Teorie množin

Ladislav Láska

23. března 2010

Obsah

1 Formální jazyk

1.1 Základní součásti jazyka

1. proměnné
2. binární predikátový symbol $\in$
3. binární predikátový symbol $=$
4. logické spojky $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$
5. kvantifikátory $(\forall x)$, $(\exists x)$
6. pomocné symboly - závorky

1.2 Formule

1. Nechť x, y jsou prvky množiny, pak $(x \in y)$ a $(x = y)$ jsou atomické formule.
2. Nechť výrazy φ, ψ jsou formule, potom: $\neg\varphi$, $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jsou formule.

==

Tedy toho hodne chybi

==

2 Axiomy teorie množin

2.1 Průnik a rozdíl množin

Definice Pro množiny a,b po řadě průnikem a rozdílem nazýváme množinu:

$$a \cup b = \{x : x \in a \wedge x \in b\} \tag{1}$$
$$a \setminus b = \{x : x \in a \wedge x \notin b\} \tag{2}$$

Existuje množina a (Axiom existence), podle vydělení pro formuli $x \neq x$ existuje a podle extenziability je jediná množina $\{x \in a : a \neq x\}$.

Definice $\emptyset$ je jediná množina y splňující:

$$(\forall x)(x \notin y) \tag{3}$$

A nazýváme jí **prázdná množina**.

2.2 Disjunkní množina

Definice Říkáme, že množina a,b jsou disjunkní, že je-li $a \cup b = 0$.

Lemma

1. $\neg(\exists y)(y \in \emptyset)$
2. $(\forall x)(\emptyset \subset x)$
3. $x \subset \emptyset \Leftrightarrow x = 0$

Lemma

$$(\forall a)a = \{x : x \in a \wedge x = x\} \tag{1}$$

2.3 Russelův paradox

Věta

$$\neg(\exists z)(\forall x)(x \in z) \tag{1}$$

Důkaz Sporem: nechť z je taková množina. Pak mějme formuli $\varphi(x) \quad x \neq x$. Potom podle axiomu vydělení pro tuto formuli máme $t = \{x \in z : x \notin x\}$, tedy t je množina. Protože t je množina a z je množina všech množin. Protože $t \in z$, $t \in t \Leftrightarrow t \notin t$. Tedy neexistuje množina všech množin.

2.4 Axiom dvojce

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \tag{1}$$

Definice Jsou-li a, b množiny, pak množinu se stávající z prvků a, b nazveme **neuspořádanou dvojcí** množin a, b a značíme $\{a, b\}$. Pro $a \neq b$ říkáme, že $\{a, b\}$ dvouprvková, jinak jednoprvková.

2.4.1 Rovnost množin

Lemma

1. $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x = y$
2. $\{x\} = \{x, y\} \Leftrightarrow x = y$
3. $\{x, y\} = \{u, v\} \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v) \vee (x = v \wedge y = u)$

2.4.2 Uspořádaná dvojce, k-tice

Uspořádaná dvojce množin a, b je množina, která má prvky $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Značíme jí $< a, b >$.

Lemma

$$< x, y >=< u, v > \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v) \tag{1}$$

Definice Jsou-li dány množiny $a_1, a_2, ..., a_k$, pak uspořádanou $k - tici$ definujeme jako:

$$< a_1 >= a_1, \text{ a dál indukcí} \tag{2}$$

$$< a_1, a_2, ..., a_k >=<< a_1, ..., a_{k-1} >, a_k > \tag{3}$$

Lemma

$$< a_1, ..., a_k >=< b_1, ..., b_k > \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \tag{5}$$

$$(a_1 = b_1) \wedge ... \wedge (a_k = b_k) \tag{6}$$

2.5 Axiom sumy

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)) \tag{1}$$

Značení

$$\bigcup a = \{x : (\exists y)(y \in a \wedge x \in y)\} \tag{2}$$

Značení Nechť $a = \{b, c\}$. Pak $\bigcup a = b \cup c$

2.5.1 Neuspořádané k-tice

Značení Neuspořádaná k-tice je:

$$\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\} \tag{1}$$

2.5.2 Průnik

Definice Pro neprázdnou množinu a lze analogicky definovat

$$\bigcap a = \{x : (\forall y)(y \in a \Rightarrow x \in y)\} \tag{1}$$

Pro neprázdnou a existuje $\bigcap a$:

$$a \neq 0 \quad (\exists x) x \in a, \quad x = x_0 \tag{2}$$

$$a = 0 \quad \bigcap a \text{ není definovaný} \tag{3}$$

2.6 Schéma axiomu nahrazení

Je-li $\psi(u, v)$ formule, která neobsahuje volně proměnné z, w, potom formule:

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)(\psi(u, v) \wedge \psi(u, w) \Rightarrow v = w) \Rightarrow \tag{1}$$
$$(\forall a)(\exists z)(\forall v)(v \in z \Leftrightarrow (\exists u)(u \in a \wedge \psi(u, v))) \tag{2}$$

je axiom teorie množin.

