Дисциплина: Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лектор: Галкина Марина Юрьевна

Практические занятия:

группы ИП-812-813 Галкина Марина Юрьевна

группы ИП-811, 814-816 Новожилов Дмитрий Иванович

АиВМО

лекции	практические занятия	контрольные работы	лабораторные занятия	курсовая работа	экзамен
1 балл	6-8 баллов	20 баллов	6-8 баллов		

<u>Экзамен автоматом (только при всех защищенных лабораторных и курсовой работ) :</u>

Проценты считаются от максимально возможного кол-ва баллов

40-59% – удовлетворительно

60-79% - хорошо

80-100% - отлично

1. Линейное программирование

1.1 Пример задачи линейного программирования (задача использования сырья)

На мебельной фабрике могут выпускать стулья и кресла. Сведения о ресурсах, расходе материалов и прибыли от реализации каждого изделия приведены в таблице.

Ресурсы	Запасы	Расход на единицу продукции	
		стул	кресло
Пиломатериалы (м^3)	10	0.01	0.03
Ткань (м^2)	2000	0.5	2
Рабочее время (ч)	1000	2	5
Прибыль от ед. продукции (у.е.)		10	35

Найти план производства продукции максимизирующий прибыль предприятия.

Для решения задачи построим математическую модель.

x_1 – кол-во выпущенных стульев

x_2 – кол-во выпущенных кресел

Математическая модель:

$$\begin{cases} 0.01x_1 + 0.03x_2 \le 10 \\ 0.5x_1 + 2x_2 \le 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 1000 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(1.1) Система ограничений

$$Z = 10x_1 + 35x_2 \to \max$$

(1.2) Целевая функция

Если система ограничений и целевая функция линейны, то модель – задача линейного программирования.

1.2 Векторы и матрицы (сведения из линейной алгебры)

Упорядоченный набор n вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть n-*мерным вектором* и обозначать $\overline{x}$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами вектора.

Вектор, все компоненты которого равны 0, называется *нулевым вектором*: $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Два n-мерных вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *равны*, если их соответствующие координаты равны, т.е. если $x_i = y_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определим над векторами две операции:

1. Умножение вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на действительное число α

$$\alpha\overline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

2. Сложение векторов $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Множество всех n-мерных векторов с определенными над ними операциями сложения и умножения на скаляр, называется *n-мерным векторным пространством* и обозначается R^n.

Пример 1

$R^2=\{(x_1,x_2) \mid x_1 \in R, x_2 \in R\}$ – двумерное векторное пространство (множество точек на плоскости)

Линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$ называется вектор $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_s\overline{a}_s$, где α_i – скаляр (i =1, 2, …, s).

Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, одновременно не равные 0, такие, что выполняется $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_s\overline{a}_s = \overline{0}$.

В противном случае, система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$ называется *линейно независимой*.

Для линейно независимой системы равенство $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_s\overline{a}_s = \overline{0}$ выполняется лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$.

Векторы, составляющие линейно независимую систему, называются *линейно независимыми*.

Пример 2

Вектора $\overline{a}_1$=(5; 3; 2), $\overline{a}_2$=(1; 7; 3), $\overline{a}_3$=(2; 3; 2), a_4=(10; -6; 1) линейно зависимы, т.к. выполняется соотношение $\overline{a}_1 - 3\overline{a}_2 + 4\overline{a}_3 - \overline{a}_4 = \overline{0}$.

Базисом системы векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$ называется любая подсистема $\overline{a}_{i_1}, \overline{a}_{i_2}, \ldots, \overline{a}_{i_r}$ линейно независимых векторов этой системы, если любой вектор $\overline{a}_i$ (i = 1, 2, …, s) из исходной системы представим в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}_{i_1}, \overline{a}_{i_2}, \ldots, \overline{a}_{i_r}$.

Теорема 1 В пространстве R^n векторы $\overline{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\overline{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$, …, $\overline{e}_n = (0,0,\ldots,1)$ образуют базис.

