Teorie množin

Ladislav Láska

16. října 2010

Obsah

1 Formální jazyk

1.1 Základní součásti jazyka

1. proměnné
2. binární predikátový symbol $\in$
3. binární predikátový symbol $=$
4. logické spojky $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$
5. kvantifikátory $(\forall x)$, $(\exists x)$
6. pomocné symboly - závorky

1.2 Formule a pravidla jejich vytváření

(i) Nechť x, y jsou prvky množiny, pak $(x \in y)$ a $(x = y)$ jsou atomické formule.

(ii) Nechť výrazy φ, ψ jsou formule, potom: $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou formule.

(iii) Je-li x proměnná pro množiny a φ je formule, pak výrazy $(\exists x)\varphi$ a $(\forall x)\varphi$ jsou formule.

(iv) Každá formule vznikne konečným počtem užití pravidel (i), (ii), (iii).

1.3 Vázané a volné proměnné

Definice Říkáme, že *výskyt* proměnné x ve formuli φ je **vázaný**, je-li součástí nějaké podformule ψ tvaru $(\exists x)\psi$ nebo $(\forall x\psi)$. Není-li *výskyt* proměnné x vázaný, říkáme, že je **volný**. O proměnné x řekneme, že je ve formuli φ vázaná, pokud má alespoň jeden vázaný výskyt - jinak je volná.

Definice Formuli, která neobsahuje žádné volné roměnné nazýváme **uzavřená formule**.

Konvence Je-li φ formule a $x_1, x_2, ..., x_n$ proměnné, jež se v ní vyskytují volně, píšeme $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$.

2 Axiomy teorie množin

2.0 Axiom existence množiny

„Existuje alespoň jedna množina:“

$$(\exists x)(x = x) \tag{1}$$

2.1 Axiom extenzionality

„Množiny, které mají tytéž prvky, se sobě rovnají:“

$$(\forall u)(u \in x \Leftrightarrow u \in y) \Rightarrow x = y \tag{1}$$

2.2 Schéma axiomu vydělení

„Z každé množiny lze vydělit množinu prvků, které splňují stejné vlastnosti:“
Nechť $\varphi(x)$ je formule, která neobsahuje volně proměnnou z. Potom formule

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)) \tag{1}$$

je axiomem teorie množin - axiomem vydělení pro formuli φ.

2.3 Axiom dvojce

„Libovolné dvě množiny určují dvouprvkovou množinu:“

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \tag{1}$$

2.4 Axiom sumy

„Ke každé množině existuje množina všech prvků, které náleží do nějakého prvku dané množiny:“

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)) \tag{1}$$

2.5 Axiom potence

„Ke každé množině existuje množina sestávající ze všech jejích podmnožin:“

$$(\forall a)(\exists z)(x \in z \Leftrightarrow x \subseteq a) \tag{1}$$

2.6 Schéma axiomu nahrazení

„Definovatelné zobrazení zobrazuje množinu na množinu:“
Nechť $\psi(u, v)$ je formule, která neobsahuje volné proměnné w a z. Potom formule

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)(\psi(u, v) \wedge \psi(u, w) \Rightarrow v = w) \Rightarrow \tag{1}$$
$$(\forall a)(\exists z)(\forall v)(v \in z \Leftrightarrow (\exists u)(u \in a \wedge \psi(u, v))) \tag{2}$$

je axiom teorie množin - axiom nahrazení pro formuli ψ.

2.7 Axiom nekonečna

„Existuje nekonečná množina:“

$$(\forall z)(\emptyset \in z \wedge (\forall x)(x \in z \Rightarrow x \cup \{x\} \in z)) \tag{1}$$

2.8 Axiom fundovanosti

„Každá neprázdná množina má alespoň jeden prvek, který s ní má prázdný průnik“

$$(\forall a)((a \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset)) \tag{1}$$

3 Základní definice a tvrzení

3.1 Podmnožiny, inkluze, průnik a rozdíl

Definice Říkáme, že množina x je **podmnožina** množiny y (píšeme $x \subseteq y$), pokud platí

$$(\forall t)(t \in x \Rightarrow t \in y) \tag{1}$$

pokud navíc $t \neq y$, říkáme že x je **podmnožina vlastní** (značíme $x \subset y$ nebo $x \subsetneqq y$).

Definice Pro množiny a, b definujeme **průnik** a rozdíl jako množiny:

$$a \cap b = \{x : x \in a \wedge x \in b\} \tag{2}$$
$$a \setminus b = \{x : x \in a \wedge x \notin b\} \tag{3}$$

3.2 Prádzná množina

Definice $\emptyset$ je jediná množina y splňující:

$$(\forall x)(x \notin y) \tag{1}$$

A nazýváme jí **prázdná množina**.

3.3 Russelův paradox

Věta

$$\neg(\exists z)(\forall x)(x \in z) \tag{1}$$

Důkaz Sporem: nechť z je taková množina. Pak mějme formuli $\varphi(x) \quad x \notin x$. Potom podle axiomu vydělení pro tuto formuli máme $t = \{x \in z : x \notin x\}$, tedy t je množina. Protože t je množina a z je množina všech množin, pak $t \in z$ a (podle formule φ) $t \in t \Leftrightarrow t \notin t$. Tedy neexistuje množina všech množin.

3.4 Neuspořádaná a uspořádaná dvojce, uspořádaná k-tice

Definice Jsou-li a, b množiny, pak množinu se stávající z prvků a, b nazveme **neuspořádanou dvojcí** množin a, b a značíme $\{a, b\}$. Pro $a \neq b$ říkáme, že $\{a, b\}$ dvouprvková, jinak jednoprvková.

Definice **Uspořádaná dvojce** množin a, b je množina, která má prvky $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Značíme jí $\langle a, b\rangle$.

Lemma o rovnosti uspořádaných dvojic

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v) \tag{1}$$

Důkaz (triviální)

Definice Jsou-li dány množiny $a_1, a_2, ..., a_k$, pak uspořádanou k-tici definujeme jako:

$$\langle a_1\rangle = a_1, \text{ a dál indukcí} \tag{2}$$

$$\langle a_1, a_2, ..., a_k\rangle = \langle\langle a_1, ..., a_{k-1}\rangle, a_k\rangle \tag{3}$$

Lemma o rovnosti uspořádaných k-tic

$$(\langle a_1, ..., a_k\rangle = \langle b_1, ..., b_k\rangle) \quad \Leftrightarrow \quad (a_1 = b_1) \wedge ... \wedge (a_k = b_k) \tag{4}$$

Důkaz (triviální)

3.5 Značení sumy, průniku

Značení Podle axiomu sumy můžeme zavést sumu:

$$\bigcup a = \{x : (\exists y)(y \in a \wedge x \in y)\} \tag{5}$$

tedy pokud $a = \{b, c\}$, pak $\bigcup a = b \cup c$.

Značení Analogicky pro neprázdnou množinu a:

$$\bigcap a = \{x : \underbrace{(\forall y)(y \in a \Rightarrow x \in y)}_{\varphi}\} \tag{6}$$

což je vydělení nějaké z nějaké množiny x_0 podle formule φ.

Poznámka Proč to nejde pro $a = \emptyset$? Protože takovou formuli pro x by splnila každá množina a tudíž by průnik byla množina všech množin, o které víme že neexistuje.

==
MARK
==

3.6 Kartézský součin

Definice Nechť a, b jsou množiny. **Kartézský součin** $a \times b$ je množina:

$$a \times b = \{\langle x, y\rangle : x \in a \wedge y \in b\} \tag{1}$$

Věta Kartézký součin $a \times b$ množin a, b je množina.

Důkaz $a \times b$ je množina. Zvolme a zafixujme $y \in b$ a nechť $\psi(x, v)$ je formule $v = \langle x, y\rangle$. Je-li:

$$\psi(x, v) \wedge \psi(x, w) \Rightarrow v = \langle x, y\rangle \wedge w = \langle x, y\rangle \Rightarrow v = w \tag{2}$$

Tedy je splněn předpoklad axiomu nahrazení (2.5) pro formuli ψ.

$$M_y = \{\langle x, y\rangle : x \in a\} \tag{3}$$

je množina podle nahrazení pro ψ pro každé y.
Nechť navíc $\overline{\psi}(y, v)$ je formule $v = M_y$. Je-li:

$$\overline{\psi}(y, v) \wedge \overline{\psi}(y, w) \Rightarrow v = M_y \wedge w = M_y \Rightarrow v = w \tag{4}$$

Tedy je splněn předpoklad axiomu nahrazení (1) pro formuli $\overline{\psi}$. Navíc tedy

$$D = \{M_y : y \in b\} \text{ je množina} \tag{5}$$

$$\bigcup D = \{\langle x, y\rangle : x \in a, y \in b\} = a \times b \tag{6}$$

3.6.1 Binární relace

Definice **Binární relace** je množina R, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojce.

$$\mathrm{dom}(R) = \{x : (\exists y) < x, y > \in R\} \text{ je definiční obor} \tag{1}$$
$$\mathrm{rng}(R) = \{y : (\exists x) < x, y > \in R\} \text{ je obor hodnot} \tag{2}$$

Protože R je množina, $\mathrm{dom}(R)$ i $\mathrm{rng}(R)$ jsou množiny.

Definice Je-li R relace, definujeme:

$$R^{-1} = \{< x, y >:< y, x > \in R\} \tag{3}$$

Pro každou relaci R, R^{-1} je relace a $(R^{-1})^{-1} = R$.

Definice Jsou-li R, S relace, pak

$$R \circ S = \{< x, z >: (\exists y) < x, y > \in R \wedge < y, z > \in S\} \tag{4}$$

Definice Jsou-li R, S, T relace, pak

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R) \tag{5}$$

3.6.2 Funkce

Množina f se nazývá **funkce**, pokud f je relace a platí:

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(f))((y \in \mathrm{rng}(f) \wedge y' \in \mathrm{rng}(f) \wedge < x, y > \in f \wedge < x, y' > \in f) \Rightarrow y = y') \tag{1}$$

Značení $f : A \to B$ znamená: f je funkce, $A = \mathrm{dom}(f)$, $B \supset \mathrm{rng}(f)$.
Je-li $C \subseteq A$, pak $f \restriction C = f \cap (C \times B)$ nazýváme x zúžením funkce f na množinu C.

$$f'C = \mathrm{rng}(f \restriction C) = \{f(x) : x \in C\} \tag{2}$$

Funkce $f : A \to B$ se nazývá **prostá**, pokud f^{-1} je funkce.

