**СОДЕРЖАНИЕ**

[СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ 3](#__RefHeading___Toc1785_3851806917)

[ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 4](#__RefHeading___Toc1787_3851806917)

[ВВЕДЕНИЕ 5](#__RefHeading___Toc1789_3851806917)

[1 Задача оптимального управления для сингулярных линейных систем 7](#__RefHeading___Toc1793_3851806917)

[1.1 Теория оптимального управления линейных систем 7](#__RefHeading___Toc8379_387698889)

[1.2 Условия корректности задачи LQR для сингулярных систем 10](#__RefHeading___Toc9758_3653515131)

[1.3 Выводы 11](#__RefHeading___Toc9760_3653515131)

[2 нейронные оду для решения уравнения Риккати 12](#__RefHeading___Toc1795_3851806917)

[2.1 Описание 12](#__RefHeading___Toc6644_387698889)

[2.2 Описание методов численного интегрирования ОДУ 12](#__RefHeading___Toc1243_619138733)

[2.2.1 Метод Рунге-Кутты 12](#__RefHeading___Toc659_463851313)

[2.2.2 Метод Адамса-Башфорта 12](#__RefHeading___Toc663_463851313)

[2.2.3 Метод Фельберга 13](#__RefHeading___Toc665_463851313)

[2.2.4 Метод Ингленда 14](#__RefHeading___Toc1809_3851806917_%25D0%)

[2.2.5 Метод Нюстрема 14](#__RefHeading___Toc1809_3851806917_%25D01)

[2.2.6 Метод Милны 15](#__RefHeading___Toc1809_3851806917_%25D02)

[2.2.7 Метод Хемминга 15](#__RefHeading___Toc1809_3851806917_%25D03)

[2.3 Выводы 15](#__RefHeading___Toc1805_3851806917)

[3 архитектура и реализация программы 16](#__RefHeading___Toc1807_3851806917)

[3.1 Проектирование и архитектура программной системы 16](#__RefHeading___Toc1809_3851806917)

[3.2 UML? 16](#__RefHeading___Toc1811_3851806917)

[3.3 Инструментарий 16](#__RefHeading___Toc1813_3851806917)

[3.4 Планирование 16](#__RefHeading___Toc1815_3851806917)

[3.5 Выводы 16](#__RefHeading___Toc1817_3851806917)

[4 исследование скорости работы методов 17](#__RefHeading___Toc1819_3851806917)

[4.2 Выводы 17](#__RefHeading___Toc669_463851313)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 18](#__RefHeading___Toc1827_3851806917)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 19](#__RefHeading___Toc1829_3851806917)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А 20](#__RefHeading___Toc1831_3851806917)

# СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

LQR — линейно-квадратичный регулятор

ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение

# ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Уравнение Рикатти — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, правая часть которого является многочленом второй степени.

Динамическая мода — это характеристика линейной динамической системы, связанная с её собственными значениями и собственными векторами, определяющая форму и скорость изменения состояния системы во времени. В контексте LQR динамические моды описывают поведение замкнутой системы после применения оптимального управления.

# ВВЕДЕНИЕ

В условиях стремительного развития интеллектуальных технологий и усложнения технических объектов задача построения эффективных систем управления приобретает особую значимость. Классические методы оптимального управления, такие как линейно-квадратичный регулятор (LQR), широко применяются благодаря своей математической строгости и эффективности в линейных системах.

Однако на практике часто возникают ситуации, когда система обладает сингулярной структурой, а её параметры могут быть частично неизвестны, изменяться во времени или зависеть от внешних условий. Подобные особенности характерны для многих прикладных областей, таких как робототехника, оптимальное управление, экономика, крупномасштабные взаимосвязанные системы, электроэнергетика, биомедицинские системы и т.д. В таких условиях использование строгих аналитических методов затруднено или невозможно, что делает необходимым применение гибких, обучаемых моделей, способных адаптироваться к изменяющейся динамике и неполноте данных.

