r a dosadíme za něj do ostatních rovnic i cílové funkce. (Gaussova eliminace)
Nová báze je $B' = (B \setminus \{s\}) \cup \{r\}$ a nebázické proměnné$B' = (B \setminus \{r\}) \cup \{s\}$ a nové přípustné bázické řešení (plyne z Gausse):

$$d'_0 : \quad x_r^{k+1} = \frac{d_{s0}}{d_{sr}} > 0 \tag{3}$$

$$i \in B \setminus \{s\} : \quad X_i^{k+1} = d_{i0} - \frac{d_{ir} d_{s0}}{d_{sr}} \tag{4}$$

$$x_s, x_j = 0, j \in N \setminus \{r\} \tag{5}$$

A ověříme přípustnost takovéhoto řešení:

1. Pokud $d_{ir} \leq 0 \Rightarrow x_i^{k+1} = d'_{i0} > 0$
2. Pokud $d_{ir} > 0$, potom ze (2) $\frac{d_{s0}}{d_{sr}} < \frac{d_{i0}}{d_{ir}} \Rightarrow d'_{i0} > 0$

A cílová funkce se transformuje:

$$c^T x^{k+1} = c_0 + (c_r - z_r) \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \tag{6}$$

4.10 Konečnost simplexové metody

Tvrzení Simplexová metoda se ukončí po konečném počtu kroků.

Důkaz Máme konečný počet bázických řešení a nelze se vracet (protože $\forall k : c^T x^{k+1} < c^T x^k$).

Poznámka V degenerovaném případě může nastat i rovnost a proto teoreticky může nastat cyklus.

4.11 Vznik degenerace

1. Zadáním - $\exists i: \quad b_i = 0$
2. Pokud klíčový řádek není určen jednoznačeně (je lineární závislý na jiném)

4.12 Odstranění cyklů/degenerace

1. Odstranění cyklů - **Blandovo pravidlo**: Volíme minimum ze všech indexů j nebázických, pro které je $c_j - z_j < 0$, $r := j$ (takovýto index je určen jednoznačně). Také s zvolíme jednoznačně:

$$s = \{\min t | \min_{d_{ir}>0} \{\frac{d_{i0}}{d_{ir}}\} = \frac{d_{t0}}{d_{tr}}\} \tag{1}$$

2. ε-modifikace: řešíme novou úlohu pro $\varepsilon > 0$.

$$\min_{M+\varepsilon} c^T x \tag{2}$$

$$M + \varepsilon = \{x_B x_N | x_B + D x_N = a_0 + (ED)\varepsilon, x_B x_N \geq 0\} \tag{3}$$

   kde $\varepsilon = (\varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^n)$.

Důkaz

1. (bez důkazu)
2. epsilonový vektor zaručuje, že jednotlivé složky nelze poměřit

4.13 Množina optimálních řešení

Definice Množinou všech optimálních řešení úlohy nazýváme:

$$M_{opt} = \{x^i \in M | \min_M c^T x = c^T x_i\} \tag{1}$$

Věta Je-li x^0 optimální řešení úlohy nalezené simplexovou metodou a $c_N - z_N, -c_0$ v posldním řádku poslední simplexové tabulky. Potom:

$$M_{opt} = \{x \in M | x_j = 0, j \in J\}, \tag{2}$$

$$\text{kde } J = \{j \in N | c_j - z_j > 0\} \tag{3}$$

Důkaz Máme optimální řešení a simplexovou tabulku z posledního kroku. $x^0 = (x_B, x_N) = (d_0, o)$.

$$\forall x \in M: \quad c^T x = c_0 + (c_N - z_N)x_N = c_0 + \sum_{j \in J}(c_j - z_j)x_j + \sum_{j \notin J}\underbrace{(c_j - z_j)}_{=0}x_j = c_0 \tag{4}$$

Když položíme rovnost 0, tedy $x_j = 0$, $j \in J$.

Poznámka Změna hodnoty cílové funkce po jedné transformaci tabulky

$$-c_0' = -c_0 - \frac{c_r - z_r) \cdot d_{s0}}{d_{sr}} \tag{5}$$

4.14 Výpočetní složitost simplexové metody

Mějme výpočet simplexovou metodou, kde n a m je počet rovnic a bazických proměnných.

