**СОДЕРЖАНИЕ**

[СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ 2](#__RefHeading___Toc1785_3851806917)

[ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 3](#__RefHeading___Toc1787_3851806917)

[ВВЕДЕНИЕ 4](#__RefHeading___Toc1789_3851806917)

[1 Задача оптимального управления для сингулярных линейных систем 6](#__RefHeading___Toc1793_3851806917)

[1.1 Теория оптимального управления линейных систем 6](#__RefHeading___Toc8379_387698889)

[2 нейронные оду для решения уравнения Риккати 8](#__RefHeading___Toc1795_3851806917)

[2.1 Описание 8](#__RefHeading___Toc6644_387698889)

[2.2 Описание методов численного интегрирования ОДУ 8](#__RefHeading___Toc1243_619138733)

[2.2.1 Метод Рунге-Кутты 8](#__RefHeading___Toc659_463851313)

[2.2.2 Метод Адамса-Башфорта 8](#__RefHeading___Toc663_463851313)

[2.2.3 Метод Фельберга 9](#__RefHeading___Toc665_463851313)

[2.2.4 Метод Ингленда 10](#__RefHeading___Toc1809_3851806917_%25D0%)

[2.2.5 Метод Нюстрема 10](#__RefHeading___Toc1809_3851806917_%25D01)

[2.2.6 Метод Милны 11](#__RefHeading___Toc1809_3851806917_%25D02)

[2.2.7 Метод Хемминга 11](#__RefHeading___Toc1809_3851806917_%25D03)

[2.3 Выводы 11](#__RefHeading___Toc1805_3851806917)

[3 архитектура и реализация программы 12](#__RefHeading___Toc1807_3851806917)

[3.1 Проектирование и архитектура программной системы 12](#__RefHeading___Toc1809_3851806917)

[3.2 UML? 12](#__RefHeading___Toc1811_3851806917)

[3.3 Инструментарий 12](#__RefHeading___Toc1813_3851806917)

[3.4 Планирование 12](#__RefHeading___Toc1815_3851806917)

[3.5 Выводы 12](#__RefHeading___Toc1817_3851806917)

[4 исследование скорости работы методов 13](#__RefHeading___Toc1819_3851806917)

[4.2 Выводы 13](#__RefHeading___Toc669_463851313)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 14](#__RefHeading___Toc1827_3851806917)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 15](#__RefHeading___Toc1829_3851806917)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А 16](#__RefHeading___Toc1831_3851806917)

# СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

LQR — линейно-квадратичный регулятор

ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение

# ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Уравнение Рикатти — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, правая часть которого является многочленом второй степени.

# ВВЕДЕНИЕ

В условиях стремительного развития интеллектуальных технологий и усложнения технических объектов задача построения эффективных систем управления приобретает особую значимость. Классические методы оптимального управления, такие как линейно-квадратичный регулятор (LQR), широко применяются благодаря своей математической строгости и эффективности в линейных системах.

Однако на практике часто возникают ситуации, когда система обладает сингулярной структурой, а её параметры могут быть частично неизвестны, изменяться во времени или зависеть от внешних условий. Подобные особенности характерны для многих прикладных областей, таких как робототехника, оптимальное управление, экономика, крупномасштабные взаимосвязанные системы, электроэнергетика, биомедицинские системы и т.д. В таких условиях использование строгих аналитических методов затруднено или невозможно, что делает необходимым применение гибких, обучаемых моделей, способных адаптироваться к изменяющейся динамике и неполноте данных.

Одним из перспективных направлений является использование методов машинного обучения, в частности нейронных дифференциальных уравнений (Neural ODE), предложенных в 2018 году Чэньом и соавторами[]. Этот подход представляет собой новую архитектуру нейросетей, в которой непрерывная динамика системы моделируется с помощью параметризованного векторного поля и интегрируется численно. Neural ODE объединяет идеи глубокого обучения и классических методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, обеспечивая непрерывное во времени представление модели, возможность обратного дифференцирования и естественную интеграцию в контур управления. Благодаря этим свойствам он становится мощным инструментом для анализа и моделирования сложных динамических систем на основе наблюдаемых данных.

