

Krožnica v racionalni Bezierjevi obliki

Seminar pri predmetu RPGO

Samo Kralj, Anja Kišek
Fakulteta za matematiko in fiziko

januar 2019

1 Uvod

V seminarski nalogi bova predstavila racionalne Bezierjeve krivulje ter njihovo uporabo pri risanju krožnic in krožnih lokov. Za razliko od polinomskih Bezierjevih krivulj, ki krožni lok lahko le poljubno dobro aproksimirajo, ga racionalne krivulje opišejo eksaktno. Pri njihovi obravnavi se je zavaljo implementacije in uporabe koristno osredotočiti na pozitivnost uteži krivulje, zato se bova poskušala omejiti le na primere, kjer se to da doseči.

V prvem poglavju bova predstavila racionalne Bezierjeve krivulje ter nekaj njihovih lastnosti. Drugo poglavje bo namenjeno konstrukciji sklenjene krožnice s pomočjo racionalne krivulje čim nižje stopnje, v tretjem pa bova ugotovljeno aplicirala na primeru krožnih lokov s pozitivnimi utežmi. Zadnje poglavje bo opisovalo uporabo izpeljanega na kubičnih polkrogih ter podalo geometrijsko konstrukcijo pripadajočega kontrolnega poligona.

2 Racionalne Bezierjeve krivulje

Racionalna Bezierjeva krivulja $C(t)$ stopnje n v \mathbb{R}^d je projekcija polinomske Bezierjeve krivulje $\tilde{C}(t)$ stopnje n v \mathbb{R}^{d+1} na hiperravnino $w = 1$, kjer je točka v \mathbb{R}^{d+1} označena z $\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$. Racionalna B. krivulja stopnje n je tako podana s predpisom

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)},$$

kjer je $B_i^n(t)$ i -ti Bernsteinov bazni polinom stopnje n , b_i kontrolne točke krivulje, w_i pa uteži.

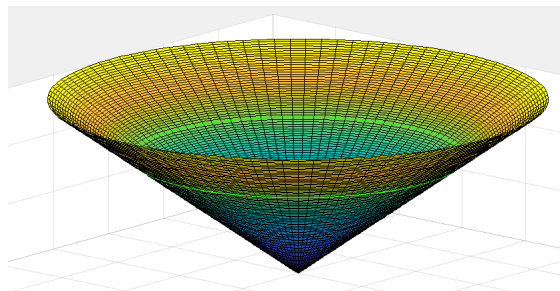
Racionalna krivulja $C(t) = (X(t), Y(t))$ lahko eksaktno opiše krožnico kot projekcijo krivulje $\tilde{C}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), W(t))$, ki leži na stožcu

$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0,$$

na ravnino $w = 1$. Slednje nam pokaže naslednji račun:

$$\begin{aligned} X(t)^2 + Y(t)^2 &= 1 \\ \left(\frac{\tilde{X}(t)}{W(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{Y}(t)}{W(t)}\right)^2 &= 1 \\ \tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Prva enačba predstavlja enačbo krožnice v prostoru \mathbb{R}^2 , nato pa koordinate točk zamenjamo za tiste iz prostora \mathbb{R}^3 , dobljene s projekcijo na ravnino $w = 1$. Izraz lahko preoblikujemo v zadnjo enačbo, ki podaja običajno enačbo stožca.



Slika 1: Stožec $\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$, s katerega se vse krivulje projicirajo na krožnico v ravnini $w = 1$.

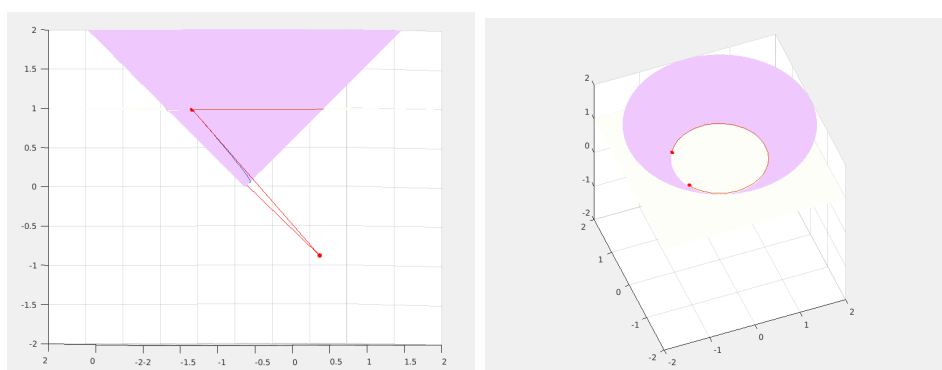
Problem iskanja racionalne krivulje, ki opiše krožnico oziroma krožni lok, lahko prevedemo na iskanje krivulje, ki leži na omenjenem stožcu. Pogoj pozitivnih uteži lahko geometrijsko interpretiramo kot pogoj, da kontrolni poligon leži v zgornji polravnini $w > 0$.