Pozorování Pro jedno u, $\psi(u, v)$ platí pro nejvýše jedno v. To je analogie k funkci.

Definice Nechť a, b jsou množiny. **Kartézský součin** $a \times b$ je množina:

$$a \times b = \{< x, y >: x \in a \wedge y \in b\} \tag{3}$$

Důkaz $a \times b$ je množina. Zvolme a zafixujme $y \in b$ a nechť $\psi(x, v)$ je formule $v =< x, y >$. Je-li:

$$\psi(x, v) \wedge \psi(x, w) \Rightarrow v =< x, y > \wedge w =< x, y >\Rightarrow v = w \tag{4}$$

Tedy je splněn předpoklad axiomu nahrazení (1) pro formuli ψ.

$$M_y = \{< x, y >: x \in a\} \tag{5}$$

je množina podle nahrazení pro ψ pro každé y.
Nechť navíc $\overline{\psi}(y, v)$ je formule $v = M_y$. Je-li:

$$\overline{\psi}(y, v) \wedge \overline{\psi}(y, w) \Rightarrow v = M_y \wedge w = M_y \Rightarrow v = w \tag{6}$$

Tedy je splněn předpoklad axiomu nahrazení (1) pro formuli $\overline{\psi}$. Navíc tedy

$$D = \{M_y : y \in b\} \text{ je množina} \tag{7}$$
$$\bigcup D = \{< x, y >: x \in a, y \in b\} = a \times b \tag{8}$$

2.6.1 Binární relace

Definice **Binární relace** je množina R, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojce.

$$\mathrm{dom}(R) = \{x : (\exists y) < x, y >\in R\} \text{ je definiční obork } \ \mathrm{rng}(R) = \{y : (\exists x) < x, y >\in R\} \text{ je obor hodnot} \tag{1}$$

Protože R je množina, $\mathrm{dom}(R)$ i $\mathrm{rng}(R)$ jsou množiny.

Definice Je-li R relace, definujeme:

$$R^{-1} = \{< x, y >:< y, x >\in R\} \tag{2}$$

Pro každou relaci R, R^{-1} je relace a $(R_{-1})^{-1} = R$.

Definice Jsou-li R, S relace, pak

$$R \circ S = \{< x, z >: (\exists y) < x, y > \in R \wedge < y, z > \in S\} \tag{3}$$

Definice Jsou-li R, S, T relace, pak

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R) \tag{4}$$

2.6.2 Funkce

Množina f se nazývá **funkce**, pokud f je relace a platí:

$$(\forall x \in \operatorname{dom}(f))((y \in \operatorname{rng}(f) \wedge y \in \operatorname{rng}(f) \wedge < x, y > \in f \wedge < x, y' > \in f) \Rightarrow y = y') \tag{1}$$

Značení $f : A \to B$ znamená: f je funkce, $A = \operatorname{dom}(f)$, $B \supset \operatorname{rng}(f)$.
Je-li $C \subseteq A$, pak $f \restriction C = f \cap (C \times B)$ nazýváme x zúžením funkce f na množinu C.

$$f'C = \operatorname{rng}(f \restriction C) = \{f(x) : x \in C\} \tag{2}$$

Funkce $f : A \to B$ se nazývá **prostá**, pokud f^{-1} je funkce.

Funkce $f : A \to B$ se nazývá **surjektivní** ("na"), jestliže $B = \operatorname{rng}(f)$

Funkce f se nazývá **bijekce** je-li **surjektivní** a současně **prostá**.

2.7 Uspořádání

Definice **Ostře uspořádaná množina** je uspořádaná dvojce $< a, r >$, kde a je množina a r je relace, $r \subseteq a \times a$. Přičemž r splňuje:

$$\forall x, y, z \in a : \quad < x, y > \in r \wedge < y, z > \in r \Rightarrow < x, z > \in r \quad \text{tranzitivita} \tag{1}$$
$$\forall x \in a : \quad \not< x, x > \in r \quad \text{antireflexivita} \tag{2}$$

Pro zjednodušení místo $< x, y > \in r$ píšeme xry.

Definice Ostré uspořádání r nazveme **lineárním**, pokud

$$\forall x, y \in a : \quad x = y \vee xry \vee yrx \tag{3}$$

Definice Jsou-li R, S relace a a, b množiny, pak řekneme, že $< a, R >$ je izomorfní s $< b, S >$, pokud existuje bijekce $f : a \to b$ taková, že

$$\forall x, y \in a : \quad < x, y > \in \mathbb{R} \Leftrightarrow < f(x), f(y) > \in S \tag{4}$$

a zobrazení f se nazývá **izomorfismus**.

Definice Mějme uspořádanou množinu $< a, r >$. Je-li $m \subset a$, pak řekneme, že $x \in a$ je **r-nejmenší** prvek množiny m, jestliže platí:

$$x \in m \wedge (\forall Y)(y \in m \Rightarrow (xry \vee y = x)) \tag{5}$$

Je-li $m \subseteq a$, $x \in a$, řekneme, že x je **minimální** prvek množiny m, jestliže platí

$$x \in m \wedge (\forall y)(y \in m \Rightarrow \not(yrx)) \tag{6}$$

Definice Řekneme, že uspořádání r na množině a je **dobré** (množina $< a, r >$ je dobře uspořádaná) jesltiže r je ostré uspořádání množiny a a každá neprázdná podmnožina a má r-nejmenší prvek.

