Krožnica v racionalni Bezierjevi obliki

Anja Kišek, Samo Kralj

11. januar 2019

Vsebina:

- Definicija racionalnih Bezierjevih krivulj
- Konstrukcija sklenjene krožnice s krivuljami stopnje 2,3,4
- Krožni loki v racionalni Bezierjevi obliki
- Kubični polkrogi

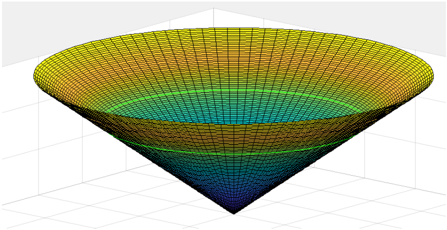
Racionalna Bezierjeva krivulja $C(t)$ stopnje n v $\mathbb{R}^d$ je projekcija polinomske Bezierjeve krivulje $\tilde{C}(t)$stopnje n v $\mathbb{R}^{d+1}$ na hiperravnino $w = 1$, kjer je točka v $\mathbb{R}^{d+1}$ označena z $\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$.

Racionalna B. krivulja stopnje n je tako podana s predpisom

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}$$

Racionalna krivulja $C(t) = (X(t), Y(t))$ lahko eksaktno opiše krožnico kot projekcijo krivulje $\tilde{C}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), W(t))$, ki leži na stožcu, na ravnino $w = 1$.

$$
\begin{aligned}
X(t)^2 + Y(t)^2 &= 1 \\
\left(\frac{\tilde{X}(t)}{W(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{Y}(t)}{W(t)}\right)^2 &= 1 \\
\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 &= 0
\end{aligned}
$$



Bezierjeva krivulja kot sklenjena krožnica

Ali lahko krožnico zapišemo kot racionalno Bezierjevo krivuljo določene stopnje?

- Kvadratična krivulja: Ne
  Zlepek krožnih lokov s kontrolnimi točkami:
  $$\tilde{P}_0 = (cos(\phi), -sin(\phi), 1)$$
  $$\tilde{P}_1 = (1, 0, cos(\phi))$$
  $$\tilde{P}_2 = (cos(\phi), sin(\phi), 1)$$
- Kubična krivulja: Ne

- Krivulja 4. stopnje: reševanje sistema 9 enačb

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_3 + \tilde{y}_1 &= 0 \\
\tilde{x}_3 + \tilde{x}_1 &= 0 \\
3\tilde{x}_2 + 4\tilde{y}_1^2 - 3w_3 &= 0 \\
\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{y}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_1 w_2 &= 0 \\
9\tilde{x}_2^2 - 8\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 - 9w_2^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Za $\alpha = (\frac{3w_2}{2} - \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ dobimo dva kontrolna poligona

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}_0 &= (1, 0, 1) \\
\tilde{P}_1 &= (\tilde{x}_1, \pm\alpha, \tilde{x}_1) \\
\tilde{P}_2 &= (-\frac{3w_2 - 4\tilde{w}_1^2 + 2}{3}, \pm\frac{3}{4}\tilde{x}_1\alpha, w_2) \\
\tilde{P}_3 &= (-\tilde{x}_1, \mp\alpha, -\tilde{x}_1) \\
\tilde{P}_4 &= (1, 0, 1)
\end{aligned}
$$

- Krivulja 4. stopnje: uteži so lahko negativne ali ničelne
- Krivulja 5. stopnje: s pomočjo višanja stopnje
  Primer:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= (1,0,1)\\ \tilde{P}_1 &= (0,1,0)\\ \tilde{P}_2 &= (-1,0,1/3)\\ \tilde{P}_3 &= (0,-1,0)\\ \tilde{P}_4 &= (1,0,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= (1,0,1)\\ \tilde{P}_1 &= (1/5,4/5,1/5)\\ \tilde{P}_2 &= (-3/5,2/5,1/5)\\ \tilde{P}_3 &= (-3/5,-2/5,1/5)\\ \tilde{P}_4 &= (1/5,-4/5,1/5)\\ \tilde{P}_5 &= (1,0,1)\end{aligned}$$