3 Bezierjeva krivulja kot sklenjena krivulja

V tem poglavju si bomo ogledali, kako krožnico opišemo z eno samo racionalno krivuljo (in ne zlepkom krivulj) ter kakšna je najmanjša stopnja krivulje, s katero to lahko dosežemo.

3.1 Kvadratična krivulja

Ali se sklenjeno krožnico da opisati s krivuljo stopnje dve? Da to ni mogoče, se hitro prepričamo z naslednjim razmislekom: vsaka krivulja stopnje 2 je parabola; vsako parabolo, ki leži na stožcu, pa dobimo s presekom stožca z ravnino, ki je vzporedna nosilki stožca. Opazimo, da bolj, kot bomo ravnino približevali nosilki stožca, večji kot bo opisal krožni lok v projekciji. Vendar ko se ravnina in stožec stakneta, je presečišče zgolj premica, ta pa se v projekciji slika v eno samo točko. Krožnice zato ne moremo predstaviti s kvadratično racionalno krivuljo.



Slika 2: Parabola, dobljena kot presek ravnine in stožca, ki se preslika v krožni lok.

Očitno z dobljeno parabolo lahko opišemo krožne loke, zato si oglejmo, kako zgleda kontrolni poligon takšne krivulje. Za prvo in zadnjo točko si izberemo točki, ki ležita na krožnici, srednjo točko pa zaradi simetrije izberemo na polovičnem kotu med njima. Pri tem izberemo take uteži, da zadoščajo enačbi stožca. Klasičen kontrolni poligon za polovični kot krožnega loka ϕ je tedaj:

$$\tilde{P}_0 = (\cos(\phi), -\sin(\phi), 1)$$

$$\tilde{P}_1 = (1, 0, \cos(\phi))$$

$$\tilde{P}_2 = (\cos(\phi), \sin(\phi), 1).$$

3.2 Kubična krivulja

Izkaže se, da tudi kubična krivulja ne more opisati sklenjene krožnice. Oglejmo si, zakaj.

Za kontrolni poligon moramo izbrati štiri točke. Krivulja interpolira prvo in zadnjo točko, zato ju izberemo na stožcu. Ker je krivulja sklenjena in ker

ju bo projekcija preslikala v isto točko na ravnini $w = 1$, si brez škode za splošnost izberemo kar to točko na ravnini. Da bo krivulja ležala na tangenti, morata druga in tretja točka ležati na tangentni ravnini stožca v prvi/zadnji točki. Tako dobimo štiri točke, ki vse ležijo na isti ravnini, po lastnosti Bezierjevih krivulj, ki ležijo v konveksni ovojnici kontrolnega poligona, pa zaključimo, da je dobljena krivulja lahko le točka.

3.3 Krivulja stopnje 4

Pri krivulji četrte stopnje je svobode pri izbiranju točk na kontrolnem poligonu več, zato si izberimo drugačen pristop. V enačbo

$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$$

po komponentah vstavimo enačbo

$$B^4(t) = \sum_{i=0}^4 b_i B_i^4(t).$$

Členi v enačbi so kvadrirani, tako da bomo med seboj morali množiti Bernsteinove polinome. Izpeljemo:

$$\begin{aligned} B_i^n(t) \cdot B_j^m(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \binom{m}{j} t^j (1-t)^{m-j} = \\ &= \binom{n}{i} \binom{m}{j} t^{i+j} (1-t)^{n+m-i-j} = \\ &= \binom{n}{i} \binom{m}{j} \frac{\binom{n+m}{i+j}}{\binom{n+m}{i+j}} t^{i+j} (1-t)^{n+m-i-j} = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} B_{i+j}^{n+m}(t) \end{aligned}$$