Pozorování Je-li $< a, r >$ dobře uspořádaná, pak je r lineární uspořádání. $x, y \in a \quad \{x, y\} \subseteq a$ a $\{x, y\}$ má r-nejmenší prvek. Je-li to x, pak $xry \vee x = y$. Pokud je to y, pak $yrx \vee y = x$.

Značení Nechť $< a, r >$ je uspořádaná množina a $x \in a$. Označme $< (\leftarrow, x), r >$ jako:

$$(\leftarrow, x) = \{y \in a : yrx\} \tag{7}$$

Lemma 1 Je-li $< a, r >$ dobře uspořádaná množina, pak pro každé $x \in a \quad < a, r >$ není izomorfní s $< (\leftarrow, x), r >$

Důkaz Sporem: Předpokládejme, že existuje izomorfismus $f :< a, r > \rightarrow < (\leftarrow, x), r >$. Definujme $m = \{y \in a : f(y) \neq y\}$. $x \neq (\leftarrow, x)$, tedy $f(x) \neq x \Rightarrow m \neq \emptyset$. $< a, r >$ je tedy dobře uspořádaná, tedy musí existovat t r-nejmenší prvek množiny m. Máme pro všechna zrt, platí že $f(z) = z$.

1. $f(t)rt$ ale $f(t)rt$ máme $f(t) \neq t$, $f(f(t)) = f(t)$, **spor**: f není prosté.
2. $trf(t)$: kdykoliv $zrt \Rightarrow f(z)rt$, protože $f(z) = z$. Navíc kdykoliv $trz \Rightarrow f(t)rf(z)$ protože f je izomorfismus. Tedy $trf(t)$, $t \in (\leftarrow, x) \Rightarrow t \neq \mathrm{rng}(f)$, tedy f není zobrazení **na**, což je **spor**.

Lemma 2 Jsou-li $< a, r >, < b, s >$ dvě dobře uspořádané množiny, které jsou izomorfní, pak mezi nimi existuje **jediný** izomorfismus.

Důkaz Sporem: Nechť $f, g : a \rightarrow b$ jsou dva různé izomorfismy. Tedy existuje nějaké $x \in a : f(x) \neq g(x)$. Tedy množina $m = \{t \in a : f(t) \neq g(t)\}$ je neprázdná (obsahuje x) a $< a, r >$ je dobře uspořádaná, tedy existuje nejmenší prvek t množiny m. Zřejmě platí, že kdykoliv yrt, pak $f(y) = g(y)$.

1. $f(t)sg(t)$. Pokud trz, protože g je izomorfismus, musí platit, že $g(t)sg(z)$. Pokud zrt, pak $f(z) = g(z) \Rightarrow f(z)sf(t) \Rightarrow g(z)sf(t) \Rightarrow g(t) \neq f(t)$. Tedy $f(t) \notin \operatorname{rng}(g)$, tedy není **na**.
2. $g(t)sf(t)$ analogicky.

Věta Nechť $< a, R >$ a $< b, S >$ dvě dobře uspořádané množiny. Potom nastává právě jedna z následujících možností:

1. $< a, R > \cong < b, S >$ (je izomorfní)
2. $\exists y \in b : \quad < a, R > \cong < (\leftarrow, y), S >$
3. $\exists x \in a : \quad < (\leftarrow, x), R > \cong < b, S >$

Důkaz Položme

$$f = \{< v, w >: v \in a \wedge w \in b \wedge < (\leftarrow, v), R > \cong < (\leftarrow, w), S >\} \tag{8}$$

1. f je zobrazení: nechť $< v, w > \in f$, $< v, w_1 > \in f$. Máme:

   $$< (\leftarrow, w), S) \cong < (\leftarrow, v), R > \cong < (\leftarrow, w_1), S > \tag{9}$$

   tedy

   $$< (\leftarrow, w), S > \cong < (\leftarrow, w_1), S > \tag{10}$$

   a podle Lemma 1 $w = w_1$.

2. f je prosté:

   $$< v, w > \in f, < v_1, w > \in f \tag{11}$$
   $$< (\leftarrow, R > \cong < (\leftarrow, w), S > \cong < (\leftarrow, v), R > \tag{12}$$

   a podle Lemma 1 $v = v_1$

3. f zachovává uspořádání:

   $$< v, w > \in f, \quad < v_1, w_1 > \in f \tag{13}$$

   Nechť vRv_1. Máme $< (\leftarrow, v_1), R > \cong < (\leftarrow, w_1), S >$. Nechť $g :< (\leftarrow, v_1), R > \to < (\leftarrow, w_1), S >$ je izomorfismus. Je vRv_1, $g(v)$ protože g je izomorfismus:

   $$< (\leftarrow, v), R > \cong < (\leftarrow, g(v)), S > \tag{14}$$

   z definice f. Podle Lemma 2 existuje izomorfismus jediný, ktedy $w = g(v)Sw_1$. Analogicky: pokud wSw_1, potom vRv_1.