Funkce $f : A \to B$ se nazývá **surjektivní** ("na"), jestliže $B = \mathrm{rng}(f)$

Funkce f se nazývá **bijekce** je-li **surjektivní** a současně **prostá**.

3.7 Uspořádání

Definice **Ostře uspořádaná množina** je uspořádaná dvojce $< a, r >$, kde a je množina a r je relace, $r \subseteq a \times a$. Přičemž r splňuje:

$$\forall x, y, z \in a : \quad < x, y > \in r \wedge < y, z > \in r \Rightarrow < x, z > \in r \quad \text{tranzitivita} \tag{1}$$
$$\forall x \in a : \quad < x, x > \notin r \quad \text{antireflexivita} \tag{2}$$

Pro zjednodušení místo $< x, y > \in r$ píšeme xry.

Definice Ostré uspořádání r nazveme **lineárním**, pokud

$$\forall x, y \in a : \quad x = y \vee xry \vee yrx \tag{3}$$

Definice Jsou-li R, S relace a a, b množiny, pak řekneme, že $< a, R >$ je izomorfní s $< b, S >$, pokud existuje bijekce $f : a \to b$ taková, že

$$\forall x, y \in a : \quad < x, y > \in \mathbb{R} \Leftrightarrow < f(x), f(y) > \in S \tag{4}$$

a zobrazení f se nazývá **izomorfismus**.

Definice Mějme uspořádanou množinu $< a, r >$. Je-li $m \subset a$, pak řekneme, že $x \in a$ je **r-nejmenší** prvek množiny m, jestliže platí:

$$x \in m \wedge (\forall Y)(y \in m \Rightarrow (xry \vee y = x)) \tag{5}$$

Je-li $m \subseteq a$, $x \in a$, řekneme, že x je **minimální** prvek množiny m, jestliže platí

$$x \in m \wedge (\forall y)(y \in m \Rightarrow \neg(yrx)) \tag{6}$$

Definice Řekneme, že uspořádání r na množině a je **dobré** (množina $< a, r >$ je dobře uspořádaná) jesltiže r je ostré uspořádání množiny a a každá neprázdná podmnožina a má r-nejmenší prvek.

Pozorování Je-li $< a, r >$ dobře uspořádaná, pak je r lineární uspořádání. $x, y \in a \quad \{x, y\} \subseteq a$ a $\{x, y\}$ má r-nejmenší prvek. Je-li to x, pak $xry \vee x = y$. Pokud je to y, pak $yrx \vee y = x$.

Značení Nechť $< a, r >$ je uspořádaná množina a $x \in a$. Označme $< (\leftarrow, x), r >$ jako:

$$(\leftarrow, x) = \{y \in a : yrx\} \tag{7}$$

Lemma 1 Je-li $< a, r >$ dobře uspořádaná množina, pak pro každé $x \in a \quad < a, r >$ není izomorfní s $< (\leftarrow, x), r >$

Důkaz Sporem: Předpokládejme, že existuje izomorfismus $f :< a, r > \to < (\leftarrow, x), r >$. Definujme $m = \{y \in a : f(y) \neq y\}$. $x \neq (\leftarrow, x)$, tedy $f(x) \neq x \Rightarrow m \neq \emptyset$. $< a, r >$ je tedy dobře uspořádaná, tedy musí existovat t r-nejmenší prvek množiny m. Máme pro všechna zrt, platí že $f(z) = z$.

1. $f(t)rt$: ale máme $f(t) \neq t$, $f(f(t)) = f(t)$, **spor**: f není prosté.
2. $trf(t)$: kdykoliv $zrt \Rightarrow f(z)rt$, protože $f(z) = z$. Navíc kdykoliv $trz \Rightarrow f(t)rf(z)$ protože f je izomorfismus. Tedy $trf(t)$, $t \in (\leftarrow, x) \Rightarrow t \neq \mathrm{rng}(f)$, tedy f není zobrazení **na**, což je **spor**.

Lemma 2 Jsou-li $< a, r >, < b, s >$ dvě dobře uspořádané množiny, které jsou izomorfní, pak mezi nimi existuje **jediný** izomorfismus.

Důkaz Sporem: Nechť $f, g : a \to b$ jsou dva různé izomorfismy. Tedy existuje nějaké $x \in a : f(x) \neq g(x)$. Tedy množina $m = \{t \in a : f(t) \neq g(t)\}$ je neprázdná (obsahuje x) a $< a, r >$ je dobře uspořádaná, tedy existuje nejmenší prvek t množiny m. Zřejmě platí, že kdykoliv yrt, pak $f(y) = g(y)$.

1. $f(t)sg(t)$. Pokud trz, protože g je izomorfismus, musí platit, že $g(t)sg(z)$. Pokud zrt, pak $f(z) = g(z) \Rightarrow f(z)sf(t) \Rightarrow g(z)sf(t) \Rightarrow g(t) \neq f(t)$. Tedy $f(t) \notin \mathrm{rng}(g)$, tedy není **na**.

2. $g(t)sf(t)$ analogicky.

Věta Nechť $< a, R >$ a $< b, S >$ dvě dobře uspořádané množiny. Potom nastává právě jedna z následujícíh možností:

1. $< a, R > \cong < b, S >$ (je izomorfní)

2. $\exists y \in b : \quad < a, R > \cong < (\leftarrow, y), S >$

3. $\exists x \in a : \quad < (\leftarrow, x), R > \cong < b, S >$

Důkaz Položme

$$f = \{< v, w >: v \in a \wedge w \in b \wedge < (\leftarrow, v), R > \cong < (\leftarrow, w), S >\} \tag{8}$$

1. f je zobrazení: nechť $< v, w > \in f$, $< v, w_1 > \in f$. Máme:

$$< (\leftarrow, w), S) \cong < (\leftarrow, v), R > \cong < (\leftarrow, w_1), S > \tag{9}$$

   tedy

$$< (\leftarrow, w), S > \cong < (\leftarrow, w_1), S > \tag{10}$$

   a podle Lemma 1 $w = w_1$.

2. f je prosté:

$$< v, w > \in f, < v_1, w > \in f \tag{11}$$
$$< (\leftarrow, v)R > \cong < (\leftarrow, w), S > \cong < (\leftarrow, v_1), R > \tag{12}$$

   a podle Lemma 1 $v = v_1$

3. f zachovává uspořádání:

$$< v, w > \in f, \quad < v_1, w_1 > \in f \tag{13}$$

Nechť vRv_1. Máme $< (\leftarrow, v_1), R > \cong < (\leftarrow, w_1), S >$. Nechť $g :< (\leftarrow, v_1), R > \to < (\leftarrow, w_1), S >$ je izomorfismus. Je vRv_1, $g(v)$ protože g je izomorfismus:

$$< (\leftarrow, v), R > \cong < (\leftarrow, g(v)), S > \tag{14}$$

z definice f. Podle Lemma 2 existuje izomorfismus jediný, tedy $w = g(v)Sw_1$.
Analogicky: pokud wSw_1, potom vRv_1.
Zřejmě platí, že pokud $< v, w > \in f$, pak $f \restriction (\leftarrow, v)$ je izomorfismus mezi $< (\leftarrow, v), R >$ a $< (\leftarrow, w), S >$.
Položme:

$$m = \{v \in a : \forall w \in b \quad < v, w > \notin f\} \tag{15}$$
$$o = \{w \in b : \forall v \in a \quad < v, w > \in f\} \tag{16}$$

Můžou nastat případy:

(a) $m = o = \emptyset$. Nastal případ, že $< a, R > \cong < b, S >$ podle f.

(b) $m = \emptyset \neq o$. Množina $< b, S >$ je dobře uspořádaná, tedy existuje $y \in b$, y je S-nejmenší prvek množiny o. V tom případě f je izomorfismus mezi $< a, R >$ a $< (\langle, y), S >$.

(c) $m \neq \emptyset = o$. Existuje x R-nejmenší prvek množiny m a $< (\langle, x), R > \cong (b, S)$ a f je hledaný izomorfismus.

(d) $m \neq \emptyset \neq o$, což je ale ve sporu s definicemi o a m.

4 Ordinály

Definice Množina x se nazývá **tranzitivní**, pokud platí

$$\forall y : y \in x \Rightarrow y \subseteq x \tag{1}$$

Definice Množina x je **ordinál**, pokud x je tranzitivní a dobře uspořádaná relací $\in$.

Příklad 0 je ordinál
{ 0, {0}, {{0}}} je tranzitivní, ale náležení neuspořádává - není ordinál.
{ 0, {0}, {0, {0}, {0, {0 } } } } je ordinál, obvykle se značí 4.

4.1 Věta o ordinálech

1. Je-li x ordinál a $y \in x$, pak y je ordinál a současně $y =< (\langle, y), \in>$.
2. Jsou-li x, y ordinály, pak $x \cong y$ právě když $x = y$
3. Jsou-li x, y ordinály, pak platí právě jedna z možností: $x = y$, $x \in y$, $y \in x$.
4. Jsou-li x, y, z ordinály, $x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z$.
5. Je-li C neprázdná množina ordinálů, potom $\exists x \in C : \forall y \in C : y = x \vee x \in y$

Důkaz

1. Je-li x ordinála a $y \in x$, pak y je ordinál a $y =< (\langle, y), \in> \in x$.
   y je tranzitivní množina: zvolme $t \in y$, $u \in t$. Víme, že: x je ordinál, x je tranzitivní množina, $t \in y$, $y \in x$. Tedy $t \in x$. x je tranzitivní množina, $t \in x$, $u \in t$, tedy $u \in x$. V množině x máme $u, t, y \in x$, x je uspořádané relací náležení a máme $u \in t$, $t \in y$. Tedy $u \in y$. y je tedy tranzitivní množina.

   y je relací náležení uspořádaná: Nechť $u, v, w \in y$, $u \in v \wedge v \in w$. $y \in x$, protože x je tranzitivní množina, $u, v, w \in x$. Přitom $u \in v \wedge v \in w$, x je relací náležení uspořádaná, tedy $u \in w$. y je tedy relací náležení uspořádaná dobře. Nechť $m \subset y$ je neprázdná množina, kdykoliv $t \in m$, pak $t \in y$, x je tranzitivní, tedy $m \subseteq x, m \neq \emptyset$. Protože x je dobře uspořádaná, existuje $z \in m$ nejmenší prvek množiny m v x. Ale $m \subseteq y$, tedy z je nejmenší prvek i v y. Tedy y je ordinál
   Zbývá dokázat, že $y =< (\langle, y), \in>$ v x: $t \in y$, protože $y \in x$, je $t \in x$ a $t \in y$. Tedy $t \in (\langle, y)$. A naopak: $t \in (\langle, y)$ v x. Množina x je uspořádaná operací náležení, tedy $t \in y$. Dostáváme, že $(\langle, y) \subseteq y$.

