# Teorie množin

Ladislav Láska

9. března 2010

# Obsah

# 1 Formální jazyk

## 1.1 Základní součásti jazyka

1. proměnné
2. binární predikátový symbol $\in$
3. binární predikátový symbol $=$
4. logické spojky $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$
5. kvantifikátory $(\forall x)$, $(\exists x)$
6. pomocné symboly - závorky

## 1.2 Formule

1. Nechť $x$, $y$ jsou prvky množiny, pak $(x \in y)$ a $(x = y)$ jsou atomické formule.
2. Nechť výrazy $\varphi, \psi$ jsou formule, potom: $\neg\varphi$, $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jsou formule.

==============================================================
Tedy toho hodne chybi
==============================================================

# 2 Axiomy teorie množin

## 2.1 Průnik a rozdíl množin

**Definice** Pro množiny a,b po řadě průnikem a rozdílem nazýváme množinu:

$$a \cup b = \{x : x \in a \wedge x \in b\} \tag{1}$$
$$a \setminus b = \{x : x \in a \wedge x \notin b\} \tag{2}$$

Existuje množina a (Axiom existence), podle vydělení pro formuli $x \neq x$ existuje a podle extenziability je jediná množina $\{x \in a : a \neq x\}$.

**Definice** $\emptyset$ je jediná množina y splňující:

$$(\forall x)(x \notin y) \tag{3}$$

A nazýváme jí **prázdná množina**.

## 2.2 Disjunkní množina

**Definice** Říkáme, že množina a,b jsou disjunkní, že je-li $a \cup b = 0$.

**Lemma**

1. $\neg(\exists y)(y \in \emptyset)$
2. $(\forall x)(\emptyset \subset x)$
3. $x \subset \emptyset \Leftrightarrow x = 0$

**Lemma**

$$(\forall a)a = \{x : x \in a \wedge x = x\} \tag{1}$$

## 2.3 Russelův paradox

**Věta**

$$\neg(\exists z)(\forall x)(x \in z) \tag{1}$$

**Důkaz** Sporem: nechť $z$ je taková množina. Pak mějme formuli $\varphi(x) \quad x \neq x$. Potom podle axiomu vydělení pro tuto formuli máme $t = \{x \in z : x \notin x\}$, tedy $t$ je množina. Protože $t$ je množina a $z$ je množina všech množin. Protože $t \in z$, $t \in t \Leftrightarrow t \notin t$. Tedy neexistuje množina všech množin.

## 2.4 Axiom dvojce

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \tag{1}$$

**Definice** Jsou-li $a, b$ množiny, pak množinu se stávající z prvků $a, b$ nazveme **neuspořádanou dvojcí** množin $a, b$ a značíme $\{a, b\}$. Pro $a \neq b$ říkáme, že $\{a, b\}$ dvouprvková, jinak jednoprvková.

### 2.4.1 Rovnost množin

**Lemma**

1. $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x = y$
2. $\{x\} = \{x, y\} \Leftrightarrow x = y$
3. $\{x, y\} = \{u, v\} \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v) \vee (x = v \wedge y = u)$

### 2.4.2 Uspořádaná dvojce, k-tice

**Uspořádaná dvojce** množin $a, b$ je množina, která má prvky $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Značíme jí $< a, b >$.

**Lemma**

$$< x, y >=< u, v >\Leftrightarrow (x = u \wedge y = v) \quad (1)$$

**Definice** Jsou-li dány množiny $a_1, a_2, ..., a_k$, pak uspořádanou $k - tici$ definujeme jako:

$$< a_1 >= a_1, \text{ a dál indukcí} \quad (2)$$

$$< a_1, a_2, ..., a_k >=<< a_1, ..., a_{k-1} >, a_k > \quad (3)$$

**Lemma**

$$< a_1, ..., a_k >=< b_1, ..., b_k > \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \quad (5)$$

$$(a_1 = b_1) \wedge ... \wedge (a_k = b_k) \quad (6)$$

## 2.5 Axiom sumy

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)) \quad (1)$$

**Značení**

$$\bigcup a = \{x : (\exists y)(y \in a \wedge x \in y)\} \quad (2)$$

**Značení** Nechť $a = \{b, c\}$. Pak $\bigcup a = b \cup c$

### 2.5.1 Neuspořádané $k$-tice

**Značení** Neuspořádaná $k$-tice je:

$$\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\} \quad (1)$$

### 2.5.2 Průnik

**Definice** Pro neprázdnou množinu $a$ lze analogicky definovat

$$\bigcap a = \{x : (\forall y)(y \in a \Rightarrow x \in y)\} \quad (1)$$

Pro neprázdnou a existuje $\bigcap a$:

$$a \neq 0 \quad (\exists x) x \in a, \quad x = x_0 \quad (2)$$

$$a = 0 \quad \bigcap a \text{ není definovaný} \quad (3)$$

## 2.6 Schéma axiomu nahrazení

Je-li $\psi(u,v)$ formule, která neobsahuje volně proměnné $z, w$, potom formule:

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)(\psi(u,v) \wedge \psi(u,w) \Rightarrow v = w) \Rightarrow \quad (1)$$
$$(\forall a)(\exists z)(\forall v)(v \in z \Leftrightarrow (\exists u)(u \in a \wedge \psi(u,v))) \quad (2)$$

je axiom teorie množin.

**Pozorování** Pro jedno $u$, $\psi(u,v)$ platí pro nejvýše jedno $v$. To je analogie k funkci.

**Definice** Nechť $a, b$ jsou množiny. **Kartézský součin** $a \times b$ je množina:

$$a \times b = \{< x, y >: x \in a \wedge y \in b\} \quad (3)$$

**Důkaz** $a \times b$ je množina. Zvolme a zafixujme $y \in b$ a nechť $\psi(x,v)$ je formule $v =< x, y >$. Je-li:

$$\psi(x,v) \wedge \psi(x,w) \Rightarrow v =< x, y > \wedge w =< x, y > \Rightarrow v = w \quad (4)$$

Tedy je splněn předpoklad axiomu nahrazení (1) pro formuli $\psi$.

$$M_y = \{< x, y >: x \in a\} \quad (5)$$

je množina podle nahrazení pro $\psi$ pro každé $y$.
Nechť navíc $\overline{\psi}(y,v)$ je formule $v = M_y$. Je-li:

$$\overline{\psi}(y,v) \wedge \overline{\psi}(y,w) \Rightarrow v = M_y \wedge w = M_y \Rightarrow v = w \quad (6)$$

Tedy je splněn předpoklad axiomu nahrazení (1) pro formuli $\overline{\psi}$. Navíc tedy

$$D = \{M_y : y \in b\} \text{ je množina} \quad (7)$$
$$\bigcup D = \{< x, y >: x \in a, y \in b\} = a \times b \quad (8)$$

### 2.6.1 Binární relace

**Definice** **Binární relace** je množina $R$, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojce.

$$\mathrm{dom}(R) = \{x : (\exists y) < x, y > \in R\} \text{ je definiční obork } \mathrm{rng}(R) = \{y : (\exists x) < x, y > \in R\} \text{ je obor hodnot} \quad (1)$$

Protože $R$ je množina, $\mathrm{dom}(R)$ i $\mathrm{rng}(R)$ jsou množiny.

**Definice** Je-li $R$ relace, definujeme:

$$R^{-1} = \{< x, y >:< y, x > \in R\} \quad (2)$$

Pro každou relaci $R$, $R^{-1}$ je relace a $(R_{-1})^{-1} = R$.

**Definice** Jsou-li $R, S$ relace, pak

$$R \circ S = \{< x, z >: (\exists y) < x, y > \in R \wedge < y, z > \in S\} \tag{3}$$

**Definice** Jsou-li $R, S, T$ relace, pak

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R) \tag{4}$$

### 2.6.2 Funkce

Množina $f$ se nazývá **funkce**, pokud $f$ je relace a platí:

$$(\forall x \in \operatorname{dom}(f))((y \in \operatorname{rng}(f) \wedge y \in \operatorname{rng}(f) \wedge < x, y > \in f \wedge < x, y' > \in f) \Rightarrow y = y') \tag{1}$$

**Značení** $f : A \to B$ znamená: $f$ je funkce, $A = \operatorname{dom}(f)$, $B \supset \operatorname{rng}(f)$.
Je-li $C \subseteq A$, pak $f \Gamma C = f \cap (C \times B)$ nazýváme $x$ zůžením funkce $f$ na množinu $C$.

$$f'C = \operatorname{rng}(f \Gamma C) = \{f(x) : x \in C\} \tag{2}$$

Funkce $f : A \to B$ se nazývá **prostá**, pokud $f^{-1}$ je funkce.

Funkce $f : A \to B$ se nazývá **surjektivní** (”na”), jestliže $B = \operatorname{rng}(f)$

Funkce $f$ se nazývá **bijekce** je-li **surjektivní** a současně **prostá**.