Med seboj bomo množili Bernsteinove polinome stopnje 4, tako da bomo na koncu dobili Bernsteinove polinome stopnje 8. Ker so le ti baza prostora, bo enakost veljala, ko bo seštevek koeficientov pred i -tim polinomom enak 0. Upoštevamo še, da lahko prvo in zadnjo točko postavimo na $\tilde{P}_0 = (1, 0, 1)$, $\tilde{P}_4 = (1, 0, 1)$ ter da druga in predzadnja točka ležita v tangentni ravnini \tilde{P}_0 , to je ravnini $x = w$. S tem se prejšnjih devet enačb

poenostavi v naslednjih pet:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_3 + \tilde{y}_1 &= 0 \\
\tilde{x}_3 + \tilde{x}_1 &= 0 \\
3\tilde{x}_2 + 4\tilde{y}_1^2 - 3w_3 &= 0 \\
\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{y}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_1w_2 &= 0 \\
9\tilde{x}_2^2 - 8\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 - 9w_2^2 &= 0
\end{aligned}$$

Zaradi potenc stopnje dve ne dobimo enolične rešitve, temveč dva možna kontrolna poligona. Za $\alpha = (\frac{3w_2}{2} - \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ dobimo dve poenostavljeni rešitvi:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0 &= (1, 0, 1) \\
\tilde{P}_1 &= (\tilde{x}_1, \pm\alpha, \tilde{x}_1) \\
\tilde{P}_2 &= \left(-\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3}, \pm\frac{3}{4}\tilde{x}_1\alpha, w_2\right) \\
\tilde{P}_3 &= (-\tilde{x}_1, \mp\alpha, -\tilde{x}_1) \\
\tilde{P}_4 &= (1, 0, 1)
\end{aligned}$$

Da bo α realno število, morata veljati neenakosti

$$w_2 > -\frac{1}{3}$$

in

$$-\left(\frac{3w_2 + 1}{2}\right)^{1/2} < \tilde{x}_1 < \left(\frac{3w_2 + 1}{2}\right)^{1/2}.$$

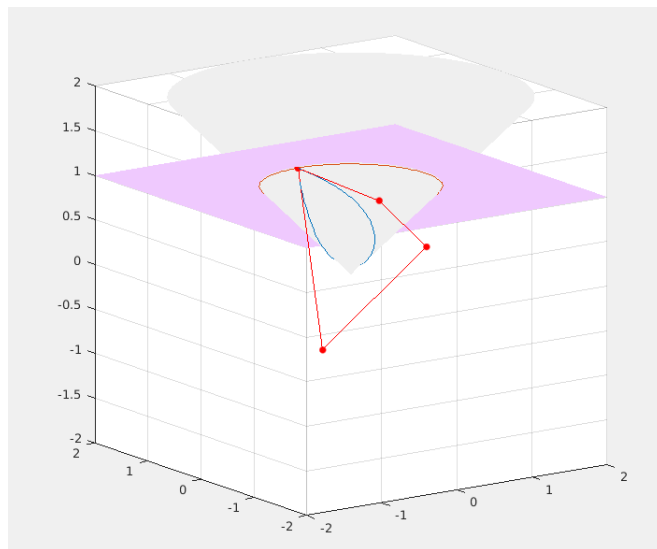
Opazimo, da ne glede na izbor w_2 in \tilde{x}_1 uteži nikoli ne bodo vse pozitivne.

Oglejmo si, kaj se zgodi, če izberemo $\tilde{x}_1 = 0$. Tedaj nimamo več negativnih uteži, imamo pa dve ničelni. Točki v kontrolnem poligonu, za kateri velja $w = 0$, pri projekciji na ravnino $w = 1$ predstavljata točki v neskončnosti, česar si pri implementaciji in uporabi ne želimo. Težave odpravimo, če dani krivulji dvignemo stopnjo – krivulja ostane enaka, kontrolni poligon pa se pomakne bliže krivulji. Izkaže se, da so pogoji za obstoj take krivulje tedaj

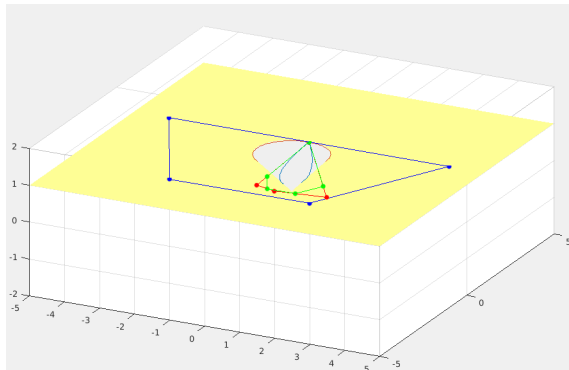
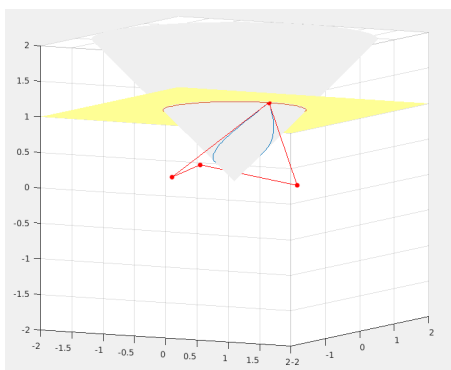
$$-\frac{1}{4} < \tilde{x}_1 < \frac{1}{4}$$

