

Krožnica v racionalni Bezierjevi obliki

Anja Kišek, Samo Kralj

13. januar 2019

Vsebina:

- Definicija racionalnih Bezierjevih krivulj
- Konstrukcija sklenjene krožnice s krivuljami stopnje 2,3,4
- Krožni loki v racionalni Bezierjevi obliki
- Kubični polkrogi

Racionalna Bezierjeva krivulja $C(t)$ stopnje n v \mathbb{R}^d je projekcija polinomske Bezierjeve krivulje $\tilde{C}(t)$ stopnje n v \mathbb{R}^{d+1} na hiperravnino $w = 1$, kjer je točka v \mathbb{R}^{d+1} označena z $\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$.

Racionalna B. krivulja stopnje n je tako podana s predpisom

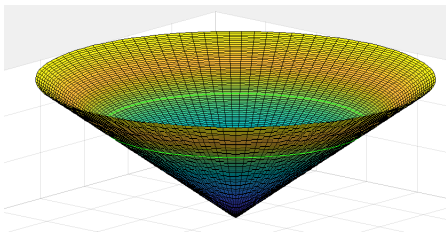
$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}$$

Racionalna krivulja $C(t) = (X(t), Y(t))$ lahko eksaktno opiše krožnico kot projekcijo krivulje $\tilde{C}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), W(t))$, ki leži na stožcu, na ravnino $w = 1$.

$$X(t)^2 + Y(t)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\tilde{X}(t)}{W(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{Y}(t)}{W(t)}\right)^2 = 1$$

$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$$



Bezierjeva krivulja kot sklenjena krožnica

Ali lahko krožnico zapišemo kot racionalno Bezierjevo krivuljo določene stopnje?

- Kvadratična krivulja: Ne

Zlepek krožnih lokov s kontrolnimi točkami:

$$\tilde{P}_0 = (\cos(\phi), -\sin(\phi), 1)$$

$$\tilde{P}_1 = (1, 0, \cos(\phi))$$

$$\tilde{P}_2 = (\cos(\phi), \sin(\phi), 1)$$

- Kubična krivulja: Ne

- Krivulja 4. stopnje: reševanje sistema 9 enačb

$$\tilde{y}_3 + \tilde{y}_1 = 0$$

$$\tilde{x}_3 + \tilde{x}_1 = 0$$

$$3\tilde{x}_2 + 4\tilde{y}_1^2 - 3w_3 = 0$$

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{y}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_1w_2 = 0$$

$$9\tilde{x}_2^2 - 8\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 - 9w_2^2 = 0$$

Za $\alpha = \left(\frac{3w_2}{2} - \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ dobimo dva kontrolna poligona

$$\tilde{P}_0 = (1, 0, 1)$$

$$\tilde{P}_1 = (\tilde{x}_1, \pm\alpha, \tilde{x}_1)$$

$$\tilde{P}_2 = \left(-\frac{3w_2 - 4\tilde{w}_1^2 + 2}{3}, \pm\frac{3}{4}\tilde{x}_1\alpha, w_2\right)$$

$$\tilde{P}_3 = (-\tilde{x}_1, \mp\alpha, -\tilde{x}_1)$$

$$\tilde{P}_4 = (1, 0, 1)$$

- Krivulja 4. stopnje: uteži so lahko negativne ali ničelne
- Krivulja 5. stopnje: s pomočjo višanja stopnje

Primer:

$$\tilde{P}_0 = (1, 0, 1)$$

$$\tilde{P}_1 = (0, 1, 0)$$

$$\tilde{P}_2 = (-1, 0, 1/3)$$

$$\tilde{P}_3 = (0, -1, 0)$$

$$\tilde{P}_4 = (1, 0, 1)$$

$$\tilde{P}_0 = (1, 0, 1)$$

$$\tilde{P}_1 = (1/5, 4/5, 1/5)$$

$$\tilde{P}_2 = (-3/5, 2/5, 1/5)$$

$$\tilde{P}_3 = (-3/5, -2/5, 1/5)$$

$$\tilde{P}_4 = (1/5, -4/5, 1/5)$$

$$\tilde{P}_5 = (1, 0, 1)$$

Racionalni kubični krožni loki

Zanima nas, kakšne krožne loke lahko opišemo s kubično racionalno bezierjevo krivuljo pri pogoju, da bodo vse uteži pozitivne. Kako pridemo do enačb kontrolnih točk?

$$X(t)^2 + Y(t)^2 - W(t)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} X(t) &= x_0 B_0^3(t) + x_1 B_1^3(t) + x_2 B_2^3(t) + x_3 B_3^3(t) = \\ &= x_0 \binom{3}{0} (1-t)^3 + x_1 \binom{3}{1} t(1-t)^2 + x_2 \binom{3}{2} t^2(1-t) + x_3 \binom{3}{3} t^3 \end{aligned}$$

Racionalni kubični krožni loki

$$\begin{aligned}x_0(1-t)^3 \cdot 3x_2t^2(1-t) &= \\3x_0x_2 \cdot t^2(1-t)^4 &= \\3x_0x_2 \frac{\binom{6}{2}}{\binom{6}{2}} t^2(1-t)^4 &= \\3x_0x_2 \frac{1}{15} \binom{6}{2} t^2(1-t)^4 &= \\ \frac{1}{5} x_0x_2 B_2^6(t) &\end{aligned}$$

V splošnem:

$$B_i^n(t) \cdot B_j^m(t) = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} B_{i+j}^{n+m}(t)$$