2. Jsou-li x, y ordinály, a platí $x \cong y$ pak $x = y$. Nechť $h : (x, \in) \to (y, \in)$ je izomorfismus. Položme $m = \{z \in x : h(z) \neq z\}$. Pokud $m = \emptyset$, jsme hotovi. Pro spor předokládejme, že $m \neq \emptyset$. V tom případě existuje $t \in m$, t nejmenší prvek množiny m. Protože h je izomorfismus, platí pro $c, d \in x$:

   $$c \in d \Leftrightarrow h(c) \in h(d) \tag{1}$$

   Tedy speciálně

   $$z \in t \Leftrightarrow h(z) \in h(t) \tag{2}$$

   Máme (t nejmenší prvek množiny m)

   $$z \in t \Leftrightarrow z \in h(t) \tag{3}$$

   $t = h(t)$, spor s předpokladem $t \in m$.

3. Jsou-li x, y ordinály, pak platí právě jedna z následujících možností: $x = y$, $x \in y$, $y \in x$. Podle věty o izomorfismu dobrých uspořádání buď $x \cong y$ a ale podle 2. $\Rightarrow x = y$, nebo $x \cong (\langle, z)$ a $x \cong z \in y$, nebo $y \cong (\langle, t)$, tedy $x \in y \in x$.

4. Jsou-li x, y, z ordinály, $x \in y$ a $y \in z$, potom $x \in z$. Protože z je tranzitivní množina.

5. Je-li C neprázdná množina ordinálů, pak existuje $x \in C$ tak, že

$$(\forall y \in C)(x = y) \vee (x \in y) \tag{4}$$

   $C \neq \emptyset$, tedy můžeme zvolit $t \in C$. Pokud $(\forall y \in C)t = y \vee t \in y$, pak t je nejmenší prvek množiny C a jsme hotovi. V opačném případě existuje $y \in C$, že $y \in t$. Tedy $D = \{y \in C : y \in t\} \neq \emptyset$. t je ordinál: $D \neq \emptyset$, $D \subseteq t$, tedy existuje $x \in D$ nejmenší prvek množiny D. Nechť tedy $y \in t$, tedy $x = y \vee x \in y$; nebo $y = t$, tedy $x \in t$; nebo $t \in y$, pak $x \in t$, $t \in y$ dává $x \in y$. Tedy x je nejmenší prvek množiny C.

4.2 Neexistence množiny všech ordinálů

Věta Neexistuje množina všech ordinálů:

$$\neg(\exists z)(\forall x)(x \text{ je ordinál } \Rightarrow x \in z) \tag{1}$$

Sporem: Nech množina z existuje. Podle vydělení pro formuli "x je ordinál"existuje $m = \{x : x \text{ je ordinál }\}$. Podle věty o ordinálch je m: tranzitivní, ostře uspořádaná relací náležení a to uspořádání je dobré. Podle definice m je ordinál, máme $m \in m$. Což je spor s bodem 3. věty o ordinálech.

4.3 Lemma o tranzitivitě a ordinalitě

Lemma Je-li a tranzitivní množina ordinálů, pak a je ordinál.

Důkaz Stačí ukázat:

1. náležení je dobré uspořádání na množině a. Mějme $x, y, z \in a$: $x \in y$, $y \in z$. Ale x, y, z jsou ordinály: podle věty o ordinálech (bod 4.) $x \in z$.

2. uspořádání je lineární (bod 3.)

3. uspořádání je dobré (bod 5.)

4.4

Věta Je-li $< A, R >$ dobře uspořádaná množina. Pak existuje právě jeden ordinál c tak, že $< A, R > \cong < c, \in >$.

Důkaz

1. Unicita: Nechť $< A, R > \cong < d, \in >$. Dostáváme, že $c \cong d$ a podle věty o ordinálech $c = d$.

2. Existence: Položme $B = \{a \in A :< (\langle, R > \cong x >$ pro nějaký ordinál x $\}$. Nechť navíc f je funkce $dom(f) = B$ a splňuje

$$(\forall a \in B) f(a) \text{ je ordinál takový, že } < (\langle, a), R > \cong < f(a), \in > \tag{1}$$

   Položme $c = \text{rng}(f)$: c je množina (nahrazení pro formuli "$< (\langle, a, R > \cong x$"). Podle předchozího lemmatu je c ordinál. Tedy f je izomorfismus $B \to c$. Pokud $B = A$, jsme hotovi. Jinak existuje $b \in A : B = (\langle, b)$ a tedy f je izomorfismus mezi $< B, R >$ a $< c, \in >$. Tedy i $f(b)$ je definováno, ačkoli $b \notin B$, což je spor.

4.5

Definice Je-li $< A, R >$ dobře uspořádaná množina, pak typ $< A, R >$ je jediný ordinál c, pro který $< A, R > \cong c$.

Příklad $A = \{\sqrt{2}, \pi, 6, 7\} \cong 4$

Značení Malá řecká písmena $\alpha, \beta, \gamma, ...$ je ordinál. Přičemž nahradíme:

$$\alpha < \beta \text{ za } \alpha \in \beta \tag{1}$$
$$\alpha \leq \beta \text{ za } (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta) \tag{2}$$

Definice Je-li X množina ordinálů, označme:

$$\sup(X) = \bigcup X \tag{3}$$
$$\text{pro } X \neq \emptyset \text{ označme } \min(X) = \bigcap X \tag{4}$$

Lemma

1. Pro ordinály α, β platí

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta \tag{5}$$

2. Je-li X množina ordinálů, prvek $\sup(X)$ je nejmenší ordinál, který je větší nebo roven všem prvkům z X pokud $X \neq \emptyset$. Prvek $\min(X)$ je nejmenší ordinál v množině X.

Důkaz

1.

2. Podle axiomu sumy X je množina, tedy $\bigcup X$ je množina. $\bigcup X$ je ordinál:

   (a) je-li $x \in \bigcup X$, $y \in x$, musí podle axiomu sumy existovat $t \in X : x \in t$. Máme $x \in t$, $y \in x$, t je ordinál: $y \in t$. Znova podle axiomu sumy $y \in \bigcup X$. Tedy $\bigcup X$ je tranzitivní množina, je to množina ordinálů podle minulého lemmatu.

   (b) $\forall x \in X : \quad x \leq \bigcup X$
   Nechť $x \in X$ libovolné, podle věty o ordinálech nastává právě jedna z možností

   $$x \in \bigcup X, x = \bigcup X, \bigcup X \in x \tag{6}$$

   Pokud $\bigcup X \in x$, máme $x = X$, pak $x \in \bigcup X$, tedy $\bigcup x \bigcup X$, spor s ordinalitou $\bigcup X$.

   (c) $\bigcup X$ je nejmenší mez. Buď $t < \bigcup X$, tedy $t \in \bigcup X$. Stačí ukázat, že t není horní mezí množiny X. Protože $t \in \bigcup X$, existuje $y \in X$, že $t \in y$. Pro toto y platí $t < y$, tedy t není horní mezí množiny X.

Nechť $X \neq \emptyset$ máme dokázat, že $\min(X) = \bigcap X$ je ordinál a je nejmenší ze všech ordinálů v X. $\bigcap X$ je množina je-li $t \in \bigcap X$ a je-li $y \in t$, můžeme zvolit libovolné $x \in X$, je $t \in x$,$y \in t$, x ordinál, tedy $y \in x$. Tedy $\bigcap X$ je tranzitivní množina, podle předchozího lemmatu je $\bigcap X$ ordinál.
Zbývá dokázat, že $\bigcap X \in X$. X je neprázdná množina ordinálů, podle věty o ordinálech (bod 5) existuje nejmenší prvek množiny $x \in X$. Pro takové x platí, že kdykoliv $y \in x$, pak $x = y$ nebo $x \in y$.

$$x = \{t : t \in x\} \subseteq y \text{ pro každé } y \in X \tag{7}$$

$$x \leq \bigcap X \tag{8}$$

Opačná rovnost $x \geq \bigcap X$ je zřejmá, nebo $\bigcap X \subseteq$ platí pro všechna $y \in X$.

4.6

Definice Pro ordinál α je jeho **ordinální následník** $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Lemma Pro ordinál α je $s(\alpha)$ též ordinál, $\alpha < s(\alpha)$ a

$$(\forall \beta)(\beta \text{ ordinál } \Rightarrow (\beta < s(\alpha) \Leftrightarrow \beta \leq \alpha)) \tag{1}$$

Důkaz Je-li $x \in s(\alpha)$, pak buď $x \in \alpha$ nebo $x \in \{\alpha\}$ z definice. Což je po řadě $x < \alpha$ a $x = \alpha$.

Definice Ordinál α se nazývá **izolovaný**, jestliže $\alpha = \emptyset$ nebo $\exists\beta$ ordinál a $\alpha = s(\beta)$.

Definice Ordinál α se nazývá **limitní**, jestliže $\alpha \neq \emptyset$ a není izolovaný.

Definice $1 = s(0), 2 = s(1), 3 = s(2), ...$

Definice Ordinál α je přirozené číslo, jestliže platí

$$(\forall\beta)(\beta \leq \alpha \Rightarrow \beta \text{ je izolovaný ordinál }) \tag{2}$$

4.7 Množina všech přirozených čísel

Tvrzení Podle axiomu nekonečna:

$$(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \Rightarrow s(y) \in x)) \tag{1}$$

Pozorování Množina x, zaručená axiomem nekonečna, obsahuje všechna přirozená čísla.