## 2.7 Uspořádání

**Definice** **Ostře uspořádaná množina** je uspořádaná dvojce $< a, r >$, kde $a$ je množina a $r$ je relace, $r \subseteq a \times a$. Přičemž r splňuje:

$$\forall x, y, z \in a : \quad < x, y > \in r \wedge < y, z > \in r \Rightarrow < x, z > \in r \quad \text{tranzitivita} \tag{1}$$
$$\forall x \in a : \quad \not< x, x > \in r \quad \text{antireflexivita} \tag{2}$$

Pro zjednodušení místo $< x, y > \in r$ píšeme $xry$.

**Definice** Ostré uspořádání $r$ nazveme **lineárním**, pokud

$$\forall x, y \in a : \quad x = y \vee xry \vee yrx \tag{3}$$

**Definice** Jsou-li $R$, $S$ relace a $a$, $b$ množiny, pak řekneme, že $< a, R >$ je izomorfní s $< b, S >$, pokud existuje bijekce $f : a \to b$ taková, že

$$\forall x, y \in a : \quad < x, y > \in \mathbb{R} \Leftrightarrow < f(x), f(y) > \in S \tag{4}$$

a zobrazení $f$ se nazývá **izomorfismus**.

**Definice** Mějme uspořádanou množinu $< a, r >$. Je-li $m \subset a$, pak řekneme, že $x \in a$ je **r-nejmenší** prvek množiny $m$, jestliže platí:

$$x \in m \wedge (\forall Y)(y \in m \Rightarrow (xry \vee y = x)) \tag{5}$$

Je-li $m \subseteq a$, $x \in a$, řekneme, že $x$ je **minimální** prvek množiny $m$, jestliže platí

$$x \in m \wedge (\forall y)(y \in m \Rightarrow \not(yrx)) \tag{6}$$

**Definice** Řekneme, že uspořádání $r$ na množině a je **dobré** (množina $< a, r >$ je dobře uspořádaná) jesltiže $r$ je ostré uspořádání množiny $a$ a každá neprázdná podmnožina $a$ má r-nejmenší prvek.

**Pozorování** Je-li $< a, r >$ dobře uspořádaná, pak je $r$ lineární uspořádání. $x, y \in a \quad \{x, y\} \subseteq a$ a $\{x, y\}$ má r-nejmenší prvek. Je-li to $x$, pak $xry \vee x = y$. Pokud je to $y$, pak $yrx \vee y = x$.

**Značení** Nechť $< a, r >$ je uspořádaná množina a $x \in a$. Označme $< (\leftarrow, x), r >$ jako:

$$(\leftarrow, x) = \{y \in a : yrx\} \tag{7}$$

**Lemma 1** Je-li $< a, r >$ dobře uspořádaná množina, pak pro každé $x \in a \quad < a, r >$ není izomorfní s $< (\leftarrow, x), r >$

**Důkaz** Sporem: Předpokládejme, že existuje izomorfismus $f :< a, r > \to < (\leftarrow, x), r >$. Definujme $m = \{y \in a : f(y) \neq y\}$. $x \neq (\leftarrow, x)$, tedy $f(x) \neq x \Rightarrow m \neq \emptyset$. $< a, r >$ je tedy dobře uspořádaná, tedy musí existovat $t$ r-nejmenší prvek množiny $m$. Máme pro všechna $zrt$, platí že $f(z) = z$.

1. $f(t)rt$ ale $f(t)rt$ máme $f(t) \neq t$, $f(f(t)) = f(t)$, **spor**: $f$ není prosté.
2. $trf(t)$: kdykoliv $zrt \Rightarrow f(z)rt$, protože $f(z) = z$. Navíc kdykoliv $trz \Rightarrow f(t)rf(z)$ protože $f$ je izomorfismus. Tedy $trf(t)$ , $t \in (\leftarrow, x) \Rightarrow t \neq \operatorname{rng}(f)$, tedy $f$ není zobrazení **na**, což je **spor**.

**Lemma 2** Jsou-li $< a, r >, < b, s >$ dvě dobře uspořádané množiny, které jsou izomorfní, pak mezi nimi existuje **jediný** izomorfismus.

**Důkaz** Sporem: Nechť $f, g : a \to b$ jsou dva různé izomorfismy. Tedy existuje nějaké $x \in a : f(x) \neq g(x)$. Tedy množina $m = \{t \in a : f(t) \neq g(t)\}$ je neprázdná (obsahuje $x$) a $< a, r >$ je dobře uspořádaná, tedy existuje nejmenší prvek $t$ množiny $m$. Zřejmě platí, že kdykoliv $yrt$, pak $f(y) = g(y)$.