in

$$-\frac{2}{3}w_2 < \tilde{x}_1 < \frac{2}{3}w_2.$$



Slika 3: Krožnica pri krivulji stopnje 4 pri izbranem $w_2 = 1/3$ in $\tilde{x}_1 = -\left(\frac{3w_2+1}{2}\right)^{1/2} + 0.8\left(\frac{3w_2+1}{2}\right)^{1/2}$.



Slika 4: Levo: krožnica pri krivulji stopnje 4 z dvema ničelnima utežema in desno: ista krivulja z dvignjeno stopnjo, ki ima vse uteži pozitivne.

Za primer na sliki 4 je izbran kontrolni poligon z dvema ničelnima utežema, nato pa je z dvigom stopnje dobljen desni poligon, ki nima več nepozitivnih uteži:

$$\begin{array}{ll}
\tilde{P}_0 = (1, 0, 1) & \tilde{P}_0 = (1, 0, 1) \\
\tilde{P}_1 = (0, 1, 0) & \tilde{P}_1 = (1/5, 4/5, 1/5) \\
\tilde{P}_2 = (-1, 0, 1/3) & \tilde{P}_2 = (-3/5, 2/5, 1/5) \\
\tilde{P}_3 = (0, -1, 0) & \tilde{P}_3 = (-3/5, -2/5, 1/5) \\
\tilde{P}_4 = (1, 0, 1) & \tilde{P}_4 = (1/5, -4/5, 1/5) \\
& \tilde{P}_5 = (1, 0, 1).
\end{array}$$

4 Kubičen Bezierjev krožni lok

Zgoraj smo videli, da so uteži kvadratnega Bezierjevega krožnega loka $(1, \cos \theta, 1)$, kjer je θ polovica krožnega loka, ki ga opišemo. Če želimo, da so uteži nenegativne, mora biti $\theta \leq \frac{\pi}{2}$. Od tod sledi, da je največji krožni lok, ki ga lahko opišemo ter še imamo nenegativne uteži, velik 180 stopinj. V tem poglavju nas zanima, kakšen je največji krožni lok, ki ga lahko opišemo s kubično Bezierjevo krivuljo z nenegativnimi utežmi.

Tudi tu se lahko problema lotimo tako, da vstavimo krivuljo v enačbo stožča in s tem dobimo pogoje za kontrolne točke Bezierjeve krivulje. Predpostavimo lahko, da sta $\tilde{P}_0 = (\cos \theta, -\sin \theta, 1)$ in $\tilde{P}_3 = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$ in tako dobimo sledeč sistem enačb za \tilde{P}_1 in \tilde{P}_2 :

$$\begin{aligned}
w_1 &= \cos \theta \tilde{x}_1 - \sin \theta \tilde{y}_1 \\
w_2 &= \cos \theta \tilde{x}_2 + \sin \theta \tilde{y}_2 \\
3(\sin \theta)^2 \tilde{x}_1^2 + 3(\cos \theta)^2 \tilde{y}_1^2 - 4 \sin \theta \tilde{y}_2 + 6 \sin \theta \cos \theta \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 &= 0 \\
3(\sin \theta)^2 \tilde{x}_2^2 + 3(\cos \theta)^2 \tilde{y}_2^2 + 4 \sin \theta \tilde{y}_1 - 6 \sin \theta \cos \theta \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 &= 0 \\
9 \sin^2 \theta \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + 9 \cos \theta \sin \theta \tilde{y}_1 \tilde{x}_2 - & \\
-9 \cos \theta \sin \theta \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 + 9(1 + \sin^2 \theta) \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 - 2 \sin^2 \theta &= 0
\end{aligned}$$

Sistem je zelo kompliciran in težko rešljiv v odvisnosti od θ . Tako da se problema raje lotimo na drug način.