Одним из перспективных направлений является использование методов машинного обучения, в частности нейронных дифференциальных уравнений (Neural ODE), предложенных в 2018 году Чэньом и соавторами[]. Этот подход представляет собой новую архитектуру нейросетей, в которой непрерывная динамика системы моделируется с помощью параметризованного векторного поля и интегрируется численно. Neural ODE объединяет идеи глубокого обучения и классических методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, обеспечивая непрерывное во времени представление модели, возможность обратного дифференцирования и естественную интеграцию в контур управления. Благодаря этим свойствам он становится мощным инструментом для анализа и моделирования сложных динамических систем на основе наблюдаемых данных.

В рамках данного исследования рассматривается система управления с линейной динамикой, описываемая уравнением с сингулярной матрицей E:

Основное внимание уделяется численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их возможному использованию совместно с Neural ODE. Выбор численного интегратора напрямую влияет на устойчивость, точность и вычислительную эффективность обучения моделей на базе Neural ODE. Особенно это критично в задачах с сингулярной структурой, где малейшая ошибка аппроксимации может привести к некорректному управлению или срыву устойчивости.

Цель работы заключается в разработке и сравнении различных численных методов интегрирования при решении матричного уравнения Риккати, которое лежит в основе построения оптимального регулятора.

Новизна данного подхода состоит в применении Neural ODE к задаче управления системой с сингулярной динамикой и в комплексном анализе влияния различных численных интеграторов на скорость и качество аппроксимации решения уравнения Риккати. Практическая значимость заключается в создании универсального инструмента, способного использоваться в условиях неопределённости или частичной информации о системе — в таких областях, как автономные роботы, адаптивные экономические модели и интеллектуальные технологии управления.

# Задача оптимального управления для сингулярных линейных систем

## Теория оптимального управления линейных систем

Линейный квадратичный регулятор (LQR) — это оптимальная стратегия управления, используемая в теории управления и инженерии. Она направлена ​​на оптимальную работу динамической системы путем минимизации функции стоимости, которая обычно представляет собой компромисс между усилием управления и ошибкой состояния. LQR особенно эффективен для линейных систем, где динамика системы может быть описана линейными дифференциальными уравнениями.

Сингулярные системы представляют собой обобщение обычных линейных динамических систем. Их особенностью является наличие сингулярной матрицы в уравнении состояния:

|  | (1) |
| --- | --- |

где - вектор состояния системы;

- вектор управляющих воздействий;

- матрица системы (описывает внутреннюю динамику);

- матрица управления (описывает, как вход влияет на состояние); - сингулярная матрица, то есть .

Сделано допущение []: решение существует и единственно, если для некоторого — это гарантирует что любой входной вектор синтезирует одну и только одну траекторию состояния

Такая модель является приближением многих физических систем при малых отклонениях от точки равновесия. Она может описывать механические, электрические, термодинамические или другие типы объектов.

Основная задача системы управления — обеспечить поведение объекта в соответствии с заданной целью. В рамках линейно-квадратичного подхода эта цель формулируется как минимизация некоторого интегрального функционала качества. Иными словами, мы стремимся найти такое управляющее воздействие , которое минимизирует заданную цену функционирования системы, при этом обеспечивая устойчивость и достижение цели управления.

Для оценки качества управления вводится следующий функционал []:

|  | (2) |
| --- | --- |

где - симметричная, положительно поулопределенная матрица, определяющая цену отклонения состояний;

- положительно определенная матрица, характеризующая стоимость управляющих усилий;

- симметричная положительно полуопределенная матрица

- фиксированные конечный момент времени;

- свободен, что позволяет оптимизировать траекторию на всем интервале;

Чем больше элементы матрицы , тем сильнее регулятор стремится минимизировать отклонение состояния системы от заданного значения, поскольку увеличение весовых коэффициентов усиливает "штраф" за ошибку в соответствующей переменной состояния.

Например, если в системе управления положением и скоростью увеличить элемент ​, отвечающий за позицию, регулятор будет жестче подавлять отклонения по координате, даже если это потребует более резких управляющих воздействий.

В то же время, чем больше элементы матрицы , тем менее агрессивным будет управление, поскольку регулятор начнет экономить управляющие сигналы, избегая больших значений управляющего воздействия. Это означает, что при высоких значениях система будет реагировать медленнее, но управление станет более плавным, что может быть критически важно для энергоэффективности и долговечности исполнительных устройств.