Racionalni kubični krožni loki

Lahko privzamemo, da sta

$$\tilde{P}_0 = (\cos \theta, -\sin \theta, 1)$$

$$\tilde{P}_3 = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

kjer je θ polovica loka, ki ga želimo opisat. Potrebujemo še

$$\tilde{P}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, w_1)$$

$$\tilde{P}_2 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, w_1)$$

Racionalni kubični krožni loki

Dobimo sistem 5 enačb za 6 neznank:

$$w_1 = \cos \theta \tilde{x}_1 - \sin \theta \tilde{y}_1$$

$$w_2 = \cos \theta \tilde{x}_2 + \sin \theta \tilde{y}_2$$

$$3(\sin \theta)^2 \tilde{x}_1^2 + 3(\cos \theta)^2 \tilde{y}_1^2 - 4 \sin \theta \tilde{y}_2 + 6 \sin \theta \cos \theta \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 = 0$$

$$3(\sin \theta)^2 \tilde{x}_2^2 + 3(\cos \theta)^2 \tilde{y}_2^2 + 4 \sin \theta \tilde{y}_1 - 6 \sin \theta \cos \theta \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 = 0$$

$$\begin{aligned} &9 \sin^2 \theta \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + 9 \cos \theta \sin \theta \tilde{y}_1 \tilde{x}_2 - \\ &- 9 \cos \theta \sin \theta \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 + 9(1 + \sin^2 \theta) \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 - 2 \sin^2 \theta = 0 \end{aligned}$$

Racionalni kubični krožni loki

Izrek : Vsi kubični racionalni krožni loki so oblike

$$C(t) = \frac{(X\tilde{(t)}, Y\tilde{(t)})(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))}{W(t)(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))}$$

kjer je

$$\frac{(X\tilde{(t)}, Y\tilde{(t)})}{W(t)}$$

kvadratični racionalni krožni lok.

Racionalni kubični krožni loki

Zmnožimo $W(t)(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))$ in dobimo uteži:

$$w'_0 = a$$

$$w'_1 = \frac{2 \cos \theta}{3\sqrt{b}} + \frac{b}{3}$$

$$w'_2 = \frac{2\sqrt{b} \cos \theta}{3} + \frac{1}{3b}$$

$$w'_3 = bw_2$$

Dobimo pogoja $\cos \theta \geq -\frac{b^{3/2}}{2}$ ter $\cos \theta \geq -\frac{1}{2b^{3/2}}$.

Maksimalen $\theta = \frac{2\pi}{3}$ dobimo pri $b = 1$.

Konstrukcija kubične polkrožnice

Želimo konstruirati polovico krožnice. Spomnimo se enačb za kontrolne točke kubčnih bezierjevih krožnih lokov:

$$w_1 = \cos \theta \tilde{x}_1 - \sin \theta \tilde{y}_1$$

$$w_2 = \cos \theta \tilde{x}_2 + \sin \theta \tilde{y}_2$$

$$3(\sin \theta)^2 \tilde{x}_1^2 + 3(\cos \theta)^2 \tilde{y}_1^2 - 4 \sin \theta \tilde{y}_2 + 6 \sin \theta \cos \theta \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 = 0$$

$$3(\sin \theta)^2 \tilde{x}_2^2 + 3(\cos \theta)^2 \tilde{y}_2^2 + 4 \sin \theta \tilde{y}_1 - 6 \sin \theta \cos \theta \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 = 0$$

$$9 \sin^2 \theta \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + 9 \cos \theta \sin \theta \tilde{y}_1 \tilde{x}_2 - \\ - 9 \cos \theta \sin \theta \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 + 9(1 + \sin^2 \theta) \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 - 2 \sin^2 \theta = 0$$

Konstrukcija kubične polkrožnice

Vstavimo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$w_1 = -\tilde{y}_1$$

$$w_2 = \tilde{y}_2$$

$$3\tilde{x}_1^2 - 4\tilde{y}_2 = 0$$

$$3\tilde{x}_2^2 + 4\tilde{y}_1 = 0$$

$$9\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 18\tilde{y}_1\tilde{y}_2 - 2 = 0$$

Konstrukcija kubične polkrožnice

Označimo $\alpha = \frac{3\tilde{x}_1}{2}$ in dobimo rešitev:

$$\tilde{P}_0 = (0, -1, 1)$$

$$\tilde{P}_1 = \left(\frac{2\alpha}{3}, -\frac{1}{3\alpha^2}, \frac{1}{3\alpha^2}\right)$$

$$\tilde{P}_2 = \left(\frac{2}{3\alpha}, \frac{\alpha^2}{3}, \frac{\alpha^2}{3}\right)$$

$$\tilde{P}_3 = (0, 1, 1)$$

$$P_0 = (0, -1)$$

$$P_1 = (2\alpha^3, -1)$$

$$P_2 = \left(\frac{2}{\alpha^3}, 1\right)$$

$$P_3 = (0, 1)$$

$$w = \left(1, \frac{1}{3\alpha^2}, \frac{\alpha^2}{3}, 1\right)$$

Konstrukcija kubične polkrožnice

- Narišemo premici $y = 1$ in $y = -1$
- Potegnemo poljubno tangento na enotsko krožnico
- Z x_1 in x_2 označimo presečišča te tangente z $y = 1$ in $y = -1$.
- Točke $(0, -1)$, $(2x_1, -1)$, $(2x_2, 1)$ in $(0, 1)$ so kontrolne točke racionalne bezierjeve krivulje, ki nariše polovico krožnice, skupaj z utežmi $(1, \frac{1}{3x_1^{2/3}}, \frac{1}{3x_2^{2/3}}, 1)$.