Krožnica v racionalni Bezierjevi obliki

Anja Kišek, Samo Kralj

13. januar 2019

Vsebina:

- Definicija racionalnih Bezierjevih krivulj
- Konstrukcija sklenjene krožnice s krivuljami stopnje 2,3,4
- Krožni loki v racionalni Bezierjevi obliki
- Kubični polkrogi

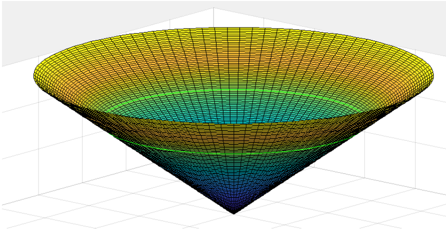
Racionalna Bezierjeva krivulja $C(t)$ stopnje n v $\mathbb{R}^d$ je projekcija polinomske Bezierjeve krivulje $\tilde{C}(t)$stopnje n v $\mathbb{R}^{d+1}$ na hiperravnino $w = 1$, kjer je točka v $\mathbb{R}^{d+1}$ označena z $\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$.

Racionalna B. krivulja stopnje n je tako podana s predpisom

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}$$

Racionalna krivulja $C(t) = (X(t), Y(t))$ lahko eksaktno opiše krožnico kot projekcijo krivulje $\tilde{C}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), W(t))$, ki leži na stožcu, na ravnino $w = 1$.

$$X(t)^2 + Y(t)^2 = 1$$
$$\left(\frac{\tilde{X}(t)}{W(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{Y}(t)}{W(t)}\right)^2 = 1$$
$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$$



Bezierjeva krivulja kot sklenjena krožnica

Ali lahko krožnico zapišemo kot racionalno Bezierjevo krivuljo določene stopnje?

- Kvadratična krivulja: Ne
  Zlepek krožnih lokov s kontrolnimi točkami:

$$\tilde{P}_0 = (cos(\phi), -sin(\phi), 1)$$
$$\tilde{P}_1 = (1, 0, cos(\phi))$$
$$\tilde{P}_2 = (cos(\phi), sin(\phi), 1)$$

- Kubična krivulja: Ne

- Krivulja 4. stopnje: reševanje sistema 9 enačb

$$\begin{aligned}\tilde{y}_3 + \tilde{y}_1 &= 0\\ \tilde{x}_3 + \tilde{x}_1 &= 0\\ 3\tilde{x}_2 + 4\tilde{y}_1^2 - 3w_3 &= 0\\ \tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{y}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_1 w_2 &= 0\\ 9\tilde{x}_2^2 - 8\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 - 9w_2^2 &= 0\end{aligned}$$

Za $\alpha = (\frac{3w_2}{2} - \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ dobimo dva kontrolna poligona

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= (1, 0, 1)\\ \tilde{P}_1 &= (\tilde{x}_1, \pm\alpha, \tilde{x}_1)\\ \tilde{P}_2 &= (-\frac{3w_2 - 4\tilde{w}_1^2 + 2}{3}, \pm\frac{3}{4}\tilde{x}_1\alpha, w_2)\\ \tilde{P}_3 &= (-\tilde{x}_1, \mp\alpha, -\tilde{x}_1)\\ \tilde{P}_4 &= (1, 0, 1)\end{aligned}$$

- Krivulja 4. stopnje: uteži so lahko negativne ali ničelne
- Krivulja 5. stopnje: s pomočjo višanja stopnje
  Primer:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0 &= (1, 0, 1)\\
\tilde{P}_1 &= (0, 1, 0)\\
\tilde{P}_2 &= (-1, 0, 1/3)\\
\tilde{P}_3 &= (0, -1, 0)\\
\tilde{P}_4 &= (1, 0, 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0 &= (1, 0, 1)\\
\tilde{P}_1 &= (1/5, 4/5, 1/5)\\
\tilde{P}_2 &= (-3/5, 2/5, 1/5)\\
\tilde{P}_3 &= (-3/5, -2/5, 1/5)\\
\tilde{P}_4 &= (1/5, -4/5, 1/5)\\
\tilde{P}_5 &= (1, 0, 1)
\end{aligned}$$