Для получения условий оптимальности используется гамильтонов формализм. Вводится функция Гамильтона:

|  | (3) |
| --- | --- |

где - вектор сопряженных переменных (тензор Лагранжа);

- строгое решение задачи оптимизации, полученное на основе функционала

Необходимые условия оптимальности :

|  | (4) |
| --- | --- |

|  | (5) |
| --- | --- |

|  | (6) |
| --- | --- |

Предполагая, что сопряженная переменная связана с состоянием через матрицу :

|  | (7) |
| --- | --- |

Тогда подставляя в (5) и (6), после математических преобразований можно получить матричное уравнение Риккати, адаптированное под сингулярную структуру системы:

|  | (8) |
| --- | --- |

После получения решения обобщенного матричного уравнения Риккати (8), оптимальное воздействие в задаче LQR для системы с сингулярной матрицей формируется в виде состояния-обратной связи:

|  | (9) |
| --- | --- |

где матрица усиления определяется выражением:

|  | (10) |
| --- | --- |

Поскольку матрица однозначно определяется через решение уравнения (8), а также известны параметры системы известны, то можно построить замкнутую систему. На каждом шаге времени текущий вектор состояния будет считываться с датчиков, после чего он умножается на матрицу , которая находится согласно (8) и (9). Результатом будет управляющее воздействие которое подается на исполнительные механизмы системы. Такая реализация обеспечит устойчивость системы при соблюдении уловий корректности задачи LQR.

## Условия корректности задачи LQR для сингулярных систем

Матрица должна быть симметричной и положительно полуопределенной. Это обязательные свойства, вытекающие из условий оптимальности и уравнения Риккати. Они необходимы :

- чтобы функционал (2) действительно был минимизирован;

- чтобы обратная связь стабилизировала систему;

- чтобы управление не обращалось в бесконечность.

Если , то . В случае сингулярной системы имеет структуру:

|  | (11) |
| --- | --- |

Тогда в может быть «свободный» блок (например ), не влияющий на управление, например

На основе леммы 2 из [] следует условие существования и единственности решения уравнения Риккати. Если система не имеет бесконечных динамических мод, и матрица имеет блочную структуру:

|  | (12) |
| --- | --- |

то обобщенное уравнение Риккати имеет решение.

А количество динамических мод определяет матрица имеющая вид:

|  | (13) |
| --- | --- |

Если невырожденна, то система имеет только конечные моды, а если вырождена, то появляются бесконечных мод, где . Отстутствие бесконечных мод гарантирует, что система управляема стандартными методами, такими как LQR.

## Выводы

Одним из главных достоинств линейно-квадратичного регулятора является возможность поддерживать устойчивость системы, одновременно оптимизируя её производительность. Подбор матриц и оказывает влияние не только на управляющие воздействия, но и на устойчивость замкнутого контура. Грамотная настройка этих матриц позволяет добиться требуемых динамических характеристик, включая время переходного процесса, величину перерегулирования и статическую ошибку.

Управление на основе линейной обратной связи обладает высокой вычислительной эффективностью, так как на каждом шаге требуется лишь операция умножения текущего вектора состояния на матрицу усиления. Такая структура регулятора минимизирует нагрузку на вычислительные ресурсы и хорошо масштабируется для реального времени.

LQR находит широкое применение в различных сферах, таких как авиакосмическая отрасль, робототехника и автомобильная промышленность. В аэрокосмической сфере его используют в системах управления полетом для обеспечения стабильности и эффективности при разных режимах работы. В робототехнике с его помощью решают задачи управления движением и точного слежения за траекториями, что позволяет роботам и манипуляторам выполнять задачи с высокой точностью.

# нейронные оду для решения уравнения Риккати

## Описание

## Описание методов численного интегрирования ОДУ

### Метод Рунге-Кутты

Формула для вычисления методом Рунге-Кутты червертого порядка точности имеет следующий вид:

|  | (14) |
| --- | --- |

где — угловые коффициенты касательных к графику решения в различных точках, вычисляемые по формулам

|  | (15) |
| --- | --- |

Метод Рунге-Кутты, как и методы Эйлера, является одношаговым, так как значение вычисляется на основе текущего значения .