Důkaz Sporem: $\exists n$ přirozené číslo takové, že $n \notin x$. Určitě $n \neq 0$ podle axiomu nekonečna. Tedy $\exists m : n = s(m)$. Je $m \in x$? Ne, kdyby bylo $m \in x$, pak i $n = s(m)$ splňuje $m \in x$, což je ve sporu s předpokladem. n je tedy přirozené číslo, tedy ordinál. Množina $x \setminus n$ je neprázdná, nebo $m \in x \setminus n$. Protože n je dobře uspořádaná a $x \setminus n$ je neprázdná, existuje nejmenší prvek $\tilde{n} \in x \setminus n$.

1. $\tilde{n} = 0$ - spor s axiomem nekonečna.
2. $\tilde{n} \neq 0$, $\exists\tilde{m} \quad \tilde{n} = s(\tilde{m})$. Protože $\tilde{n} > \tilde{m}$ musí být $\tilde{m} \in x$. Podle axiomu nekonečna $s(\tilde{m}) = \tilde{n} \in x$. Což je spor.

Definice ω je množina všech přirozených čísel. ω je ordinál (podle Lemma 3). Všechny menší ordinály než ω jsou izolované, ω sama je limitní (a to dokonce nejmenší).

Poznámka Existuje, axiom nekonečna a vydělení pro formuli "n je přirozené číslo".

Věta (Peanovy axiomy)

1. $0 \in \omega$
2. $(\forall n \in \omega)(s(n) \in \omega)$
3. $(\forall n, m \in \omega)(n \neq m \Rightarrow s(n) \neq s(m))$
4. (indukce) $\forall X \subseteq \omega$

$$((0 \in X \wedge (\forall n \in X)(s(n) \in X)) \Rightarrow X = \omega). \tag{2}$$

Důkaz Plyne z věty o ordinálech. Ve 4 předpokládeme ke sporu, že $X \neq \omega$, tedy $\omega \setminus X$ je neprázdná množina ordinálů. Tedy má nejmenší prvek n. Pokud $n = 0$ - spor, jinak $n \neq 0$, tedy $n = s(m), m \in X$ - spor.

Definice Nechť α, β jsou ordinály.

$$\alpha + \beta = typ < \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R > \tag{3}$$

kde

$$R = \{<< \xi, 0 >, < \nu, 0 >>: \xi < \nu < \alpha\} \cup \tag{4}$$
$$\{<< \xi, 1 >, < \nu, 1 >>: \xi < \nu < \beta\} \cup \tag{5}$$
$$\{((\alpha \times \{0\}) : (\beta \times \{1\})\} \tag{6}$$

Věta Pro libovolné ordinály α, β, γ

1. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
2. $\alpha + 0 = \alpha$
3. $\alpha + 1 = s(\alpha)$
4. $\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$
5. Je-li β je limitní ordinál, pak $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\}$

Důkaz Triviální z definice.

Poznámka Pozor, ordinální sčítání není obecně komutativní.

Definice Pro ordinály $\alpha, \beta : \alpha \cdot \beta = typ < \beta \times \alpha, R >$, kde R je lexikografické uspořádání součinu $\beta \times \alpha$, tedy:

$$<< \xi, \nu >, < \xi', \nu' >> \in R \Leftrightarrow (\xi < \xi') \vee (\xi = \xi' \wedge \nu < \nu') \tag{7}$$

Věta Pro libovolné ordinály α, β, γ platí:

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
2. $\alpha \cdot 0 = 0$
3. $\alpha \cdot 1 = \alpha$
4. $\alpha \cdot s(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
5. Je-li β limitní ordinál, pak $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\}$
6. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Poznámka Pozor:

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega \tag{8}$$
$$2 \cdot \omega = \omega \tag{9}$$

5 Kardinály

Definice Nechť a, b jsou množiny.

1. Řekneme, že mohutnost množiny a je **menší nebo rovna** mohutnosti množiny b (značíme $a \preceq b$), jestliže existuje zobrazení $f : a \to b$.
2. Řekneme, že mohutnost množiny a je **rovna** mohutnosti množiny b (značíme $a \approx b$) pokud existuje bijekce $f : a \to b$.
3. Řekneme, že mohutnost množiny a je **ostře menší** mohutnosti množiny b (značíme $a \prec b$) právě když $a \preceq b \wedge \not(a \approx b)$.

Věta

1. $x \approx x$
2. $x \approx y \Rightarrow y \approx x$
3. $(x \approx y \wedge y \approx z) \Rightarrow x \approx z$
4. $x \preceq x$
5. $(x \preceq y \wedge y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$

Věta (Cantor-Bernstein) Pro množiny a, b

$$(a \preceq b \wedge b \preceq a) \Rightarrow a \approx b \tag{1}$$

Značení $g''b = g[b] = \{g(x) : x \in b\}$

Důkaz Mějme $f : a \to b$ prosté zobrazení a $g : b \to a$ prosté zobrazení. Pokud f nebo g bijekce, je věta dokázána - nadále tedy předpokládejme, že $f''a \neq b \wedge f''b \neq a$.
(sem vlozit obrazek dvou funkci)
Pro všechna přirozená čísla definujeme indukcí $a_0 = a$, $b_0 = b$. $a_{n+1} = g''b_n, b_{n+1} = f''a_n$.
Tedy $a_1 = g''b_0 = g''b \subsetneq a = a_0$. Analogicky $b_1 = f''a_0 = f''a \subsetneq b = b_0$.
Označme

$$a_\omega = \bigcap\{a_n : n \in \omega\} b_\omega = \bigcap\{b_n : n \in \omega\} \tag{2}$$

Zobrazení $h : a \to b$ definujme předpisem

$h(x) = f(x)$ pro $x \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n} \setminus a_{2n+1} \cup a_\omega$ $h(x) = t$, kde $t \in b$ a $g(t) = x$ pro $x \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$

$h : a \to b$ je hledaná bijekce. Je zřejmé, že h je funkce a $\mathrm{dom}(h) = a$.

1. h je prosté: Nechť $x \neq y$, x,y in a. Pokud

$$x, y \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n} \setminus a_{2n+1} \cup a_\omega \tag{3}$$

mějme $h(x) = f(x)$, $h(y) = f(y)$, a f je prostá tedy $f(x) \neq f(y)$.

Pokud $x, y \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$
$h(x) = g^{-1}(x)$, $h(y) = g^{-1}$, g je zobrazení, tedy $h(x) \neq h(y)$.

$x \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n} \setminus a_{2n+1}$, $y \in \bigcup n \in \omega a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$

$$\exists n \quad x \in a_{2n} \setminus a_{2n+1} : h(x) = b_{2n+1} \setminus b_{2n+2} \tag{4}$$
$$\exists m \quad y \in a_{2m+1} \setminus a_{2m+2} : h(y) = b_{2m} \setminus b_{2m+1} \tag{5}$$
$$\emptyset = (b_{2n+1} \setminus b_{2n+2}) \cap (b_{2m} \setminus b_{2m+1}) \tag{6}$$
$$x \in a_\omega \quad \vee \quad h(x) \in b_\omega \tag{7}$$

2. h je surjektivní: $t \in b$.

$$t \in b_{2m} \setminus b_{2n+1} \tag{8}$$

Pak $g(t) \in a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$. Pro $x = g(t)$ máme $h(x) = t$. Nebo:

$$t \in b_{2n+1} \setminus b_{2n+2} \tag{9}$$

Pak $b_{2n+1} = f''a_{2n}$ a $\exists x \in a_{2n} f(x) = t$, $h(x) = t$). Nebo:

$$t \in b_\omega \subseteq b_0 = f''a \tag{10}$$

Existuje takové x, že $f(x) = t$. Pro toto x je $x \in a_\omega$. $h(x) = t$.

Definice Nechť A je množina. Pokud na A existuje dobré uspořádání, pak položme $|A| =$ nejmenší ordinál α, pro který $A \approx \alpha$.

Definice Ordinál α se nazývá **kardinál** pokud $\alpha = |\alpha|$. Ekvidalentně ordinál α je kardinál, právě když

$$(\forall \beta)(\beta < \alpha \Rightarrow \not(\beta \approx \alpha)) \tag{11}$$

Pozorování ω je kardinál. $\omega + k$ není kardinál (všechny jsou ostře větší než omega a mezi nimi a omegou existuje bijekce).

Lemma Je-li $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$, pak $|\beta| = |\alpha|$.

Důkaz $\beta \subseteq \alpha$, tedy existuje prosté zobrazení β do α. Máme $\beta \preceq \alpha$.
$\alpha \approx |\alpha|$, konečně $|\alpha| \subseteq \beta$, tedy $|\alpha| \preceq \beta$. Aplikuji Cantorovu větu.

Lemma Je-li n přirozené číslo, potom:

1. $n \not\approx n + 1$
2. $(\forall \alpha)(\alpha \approx n \Rightarrow \alpha = n)$

Důkaz

1. Indukcí: $0 \not\approx 1$. Pokud existuje taková n, že $n \approx n + 1$, pak $n \neq 0$ a tedy pro nějaké m, $n = m + 1$. Tedy:

$$n = \{0, 1, 2, ..., n\} \tag{12}$$
$$n + 1 = \{0, 1, 2, ..., m, m + 1\} \tag{13}$$

   Je-li b bijekce $b : n \to n + 1$, pak existuje $i \in n : b(i) = m + 1$. Definujme $b' : m \to m + 1$: Pro $j < i : b'(j) = b(j)$, pro $j > i : b'(j) = b(j - 1)$. Tedy b' je bijekce $m \to m+1$, což je spor s minimalitou n. (ten předpis je asi špatně, chce to promakat)

Důsledek Všechna přirozená čísla jsou kardinály a ω je kardinál.

Definice Množina A je **konečná** pokud $|A| < \omega$. Množina A je **spočetná**, pokud $|A| \leq \omega$. Množina A se nazývá nespočetná, pokud není spočetná (tj. je velká, nebo jí nelze dobře uspořádat).

5.1 Sčítání a násobení

Definice Jsou-li κ, λ kardinály, pak:

1. $\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$
2. $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$

Poznámka Oproti ordinálnímu sčítání a násobení jsou kardinální operace komutativní.