Izrek: Če je krivulja

$$C(t) = \frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))}{W(t)}$$

omejena za vse $t \in [-\infty, \infty]$ in so $\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t)$ in $W(t)$ polinomi, ki nimajo skupnih faktorjev, potem noben izmed $\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), W(t)$ ne more biti lihe stopnje.

Dokaz je na voljo v [1]. Kot posledica izreku sledi, da so vsi možni kubični Bezierjevi krožni loki oblike

$$C(t) = \frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))}{W(t)(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))},$$

kjer je

$$\frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))}{W(t)}$$

kvadratični krožni lok in a, b poljubni števili. Tu bomo za večjo svobodo za kontrolne točke kvadratičnega krožnega loka imeli parameter w_2 poljuben in ne reparametriziran na 1.

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= (\cos \theta, -\sin \theta, 1) \\ \tilde{P}_1 &= (\sqrt{w_2}, 0, \sqrt{w_2} \cos \theta) \\ \tilde{P}_2 &= (w_2 \cos \theta, -w_2 \sin \theta, w_2)\end{aligned}$$

Najbolj nas zanimajo vrednosti uteži nove krivulje, saj želimo, da so nenegativne. Za w'_0 in w'_3 dobimo pogoja:

$$w'_0 = a \qquad w'_3 = bw_2$$

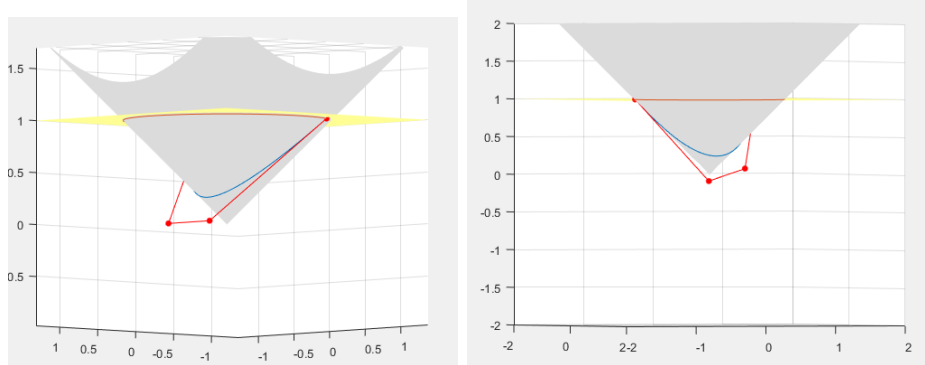
Ker lahko predpostavimo, da sta prva in zadnja utež enaki 1, imamo $a = 1$ in $w_2 = \frac{1}{b}$. Od tod nato dobimo kontrolne točke kubičnega Bezierjevega krožnega loka:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= (\cos \theta, -\sin \theta, 1) \\ \tilde{P}_1 &= \left(\frac{2}{3\sqrt{b}} + \frac{b \cos \theta}{3}, -\frac{b \sin \theta}{3}, \frac{2 \cos \theta}{3\sqrt{b}} + \frac{b}{3}\right) \\ \tilde{P}_2 &= \left(\frac{\cos \theta}{3b} + \frac{2\sqrt{b}}{3}, \frac{\sin \theta}{3b}, \frac{2 \cos \theta \sqrt{b}}{3} + \frac{1}{3b}\right) \\ \tilde{P}_3 &= (\cos \theta, \sin \theta, 1)\end{aligned}$$

Želimo, da sta uteži w'_1 in w'_2 nenegativni. Pogoja se poenostavita v

$$\cos \theta \geq -\frac{b^{\frac{3}{2}}}{2} \qquad \cos \theta \geq -\frac{1}{2b^{\frac{3}{2}}}$$

Maksimalen θ dosežemo pri izbiri $b = 1$. Kot θ je v tem primeru $\frac{2\pi}{3}$. Maksimalen krožni lok, ki ga lahko opišemo s kubično Bezierjevo krivuljo z nenegativnimi utežmi, je torej 240 stopinj.



Slika 5: Levo: Krožni lok velikosti 240 stopinj pri izbiri $b = 1$, uteži sta v tem primeru ravno 0 in desno: Enak krožni lok pri izbiri $b = 0.85$. Vidimo, da je ena utež negativna.