Racionalni kubični krožni loki

Zanima nas, kakšne krožne loke lahko opišemo s kubično racionalno bezierjevo krivuljo pri pogoju, da bodo vse uteži pozitivne. Kako pridemo do enačb kontrolnih točk?

$$X(t)^2 + Y(t)^2 - W(t)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} X(t) &= x_0 B_0^3(t) + x_1 B_1^3(t) + x_2 B_2^3 + x_3 B_3^3 = \\ &= x_0 \binom{3}{0}(1-t)^3 + x_1 \binom{3}{1} t(1-t)^2 + x_2 \binom{3}{2} t^2(1-t) + x_3 \binom{3}{3} t^3 \end{aligned}$$

Racionalni kubični krožni loki

$$\begin{aligned} x_0(1-t)^3 \cdot 3x_2 t^2(1-t) &= \\ 3x_0x_2 \cdot t^2(1-t)^4 &= \\ 3x_0x_2 \frac{\binom{6}{2}}{\binom{6}{2}} t^2(1-t)^4 &= \\ 3x_0x_2 \frac{1}{15}\binom{6}{2} t^2(1-t)^4 &= \\ \frac{1}{5}x_0x_2 B_2^6(t) & \end{aligned}$$

V splošnem:

$$B_i^n(t) \cdot B_j^m(t) = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} B_{i+j}^{n+m}(t)$$

Racionalni kubični krožni loki

Lahko privzamemo, da sta

$$\tilde{P_0} = (\cos\theta, -\sin\theta, 1)$$
$$\tilde{P_3} = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

kjer je θ polovica loka, ki ga želimo opisat. Potrebujemo še

$$\tilde{P_1} = (\tilde{x_1}, \tilde{y_1}, w_1)$$
$$\tilde{P_2} = (\tilde{x_1}, \tilde{y_1}, w_1)$$

Racionalni kubični krožni loki

Dobimo sistem 5 enačb za 6 neznank:

$$w_1 = \cos\theta \tilde{x_1} - \sin\theta \tilde{y_1}$$

$$w_2 = \cos\theta \tilde{x_2} + \sin\theta \tilde{y_2}$$

$$3(\sin\theta)^2 \tilde{x_1}^2 + 3(\cos\theta)^2 \tilde{y_1}^2 - 4\sin\theta \tilde{y_2} + 6\sin\theta\cos\theta \tilde{x_1}\tilde{y_1} = 0$$

$$3(\sin\theta)^2 \tilde{x_2}^2 + 3(\cos\theta)^2 \tilde{y_2}^2 + 4\sin\theta \tilde{y_1} - 6\sin\theta\cos\theta \tilde{x_2}\tilde{y_2} = 0$$

$$\begin{aligned} 9\sin^2\theta \tilde{x_1}\tilde{x_2} + 9\cos\theta\sin\theta \tilde{y_1}\tilde{x_2} - \\ -9\cos\theta\sin\theta \tilde{x_1}\tilde{y_2} + 9(1+\sin^2\theta)\tilde{y_1}\tilde{y_2} - 2\sin^2\theta = 0 \end{aligned}$$

Racionalni kubični krožni loki

Izrek : Vsi kubični racionalni krožni loki so oblike

$$C(t) = \frac{(X\tilde{(}t), Y\tilde{(}t))(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))}{W(t)(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))}$$

kjer je

$$\frac{(X\tilde{(}t), Y\tilde{(}t))}{W(t)}$$

kvadratični racionalni krožni lok.