1. Nejhorší odhad počtu kroků je dán počtem bazí, tedy $\binom{n}{m}$.
2. Na pravděpodobnostních modelech byl ukázán odhad

$$P(n,m) \leq m^{\frac{1}{n-1}} \cdot (n+1)^n \cdot \frac{2}{5}\pi\left(1 + \frac{e\pi}{2}\right) \tag{1}$$

3. Výpočetní zkušenosti (p = počet kroků)
   (a) Počet kroků nezávisí na n a je mezi $2m - 3m$
   (b) $p < \frac{3}{2}m$

4.15 Jiné metody

4.15.1 Elipsoidová-Chačijanova metoda (1979)

Je polynomiální v čase. Krok velmi nepraktický (zmenšují se elipsoidy).

4.15.2 Karmarkarova projekční metoda

Začíná se v libovolném prvku množiny M, najdu simplex, vepíšu kouli ve středu x_0, sestavím potenciálovoufunkci, hledám extrém nelineární úlohy.

4.15.3 Metody konvexního programování

Například gradientní metody, metoda vnitřního bodu,...

4.16 2. základní věty lineárního programování: princip duality

Nechť (P) značí úlohu:

$$\max_{M_1} \mathbf{c}^T\mathbf{x} \qquad M_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{1}$$

a (D) značí úlohu:

$$\min_{M_2} \mathbf{b}^T\mathbf{y} \qquad M_2 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0\} \tag{2}$$

Definice Úlohu (P) nazýváme primární, a (D) duální úlohou lineárního programování v normálním tvaru. (dualita však platí i inverzně)

Lemma (slabá věta o dualitě) Je-li M_1 a M_2 neprázdné, potom platí, že

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y} \quad \forall x \in M_1, y \in M_2 \tag{3}$$

Důkaz Pro libovolné $x \in M_1$ a $\mathbf{y} \in M_2$ platí:

$$A\mathbf{x} \leq bA\mathbf{y} \geq c \tag{4}$$

$$x \geq 0y \geq 0 \tag{5}$$

Po roznásobení:

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T\mathbf{y} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y} \tag{6}$$

$$\mathbf{x}^T A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{7}$$

tedy $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ a Lemma je dokázáno.

Lemma Je-li $M_1, M_2 \neq \emptyset$, potom existuje konečné $\sup_{M_1} \mathbf{c}^T\mathbf{x} = M_1$ a konečné $\inf_{M_2} \mathbf{b}^T\mathbf{y} = m_2$.

Důkaz Zvolme $\mathbf{y}^1 \in M_2$, potom z prvního lemmatu

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}^1 \quad \forall x \in M_1 \Rightarrow \exists m_1 \tag{8}$$

druhý případ analogicky.

Lemma Je-li M_1 neprázdné a existuje konečné supremum, potom

$$\exists \mathbf{y}_0 \in M_2 \quad \mathbf{b}^T\mathbf{y}_0 \leq m_1 \tag{9}$$

Je-li M_2 neprázdné a existuje konečné infimum, potom

$$\exists \mathbf{x}_0 \in M_1 \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 \geq m_2 \tag{10}$$

Důkaz (bez důkazu)

Věta Je-li $M_1, M_2 \neq \emptyset$, potom:

$$\exists \max_{M_1} \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^0 = \min_{M_2} \mathbf{b}^T\mathbf{y} \tag{11}$$

Důkaz $M_1 a M_2 \neq \emptyset$, tedy podle lemma 2 existuje konečné m_1, m_2 a podle lemma 3:

$$\exists \mathbf{y}^0 : \mathbf{b}^T\mathbf{y}^0 \leq m_1 \exists \mathbf{x}^0 : \mathbf{c}^T\mathbf{x}^0 \geq m_2 \tag{12}$$

Odtud podle důsledků a lemma 1:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^0 \geq m_2 \geq m_1 \geq \mathbf{b}^T\mathbf{y}^0 \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^0 \tag{13}$$

Tedy

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^0 = \max_{M_1} \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^0 = \min_{M_2} \mathbf{b}^T\mathbf{y} \tag{14}$$

4.17 Důsledky věty o dualitě

1. Má-li jedna z duálních úloh optimální řešení, pak ho má i druhá a platí rovnost funkčních hodnot v optimálních bodech.

2. Rovnost funkčních hodnot platí právě v optimálních.

   Důkaz Jestliže x_1 není optimální řešení $(P) \Rightarrow \exists \overline{\mathbf{x}} \in M_1, \mathbf{c}^T\mathbf{x}^1 < \mathbf{c}^T\overline{\mathbf{x}}$, což ale platí pro každé $\mathbf{y} \in M_2$.