Zřejmě platí, že pokud $< v, w > \in f$, pak $f \restriction (\leftarrow, v)$ je izomorfismus mezi $< (\leftarrow, v), R >$ a $< (\leftarrow, w), S >$.
Položme:

$$m = \{v \in a : \forall w \in b \quad < v, w > \notin f\} o = \{w \in b : \forall v \in a \quad < v, w > \notin f\} \tag{15}$$

Můžou nastat případy:

(a) $m = o = \emptyset$. Nastal případ, že $< a, R > \cong < b, S >$ podle f.

(b) $m = \emptyset \neq o$. Množina $< b, S >$ je dobře uspořádaná, tedy existuje $y \in b$, y je S-nejmenší prvek množiny o. V tom případě f je izomorfismus mezi $< a, R >$ a $< (\leftarrow, y), S >$.

(c) $m \neq \emptyset = o$. Existuje x R-nejmenší prvek množiny m a $< (\leftarrow, x), R > \cong (b, S)$ a f je hledaný izomorfismus.

(d) $m \neq \emptyset \neq o$, což je ale ve sporu s definicemi o a m.

3 Ordinály

Definice Množina x se nazývá **tranzitivní**, pokud platí

$$\forall y : y \in x \Rightarrow y \subseteq x \tag{1}$$

Definice Množina x je **ordinál**, pokud x je tranzitivní a dobře uspořádaná relací $\in$.

Příklad 0 je ordinál
{ 0, {0}, {{0}}} je tranzitivní, ale náležení neuspořádává - není ordinál.
{ 0, {0}, {0, {0}, {0, {0 } } } } je ordinál, obvykle se značí 4.

3.1 Věta o ordinálech

1. Je-li x ordinál, $y \in x$ a $y \in z$, pak $x \in z$.
2. Jsou-li x, y ordinály, pak $x \cong y$ právě když $x = y$
3. Jsou-li x, y ordinály, pak platí právě jedna z možností: $x = y$, $x \in y$, $y \in x$.
4. Jsou-li x, y, z ordinály, $x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z$.
5. Je-li C neprázdná množina ordinálů, potom $\exists x \in C : \forall y \in C : y = x \vee x \in y$

Důkaz

1. Je-li x ordinál, $y \in x$ a $y \in z$, pak y je ordinál a $y =< (\leftarrow, y), \in > \in x$.
   Víme, že: x je ordinál, x je tranzitivní množina, $t \in y$, $y \in x$. Tedy $t \in x$. x je tranzitivní množina, $t \in x$, $u \in t$, tedy $u \in x$. V množině x máme $u, t, y \in x$, x je uspořádané relací náležení a máme $u \in t$, $t \in y$. Tedy $u \in y$. y je tedy tranzitivní množina.
   y je relací náležení uspořádaná: Nechť $u, v, w \in y$, $u \in v \wedge v \in w$. $y \in x$, protože x je tranzitivní množina, $u, v, w \in x$. Přitom $u \in v \wedge v \in w$, x je relací náležení uspořádaná, tedy $u \in w$. y je tedy relací náležení uspořádaná dobře. Nechť $m \subset y$ je neprázdná množina, kdykoliv $t \in m$, pak $t \in y$, x je tranzitivní, tedy $m \subseteq x, m \neq \emptyset$. Protože x je dobře uspořádaná, existuje $z \in m$ nejmenší prvek množiny m v x. Ale $m \subseteq y$, tedy z je nejmenší prvek i v y.
   Zbývá dokázat, že $y =< (\leftarrow, y), \in >$ v x: $t \in y$, protože $y \in x$, je $t \in x$ a $t \in y$. Tedy $t \in (\leftarrow, y)$. A naopak: $t \in (\leftarrow, y)$ v x. Množina x je uspořádaná operací náležení, tedy $t \in y$. Dostáváme, že $(\leftarrow, y) \subseteq y$.

2. Jsou-li x, y ordinály, a platí $x \cong y$ pak $x = y$. Nechť $h : (x, \in \rightarrow (y, \in)$ je izomorfismus. Položme $m = \{z \in x : h(z) \neq z\}$. Pokud $m = \emptyset$, jsme hotovi. Pro spor předokládejme, že $m \neq \emptyset$. V tom případě existuje $t \in m$, t nejmenší prvek množiny m. Protože h je izomorfismus, platí pro $c, d \in x$:
   $$c \in d \Leftrightarrow h(c) \in h(d) \tag{1}$$
   Tedy speciálně
   $$z \in t \Leftrightarrow h(z) \in h(t) \tag{2}$$
   Máme (t nejmenší prvek množiny m)
   $$z \in t \Leftrightarrow z \in h(t) \tag{3}$$
   $t = h(t)$, spor s předpokladem $t \in m$.

