Státnice – Informatika – I4
Diskrétní modely a algoritmy

Kombinatorická optimalizace

Ladislav Láska
Jan Musílek

23. května 2015

Obsah

1 Grafové algoritmy

2 Algebraické a aritmetické algoritmy

3 Teorie mnohostěnů

4 Problém obchodního cestujícího

5 Speciální matice

6 Celočíselnost

7 Párování a toky v sítích

8 Teorie matroidů

Matroid je struktura v kombinatorice, která zobecňuje koncept „nezávislosti", jehož konkrétním příkladem je lineární nezávistlost ve vektorových prostorech. Existuje mnoho ekvivalentních způsobů jak zavést matroidy, nejvýznamnějšími jsou nezávislé množiny, báze, kružnice a ranková funkce. Teorie matroidů si často vypůjčuje teminologii z lineární algebry a teorie grafů.

8.1 Definice přes nezávislé množiny

Definice Matroid M je dvojice (S, I), kde S je konečná množina (nazýváme ji *nosná množina* a $I \subset 2^S$ je množina podmnožin S (nazýváme je nezávislé množiny), splňující následující vlastnosti:

1. Prázdná množina je nezávislá, tedy $\emptyset \in I$
2. Každá podmnožina nezávislé množiny je nezávislá, tedy pro každé $A' \subseteq A \subseteq S$ platí $A \in I \Rightarrow A' \in I$. Tato vlastnost se nazývá *dědičnost*.
3. Pokud A a B jsou dvě nezávislé množiny z I, $|A| > |B|$, pak existuje prvek $x \in A \setminus B$ tž. $B \cup \{x\}$ je nezávislá. Tato vlastnost se nazývá *výměnná vlastnost*.

Definice Podmnožina S, která není v I se nazývá *závislá*. Maximální nezávislá množina (po přidání libovolného prvku se stane závislou) se nazývá *báze*. Naopak minimální závislou množinu (po odebrání libovolného prvku se stane nezávislou) nazýváme *kružnice*.

Poznámka Grafová analogie: S je množina hran grafu, I je množina všech lesů na hranách S. Báze odpovídá kostře grafu G, kružnice cyklu v grafu G.

Poznámka Vektorová analogie: S je množina sloupců matice. Nezávislé množiny jsou pak právě lineárně nezávislé množiny vektorů z S. Báze matroidu odpovídaji bázím vektorového prostoru.

8.2 Definice přes báze

Definice Matroid M je dvojice $(S, \mathcal{B})$, kde S je konečná množina a $\mathcal{B}$ je množina podmnožin S (tyto podmnožiny nazýváme báze), splňující následující vlastnosti:

1. $\mathcal{B}$ je neprázdná.
2. Když $A, B \in \mathcal{B}$ jsou různé a $a \in A \setminus B$, pak existuje $b \in B \setminus A$ tž. $A \setminus \{a\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}$.

Pozorování Tato definice je ekvivalentní s definicí přes nezávislé množiny. Nezávislé množiny jsou právě podmnožiny bází.

8.3 Definice přes kružnice

Definice Matroid M je dvojice $(S, \mathcal{C})$, kde S je konečná množina a $\mathcal{C}$ je množina podmnožin S (tyto podmnožiny nazýváme kružnice), splňující následující vlastnosti:

1. $\emptyset \notin \mathcal{C}$
2. Pokud A i B jsou kružnice, pak $A \subseteq B \Rightarrow A = B$.
3. Když A i B jsou kružnice a $e \in A \cap B$, pak existuje kružnice v $A \cup B$, která neobsahuje e.

Pozorování Tato definice je ekvivalentní s definicí přes nezávislé množiny. Nezávislé množiny jsou právě ty, které neobsahují žádnou kružnici.

8.4 Definice přes rankovou funkci

Definice Ranková funkce je zobrazení $r : 2^S \to \mathbb{N}$, která každé podmnožině S přiřadí velikost její největší nezávislé podmnožiny.

Definice Matroid M je dvojice (S, r), kde S je konečná množina a $r : 2^S \to \mathbb{N}$ je ranková funkce, splňující následující vlastnosti:

1. $0 \leq r(X) \leq |X|$
2. $X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$
3. $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Pozorování Tato definice je ekvivalentní s definicí přes nezávislé množiny. Nezávislé množiny jsou právě ty, kde $r(X) = |X|$.

8.5 Přehled jednoduchých vlastností

Tvrzení Všechny báze matroidu M mají stejnou velikost $r(M)$. Toto číslo označujeme jako rank matroidu M. V grafech je zjevně $r(G) = n - k$, kde n je počet vrcholů a k počet komponent.

Definice Duální matroid M^* definujeme tak, že jeho báze jsou doplňky bází M. Pak zjevně platí $M^{**} = M$.

9 Elipsoidová metoda