1. $f(t)sg(t)$. Pokud $trz$, protože $g$ je izomorfismus, musí platit, že $g(t)sg(z)$. Pokud $zrt$, pak $f(z) = g(z) \Rightarrow f(z)sf(t) \Rightarrow g(z)sf(t) \Rightarrow g(t) \neq f(t)$. Tedy $f(t) \notin \mathrm{rng}(g)$, tedy není **na**.

2. $g(t)sf(t)$ analogicky.

**Věta** Nechť $< a, R >$ a $< b, S >$ dvě dobře uspořádané množiny. Potom nastává právě jedna z následujícíh možností:

1. $< a, R > \cong < b, S >$ (je izomorfní)
2. $\exists y \in b : \quad < a, R > \cong < (\leftarrow, y), S >$
3. $\exists x \in a : \quad < (\leftarrow, x), R > \cong < b, S >$

**Důkaz** Položme

$$f = \{< v, w >: v \in a \wedge w \in b \wedge < (\leftarrow, v), R > \cong < (\leftarrow, w), S >\} \tag{8}$$

1. $f$ je zobrazení: nechť $< v, w > \in f$, $< v, w_1 > \in f$. Máme:

   $$< (\leftarrow, w), S) \cong < (\leftarrow, v), R > \cong < (\leftarrow, w_1), S > \tag{9}$$

   tedy

   $$< (\leftarrow, w), S > \cong < (\leftarrow, w_1), S > \tag{10}$$

   a podle Lemma 1 $w = w_1$.

2. $f$ je prosté:

   $$< v, w > \in f, < v_1, w > \in f \tag{11}$$
   $$< (\leftarrow, R > \cong < (\leftarrow, w), S > \cong < (\leftarrow, v), R > \tag{12}$$

   a podle Lemma 1 $v = v_1$

3. $f$ zachovává uspořádání:

   $$< v, w > \in f, \quad < v_1, w_1 > \in f \tag{13}$$

   Nechť $vRv_1$. Máme $< (\leftarrow, v_1), R > \cong < (\leftarrow, w_1), S >$. Nechť $g :< (\leftarrow, v_1), R > \to < (\leftarrow, w_1), S >$ je izomorfismus. Je $vRv_1$, $g(v)$ protože $g$ je izomorfismus:

   $$< (\leftarrow, v), R > \cong < (\leftarrow, g(v)), S > \tag{14}$$

   z definice $f$. Podle Lemma 2 existuje izomorfismus jediný, ktedy $w = g(v)Sw_1$. Analogicky: pokud $wSw_1$, potom $vRv_1$.

Zřejmě platí, že pokud $< v, w > \in f$, pak $f\Gamma(\leftarrow, v)$ je izomorfismus mezi $< (\leftarrow, v), R >$ a $< (\leftarrow, w), S >$.
Položme:

$$m = \{v \in a : \forall w \in b \quad < v, w > \notin f\} o = \{w \in b : \forall v \in a \quad < v, w > \notin f\} \tag{15}$$

Můžou nastat případy:

(a) $m = o = \emptyset$. Nastal případ, že $< a, R > \cong < b, S >$ podle $f$.

(b) $m = \emptyset \neq o$. Množina $< b, S >$ je dobře uspořádaná, tedy existuje $y \in b$, $y$ je S-nejmenší prvek množiny $o$. V tom případě $f$ je izomorfismus mezi $< a, R >$ a $< (\leftarrow, y), S >$.

(c) $m \neq \emptyset = o$. Existuje $x$ R-nejmenší prvek množiny $m$ a $< (\leftarrow, x), R > \cong (b, S)$ a $f$ je hledaný izomorfismus.

(d) $m \neq \emptyset \neq o$, což je ale ve sporu s definicemi $o$ a $m$.

## 2.8 Ordinály

**Definice** Množina $x$ se nazývá **tranzitivní**, pokud platí

$$\forall y : y \in x \Rightarrow y \subseteq x \tag{1}$$

**Definice** Množina $x$ je **ordinál**, pokud $x$ je tranzitivní a dobře uspořádaná relací $\in$.

**Příklad** 0 je ordinál
{ 0, {0}, {{0}}} je tranzitivní, ale náležení neuspořádává - není ordinál.
{ 0, {0}, {0, {0}, {0, {0 } } } } je ordinál, obvykle se značí 4.