3. Jsou-li x, y ordinály, pak platí právě jedna z následujících možností: $x = y$, $x \in y$, $y \in x$. Podle věty o izomorfismu dobrých uspořádání buď $x \cong y$ a ale podle 2. $\Rightarrow x = y$, nebo $x \cong (\leftarrow, z)$ a $x \cong z \in y$, nebo $y \cong (\leftarrow, t)$, tedy $x \in y \in x$.

4. Jsou-li x, y, z ordinály, $x \in y$ a $y \in z$, potom $x \in z$. Protože z je tranzitivní množina.

5. Je-li C neprázdná množina ordinálů, pak existuje $x \in C$ tak, že
   $$(\forall y \in C)(x = y) \vee (x \in y) \tag{4}$$
   $C \neq \emptyset$, tedy můžeme zvolit $t \in C$. Pak t je nejmenší prvek množiny C a jsme hotovi. V opačném případě existuje $y \in C$, že $y \in t$. Tedy $D = \{y \in C : y \in t\} \neq \emptyset$. t je ordinál: $D \neq \emptyset$, $D \subseteq t$, tedy existuje $x \in D$ nejmenší prvek množiny D. Nechť tedy $y \in t$, tedy $x = y \vee x \in y$; nebo $y = t$, tedy $x \in t$; nebo $t \in y$, pak $x \in t$, $t \in y$ dává $x \in y$. Tedy x je nejmenší prvek množiny C.

3.2 Neexistence množiny všech ordinálů

Věta Neexistuje množina všech ordinálů:

$$\neg(\exists z)(\forall x)(x \text{ je ordinál } \Rightarrow x \in z) \tag{1}$$

Sporem: Nech množina z existuje. Podle vydělení pro formuli "x je ordinál"existuje $m = \{x : x \text{ je ordinál }\}$. Podle věty o ordinálch je m: tranzitivní, ostře uspořádaná relací náležení a to uspořádání je dobré. Podle definice m je ordinál, máme $m \in m$. Což je spor s bodem 3. věty o ordinálech.

3.3 Lemma o tranzitivitě a ordinalitě

Lemma Je-li a tranzitivní množina ordinálů, pak a je ordinál.

Důkaz Stačí ukázat:

1. náležení je dobré uspořádání na množině a. Mějme $x, y, z \in a$: $x \in y$, $y \in z$. Ale x, y, z jsou ordinály: podle věty o ordinálech (bod 4.) $x \in z$.
2. uspořádání je lineární (bod 3.)
3. uspořádání je dobré (bod 5.)

3.4

Věta Je-li $< A, R >$ dobře uspořádaná množina. Pak existuje právě jeden ordinál c tak, že $< A, R > \cong < c, \in >$.

Důkaz

1. Unicita: Nechť $< A, R > \cong < d, \in >$. Dostáváme, že $c \cong d$ a podle věty o ordinálech $c = d$.
2. Existence: Položme $B = \{a \in a :< (\leftarrow, R > \cong x >$ pro nějaký ordinál x $\}$. Nechť navíc f je funkce $dom(f) = B$ a splňuje

   $$(\forall a \in B) f(a) \text{ je ordinál takový, že } < (\leftarrow, a), R > \cong < f(a), \in > \tag{1}$$

   Položme $c = \text{rng}(f)$: c je množina (nahrazení pro formuli "$< (\leftarrow, a, R > \cong x$"). Podle předchozího lemmatu je c ordinál. Tedy f je izomorfismus $B \to c$. Pokud $B = A$, jsme hotovi. Jinak existuje $b \in A : B = (\leftarrow, b)$ a tedy f je izomorfismus mezi $< B, R >$ a $< c, \in >$. Tedy i $f(b)$ je definováno, ačkoli $b \notin B$, což je spor.

3.5

Definice Je-li $< A, R >$ dobře uspořádaná množina, pak typ $< A, R >$ je jediný ordinál c, pro který $< A, R > \cong c$.

Příklad $A = \{\sqrt{2}, \pi, 6, 7\} \cong 4$

Značení Malá řecká písmena $\alpha, \beta, \gamma, ...$ je ordinál. Přičemž nahradíme:

$$\alpha < \beta \text{ za } \alpha \in \beta \tag{1}$$

$$\alpha \leq \beta \text{ za } (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta) \tag{2}$$

Definice Je-li X množina ordinálů, označme:

$$\sup(X) = \bigcup X \tag{3}$$

$$\text{pro } X \neq \emptyset \text{ označme } \min(X) = \bigcap X \tag{4}$$

Lemma

1. Pro ordinály α, β platí

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta \tag{5}$$

2. Je-li X množina ordinálů, prvek $\sup(X)$ je nejmenší ordinál, který je větší nebo roven všem prvkům z X pokud $X \neq \emptyset$. Prvek $\min(X)$ je nejmenší ordinál v množině X.

Důkaz

1.