В рамках данного исследования рассматривается система управления с линейной динамикой, описываемая уравнением с сингулярной матрицей E:

Основное внимание уделяется численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их возможному использованию совместно с Neural ODE. Выбор численного интегратора напрямую влияет на устойчивость, точность и вычислительную эффективность обучения моделей на базе Neural ODE. Особенно это критично в задачах с сингулярной структурой, где малейшая ошибка аппроксимации может привести к некорректному управлению или срыву устойчивости.

Цель работы заключается в разработке и сравнении различных численных методов интегрирования при решении матричного уравнения Риккати, которое лежит в основе построения оптимального регулятора.

Новизна данного подхода состоит в применении Neural ODE к задаче управления системой с сингулярной динамикой и в комплексном анализе влияния различных численных интеграторов на скорость и качество аппроксимации решения уравнения Риккати. Практическая значимость заключается в создании универсального инструмента, способного использоваться в условиях неопределённости или частичной информации о системе — в таких областях, как автономные роботы, адаптивные экономические модели и интеллектуальные технологии управления.

# Задача оптимального управления для сингулярных линейных систем

## Теория оптимального управления линейных систем

Постановка задачи о линейно-квадратичном регуляторе. Рассматривается сингулярная линейная система в состоянии-пространстве:

|  | (1) |
| --- | --- |

где - вектор состояния системы, - вектор управляющих воздействий, - матрица системы(описывает внутреннюю динамику), - матрица управления(описывает, как вход влияет на состояние), матрица может быть сингулярной, то есть не имеющей обратной матрицы, пара (А, В) управляема, а начальное условие задано корректно в рамках задачи и может быть любым из некоторого допустимого множетства.

Такая модель является приближением многих физических систем при малых отклонениях от точки равновесия. Она может описывать механические, электрические, термодинамические или другие типы объектов.

Основная задача системы управления — обеспечить поведение объекта в соответствии с заданной целью. В рамках линейно-квадратичного подхода эта цель формулируется как минимизация некоторого интегрального функционала качества. Иными словами, мы стремимся найти такое управляющее воздействие , которое минимизирует заданную цену функционирования системы.

Для оценки качества управления вводится функционал:

|  | (2) |
| --- | --- |

где - симметричная, положительно поулопределенная матрица, определяющая цену отклонения состояний; - положительно определенная матрица, характеризующая стоимость управляющих усилий.

Чем больше элементы матрицы , тем сильнее регулятор стремится минимизировать отклонение состояния системы от заданного значения, поскольку увеличение весовых коэффициентов усиливает "штраф" за ошибку в соответствующей переменной состояния.

Например, если в системе управления положением и скоростью увеличить элемент ​, отвечающий за позицию, регулятор будет жестче подавлять отклонения по координате, даже если это потребует более резких управляющих воздействий.

В то же время, чем больше элементы матрицы , тем менее агрессивным будет управление, поскольку регулятор начнет экономить управляющие сигналы, избегая больших значений управляющего воздействия. Это означает, что при высоких значениях система будет реагировать медленнее, но управление станет более плавным, что может быть критически важно для энергоэффективности и долговечности исполнительных устройств.

Оптимальный регулятор имеет вид линейного обратного связи

|  | (3) |
| --- | --- |

где матрица усилений вычисляется из решения матричного уравнения Риккати:

|  | (4) |
| --- | --- |

Здесь - решение (стабильная симметричная матрица) уравнения Риккати. После нахождения усиления:

|  | (5) |
| --- | --- |

Для решения уравнения (4) нужно сказать, что

Рассматриваем сингулярную систему (1), где

|  | (6) |
| --- | --- |

Матрицы имеют блочную структуру. Согласно [], чтобы уравнение Риккати (4) имело решение необходимо чтобы :

- Матрица была сингулярной и имела вид единичной матрицы в первом блоке.

- Подматрица была необратимая.

- Матрица была вида, где все кроме заполнено нулями.

# нейронные оду для решения уравнения Риккати

## Описание

## Описание методов численного интегрирования ОДУ

### Метод Рунге-Кутты

Формула для вычисления методом Рунге-Кутты червертого порядка точности имеет следующий вид:

|  | (7) |
| --- | --- |

где — угловые коффициенты касательных к графику решения в различных точках, вычисляемые по формулам

|  | (8) |
| --- | --- |

Метод Рунге-Кутты, как и методы Эйлера, является одношаговым, так как значение вычисляется на основе текущего значения .