Lemma Pro $n, m \in \omega$:

$$n \oplus m = n + m < \omega n \otimes m = n \cdot m < \omega \tag{1}$$

Důkaz Stačí ukázat, že $n+m < \omega$ a že $n \cdot m < \omega$. Zbytek je aplikace posledního lemmatu. Indukcí pro sčítání:

1. $n + 0 = n < \omega$
2. $n + s(m) = s(\underbrace{n + m}_{<\omega}) < \omega$

Stejnětak pro násobení:

1. $n \times 0 = 0 < \omega$
2. $n \times s(m) = \underbrace{n \cdot m}_{<\omega} + n < \omega$

Věta Každý nekonečný kardinál je limitní ordinál.

Důkaz Sporem: buď κ kardinál a $\kappa = \alpha + 1$. Jenomže $\alpha \geq \omega$, tedy $1 + \alpha = \alpha$. Tedy $\kappa = |\kappa| = |1 + \alpha| = |\alpha| < \kappa$, což je spor.

Věta je-li κ nekonečný kardinál, pak $\kappa \otimes \kappa = \kappa$

Důkaz Dokažme pro $\kappa = \omega$. položme $f : \omega \to \omega \times \omega$, $f(n) =< n, 0 >$, f je prosté, tedy $\omega \leq \omega \times \omega$, položme $g : \omega \times \omega \to \omega$, $g(n, k) = 2^n(2k + 1)$, g prosté, tedy $\omega \times \omega \leq \omega$, z Cantorovy-Bernsteinovy věty $\omega \cong \omega \times \omega$.
Předpokládejme, že kdykoliv λ kardinál, takový, že $\omega \leq \lambda < \lambda$, pak $\lambda \otimes \lambda = \lambda$. Ukážeme, že potom $\kappa \times \kappa \cong \kappa$. Definujme na $\kappa \times \kappa$ maximo-lexikografické uspořádání $<_{MLEX}$ předpisem $< \alpha, \beta > <_{MLEX} < \gamma, \delta >$ jestliže

- $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$ nebo
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge \alpha < \gamma$ nebo
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge \beta < \delta$

$<_{MLEX}$ je dobré uspořádání $\kappa \times \kappa$.
Ukážeme, že $typ(\kappa \times \kappa, <_{MLEX}) \leq \kappa$. Ke sporu předpokládejeme, že $typ(\kappa \times \kappa, <_{MLEX}) > \kappa$, tedy existuje $< \alpha, \beta > \in \kappa \times \kappa$ takové, že $\kappa \cong (\langle, < \alpha, \beta >, <_{MLEX})$. κ kardinál, $\alpha, \beta < \kappa$, $|\alpha|, |\beta| < \kappa$. Nechť $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, $|\gamma| < \kappa$. Pak podle předpokladu $|\gamma| \otimes |\gamma| < \kappa$, což je spor ???!!!.
Nyní předpokládejme, že když $\kappa > \omega$ takový kardinál, že pro nějaký kardinál κ, $\omega \leq \lambda < \kappa$ je $\lambda \otimes \lambda > \kappa$. Z věty o ordinálech (5) existuje taové λ nejmenší, že kdykoliv $\lambda \neq \omega$, potom $\omega \cong \omega \times \omega$ a $\lambda > \omega$ pro včechny kardinality ν takové, že $\omega \leq \nu < \lambda$ platí $\nu \otimes \nu = \nu$. Potom stejně jako v předchozím důkazu $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.

Důsledek Jestliže jsou κ, λ nekonečné kardinály, pak

$$\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$$

Důkaz Předpokládejme, že $\kappa > \lambda$, pak $\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$, zřejmě

$$\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \hookrightarrow \kappa \times \lambda \subset \kappa \times \kappa$$

a proto

$$\kappa \times \kappa \leq \kappa \leq \kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \leq \kappa \times \kappa$$

tedy platí $\cong$

5.2 Axiom potence

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \subset a \Rightarrow x \in z)$$

Definice Potenční množina množiny a je

$$\mathcal{P}(a) = \{x : x \subset a\}$$

$\mathcal{P}(a)/($ je množina (potence, vydělení)

Věta (Cantor) Pro každou množinu x platí $x < \mathcal{P}(x)$

Důkaz Definujme $f : x- > \mathcal{P}(x)$ předpisem $f(t) = t$ pro $t \in x$, pak f je prosté a plati $\leq$. Dále ukážeme, že $\neg(x \cong \mathcal{P}(x))$. Mějme $g : x \to \mathcal{P}(x)$ prosté zobrazení, ukážeme že je surjektivní. Nechť $m = \{t \in x, t \notin g(t)\}$, ukážeme $m \notin \operatorname{rng} g$. Buď $t \in x$. V případě, že $t \notin g(t)$, pak $t \in m$, tedy $m \neq g(t)$ jinak $t \in g(t)$, pak $t \in m$ a $m \neq g(t)$. (Diagonální princip)

Věta

$$(\forall \alpha)(\alpha \text{ ordinál} \Rightarrow (\exists \kappa)(\kappa > \alpha \wedge \kappa \text{ je ordinál}))$$

Je li α přirozené, $\kappa = \omega$, je li $\alpha > \omega$, pak položme $W = \{R \in \mathcal{P}(\alpha \times \alpha); R \text{ je dobré uspořádání } \alpha\}$. W je množina (kart. součin, potence, vydělení). Buď $S = \{typ(\alpha.R); R \in W\}$. S je také množina podle axiomu nahrazení pro $\psi(R, \xi)$ "$\psi = typ(\alpha, R)$". S je množina ordinálů, $\sup(S)$ je ordinál, $\sup(S) + 1$ je také ordinál. Nechť $|\sup(S) + 1| \leq \alpha$. Existuje R dobré uspořádání množiny α, $typ(\alpha, R) = \sup(S) + 1 \notin S$ spor, tedy $|\sup(S) + 1| > \alpha$

Definice Buď α ordinál, **kardinální následník** ordinálu α je nejmenší kardinál, který je větší než α. Značí se α^+.

6 Třídy a rekurze

Je-li ϕ formule základního jazyka teorie množin, a množina, $z = \{x \in a; \phi(x)\}$ je množina. Ovšem $\{x; \phi(x)\}$ nemusí být množina, konkrétně $\{x; x = x\}$ nebo $\{x; x \text{ je ordinál }\}$ nejsou množiny.

Neformálně je-li ϕ formule jazyka teorie množin, pak každý soubor tvaru $\{x; \phi(x)\}$ budeme nazývat třídou. Vlastní třída je třída, která není množina.

Formálně třídy neexistují a formule, ve kterých se vyskytují třídové termy považujeme pouze za zkrácený zápis formulí. Tedy například $On \subset V$ slouží jako zkratka za

$$(\forall x)(x \text{ je ordinál } \Rightarrow x = x)$$

Třídové termy lze vždy eliminovat.

Buďte ϕ, χ formule jazyka množin, $X = \{x; \phi(x)\}$ $Y = \{y; \chi(y)\}$ třídní termy, pak je

- $X = Y$ zkratka za $(\forall x)(\phi(x) \leftrightarrow \chi(x))$
- $z \in X$ zkratka za $\phi(z)$
- $z = X$ zkratka za $(\forall t)(t \in z \leftrightarrow \phi(t))$
- $X \in Y$ zkratka za $(\exists u)(u \in Y \wedge (\forall t)(t \in u \leftrightarrow \phi(t)))$
- $X = Y$ zkratka za $(\exists u)(\psi(u) \wedge (\forall v)(v \in u \leftrightarrow \phi(v)))$

třídy nelze kvantifikovat.

Můžeme tedy pouužívat neormálně třídové termy, formálně není rozdíl mezi formulí a třídou, rozdíl pouze v neformálním vyjadřování.

Věta (Transfinitní indukce na třídě On) Je-li $C \subset On$ a $C \neq \emptyset$, pak C má nejmenší prvek.

Důkaz Stejně jako bod (5) věty o ordinálech, buď $\alpha \in C$, buďto je α nejmenší prvek třídy C, pak jsme hotovi, nebo α není nejmenší, položme $c = C \cup \alpha$, $\alpha \cup C = \{\beta \in \alpha; \phi(\beta)\}$ je množina a tedy podle věty o ordinálech existuje nejmenší prvek α_0 množiny c, to je i nejmenší prvek C

Použití Důkaz transfinitní indukcí dokazuje věty typu $(\forall\alpha)\psi(\alpha)$ tím, že dokáže $\psi(0)$ a pro všechna α

$$((\forall\beta)(\beta < \alpha \Rightarrow \psi(\beta))) \Rightarrow \psi(\alpha)$$

Věta (O transfinitní rekurzi) Je-li $F : V \to V$ pak existuje jediné $G : On \to V$

$$(\forall\alpha)(G(\alpha) = F(G \restriction \alpha))$$

Důkaz Unicita: Nechť G_1, G_2 obě splňují tvrzení. Ukážeme, že potom $(\forall\alpha)(G_1(\alpha) = g_2(\alpha))$. Pomocí věty o transfinitní indukci máme $G_1 \upharpoonright 0 = 0 = G_2 \upharpoonright 0$. $G_1(0) = F(G(\upharpoonright 0) = F(0) = F(G_2 \upharpoonright 0) = G_2(0)$. Předpokládejme $\alpha > 0$ ordinál a $(\forall\beta)(\beta < \alpha \Rightarrow G_1(\beta) = G_2(\beta)$. Z formule pro G_1, G_2: $G_1(\alpha) = F(G_1 \upharpoonright \alpha) = F(G_2 \upharpoonright \alpha) = G_1(\alpha)$. Podle věty o transfinitní indukci $(\forall\alpha)(G_1(\alpha) = g_2(\alpha))$

================

TADY NECO CHYBI - konkretne prednaska 7.

================

Definice Buď a je množina, $\leq$ uspořádání na množině a. Množina $c \subseteq a$ se nazývá řetězcem, jestliže $(c, \leq)$ je uspořádána lineárně.