3. Souvislost optimálního řešení duálních úloh.

   Tvrzení Nechť x_0 je optimální řešení (P) a $x_i^0 > 0$, $i \in I$, $\mathbf{a}_j^T\mathbf{x}^0 < b_j$, $j \in J_1$. Potom celá množina optimálních řešení úlohy duální:

   $$M_{opt}^2 = \{\mathbf{y}^0 | \mathbf{b}^T\mathbf{y}^0 = \min_{M_2} \mathbf{b}^T\mathbf{y}\} = \{y \in M_2 | \mathbf{a}_i^T\mathbf{y} = \mathbf{c}_i, i \in I, y_j = 0, j \in J_1\} \tag{1}$$

   Důkaz Z důsledku 2 a vzorce

   $$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T A^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y} \tag{2}$$

Pro všechna optimální řešní $\mathbf{y}$

$$\underbrace{\mathbf{c}^T\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^{0T}A^T\mathbf{y}}_{(4)} = \underbrace{\mathbf{y}^TA\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}^T\mathbf{y}}_{(5)} \quad (3)$$

$$0 = (c - A^T\mathbf{y})^T\mathbf{x}^0 = \sum_{i\in I_1} \underbrace{(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i\mathbf{y})^T}_{\le 0} \underbrace{\mathbf{x}_i^0}_{\ge 0} + \underbrace{\sum_{i\notin I_1} (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i\mathbf{y})^T v x_i^0}_{=0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i\mathbf{y} \quad (4)$$

$$0 = \mathbf{y}^T(Ax^0 - b) = \sum_{j\in J_1} \underbrace{(\mathbf{a}_j^T\mathbf{x}^0 - \mathbf{b}_j)}_{<0} \underbrace{\mathbf{y}_j}_{\ge 0} + \underbrace{\sum_{j\notin J_1} (\mathbf{a}_j^T\mathbf{x}^0 - \mathbf{b}_j)}_{=0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_j = 0 \quad (5)$$

Tvrzení Je-li $\mathbf{y}^0$ optimální řešení úlohy (D) pro které platí $\mathbf{y}_j^0 > 0, j \in J_2, \mathbf{a}_i^T\mathbf{y}^0 > \mathbf{c}_i, i \in I_2$. Potom množina všech optimálních řešení úlohy (P) má popis:

$$M_1^{opt} = \{\mathbf{x} \in M_1 | x_i = 0, i \in I_2, \mathbf{a}_j^T\mathbf{x} = b_j, j \in J_2\} \quad (6)$$

Důkaz Analogicky.

4.18 Různé typy úloh lineárního programování

(a) $\min_{M_1} \mathbf{c}^T\mathbf{x} = -\max_{M_1}(-\mathbf{c}^T\mathbf{x}) \quad \Rightarrow$
$(D) - \min_{M_1^*} \mathbf{b}^T\mathbf{y}, M_2^*\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | A^T\mathbf{y} \ge -\mathbf{c}, \mathbf{y} \ge 0\}$

(b) $\max_{M_1'} \mathbf{c}^T\mathbf{x} M_1' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$
Zavedeme $\mathbf{x}^+ \max(\mathbf{x}, 0) \ge 0$, $\mathbf{x}^- = \max(-\mathbf{x}, 0) \ge 0$. Přepíšeme novou úlohu pomocí rovnosti $\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$ v prostoru dvojnásobné dimenze. Ze dvou obrácených nerovností získáme rovnici.

(c) $\max_{M_1''} \mathbf{c}^T\mathbf{x}, M_1'' = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0\}$.
Což můžeme přepsat jako úlohu s dvouma obrácenýma nerovnostma (pro teorii).

4.19 Duální simplexová metoda

Řešíme dvě úlohy naráz. Začneme řešením, kde jsou splněny všechny pomínky (jsou bázická) až na přípustnost (nezápornost proměnných) a platí: $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^1 = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^1$. Jediným krokem se dostaneme do přípustného řešení duální úlohy (v primární může stále být řešení nepřípustné). Následně již v duální úloze nesmíme opustit přípustná řešení a hledáme dvojce (kde se hodnoty rovnají), dokud i primární řešení není přípustné. Pokud jsou obě řešení přípustná, nalezli jsme minimum (podle věty o rovnosti).