Формула для метода Рунге-Кутты третьего порядка точности следующая:

|  | (9) |
| --- | --- |

где коэффициенты определяются согласно (10)

|  | (10) |
| --- | --- |

### Метод Адамса-Башфорта

В многошаговом методе Адамса-Башформа третьего порядка точности для нахождения точки используются три предыдущие точки:

|  | (11) |
| --- | --- |

Для начала расчетов требуются четыре «разгонные» точки , которые можно получить любым из предложенных методов.

В многошаговом методе Адамса-Башформа четвертого порядка точности для нахождения точки используются четыре предыдущие точки:

|  | (12) |
| --- | --- |

Для начала расчетов требуются четыре «разгонные» точки .

В многошаговом методе Адамса-Башформа пятого порядка точности для нахождения точки используется пять предыдущих точек:

|  | (13) |
| --- | --- |

Для начала расчетов требуются пять «разгонных» точек .

Методы Адамса-Башформа не позволяет изменять шаг в процессе расчетов. В отличие от метода Рунге-Кутты четвертого порядка в этих методах требуется вычислять только одно новое значение правой части ситсемы вместо четырех. Высокая точность методов достигается при этом за счет учета информации о предыдущих точках. Напротив, в методе Рунге-Кутты, как и в других одношаговых методах, недостающую информацию о поведении правых частей системы получают в результате вычислений в специальным образом выбранных дополнительных точках.

### Метод Фельберга

В методе Фельберга пятого порядка точности для расчета точки используется формула:

|  | (14) |
| --- | --- |

где

|  | (15) |
| --- | --- |

В методе Фельберга четвертого порядка точности для расчета точки используется формула:

|  | (16) |
| --- | --- |

где коэффициенты определяются согласно (15)

### Метод Ингленда

В методе Ингленда пятого порядка точности для расчета точки используется формула:

|  | (17) |
| --- | --- |

где

|  | (18) |
| --- | --- |

В методе Ингленда четвертого порядка точности для расчета точки используется формула:

|  | (19) |
| --- | --- |

где коэффициенты определяются согласно (18)

### Метод Нюстрема

В многошаговых методах Нюстрема второго, третьего и четвертого порядка точности для нахождения точки используются две, три и четыре предыдущие точки соответственно:

|  | | (20) |
| --- | --- | --- |
|  | (21) | |
|  | (22) | |

Для начала расчетов по формулам (20) - (22) требуются две, три и четыре «разгонные» точки соответственно.

### Метод Милны

Многошаговый метод Милны четвертого порядка точности может быть реализован следующим способом:

|  | (23) |
| --- | --- |

Для начала расчетов по формуле (23) требуется четыре «разгонные» точки , которые могут быть найдены любым из предыдущих методов.

В методе Милна шестого порядка точности для расчета точки используется шесть предыдущих точкек:

|  | (24) |
| --- | --- |

### Метод Хемминга

Многошаговый метод Хемминга четвертого порядка точности может быть реализован следующим способом, в котором для нахождения точки используются четыре предыдущие точки:

|  | (25) |
| --- | --- |

## Выводы

# архитектура и реализация программы

## Проектирование и архитектура программной системы

## UML?

## Инструментарий

## Планирование

## Выводы

# исследование скорости работы методов

## Выводы

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Shafiee, M., Amani, S. Optimal control for a class of singular systems using neural network / Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering. – 2005. – Vol. 29, No. B1. – P. 34–48.
2. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учебное пособие / Пантелеев А.В. — Москва: Изд-во МАИ, 2000. — 380с.
3. Квакернаак, Х., Сиван, Р.. Линейные оптимальные системы управления. / Х. Квакернаак — Москва: Изд-во Мир, 1977. — 656 c.
4. Chen, R.T.Q., Rubanova, Y., Bettencourt, J., Duvenaud, D. Neural Ordinary Differential Equations // Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS). – 2018. – Vol. 31. – P. 6571–6583.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А