Definice Buď $(a, \leq)$ uspořádaná množina, $b \subseteq a$. Prvek $x \in a$ se nazývá horní mezí množiny b, jestliže

$$(\forall y \in b) y \leq x \tag{2}$$

a maximálním prvkem množiny b, jestliže

$$(x \in b) \wedge ((\forall y \in b) \neg y > x) \tag{3}$$

6.1 Principle maximality

(také Zornovo lemma, Zorn-Kuratowského lemma)

Věta Nechť $(a, \leq)$ je uspořádaná množina a nechť každý řetězec v a má horní mez. Pak:

$$\forall x \in a \exists m \in a : \quad m \text{ je maximálním prvkem } a \wedge m \geq x \tag{1}$$

Důsledek Nechť platí princip maximality. Jsou-li M a N libovolné množiny, pak buď $M \precsim N$ nebo $N \precsim M$

Důkaz důsledku Uvážíme $a = \{f : f \text{ je prosté zobrazení}, \operatorname{dom} f \subseteq M, \operatorname{rng} f \subseteq N\}$. Uspořádáme $(a, \subseteq)$. Je-li $c \subseteq a$ řetězec, potom $\bigcup c$ je opět prostá funkce, přičemž je to horní mez řetězce c. Tedy existuje maximální prvek g množiny $(a, \subseteq)$. Platí buď $\operatorname{dom}(g) = M$ nebo $\operatorname{rng}(g) = N$ (protože pokud existuje $x \in M \setminus \operatorname{dom}(g)$ a současně $y \in N \setminus \operatorname{rng}(g)$, potom $g \cup < x, y >$ je prostá funkce a obsahuje g, což je spor s maximalitou). Je-li $\operatorname{dom}(g) = M$, pak $M \precsim N$, neboť g je prosté zobrazení $M \to N$. Pokud $\operatorname{rng}(g) = N$, potom $N \precsim M$, $g^{-1} : N \to M$ je prosté.

6.2 Princip dobrého uspořádání

Tvrzení Pro každou množinu a existuje $R \subseteq a \times a$, takové, že (a, R) je dobré uspořádání.

6.3 Ekvivalence axiomu výběru, p. maximality a dobrého uspořádání

Věta Následující výroky jsou ekvivalentní:

1. axiom výběru
2. princip maximality
3. princip dobrého uspořádání

Důkaz

1. (1. $\Rightarrow$ 3.) Nechť $a \neq 0$. Podle axiomu výběru na $g(a) \setminus \{0\}$ existuje selektor výběru f. Trans. indukcí definujeme zobrazení $g : Or \to a$ následujícím způsobem: g(0) = f(a). Je-li $\alpha \in Or$ a $(\forall \beta < \alpha) g(\beta)$ je definováno, definujeme $\xi = a \setminus \{g(\beta) : \beta < \alpha\}$. Pokud je tato množina neprázdná, definujeme $g(\alpha) = f(\xi)$ a indukce končí. Pokud je prázdná, pak $g : \alpha \to a$ je prosté zobrazení na a tedy definuje dobré uspořádání a. Zbývá ukázat, že indukce skončí: pokud by se nezastavila, získáme prosté zobrazení $g : Or \to a,$ rng(g) je množina (protože a je množina). Ordinály jsou vlastní třída - spor.

2. (3. $\Rightarrow$ 2.) Máme $(a, \leq)$, každý řetězec v a má horní mez a $x \in a$. Podle 3. existuje dobré uspořádání a. Nechť $c \subset a$ je řetězec. Budeme říkat, že c splňuje (*), jestliže:

$$x \in c \wedge (\forall t \in c) t \geq x \tag{1}$$
$$\wedge (\forall y)(y \in c \wedge x < y), \text{ pak } y \tag{2}$$
$$\text{je } \prec \text{ nejmenší horní mez řetězce } \{t \in c : t < y\} \tag{3}$$

Víme, že existuje alespoň jeden řetězec splňující (*), totiž řetězec $\{x\}$. Položme $b = \bigcup \{c : c \subseteq$ a je řetězec splňující (*) $\}$. b **je řetězec**: pro spor předpokládejme, že existují $z, t \in c$ takové, že nejsou porovnatelné. Tedy existuje $y_0 \in b$ je $\prec$-nejmenší prvek splňující $(\exists w \in b) y_0 a w$ jsou $\leq$-neporovnatelné. Existuje tedy $y_1 \in b$, že y_1 je $\prec -n$ejmenší prvek řetězce b, že y_0 a y_1 jsou $\leq$-neporovnatelné. Protože y_0 a $y_1 \in b$ existují řetězce c_0 a c_1, splňující (*), že $y_0 \in c_0$ a $y_1 \in c_1$. Nechť $z \in c_1$, $z < y_1$. Pokud $x < z$, pak $z \prec y_1 : c_1$ splňuje (*), z je $\prec$-nejmenší horní mez množiny {t: t je horní mezí $\{v \in c : x \leq v \leq z\}$}. Tvrdím, že $z < y_0$: z = y_0 není možné, oba jsou v řetězci c_1 a tedy porovnatelné, ale y_0 a y_1 nejsou. Pokud by $z > y_0$, pak $y_0 < z < y$, ale y_0 a y_1 jsou $\leq$-neporovnatelné. Pokud z, y_0 jsou $\leq$-neporovnatelné: $z \prec y_1$ (víme - z i y_1 jsou horními mezemi $\{t \in c_1 : x \leq t \leq z\}$), tedy ale z a y_0 musí být porovnatelné - spor. Dostáváme: $\{t : x \leq t < y\} = \{t : x \leq t < y_0\}$. Protože $y_0 \prec y_1$, c_1 nesplňuje (*), což je spor. Tedy b je řetězec.
Podle předpokladu principu maximality existuje m horní mez b. Musí platit, že $m \in b$. Kdyby to neplatilo: vezmeme celé b a $M = \{t : t \text{je ostrá horní mez} b\}$, která je neprázdná (obsahuje alespoň m). Taková množina má nejmenší prvek $z \in M$. $b \cup \{z\}$ je opět řetězec splňující (*) a $b \cup \{z\} \subseteq b = \bigcup \{c$: c je řetězec splňující (*) $\}$, což je

spor ($z \notin b$). Tedy m je největší prvek b a kdykoliv $y \in a$ tak buď $y \leq m$ nebo jsou neporovnatelné.

3. (2. $\Rightarrow$ 1.) Nechť m je množina, na které hledáme selektor. Nechť a je množina $\{f : \mathrm{dom}(f) \to \cup m : \mathrm{dom}(f) \subseteq m, kdykoliv x \in \mathrm{dom}(f), x \neq 0, pak f(x) \in x\}$. Uspořádáme $(a, \subseteq)$. Je-li $c \subseteq a$ řetězec. $\bigcup c$ je funkce, $\forall f \in c$, $f \subseteq \bigcup c$. $(a, \subseteq)$ splňuje předpoklady principu maximality a podle 2. existuje v a maximální prvek g. Tvrdím, že g je hledaný selektor: kdyby existovalo $x \in m$, $x \notin \mathrm{dom}(g)$, $x \neq 0$, zvolme: $t \in x$, $g \cup < x, t > \neq g$ - spor s maximalitou.

Důsledky

1. (AC) $\Rightarrow$ pro každou množinu a, $|a|$ existuje. (plyne ihned z principu dobrého uspořádání)
2. Pro každou nekonečnou množinu a, $A \approx A \times A \approx A \times \{0, 1\}$.
3. Každou nekonečnou množinu lze rozdělit na nekonečně mnoho nekonečných částí. Podle axiomu výběru víme, že $|A| = \kappa \geq \omega$ a $\kappa \approx \kappa \times \kappa$.
4. Je-li $\kappa \geq \omega$ a pro každé $\alpha \in \kappa$ je X_α množina, $|X_\alpha| \leq \kappa$, pak
$$\left| \bigcup_{\alpha \in \kappa} X_\alpha \right| \leq \kappa \tag{4}$$
5. Jsou-li X, Y množiny a existuje $f : X \to Y$ surjektivní zobrazení, pak $|Y| \leq |X|$. Dk: kartézský součin $X \times Y \subseteq \{< y, x >: y = f(x)\} = r$. Je-li $g \subseteq r$ funkce, pak $\mathrm{dom}(g) = Y$, $g : Y \to X$ prostě, protože f je funkce.

6.4

Definice Buďte A a B množiny. ${}^A B = \{f : f \text{ je funkce}, f : A \to B\}$

Lemma Jsou-li B, C disjunktní množiny a A množina, pak:

$${}^{(B \cup C)} A \approx {}^B A \times {}^C A \tag{1}$$
$${}^C({}^B A) \approx {}^{C \times B} A \tag{2}$$

Důkaz Máme-li $f : B \cup C \to A$. Definujme $F(f) =< f \restriction B, f \restriction C >$
F je prosté zobrazení. $G : {}^B A \times {}^C A \to {}^{B \cup C} A$
$G(< f_1, f_2 >) = f_1 \cup f_2$
$G = F^{-1}$

Je-li $f \in^C ({}^B A)$, f je funkce, $f : C \to^B A$. Tedy pro každé $t \in c$ je $f(t)$ funkce z $B \to A$, pro každé $t \in C$, $v \in Bf(t)(v) \in A$. Položme $F :^C ({}^B A) \to^{C \times B} A$ pro funkce $F(f) = g$, kde $g \in^{C \times B} A$ a je definována předpisem $g(< t, v >) = f(t)(v)$. F je bijekce.

6.5

Definice Jsou-li κ a λ kardinály, potom $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

Lemma Jsou-li κ a λ kardinály, $\kappa \geq 2$ a $\lambda \geq \omega$, $\kappa \leq \lambda$ pak $2^\lambda = \kappa^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$

Důkaz

$$\Phi :^\lambda 2 \to \mathcal{P}(\lambda)\Phi(f) = \{\xi < \lambda : f(\xi) = 1\} \tag{1}$$
$$\Phi^{-1} : \mathcal{P} \to^\lambda 2\Phi^{-1}(x) = \chi x \tag{2}$$
$$\chi_x(\xi) = \{\xi \in x : 1, \xi \notin x : 0 \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Zřejmě Φ je bijekce:

$${}^\lambda 2 \approx \mathcal{P}(\lambda) \tag{5}$$
$${}^\lambda 2 \subseteq^\lambda \kappa \subseteq\subseteq \mathcal{P}(\lambda \times \lambda \approx \mathcal{P}(\lambda) =^\lambda 2 \tag{6}$$

Lemma Jsou-li κ, λ kardinály, pak

$$\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu \tag{7}$$
$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \times \mu} \tag{8}$$

(bez dukazu)

Definice Jsou-li α, β ordinály a $f : \alpha \to \beta$, řekneme, že f zobrazuje α do β **kofinálně** je-li $\operatorname{rng}(f)$ neomezená množina v β.

