# Krožnica v racionalni Bezierjevi obliki

Anja Kišek, Samo Kralj

12. januar 2019

Vsebina:

- Definicija racionalnih Bezierjevih krivulj
- Konstrukcija sklenjene krožnice s krivuljami stopnje 2,3,4
- Krožni loki v racionalni Bezierjevi obliki
- Kubični polkrogi

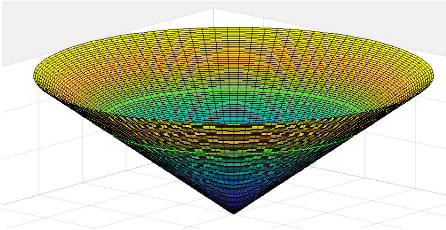
Racionalna Bezierjeva krivulja $C(t)$ stopnje $n$ v $\mathbb{R}^d$ je projekcija polinomske Bezierjeve krivulje $\tilde{C}(t)$stopnje $n$ v $\mathbb{R}^{d+1}$ na hiperravnino $w = 1$, kjer je točka v $\mathbb{R}^{d+1}$ označena z $\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$.

Racionalna B. krivulja stopnje $n$ je tako podana s predpisom

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}$$

Racionalna krivulja $C(t) = (X(t), Y(t))$ lahko eksaktno opiše krožnico kot projekcijo krivulje $\tilde{C}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), W(t))$, ki leži na stožcu, na ravnino $w = 1$.

$$
\begin{aligned}
X(t)^2 + Y(t)^2 &= 1 \\
\left(\frac{\tilde{X}(t)}{W(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{Y}(t)}{W(t)}\right)^2 &= 1 \\
\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 &= 0
\end{aligned}
$$



## Bezierjeva krivulja kot sklenjena krožnica

Ali lahko krožnico zapišemo kot racionalno Bezierjevo krivuljo določene stopnje?

- Kvadratična krivulja: Ne
  Zlepek krožnih lokov s kontrolnimi točkami:

$$\tilde{P}_0 = (cos(\phi), -sin(\phi), 1)$$
$$\tilde{P}_1 = (1, 0, cos(\phi))$$
$$\tilde{P}_2 = (cos(\phi), sin(\phi), 1)$$

- Kubična krivulja: Ne

- Krivulja 4. stopnje: reševanje sistema 9 enačb

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_3 + \tilde{y}_1 &= 0\\
\tilde{x}_3 + \tilde{x}_1 &= 0\\
3\tilde{x}_2 + 4\tilde{y}_1^2 - 3w_3 &= 0\\
\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{y}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_1 w_2 &= 0\\
9\tilde{x}_2^2 - 8\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 - 9w_2^2 &= 0
\end{aligned}$$

Za $\alpha = (\frac{3w_2}{2} - \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ dobimo dva kontrolna poligona

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0 &= (1, 0, 1)\\
\tilde{P}_1 &= (\tilde{x}_1, \pm\alpha, \tilde{x}_1)\\
\tilde{P}_2 &= (-\frac{3w_2 - 4\tilde{w}_1^2 + 2}{3}, \pm\frac{3}{4}\tilde{x}_1\alpha, w_2)\\
\tilde{P}_3 &= (-\tilde{x}_1, \mp\alpha, -\tilde{x}_1)\\
\tilde{P}_4 &= (1, 0, 1)
\end{aligned}$$

- Krivulja 4. stopnje: uteži so lahko negativne ali ničelne
- Krivulja 5. stopnje: s pomočjo višanja stopnje
  Primer:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0 &= (1, 0, 1) \\
\tilde{P}_1 &= (0, 1, 0) \\
\tilde{P}_2 &= (-1, 0, 1/3) \\
\tilde{P}_3 &= (0, -1, 0) \\
\tilde{P}_4 &= (1, 0, 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0 &= (1, 0, 1) \\
\tilde{P}_1 &= (1/5, 4/5, 1/5) \\
\tilde{P}_2 &= (-3/5, 2/5, 1/5) \\
\tilde{P}_3 &= (-3/5, -2/5, 1/5) \\
\tilde{P}_4 &= (1/5, -4/5, 1/5) \\
\tilde{P}_5 &= (1, 0, 1)
\end{aligned}$$

# Racionalni kubični krožni loki

# Konstrukcija kubične polkrožnice

Želimo konstruirati polovico krožnice. Spomnimo se enačb za kontrolne točke kubčnih bezierjevih krožnih lokov:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \cos\theta\tilde{x_1} - \sin\theta\tilde{y_1}\\
w_2 &= \cos\theta\tilde{x_2} + \sin\theta\tilde{y_2}\\
3(\sin\theta)^2\tilde{x_1}^2 + 3(\cos\theta)^2\tilde{y_1}^2 - 4\sin\theta\tilde{y_2} + 6\sin\theta\cos\theta\tilde{x_1}\tilde{y_1} &= 0\\
3(\sin\theta)^2\tilde{x_2}^2 + 3(\cos\theta)^2\tilde{y_2}^2 + 4\sin\theta\tilde{y_1} - 6\sin\theta\cos\theta\tilde{x_2}\tilde{y_2} &= 0\\
9\sin^2\theta\tilde{x_1}\tilde{x_2} + 9\cos\theta\sin\theta\tilde{y_1}\tilde{x_2} -&\\
-9\cos\theta\sin\theta\tilde{x_1}\tilde{y_2} + 9(1+\sin^2\theta)\tilde{y_1}\tilde{y_2} - 2\sin^2\theta &= 0
\end{aligned}$$

# Konstrukcija kubične polkrožnice

Vstavimo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$
\begin{aligned}
w_1 &= -\tilde{y}_1 \\
w_2 &= \tilde{y}_2 \\
3\tilde{x}_1^{\,2} - 4\tilde{y}_2 &= 0 \\
3\tilde{x}_2^{\,2} + 4\tilde{y}_1 &= 0 \\
9\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 18\tilde{y}_1\tilde{y}_2 - 2 &= 0
\end{aligned}
$$

# Konstrukcija kubične polkrožnice

Označimo $\alpha = \frac{3\tilde{x}_1}{2}$ in dobimo rešitev:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= (0, -1, 1) \\ \tilde{P}_1 &= (\frac{2\alpha}{3}, -\frac{1}{3\alpha^2}, \frac{1}{3\alpha^2}) \\ \tilde{P}_2 &= (\frac{2}{3\alpha}, \frac{\alpha^2}{3}, \frac{\alpha^2}{3}) \\ \tilde{P}_3 &= (0, 1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 1) \\ P_1 &= (2\alpha^3, -1) \\ P_2 &= (\frac{2}{\alpha^3}, 1) \\ P_3 &= (0, 1) \\ w &= (1, \frac{1}{3\alpha^2}, \frac{\alpha^2}{3}, 1) \end{aligned}$$

# Konstrukcija kubične polkrožnice

- Narišemo premici $y = 1$ in $y = -1$
- Potegnemo poljubno tangento na enotsko krožnico
- Z $x_1$ in $x_2$ označimo presečišča te tangente z $y = 1$ in $y = -1$.
- Točke $(0, -1), (2x_1, -1), (2x_2, 1)$ in $(0, 1)$ so kontrolne točke racionalne bezierjeve krivulje skupaj z utežmi $(1, \frac{1}{3x_1^{2/3}}, \frac{1}{3x_2^{2/3}}, 1)$.