2. Podle axiomu sumy X je množina, tedy $\bigcup X$ je množina. $\bigcup X$ je ordinál:

   (a) je-li $x \in \bigcup X$, $y \in x$, musí podle axiomu sumy existovat $t \in X : x \in t$. Máme $x \in t$, $y \in x$, t je ordinál: $y \in t$. Znova podle axiomu sumy $y \in \bigcup X$. Tedy $\bigcup X$ je tranzitivní množina, je to množina ordinálů podle minulého lemmatu.

   (b) $\forall x \in X : \quad x \leq \bigcup X$
   Nechť $x \in X$ libovolné, podle věty o ordinálech nastává právě jedna z možností

$$x \in \bigcup X, x = \bigcup X, \bigcup X \in x \tag{6}$$

   Pokud $\bigcup X \in x$, máme $x = X$, pak $x \in \bigcup X$, tedy $\bigcup x \bigcup X$, spor s ordinalitou $\bigcup X$.

(c) $\bigcup X$ je nejmenší mez. Buď $t < \bigcup X$, tedy $t \in \bigcup X$. Stačí ukázat, že t není horní mezí množiny X. Protože $t \in \bigcup X$, existuje $y \in X$, že $t \in y$. Pro toto y platí $t < y$, tedy t není horní mezí množiny X.

Nechť $X \neq \emptyset$ máme dokázat, že $\min(X) = \bigcap X$ je ordinál a je nejmenší ze všech ordinálů v X. $\bigcap X$ je množina je-li $t \in \bigcap X$ a je-li $y \in t$, můžeme zvolit libovolné $x \in X$, je $t \in x$,$y \in t$, x ordinál, tedy $y \in x$. Tedy $\bigcap X$ je tranzitivní množina, podle předchozího lemmatu je $\bigcap X$ ordinál.
Zbývá dokázat, že $\bigcap X \in X$. X je neprázdná množina ordinálů, podle věty o ordinálech (bod 5) existuje nejmenší prvek množiny $x \in X$. Pro takové x platí, že kdykoliv $y \in x$, pak $x = y$ nebo $x \in y$.

$$x = \{t : t \in x\} \subseteq y \text{ pro každé } y \in X \tag{7}$$

$$x \leq \bigcap X \tag{8}$$

Opačná rovnost $x \geq \bigcap X$ je zřejmá, nebo $\bigcap X \subseteq$ platí pro všechna $y \in X$.

3.6

Definice Pro ordinál α je jeho **ordinální následník** $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Lemma Pro ordinál α je $s(\alpha)$ též ordinál, $\alpha < s(\alpha)$ a

$$(\forall \beta)(\beta \text{ ordinál } \Rightarrow (\beta < s(\alpha) \Leftrightarrow \beta \leq \alpha)) \tag{1}$$

Důkaz Je-li $x \in s(\alpha)$, pak buď $x \in \alpha$ nebo $x \in \{\alpha\}$ z definice. Což je po řadě $x < \alpha$ a $x = \alpha$.

Definice Ordinál α se nazývá **izolovaný**, jestliže $\alpha = \emptyset$ nebo $\exists \beta$ ordinál a $\alpha = s(\beta)$.

Definice Ordinál α se nazývá **limitní**, jestliže $\alpha \neq \emptyset$ a není izolovaný.

Definice $1 = s(0), 2 = s(1), 3 = s(2), ...$

Definice Ordinál α je přirozené číslo, jestliže platí

$$(\forall \beta)(\beta \leq \alpha \Rightarrow \beta \text{ je izolovaný ordinál }) \tag{2}$$

3.7 Množina všech přirozených čísel

Tvrzení Podle axiomu nekonečna:

$$(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \Rightarrow s(y) \in x)) \tag{1}$$

Pozorování Množina x, zaručená axiomem nekonečna, obsahuje všechna přirozená čísla.

Důkaz Sporem: $\exists n$ přirozené číslo takové, že $n \notin x$. Určitě $n \neq 0$ podle axiomu nekonečna. Tedy $\exists m : n = s(m)$. Je $m \in x$? Ne, kdyby bylo $m \in x$, pak i $n = s(m)$ splňuje $m \in x$, což je ve sporu s předpokladem. n je tedy přirozené číslo, tedy ordinál. Množina $x \setminus n$ je neprázdná, nebo $m \in x \setminus n$. Protože n je dobře uspořádaná a $x \setminus n$ je neprázdná, existuje nejmenší prvek $\tilde{n} \in x \setminus n$.

1. $\tilde{n} = 0$ - spor s axiomem nekonečna.
2. $\tilde{n} \neq 0$, $\exists \tilde{m} \quad \tilde{n} = s(\tilde{m})$. Protože $\tilde{n} > \tilde{m}$ musí být $\tilde{m} \in x$. Podle axiomu nekonečna $s(\tilde{m}) = \tilde{n} \in x$. Což je spor.

Definice ω je množina všech přirozených čísel. ω je ordinál (podle Lemma 3). Všechny menší ordinály než ω jsou izolované, ω sama je limitní (a to dokonce nejmenší).

Poznámka Existuje, axiom nekonečna a vydělení pro formuli "n je přirozené číslo".

