**Анализ на решението на задача  
СУМА ОТ P-ИЧНИ цифри**

Наивното обхождане на естествените числа в интервала [*M*, *M*+*N*) с отделяне на *p*-ичните цифри на всяко число чрез деление и сумирането им носи до 5% от точките. „Бонусът“ се дава, за да се отсеят още по-наивни решения. Алгоритъмът е със сложност O(*N*.log*pN*).

Ако се използва подобен на долния алгоритъм за силно редуциране на вътрешния цикъл с деление (т. е., постигане на сложност, близка до O(*N*)), са предвидени до 30% от точките.

***Алгоритъм за (практически) игнориране на множителя logp(N) от сложността***

Сумата *X* от стойностите на цифрите на едно число *A*, записано в *p*-ична бройна система, лесно може да се получи от съответната сума *S* на предишното число (*A*-1).

* Присвояваме на *X* стойността на *S*;
* Докато последната цифра на (*A*-1) е със стойност *p*-1, намаляваме *X* с *p*-1 и полагаме (*A*-1):=[(*A*-1)/*p*];
* Увеличаваме *X* с едно.

По-нататъшното ускоряване на пресмятанията изисква по-задълбочено разглеждане.

Ще дефинираме функцията *f*(*n*) за сумата от първите *n* неотрицателни цели числа:

.

Означаваме със *σ*(*n*, *p*) сумата от стойностите на цифрите за **всички** *n*-цифрени числа (с водещи нули) в *p*-ична бройна система. За целта можем да си представим, че в *n* вложени цикъла *n* брояча заемат стойности от 0 до *p*-1: във всеки брояч стойността на всяка от цифрите ще се появи *pn*-1 пъти, т.е., сумата от стойностите на всички *p*-ични цифри (която е равна на ) ще се появи *n*.*pn*-1 пъти, следователно

.

В обяснението ще използваме стандартната позиционна схема за записване на цяло неотрицателно число *A* в *p*-ична бройна система:

където с *αi* са означени *p*-ичните цифри на *A*, а с |*αi*| – техните стойности. При тези означения, ако приемем, както обикновено, че със символа „0“ е означена *p*-ичната нула, от очевидното

можем да изведем следния алгоритъм за намиране на сумата от стойностите на цифрите на *p*-ичните числа от 0 до *A* включително:

1. S🡨0
2. *i* 🡨 *n*-1
3. S🡨S + |*αi*| × *σ*(*i*, *p*) + *pi* × *f*(|*αi*|) + |*αi*| × (1 + ).

С първото добавено събираемо уреждаме всички „изцяло завъртени“ цикли, докато цифрата на място *i* „се завърти“ от 0 до *αi* (без да достига горната граница). Второто събираемо добавя сумата от стойностите на цифрите на *i*-та позиция до този момент (*pi* пъти всяка цифра със стойност от 0 до |*аi*|-1 включително). *p*-ичното число, надясно от *i*-тата позиция, показва колко пъти към сумата ще се добави стойността на цифрата *αi* (добавяме 1, защото броим от нула до него включително). Специално при *i*=0 такова „число без цифри“ не съществува, полагаме нула за негова „стойност“. Третото събираемо отразява именно факта, че оттук до края на сумирането позиция *i* ще се заема винаги от цифрата *αi*.

1. *i* 🡨 *i*-1
2. Ако *i* ≥ 0 към 3, иначе 6
3. Край на алгоритъма, резултатът е в S.

Този алгоритъм обхожда *p*-ичните цифри на *A*, т.е., сложността му е O(log*pA*).

Сега вече можем лесно да намерим сумата Σ от *p*-ични цифри за *N* последователни естествени числа с начало *M* със сложност O(log*pN*):

Σ(*M*, *N*, *p*) = S(*M*+*N*-1, *p*) - S(*M*-1, *p*).

*Автор: Павлин Пеев*