Формула для метода Рунге-Кутты третьего порядка точности следующая:

|  | (16) |
| --- | --- |

где коэффициенты определяются согласно (17)

|  | (17) |
| --- | --- |

### Метод Адамса-Башфорта

В многошаговом методе Адамса-Башформа третьего порядка точности для нахождения точки используются три предыдущие точки:

|  | (18) |
| --- | --- |

Для начала расчетов требуются четыре «разгонные» точки , которые можно получить любым из предложенных методов.

В многошаговом методе Адамса-Башформа четвертого порядка точности для нахождения точки используются четыре предыдущие точки:

|  | (19) |
| --- | --- |

Для начала расчетов требуются четыре «разгонные» точки .

В многошаговом методе Адамса-Башформа пятого порядка точности для нахождения точки используется пять предыдущих точек:

|  | (20) |
| --- | --- |

Для начала расчетов требуются пять «разгонных» точек .

Методы Адамса-Башформа не позволяет изменять шаг в процессе расчетов. В отличие от метода Рунге-Кутты четвертого порядка в этих методах требуется вычислять только одно новое значение правой части ситсемы вместо четырех. Высокая точность методов достигается при этом за счет учета информации о предыдущих точках. Напротив, в методе Рунге-Кутты, как и в других одношаговых методах, недостающую информацию о поведении правых частей системы получают в результате вычислений в специальным образом выбранных дополнительных точках.

### Метод Фельберга

В методе Фельберга пятого порядка точности для расчета точки используется формула:

|  | (21) |
| --- | --- |

где

|  | (22) |
| --- | --- |

В методе Фельберга четвертого порядка точности для расчета точки используется формула:

|  | (23) |
| --- | --- |

где коэффициенты определяются согласно (22)

### Метод Ингленда

В методе Ингленда пятого порядка точности для расчета точки используется формула:

|  | (24) |
| --- | --- |

где

|  | (25) |
| --- | --- |

В методе Ингленда четвертого порядка точности для расчета точки используется формула:

|  | (26) |
| --- | --- |

где коэффициенты определяются согласно (25)

### Метод Нюстрема

В многошаговых методах Нюстрема второго, третьего и четвертого порядка точности для нахождения точки используются две, три и четыре предыдущие точки соответственно:

|  | | (27) |
| --- | --- | --- |
|  | (28) | |
|  | (29) | |

Для начала расчетов по формулам (27) - (29) требуются две, три и четыре «разгонные» точки соответственно.

### Метод Милны

Многошаговый метод Милны четвертого порядка точности может быть реализован следующим способом:

|  | (30) |
| --- | --- |

Для начала расчетов по формуле (30) требуется четыре «разгонные» точки , которые могут быть найдены любым из предыдущих методов.

В методе Милна шестого порядка точности для расчета точки используется шесть предыдущих точкек:

|  | (31) |
| --- | --- |

### Метод Хемминга

Многошаговый метод Хемминга четвертого порядка точности может быть реализован следующим способом, в котором для нахождения точки используются четыре предыдущие точки:

|  | (32) |
| --- | --- |

## Выводы

# архитектура и реализация программы

## Проектирование и архитектура программной системы

## UML?

## Инструментарий

## Планирование

## Выводы

# исследование скорости работы методов

## Выводы

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Shafiee, M., Amani, S. Optimal control for a class of singular systems using neural network / Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering. – 2005. – Vol. 29, No. B1. – P. 34–48.
2. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учебное пособие / Пантелеев А.В. — Москва: Изд-во МАИ, 2000. — 380с.
3. Квакернаак, Х., Сиван, Р.. Линейные оптимальные системы управления. / Х. Квакернаак — Москва: Изд-во Мир, 1977. — 656 c.
4. Chen, R.T.Q., Rubanova, Y., Bettencourt, J., Duvenaud, D. Neural Ordinary Differential Equations // Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS). – 2018. – Vol. 31. – P. 6571–6583.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А