5 Konstrukcija kubične polkrožnice

Naša želja je geometrijsko konstruirati kontrolne točke kubične Bezierjeve krivulje, ki nam bo opisala polkrožnico ($\theta = \frac{\pi}{2}$). V enačbah za kubične krožne loke zgoraj lahko vidimo, da imamo veliko členov s $\cos \theta$ in $\sin \theta$. Ko bomo vstavili $\theta = \frac{\pi}{2}$, se bodo enačbe zelo poenostavile.

$$\begin{aligned} w_1 &= -\tilde{y}_1 \\ w_2 &= \tilde{y}_2 \\ 3\tilde{x}_1^2 - 4\tilde{y}_2 &= 0 \\ 3\tilde{x}_2^2 + 4\tilde{y}_1 &= 0 \\ 9\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 18\tilde{y}_1\tilde{y}_2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Sistem je rešljiv in če označimo z $\alpha = \frac{3\tilde{x}_1}{2}$, so kontrolne točke kubične Bezierjeve krivulje, ki opiše polkrožnico, sledeče:

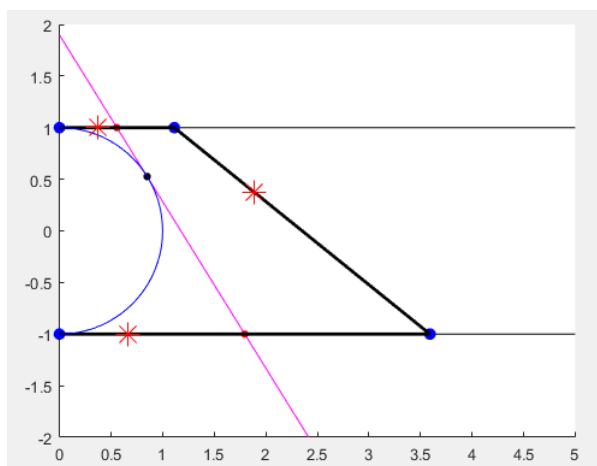
$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= (0, -1, 1) & P_0 &= (0, -1) \\ \tilde{P}_1 &= \left(\frac{2\alpha}{3}, -\frac{1}{3\alpha^2}, \frac{1}{3\alpha^2}\right) & P_1 &= (2\alpha^3, -1) \\ \tilde{P}_2 &= \left(\frac{2}{3\alpha}, \frac{\alpha^2}{3}, \frac{\alpha^2}{3}\right) & P_2 &= \left(\frac{2}{\alpha^3}, 1\right) \\ \tilde{P}_3 &= (0, 1, 1) & P_3 &= (0, 1) \end{aligned}$$

Ko le-te projiciramo na ravnino $w = 1$, dobimo kontrolne točke racionalne Bezierjeve krivulje z utežmi $w = (1, \frac{1}{3\alpha^2}, \frac{\alpha^2}{3}, 1)$.

Geometrijska konstrukcija:

1. Narišemo premici $y = -1$ in $y = 1$.
2. Potegnemo poljubno tangento na enotsko krožnico.
3. Poiščemo presečišči tangente s premicama $y = -1$ in $y = 1$ in ju označimo z x_1 in x_2 .
4. Podvojimo x koordinato teh dveh točk.
5. Točke $(0, -1)$, $(2x_1, -1)$, $(2x_2, 1)$ in $(0, 1)$ so kontrolne točke racionalne Bezierjeve krivulje, ki nariše polovico krožnice, skupaj z utežmi $(1, \frac{1}{3x_1^{2/3}}, \frac{1}{3x_2^{2/3}}, 1)$.

Potrebno je še pokazati, da velja $x_1x_2 = 1$, kar pa ni težko z nekaj algebre.



Slika 6: Z modrimi pikami so označene kontrolne točke, z rdečimi zvezdami pa Farinove točke.

6 Povzetek

V seminarski nalogi sva obravnavala krožnico in krožni lok kot racionalno Bezierjevo krivuljo. Tako racionalno krivuljo se da predstaviti kot navadno polinomske krivuljo v prostoru dimenzije 3, ki leži na stožcu. Pokazala sva, da je najmanjša stopnja krivulje, ki opiše sklenjen krožni lok in ima pozitivne uteži, stopnje 5; največji kot, ki ga lahko opišemo s kubičnim krožnim lokom s pozitivnimi utežmi, pa 240 stopinj. Iz izpeljave je sledila lepa geometrijska interpretacija kubičnih polkrogov, katerih kontrolne poligone se da preprosto skonstruirati z izpeljano metodo.

Literatura

- [1] J. J. Chou *Higher Order Bezier Circles*, *Computer Aided Design*, 27 (4) 1995, (303-309).