Věta (Peanovy axiomy)

1. $0 \in \omega$
2. $(\forall n \in \omega)(s(n) \in \omega)$
3. $(\forall n, m \in \omega)(n \neq m \Rightarrow s(n) \neq s(m))$
4. (indukce) $\forall X \subseteq \omega$

$$((0 \in X \wedge (\forall n \in X)(s(n) \in X)) \Rightarrow X = \omega). \tag{2}$$

Důkaz Plyne z věty o ordinálech. Ve 4 předpokládeme ke sporu, že $X \neq \omega$, tedy $\omega \setminus X$ je neprázdná množina ordinálů. Tedy má nejmenší prvek n. Pokud $n = 0$ - spor, jinak $n \neq 0$, tedy $n = s(m), m \in X$ - spor.

Definice Nechť α, β jsou ordinály.

$$\alpha + \beta = typ < \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R > \tag{3}$$

kde

$$\begin{aligned} R = \{<< \xi, 0 >, <\ni, 0 >>: \xi <\ni< \alpha\} \cup & \quad (4) \\ \{<< \xi, 1 >, <\ni, 1 >>: \xi <\ni< \beta\} \cup & \quad (5) \\ \{((\alpha \times \{0\}) : (\beta \times \{1\})\} & \quad (6) \end{aligned}$$

Věta Pro libovolné ordinály α, β, γ

1. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
2. $\alpha + 0 = \alpha$
3. $\alpha + 1 = s(\alpha)$
4. $\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$
5. Je-li β je limitní ordinál, pak $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\}$

Důkaz Triviální z definice.

Poznámka Pozor, ordinální sčítání není obecně komutativní.

Definice Pro ordinály $\alpha, \beta : \alpha \cdot \beta = typ < \beta \times \alpha, R >$, kde R je lexikografické uspořádání součinu $\beta \times \alpha$, tedy:

$$<< \xi, \ni>, < \xi', \ni'>> \in R \Leftrightarrow (\xi < \xi') \vee (\xi = \xi' \wedge \ni < \ni') \tag{7}$$

Věta Pro libovolné ordinály α, β, γ platí:

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
2. $\alpha \cdot 0 = 0$
3. $\alpha \cdot 1 = \alpha$
4. $\alpha \cdot s(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
5. Je-li β limitní ordinál, pak $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\}$
6. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Poznámka Pozor:

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega \tag{8}$$
$$2 \cdot \omega = \omega \tag{9}$$

4 Kardinály

Definice Nechť a, b jsou množiny.

1. Řekneme, že mohutnost množiny a je **menší nebo rovna** mohutnosti množiny b (značíme $a \preceq b$), jestliže existuje zobrazení $f : a \to b$.

2. Řekneme, že mohutnost množiny a je **rovna** mohutnosti množiny b (značíme $a \approx b$) pokud existuje bijekce $f : a \to b$.

3. Řekneme, že mohutnost množiny a je **ostře menší** mohutnosti množiny b (značíme $a \prec b$) právě když $a \preceq b \wedge \not(a \approx b)$.

Věta

1. $x \approx x$

2. $x \approx y \Rightarrow y \approx x$

3. $(x \approx y \wedge y \approx z) \Rightarrow x \approx z$

4. $x \preceq x$

5. $(x \preceq y \wedge y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$

Věta (Kantor-Bernstein) Pro množiny a, b

$$(a \preceq b \wedge b \preceq a) \Rightarrow a \approx b \tag{1}$$

Značení $g''b = g[b] = \{g(x) : x \in b\}$

Důkaz Mějme $f : a \to b$ prosté zobrazení a $g : b \to a$ prosté zobrazení. Pokud f nebo g bijekce, je věta dokázána - nadále tedy předpokládejme, že $f''a \neq b \wedge f''b \neq a$.
(sem vlozit obrazek dvou funkci)
Pro všechna přirozená čísla definujeme indukcí $a_0 = a$, $b_0 = b$. $a_{n+1} = g''b_n, b_{n+1} = f''a_n$.
Tedy $a_1 = g''b_0 = g''b \subsetneq a = a_0$. Analogicky $b_1 = f''a_0 = f''a \subsetneq b = b_0$.
Označme

$$a_\omega = \bigcap\{a_n : n \in \omega\} b_\omega = \bigcap\{b_n : n \in \omega\} \tag{2}$$

Zobrazení $h : a \to b$ definujme předpisem

$h(x) = f(x)$ pro $x \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n} \setminus a_{2n+1} \cup a_\omega$ $h(x) = t$, kde $t \in b$ a $g(t) = x$ pro $x \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$

$h : a \to b$ je hledaná bijekce. Je zřejmé, že h je funkce a $\operatorname{dom}(h) = a$.