Доказательство:

Необходимо доказать выполнение двух требований к этой системе векторов

1. Они линейно независимы
2. Любой вектор представляется в виде линейной комбинации указанных векторов.

Доказательство в файле lecture1.pdf.

Теорема 2 Количество векторов в любом базисе одинаково.

Рангом системы векторов называется число векторов в любом базисе этой системы.

Прямоугольная таблица чисел, имеющая m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m\times n$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ - единичные матрицы размера $n\times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рангом матрицы будем называть ранг системы векторов, составленных из столбцов этой матрицы, т. е. системы

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, \bar{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}).$$

Элементарными преобразованиями над строками матрицы будем называть следующие действия:

1. Перестановку строк.
2. Умножение всех элементов выбранной строки на число, отличное от 0.
3. Сложение соответствующих элементов двух строк.
4. Вычеркивание строк, состоящих из нулей.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу A размера $m\times n$ ($m \le n$) можно привести к виду:

$$A \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{r}\!\!\left.\begin{matrix} a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \cdots & a'_{1,n} \\ a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \cdots & a'_{r,n} \end{matrix}\right)\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r, \qquad (1.3)$$

где $r \le m$ и первые r столбцов могут занимать произвольные места в произвольном порядке. Очевидно, для такой матрицы ранг равен r.

Теорема 3 Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

На основании вышесказанного для определения r ранга матрицы A размера $m \times n$ ($m \leq n$) с помощью элементарных преобразований будем приводить матрицу к виду (1.3), применяя следующий алгоритм (т.к. $m \leq n$, то ранг матрицы не может быть больше m).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1. Пусть $r = m$.
2. Вычеркиваем столбцы, состоящие из нулей.
3. Пусть $s=1$, $k=1$.

4. В s-ом столбце выберем элемент отличный от 0 среди элементов $a_{kk}, a_{k+1,k}, \ldots, a_{m,k}$. Если такого элемента нет, то увеличиваем s на 1 и переходим к п.4. Не теряя общности, можно считать, что $a_{kk} \neq 0$ (этого можно добиться перестановкой строк). Элемент a_{kk} называется разрешающим. Получаем новую матрицу, выполнив следующие преобразования:

– разделим k-ю строку на разрешающий элемент a_{kk};
– все элементы k-го столбца новой матрицы, кроме a_{kk}, равны 0;
– для расчета a'_{ij} – остальных элементов новой матрицы построим прямоугольники с вершинами в элементах a_{ij} и элементе a_{kk}:

$$\begin{matrix} \boxed{a_{kk}} & a_{kj} \\ a_{ik} & a_{ij} \end{matrix}$$

и найдем новые элементы по правилу прямоугольников: $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{kj} \cdot a_{ik}}{a_{kk}}$.

5. Вычеркнем строки, состоящие из нулей, если такие образовалась. При вычеркивании каждой строки, r уменьшается на 1.
6. Если k меньше r, то увеличиваем k и s на 1 и переходим к п.4, иначе переходим к п.7.
7. Ранг исходной матрицы будет равен r – размеру выделенной единичной матрицы.

Пример 3

Найти с помощью элементарных преобразований ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Решение примера 3 – в файле lecture1.pdf.

После преобразований из последней матрицы получаем, что ранг матрицы A равен 2 (rang(A)=2).

1.3 Метод Жордана-Гаусса

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (1.4)$$

Обозначим через A матрицу системы ограничений, а через $\overline{A}$ - расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Если ввести обозначения:

$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\overline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$, то систему (1.4)

можно переписать в виде:

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \ldots + x_n\overline{a}_n = \overline{b}. \qquad (1.5)$$

Тогда решить уравнение (1.5) – значит найти коэффициенты разложения вектора $\overline{b}$ по системе векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad A \sim \left.\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix}}_{r} & \begin{matrix} a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \ldots & a'_{1,n} \\ a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \ldots & a'_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \ldots & a'_{r,n} \end{matrix} \end{pmatrix}\right\}r$$

Для решения системы (1.4) будем использовать метод полного исключения неизвестных или метод Жордана-Гаусса. Суть этого метода состоит в том, чтобы, выполнив элементарные преобразования над строками матрицы $\overline{A}$, аналогично алгоритму нахождения ранга матрицы *A*, получить матрицу вида (1.3). Преобразования матрицы называются *жордановыми исключениями*. В процессе жордановых исключений возможны следующие случаи:

1. Получена строка, состоящая из нулей, кроме последнего коэффициента (правой части уравнения). В этом случае система не имеет решения.