Definice Kofinalita ordinálu β je nejmenší ordinál α takový, že existuje konfinální zobrazení z α do β. Značíme $\alpha = cf(b)$

Pozorování Určitě víme, že

$$cf(\beta) \leq \beta \tag{9}$$

protože existuje identita. Také víme, že pokud β je ordinální následník: $cf(\beta) = 1$. (kofinální zobrazení $f : 1 \to \alpha + 1$ je definované $f(0) = \alpha$

Lemma Pokud je β limitní, pak existuje konfinální zobrazení $f : cf(\beta) \to \beta$, které je ostře rostoucí.

Důkaz Buď g je kofinální zobrazení z $cf(\beta) \to \beta$. Definujme indukcí $f(0) = g(0)$ a je-li $\alpha < \beta$ a z náme $f(\gamma)\forall\gamma < \alpha$, položme $f(\alpha) = \sup\{g(\gamma) : \gamma \leq \alpha\} \cup \{f(\gamma : \gamma < \alpha\}$. Přímo z definice plyne, že f je ostře rostoucí a přitom $f \geq g$ a tedy kofinální.

Lemma Je-li α limitní ordinál a $f : \alpha \to \beta$ ostře rostoucí kofinální zobrazení, potom $cf(\alpha) = cf(\beta)$.

Důkaz $f : \alpha \to \beta$ je ostře rostoucí. $h : cf(\alpha) \to \alpha$ zvolme kofinální a ostře rostoucí (podle předchozího lemma) a máme

$$g = f \circ h \qquad g : cf(\alpha) \to \beta \tag{10}$$

a přitom je kofinální: Je-li $\gamma < \beta$, určitě existuje $\Delta < \alpha$, že $f(\Delta) \geq \gamma$. Ale h je také kofinální: $\exists \eta < cf(\alpha)$: $h(\eta) \geq f(\Delta)$ a f je ostře rostoucí: $f(h(\eta) \geq \gamma$. Potom

$$cf(\beta) \leq cf(\alpha) \tag{11}$$

Nechť $g : cf(\beta) \to \beta$ je kofinální a ostře rostoucí zobrazení. Definujme $h : cf(\beta) \to \alpha$ předpisem $h(\xi) =$ minimální $\gamma \in \alpha$ takové, že $f(\gamma) > g(\gamma)$. Všimněme si, že $f : cf(\beta) \to \gamma$ a protože f je ostře rostoucí, pak h je kofinální zobrazení. Tedy

$$cf(\alpha) \leq cf(\beta) \tag{12}$$

Poznámka Kofinalita reální přímky je ω, protože každý reálné číslo je menší než nějaké celé.

Důsledek Kofinalita ordinálu $cf(cf(\beta)) = cf(\beta)$.

Definice Ordinál β je regulární pokud β je limitní ordinál a $\beta = cf(\beta)$.

Lemma Je-li ordinál β regulární, pak β je kardinál.

Důkaz Sporem: Nechť β není kardinál. Tedy $|\beta| < \beta$. Avšak máme bijekci $b : |\beta| \to \beta$, což je kofinální zobrazení (z regularity). Tedy $cf(\beta) \leq |\beta| < \beta$, což je ve sporu s regularitou β.

Lemma ω je regulární kardinál.

Důkaz (bez důkazu)

Lemma Je-li κ kardinál, pak κ^+ je regulární.

Důkaz Sporem: Buď $\alpha < \kappa^+$, $f : \alpha \to \kappa^+$ kofinální zobrazení. Víme, že $|\alpha| \leq \kappa$. Kdykoliv $\xi < \alpha$, pak $f(\xi) < \kappa^+$, tedy $|f(\xi)| \leq \kappa$. Tedy:

$$\kappa^+ = \bigcup \{f(\xi) : \xi < \alpha\} \tag{13}$$

$$|\cup \{f(\xi : \xi < \alpha\}| < \kappa \oplus \kappa = \kappa \tag{14}$$

což je spor.

Lemma Je-li α limitní ordinál, pak $cf(\omega_\alpha) = cf(\alpha)$.

Důkaz

$$\omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\} \tag{15}$$

Ihned plyne z jednoho z předchozích lemmat.

Lemma (Königovo) Předpokládejme axiom výberu. Je-li κ nekonečný kardinál a $cf(\kappa) \leq \lambda$, $cf(\kappa) > 1$, pak $\kappa^\lambda > \kappa$.

Důkaz Stačí dokázat pro $\lambda = cf(\kappa)$. Nechť $g : \kappa \to^\lambda \kappa$. Máme ukázat, že g není surjektivní. Zvolme kofinální zobrazení $f : \lambda \to \kappa$. Definujme h: $\lambda \to \kappa$ takto:

$$h(0) = 0 \tag{16}$$

$$\text{pro } \alpha < \lambda h(\alpha) = \min\left(\kappa \setminus \{g(\mu)(\alpha) : \mu < f(\alpha)\}\right) \tag{17}$$

Pro takto definovou funkci h, $h \notin \text{rng}(g)$. Kdyby $h = g(\mu)$ pro nějaké $\mu < \kappa$, pak existuje nějaké $\alpha < \lambda$, takže $f(\alpha) > \mu$. Tedy funkce $h(\alpha) \notin \{g(\mu)(\alpha) : \mu < f(\alpha)\}$.

Důsledek Předpokládáme axiom výběru. Je-li $\lambda \geq \omega$, pak $cf(2^\lambda) > \lambda$. Položme $\kappa = 2^\lambda$. Máme $\kappa^\lambda = (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^\kappa = \kappa$. Kdyby $cf(\kappa) \leq \lambda$, podle Königova lemmatu by platilo, že $\kappa^\lambda > \kappa$.

Definice Zobecněná hypotéza kontinua (GCH) je tvrzení, že

$$(\forall \alpha) 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \tag{18}$$

Ekvivalentně pro každý nekonečný kardinál κ, $2^\kappa = \kappa^+$.
Hypotéza kontinua (CH) je tvrzení, že $2^\omega = \omega_1$.

Lemma Předpokládejme zobecněnou hypotézu kontinua. Nechť $\kappa, \lambda \geq 2$ jsou kardinály a alespoň jeden z nich je nekonečný. Pak platí:

1. $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = \lambda^+$
2. $\kappa > \lambda \geq cf(\kappa) \Rightarrow \kappa^\lambda = \kappa^+$
3. $\lambda < cf(\kappa) \Rightarrow \kappa^\lambda = \kappa$

Pozorování $\kappa \leq \lambda$ pak $2^\lambda \approx \kappa^\lambda \approx \mathcal{P}(\lambda)$.

Důkaz

1. Z pozorování a GCH: $\kappa \leq \lambda \quad \kappa^\lambda = 2^\lambda =^{GCH} \lambda^+$

2. Nechť $\kappa > \lambda \geq cf(\kappa)$. Podle Königova lemmatu $\kappa^\lambda > \kappa$.
   $\kappa > \lambda \qquad \kappa^\lambda = 2^\kappa = \kappa^+$. Tedy pro všechna λ, $cf(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$ platí $\kappa^\lambda = \kappa^+$.

3. $\lambda < cf(\kappa)$:
   ${}^\lambda\kappa = \cup\{\ {}^\lambda\alpha : \lambda < \kappa\}$ protože pro každou $f : \lambda \to \kappa$ existuje $\alpha < \kappa$ že $\text{rng}(f) \subseteq \alpha$. f nemůže být kofinální zobrazení. Kdykoliv $\alpha < \kappa$, pak

$$|{}^\lambda\alpha| \leq |\max\{alpha, \lambda\}, \max\{\alpha, \lambda\}| \leq^{GCH} \max\{\alpha, \lambda\}^+ \leq \kappa \tag{19}$$

   Tedy $\kappa \leq |{}^\lambda\kappa| \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa$.

Věta (Hausdorffova formule) Předpokládáme axiom výběru. Jsou-li κ, λ nekonečné kardinály, potom $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$.

Důkaz Zřejmě $\kappa^+ \otimes \kappa^\lambda \leq (\kappa^+)^\lambda \otimes \kappa^\lambda \leq (\kappa^+)^\lambda \otimes (\kappa^+)^\lambda = (\kappa^+)^\lambda$. Zbývá dokázat nerovnost $(\kappa^+)^\lambda \leq \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$.

1. $\lambda \geq \kappa^+ : (\kappa^+)^\lambda \leq \kappa^\lambda = 2^\lambda = \kappa^\lambda = \kappa^\lambda \otimes \kappa^=$

2. $\lambda < \kappa^+$: protože κ^+ je regulární kardinál, potom pro každou $f : \lambda \to \kappa^+$ existuje nějaké $\alpha < \kappa^+$, že $\text{rng}(f) \subseteq \alpha$. Tedy

$$(\kappa^+)^\lambda = |{}^\lambda\kappa^+| = |\cup\{{}^\lambda\alpha : \alpha < \kappa^+\}| \tag{20}$$

$$\leq \kappa^+ \otimes |{}^\lambda\kappa| = \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda \tag{21}$$

Definice Předpokládejme axiom výběru. Nechť $I \neq \emptyset$ a $\forall i \in I$ buď κ_i kardinální číslo. Definujme

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \left|\bigcup\{\kappa_i \times \{i\} : i \in I\}\right| \tag{22}$$

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \left|\prod_{i\in I}\{\kappa_i : i \in I\}\right| \tag{23}$$

Věta (Königova nerovnost) Předpokládejme axiom výběru. Je-li $I \neq \emptyset$, pro každé $i \in I, \kappa_i$, λ_i jsou kardinální čísla, přičemž $\kappa_i < \lambda_i$, pak

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i \tag{24}$$

Důkaz Z lemmatu a obrázkem (dopsat!)