1. h je prosté: Nechť $x \neq y$, x,y in a. Pokud

$$x, y \in \bigcup_{n \in \omega} a_{2n} \setminus a_{2n+1} \cup a_\omega \tag{3}$$

mějme $h(x) = f(x)$, $h(y) = f(y)$, a f je prostá tedy $f(x) \neq f(y)$.
Pokud $x, y \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$
$h(x) = g^{-1}(x)$, $h(y) = g^{-1}$, g je zobrazení, tedy $h(x) \neq h(y)$.
$x \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n} \setminus a_{2n+1}$, $y \in \bigcup n \in \omega a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$

$$\exists n \quad x \in a_{2n} \setminus a_{2n+1} : h(x) = b_{2n+1} \setminus b_{2n+2} \tag{4}$$
$$\exists m \quad y \in a_{2m+1} \setminus a_{2m+2} : h(y) = b_{2m} \setminus b_{2m+1} \tag{5}$$
$$\emptyset = (b_{2n+1} \setminus b_{2n+2}) \cap (b_{2m} \setminus b_{2m+1}) \tag{6}$$
$$x \in a_\omega \quad \vee \quad h(x) \in b_\omega \tag{7}$$

2. h je surjektivní: $t \in b$.

$$t \in b_{2m} \setminus b_{2n+1} \tag{8}$$

Pak $g(t) \in a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$. Pro $x = g(t)$ máme $h(x) = t$. Nebo:

$$t \in b_{2n+1} \setminus b_{2n+2} \tag{9}$$

Pak $b_{2n+1} = f''a_{2n}$ a $\exists x \in a_{2n} f(x) = t$, $h(x) = t)$. Nebo:

$$t \in b_\omega \subseteq b_0 = f''a \tag{10}$$

Existuje takové x, že $f(x) = t$. Pro toto x je $x \in a_\omega$. $h(x) = t$.

Definice Nechť A je množina. Pokud na A existuje dobré uspořádání, pak položme $|A|$ = nejmenší ordinál α, pro který $A \approx \alpha$.

Definice Ordinál α se nazývá **kardinál** pokud $\alpha = |\alpha|$. Ekvidalentně ordinál α je kardinál, právě když

$$(\forall \beta)(\beta < \alpha \Rightarrow \not(\beta \approx \alpha)) \tag{11}$$

Pozorování ω je kardinál. $\omega + k$ není kardinál (všechny jsou ostře větší než omega a mezi nima a omegou existuje bijekce).

Lemma Je-li $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$, pak $|\beta| = |\alpha|$.

Důkaz $\beta \subseteq \alpha$, tedy existuje prosté zobrazení $\beta do \alpha$. Máme $\beta \preceq \alpha$. $\alpha \approx |\alpha|$, konečně $|\alpha| \subseteq \beta$, tedy $|\alpha| \preceq \beta$. Aplikuji Kantorovu větu.

Lemma Je-li n přirozený číslo, potom:

(a) $nn + 1$

(b) $(\forall \alpha)(\alpha \approx n \Rightarrow \alpha = n)$

Důkaz

(a) Indukcí: 01. Pokud existuje taková n, že $n \approx n+1$, pak $n \neq 0$ a tedy pro nějaké m, $n = m + 1$. Tedy:

$$n = \{0, 1, 2, ..., n\} \tag{12}$$
$$n + 1 = \{0, 1, 2, ..., m, m + 1\} \tag{13}$$

Je-li b bijekce $b : n \to n + 1$, pak existuje $i \in n : b(i) = m + 1$. Definujme $b' : m \to m + 1$: Pro $j < i : b'(j) = b(j)$, pro $j > i : b'(j) = b(j - 1)$. Tedy b' je bijekce $m \to m + 1$, což je spor s minimalitou n. (ten předpis je asi špatně, chce to promakat)

Důsledek Všechna přirozená čísla jsou kardinály a ω je kardinál.

Definice Množina A je **konečná** pokud $|A| < \omega$. Množina A je **spočetná**, pokud $|A| \leq \omega$. Množina A se nazývá nespočetná, pokud není spočetná (tj. je velká, nebo jí nelze dobře uspořádat).

4.1 Sčítání a násobení

Definice Jsou-li κ, λ kardinály, pak:

(a) $\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$

(b) $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$

Poznámka Oproti ordinálnímu sčítání a násobení jsou kardinální operace komutativní.

Lemma Pro $n, m \in \omega$:

$$n \oplus m = n + m < \omega n \otimes m = n \cdot m < \omega \tag{1}$$

Důkaz Stačí ukázat, že $n + m < \omega$ a že $n \cdot m < \omega$. Zbytek je aplikace posledního lemmatu.
Indukcí pro sčítání:

(a) $n + 0 = n < \omega$

(b) $n + s(m) = s(\underbrace{n + m}_{<\omega}) < \omega$

Stejnětak pro násobení:

(a) $n \times 0 = 0 < \omega$

(b) $n \times s(m) = \underbrace{n \cdot m}_{<\omega} + n < \omega$

Věta Každý nekonečný kardinál je limitní ordinál.

Důkaz Sporem: buď κ kardinál a $\kappa = \alpha + 1$. Jenomže $\alpha \geq \omega$, tedy $1 + \alpha = \alpha$. Tedy $\kappa = |\kappa| = |1 + \alpha| = |\alpha| < \kappa$, což je spor.