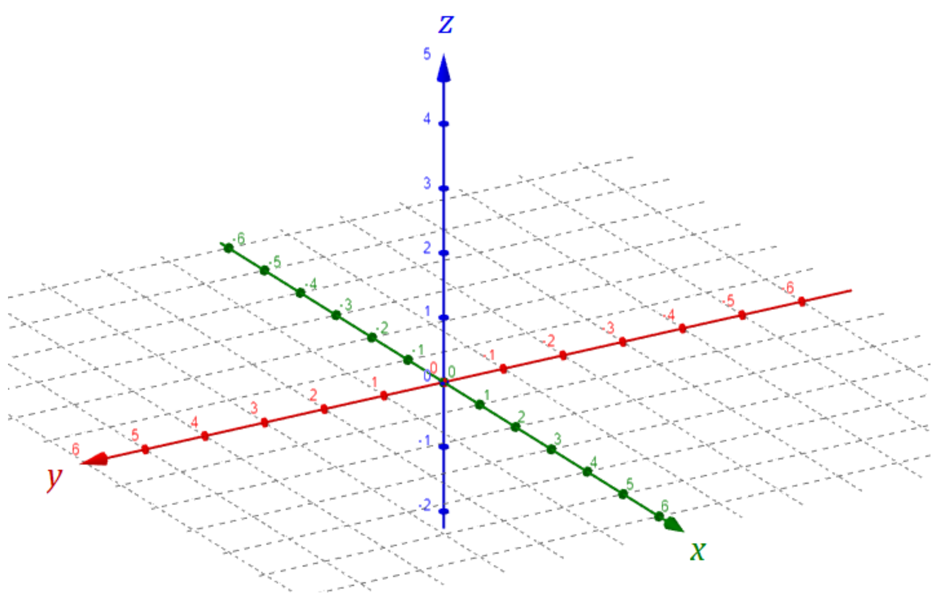
Algebra vectorial

Intersección entre planos

Krapp Ramiro



Instituto Tecnológico San Bonifacio
8 de octubre de 2021

Actividades

1. El vector director de la recta resultado de la intersección entre dos planos resultará perpendicular a cada uno de los vectores normales que definen los planos. Definidos los planos a partir de sus vectores normales, describir:

    a. Como obtener el vector director de la recta intersección. (aplicar álgebra vectorial).

    b. Como obtener un punto perteneciente a la recta intersección.

2. Con los datos indicados, obtener la expresión cartesiana de:

    a. Plano π que pasa por Po(-5 , 4, 10) y posee vector normal A (1, -3, 5).

    b. Plano α que pasa por Po(1 , 3, 4) y posee vector normal A (2, 1, 4)

    c. Plano β que pasa por Po(2 , 2, 3) y posee vector normal A (-2, 6, -10)

3. Obtener la intersección entre:

    a. El plano π y el plano α

    b. El plano π y el plano β

Ejercicio 1

a — Como obtener el vector director de la recta intersección

El vector director de una recta intersección es perpendicular a los dos planos, es un vector que resulta perpendicular al plano en el cual estan localizados los planos.

Para averiguarlo, hay que hacer un producto vectorial.

b — Como obtener un punto perteneciente a la recta intersección.

Para obtener un punto perteneciente a la recta, hay que multiplicar cualquier valor, llamemoslo α, por el vector director $\overrightarrow{A}$ de la recta, y se le suma el punto de origen P_0

Esto está en el apunte como $Q = P_0 + \alpha \cdot \overrightarrow{A}$

Ejercicio 2

a — Plano π que pasa por $P_0(-5, 4, 10)$ y posee vector normal $\vec{A}(1, -3, 5)$

$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{P_0 - P} = 0$
$1 \cdot (-5 - x) - 3 \cdot (4 - y) + 5 \cdot (10 - z) = 0$
$-5 - x \;\; - 12 + 3y \;\; + 50 - 5z = 0$
$-33 = -1x + 3y - 5z \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{33 = x - 3y + 5z : \pi}$

b — Plano α que pasa por $P_0(1, 3, 4)$ y posee vector normal $\vec{A}(2, 1, 4)$

$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{P_0 - P} = 0$
$2 \cdot (1 - x) + 1 \cdot (3 - y) + 4 \cdot (4 - z) = 0$
$2 - 2x + 3 - y + 16 - 4z = 0$
$-2x - 1y - 4z = -21 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{2x + y + 4z = 21 : \alpha}$

c — Plano β que pasa por $P_0(2, 2, 3)$ y posee vector normal $\vec{A}(-2, 6, -10)$

$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{P_0 - P} = 0$
$-2 \cdot (2 - x) + 6 \cdot (2 - y) - 10 \cdot (3 - z)$
$-4 + 2x \; + \; 12 - 6y \; + \; 30 - 10z = 0$
$\boldsymbol{2x - 6y + 10z = 22 : \beta}$

Ejercicio 3

a — Obtener la intersección entre el plano π y el plano α

Calculo del vector director de la recta

Planos:
$\pi : 1x - 3y + 5z = 33$
$\alpha : 2x + 1y + 4z = 21$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1x & -3y & 5z \\ 2x & 1y & 4z \end{vmatrix} \longrightarrow (-3 \cdot 4 - 5 \cdot 1)i \ + \ (5 \cdot 2 - 1 \cdot 4)j \ + \ (1 \cdot 1 - -3 \cdot 2)k$$

$$\boldsymbol{-17i + 6j + 7k}$$

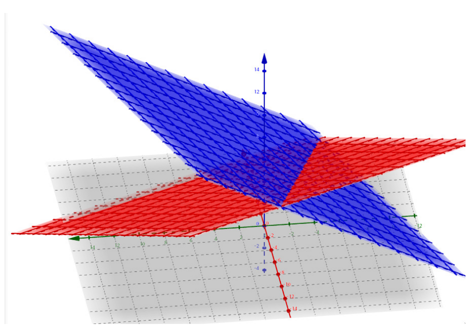
Calculo de punto de origen

Considerando $x = 0$
$-3y + 5z = 33$
$1y + 4z = 21$

$\Delta_s \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \longrightarrow -12 - 5 = -17$
$\Delta_1 \begin{vmatrix} 33 & 5 \\ 21 & 4 \end{vmatrix} \longrightarrow 132 - 105 = 27$
$\Delta_2 \begin{vmatrix} -3 & 33 \\ 1 & 21 \end{vmatrix} \longrightarrow -63 - 33 = -96$

$y = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_s} = \dfrac{27}{-17} = 1,588$
$z = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_s} = \dfrac{-96}{-17} = 5,647$

Origen : $0x,\ 1,58y,\ 5,64z$



b — Obtener la intersección entre el plano α y el plano β

Calculo del vector director de la recta

Planos:
$\pi : 1x - 3y + 5z = 33$
$\beta : 2x - 6y + 10z = 22$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1x & -3y & 5z \\ 2x & -6y & 10z \end{vmatrix} \longrightarrow (-3 \cdot 10 - 5 \cdot -6)i + (5 \cdot 2 - 1 \cdot 10)j + (1 \cdot -6 - -3 \cdot 2)k$$

$$\boldsymbol{0i + 0j + 0k}$$

Como el resultado del producto vectorial da 0 en i, j & k, se deduce que los planos son paralelos, o sea que *nunca se cruzan*.