Racionalni kubični krožni loki

Zmnožimo $W(t)(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))$ in dobimo uteži:

$$
\begin{aligned}
w_0' &= a \\
w_1' &= \frac{2\cos\theta}{3\sqrt{b}} + \frac{b}{3} \\
w_2' &= \frac{2\sqrt{b}\cos\theta}{3} + \frac{1}{3b} \\
w_3' &= bw_2
\end{aligned}
$$

Dobimo pogoja $\cos\theta \geq -\frac{b^{3/2}}{2}$ ter $\cos\theta \geq -\frac{1}{2b^{3/2}}$.
Maksimalen $\theta = \frac{3\pi}{2}$ dobimo pri $b = 1$.

Konstrukcija kubične polkrožnice

Želimo konstruirati polovico krožnice. Spomnimo se enačb za kontrolne točke kubčnih bezierjevih krožnih lokov:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \cos\theta \tilde{x_1} - \sin\theta \tilde{y_1} \\
w_2 &= \cos\theta \tilde{x_2} + \sin\theta \tilde{y_2} \\
3(\sin\theta)^2 \tilde{x_1}^2 + 3(\cos\theta)^2 \tilde{y_1}^2 - 4\sin\theta \tilde{y_2} + 6\sin\theta\cos\theta \tilde{x_1}\tilde{y_1} &= 0 \\
3(\sin\theta)^2 \tilde{x_2}^2 + 3(\cos\theta)^2 \tilde{y_2}^2 + 4\sin\theta \tilde{y_1} - 6\sin\theta\cos\theta \tilde{x_2}\tilde{y_2} &= 0 \\
9\sin^2\theta \tilde{x_1}\tilde{x_2} + 9\cos\theta\sin\theta \tilde{y_1}\tilde{x_2} - \\
-9\cos\theta\sin\theta \tilde{x_1}\tilde{y_2} + 9(1+\sin^2\theta)\tilde{y_1}\tilde{y_2} - 2\sin^2\theta &= 0
\end{aligned}
$$

Konstrukcija kubične polkrožnice

Vstavimo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$
\begin{aligned}
w_1 &= -\tilde{y}_1 \\
w_2 &= \tilde{y}_2 \\
3\tilde{x}_1^{\,2} - 4\tilde{y}_2 &= 0 \\
3\tilde{x}_2^{\,2} + 4\tilde{y}_1 &= 0 \\
9\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 18\tilde{y}_1\tilde{y}_2 - 2 &= 0
\end{aligned}
$$

Konstrukcija kubične polkrožnice

Označimo $\alpha = \frac{3\tilde{x_1}}{2}$ in dobimo rešitev:

$$
\begin{aligned}
\tilde{P_0} &= (0, -1, 1) \\
\tilde{P_1} &= (\frac{2\alpha}{3}, -\frac{1}{3\alpha^2}, \frac{1}{3\alpha^2}) \\
\tilde{P_2} &= (\frac{2}{3\alpha}, \frac{\alpha^2}{3}, \frac{\alpha^2}{3}) \\
\tilde{P_3} &= (0, 1, 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_0 &= (0, -1) \\
P_1 &= (2\alpha^3, -1) \\
P_2 &= (\frac{2}{\alpha^3}, 1) \\
P_3 &= (0, 1) \\
w &= (1, \frac{1}{3\alpha^2}, \frac{\alpha^2}{3}, 1)
\end{aligned}
$$

Konstrukcija kubične polkrožnice

- Narišemo premici $y = 1$ in $y = -1$
- Potegnemo poljubno tangento na enotsko krožnico
- Z x_1 in x_2 označimo presečišča te tangente z $y = 1$ in $y = -1$.
- Točke $(0, -1), (2x_1, -1), (2x_2, 1)$ in $(0, 1)$ so kontrolne točke racionalne bezierjeve krivulje, ki nariše polovico krožnice, skupaj z utežmi $(1, \frac{1}{3x_1^{2/3}}, \frac{1}{3x_2^{2/3}}, 1)$.