2. Ранг матрицы *A* равен количеству уравнений *m* и числу неизвестных *n* ($r = m = n$). Тогда система имеет единственное решение.

3. Ранг матрицы *A* не превосходит количества уравнений *m* ($r \leq m$) и $m < n$. Тогда система имеет бесконечно много решений.

Пусть имеет место третий случай и расширенная матрица системы приведена к виду (1.3):

$$\overline{A} \sim \left.\begin{array}{c}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}}_{r}\end{array}\right. \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1,r+1} \; a'_{1,r+2} \; \ldots \; a'_{1,n} \end{array}\right)$$

$$\overline{A} \sim \left.\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \ldots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \ldots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \ldots & a'_{r,n} & b'_n \end{array}\right)\right\} r .$$

По преобразованной матрице составим систему:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r \end{cases} . \qquad (1.6)$$

Система (1.6) называется *приведенной к единичному базису*.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, соответствующие столбцам единичной матрицы, называются *базисными*, все остальные переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – *свободными*.

Если выразить в (1.5) базисные переменные через свободные, то получим *общее решение системы*:

$$\begin{cases} x_1 = b_1' - a_{1,r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{1n}' x_n \\ x_2 = b_2' - a_{2,r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{2n}' x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r' - a_{r,r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{rn}' x_n \end{cases}. \tag{1.7}$$

Замечание:

При решении систем методом Жордана-Гаусса не возникает нулевых столбцов, поэтому п.2 алгоритма можно пропустить.

Пример

Решить систему методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Решение примера - в файле lecture1.pdf

1.4 Базисные и опорные решения

Пусть найдено общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n \\ x_2 = b'_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x_n \end{cases}.$$

Положив значения свободных переменных равными нулю: $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$, получим *базисное решение системы*: $X = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, 0, \ldots, 0)$.

Базисное решение называется *невырожденным*, если оно содержит ровно r ненулевых компонент, в противном случае оно называется *вырожденным*.

Можно, найти базисное решение, не выписывая общее решение, подписав над столбцами расширенной матрицы системы переменные, которые им соответствуют

$$\overline{A} \sim \begin{array}{l} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \dots & x_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \dots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \dots & a'_{r,n} & b'_n \end{array}\right) \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{r} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} r$$

Значения базисных переменных находятся в правой части (после черты) в строке, соответствующей 1 в столбце под базисной переменной. Остальные переменные – свободные, они равны 0.

Столбцы единичной матрицы можно получать не обязательно в указанном порядке и на первых местах. Сколько различных базисных решений может быть у системы?

Очевидно, не более $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Пример 1

Найти все базисные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Преобразовав расширенную матрицу системы, можно выделить базис:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Выделен базис.

Переменные x_1, x_3 – базисные, x_2, x_4 – свободные, получаем первое базисное решение системы: $X^1 = (3; 0; -3; 0)$.

Так как rang(A) = 2, n = 4, то базисных решений может быть не больше, чем

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6.$$

Переберем все 6 возможных комбинаций базисных переменных: x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_4; x_3, x_4.

Для каждой пары переменных преобразуем матрицу A с помощью элементарных преобразований таким образом, чтобы столбцы единичной матрицы получились на месте столбцов, соответствующих базисным переменным. Для преобразований можно использовать любую наиболее удобную матрицу из предыдущих преобразований.

Нахождение всех базисных решений данной системы можно посмотреть в файле lecture1.pdf.