==
TADY ZASE NECO CHYBI ==

6.6 Δ-systém

Definice Soubor $\mathcal{A}$ množin se nazývá Δ-systém, pokud existuje množina K (jádro systému), takže:

$$(\forall A \in \mathcal{A}) K \subseteq A \tag{1}$$

$$\{A \setminus K : A \in \mathcal{A}\} \text{ je disjunktní systém} \tag{2}$$

6.7 Věta o Δ-systému

Věta Nechť $\kappa > \omega$ regulérní kardinál. Je-li $< A_\alpha : a \in \kappa >$ systém konečných množin, pak existuje $I \subseteq \kappa$: $|I| = K$, tak, že $< A_\alpha : \alpha \in I >$ tvoří Δ-systém.

Důkaz Protože všechny množiny A_α jsou konečné, a κ nespočetný regulérní , tak existuje $n \in \omega$ ... (chybí) Indukcí podle **n**.

1. n = 1: $\forall \alpha \in I_0 \quad A_\alpha = \{x_\alpha\}$.

$$\exists x \in \bigcup_{\alpha \in I_0} A_\alpha \text{ tak, že } |\{\alpha \in I_0 : x = x_\alpha\}| = \kappa \tag{1}$$

$$I = \{\alpha \in I_0 : x = x_\alpha\} \tag{2}$$

   a $\{\{x_\alpha\} : x \in I\}$ tvoří Δ-systém. Druhá možnost: (chybí)

2. Indukční krok: předpokládejme platnost pro $|A_\alpha| = n$. Dokážeme

$$\forall \alpha \in I_0 \quad |A_\alpha| = n + 1 \tag{3}$$

   Pro každé $\alpha \in I_0$ zvolme bod $x_0 \in A_\alpha$ a zvolíme $B_\alpha = A_\alpha \setminus \{x_\alpha\}$ množinu menší mohutnosti. Podle předpoklu indukce víme, že existuje $I_1 \subset I_0$, $|I_1| = \kappa$, tak, že $\{B_\alpha : \alpha \in I_1\}$ tvoří Δ-systém s jádrem K. Zbávající body $x_\alpha : \alpha \in I_1$.
   Dvě možnosti:

   (a) $\exists x \quad x_\alpha = x$ pro κ indexů z množiny I. Položíme $I = \{\alpha \in I_1 : x_\alpha = x\}$, v tomto případě $< A_\alpha : \alpha \in I >$ tvoří Δ-systém s jádrem $K \cup \{x\}$.

   (b) $I \subseteq I_1 : |I_1| = \kappa$, tak pro $\alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$ je $x_\alpha \neq \alpha, \beta$. $< A_\alpha : \alpha \in I >$ je Δ-systém s jádrem K.

Důsledek Uvažujme $\mathcal{F}$ = všechny funkce, které mají konečný definiční obor $\subseteq \omega_1$ a obor hodnot $\subseteq \omega$. Kdykoliv $M \subseteq \mathcal{F}$, $|M| = \omega_1$, pak existuje $\varphi, \psi \subseteq M$, pak $\varphi \cup \psi$ je opět funkce.

Důkaz $\{\,\mathrm{dom}(\varphi) : \varphi \in M\}$ jsou konečné podmnožiny a je jich ω_1, tedy obsahují nespočetný Δ-systém s jádrem K. Na takovéto množině je však pouze spočetně mnoho funkcí (protože obor hodnot jsou přirozená čísla) - tedy se některé funkce na jádře K shodují a můžeme je sjednotit.

7 Stacionární množiny

Definice Nechť δ je limitní ordinál.

1. Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je neomezená (v δ), pokud pro každé $\alpha < \delta$ existuje $\beta \in A : \alpha < \beta$.
2. Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je uzavřená (v δ), jestliže pro každé limitní $\alpha < \delta$ platí, že $\sup A \cap \alpha = \alpha \Rightarrow \alpha \in A$
3. Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je uzavřená neomezená (v δ) je-li A uzavřená a neomezená.

Lemma Nechť δ je limitní ordinál a $cf(\delta) > \omega$. Pak je-li $\tau < cf(\delta)$ a $\{C_\xi : \xi \in \tau\}$ soubor uzavřených neomezených množin v δ, pak

$$\bigcap\{C_\xi : \xi < \tau\} \tag{1}$$

je uzavřené neomezené v δ.

Důkaz Položme

$$C = \bigcap\{C_\xi : \xi < \tau\} \tag{2}$$

1. C je uzavřená v δ: Nechť $\alpha < \delta$ je limitní ordinál, pro který platí, že $\alpha = \sup(C \cap \alpha)$. Pro každé $\xi \in \tau : C_\xi \supseteq C$. Tedy $C_\xi \cap \alpha \supseteq C \cap \alpha$ a tedy $\sup(C_\xi \cap \alpha) = \alpha$. $C_x i$ je uzavřená. Proto $\alpha \in C_\xi$. Tedy $\alpha \in \bigcap_{\xi<\tau} C_\xi = C$.
2. C je neomezená: Zvolme libovolné $\alpha < \delta$. Položme $\alpha_0 = \alpha$. Pak $\forall \xi < \tau : C_\xi$ neomezená, tedy existuje nějaké $\beta_\xi \in C_\xi$, že $\beta_x i < \alpha_0$ a máme množinu $\{\beta_x i : \xi < \tau\}$, což má horní mez α_1, protože $cf(\delta) >$ jejich počet. Dál indukcí známe $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n$. C_ξ neomezená v δ, existuje $\beta_\xi^n \in C_\xi$, $\alpha_n < \beta_\xi^n$. Ale $\{\beta_\xi^n : \xi < \tau\}$ není kofinální v δ, tedy existuje $\alpha_{n+1} > \beta_\xi^n$, protože $\xi < \tau$.
(a tady se to nějak okecá s obrázkem)

7.1 Stacionární množina

Definice Nechť δ je ordinál a $cf(\delta) > \omega$. $S \subseteq \delta$. Říkáme, že množina S je **stacionární** v δ, jestliže pro každou uzavřenou, neomezenou množinu C je $S \cap C \neq 0$.

Příklad

1. Všechny uzavřené a neomezené množiny jsou stacionární.

2. $\{\alpha < \omega_2 : cf(\alpha) = \omega\}$ je stacionární množina v ω_2, která není uzavřená.

Definice Nechť κ je kardinál a $< A_\alpha : \alpha \in \kappa >$ je soubor podmnožin kardinálu κ. Následující množina

$$\triangle_{\alpha \in \kappa} A_\alpha = \{\gamma \in \kappa : (\forall \alpha \in \gamma)\gamma \in A_\alpha\} \tag{1}$$

se nazývá **diagonálním průnikem** množin $A_\alpha \alpha \in \kappa$.

Lemma

$$\triangle A_\alpha = \bigcap \{A_\alpha \cap (\alpha + 1) : \alpha < \kappa\} \tag{2}$$

Důkaz Buď $\gamma \in \triangle A_\alpha$. Kdykoliv $\alpha < \gamma$, pak $\gamma \in A_\alpha \subseteq A_\alpha \cup (\alpha + 1)$. Kdykoliv $\alpha \geq \gamma$, pak $\gamma \in \alpha + 1 \subseteq A_\alpha \cup (\alpha + 1)$. Tedy $\gamma \in \bigcap_{\alpha \in \kappa} A_\alpha(\alpha + 1)$ Buď $\gamma \in \bigcap A_\alpha \cap (\alpha + 1)$.

1. Je-li $\gamma \leq \alpha$, pak $\gamma \in \alpha + 1$

2. Je-li $\gamma > \alpha$, pak $\gamma \in A_\alpha$

Tedy $\gamma \in \triangle_{\alpha \in \kappa} A_\alpha$

Lemma Nechť $\kappa > \omega$ je regulární kardinál. $< A_\alpha : \alpha \in \kappa >$ je soubor uzavřených neomezených podmnožin. Pak $\triangle_{\alpha \in \kappa} A_\alpha$ je uzavřená neomezená.

Důkaz Položme

$$C = \triangle_{\alpha \in \kappa} A_\alpha \tag{3}$$

1. C je uzavřená: Buď $\gamma \in \kappa$, γ limitní, $\gamma = \sup(C \cap \gamma)$. Potom pro všechny $\alpha \in \kappa$ máme $\gamma = \sup((A_\alpha \cup (\alpha + 1)) \cap \gamma)$. A_α uzavřená a neomezená v κ. $A_\alpha \cup (\alpha + 1)$ je uzavřená a neomezená také. Tedy $\gamma \in A_\alpha \cup (\alpha + 1)$ pro všechna $\alpha \in \kappa$. Tedy $\gamma \in C$ a C je uzavřená.

2. C je neomezená: Buď $\xi_0 < \kappa$ libovolný ordinál.

$$\bigcap_{\alpha \leq \xi_0} A_\alpha \text{ je uzavřená neomezená podmnožina} \kappa \text{ podle minulého lemma} \tag{4}$$

   Tedy existuje $\xi_1 > \xi_0, \xi_1 \in \bigcap_{\alpha \leq \xi_0} A_\alpha$. Dál indukcí: známe $\xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_n$. $\xi_n < \kappa$ - podíváme na $\bigcap_{\alpha \leq \xi_m} A_\alpha$, tedy máme $\xi = \sup\{\xi_n : n \in \omega\} \in \kappa$. Buď $\alpha < \xi$ libovolný ordinál. Pak určitě existuje nějaké $n \in \omega$, kde $\alpha < \xi_n$. Z definice $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ...$ dostáváme, že $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ... \in A_\alpha$. A_α je uzavřená. Tedy $\{\xi_i : n + 1 \leq i < \omega\} \subseteq A_\alpha$. $\xi \in A_\alpha$ pro všechna $\alpha < \xi$. Tedy $\xi \in \triangle_{\alpha \in \kappa} A_\alpha$.

Definice Buď A je množina ordinálních čísel a funkce $f : A \to Or$ se nazývá regresivní na množině A, jestliže

$$(\forall \alpha \in A)(\alpha > 0 \Rightarrow f(\alpha) < \alpha) \tag{5}$$

7.2 Fodorova věta (Pressing-down lemma)

Věta Nechť $\kappa > \omega$ je regulární kardinál. Nechť $E \subseteq \kappa$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. E je stacionární
2. Je-li $f : E \to \kappa$ regresivní, pak existuje $\alpha < \kappa$, že f^{-1} neomezená v κ.
3. Je-li $f : E \to \kappa$ regresivní, pak existuje $\alpha < \kappa$ tak, že $f^{-1}(\{\alpha\})$ je stacionární v κ.