杭州電子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

篤學力行 守正求新

深度学习

线性模型

高 飞 Fei Gao

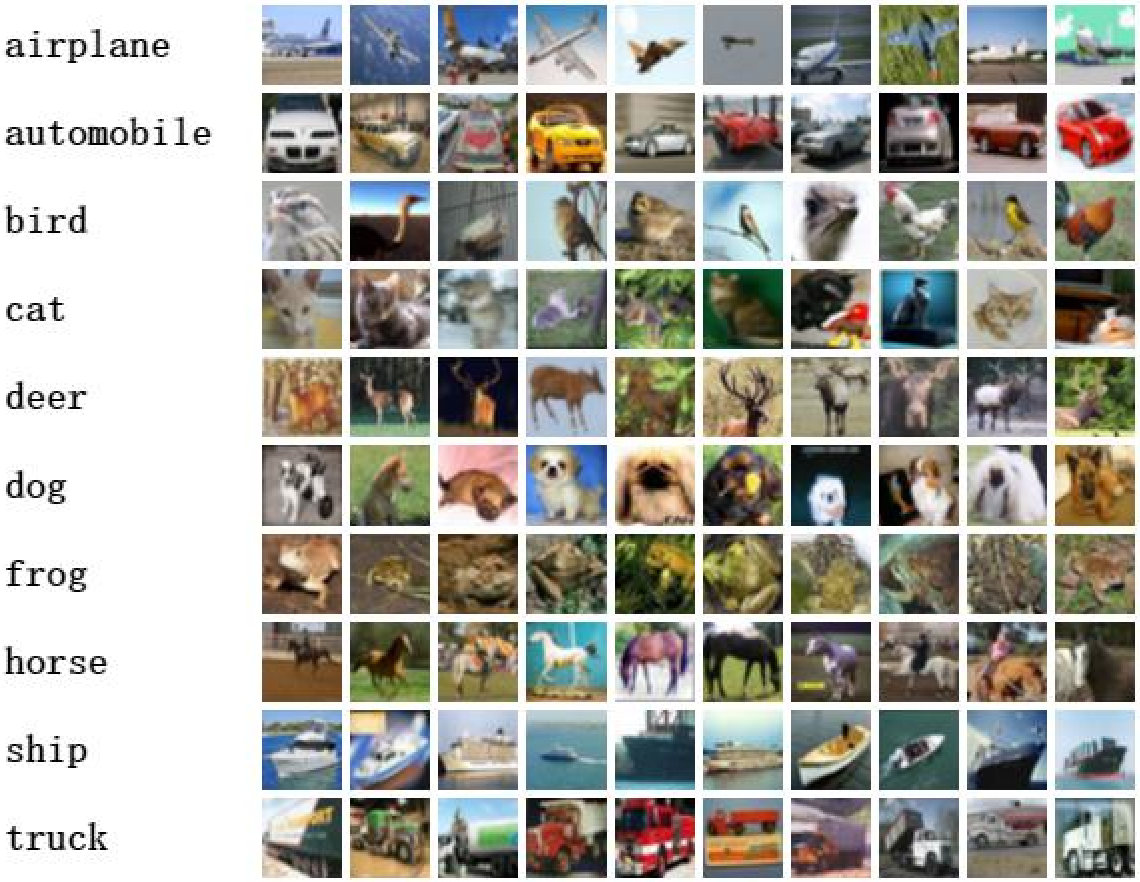
gaofei@hdu.edu.cn

目 录

分类示例

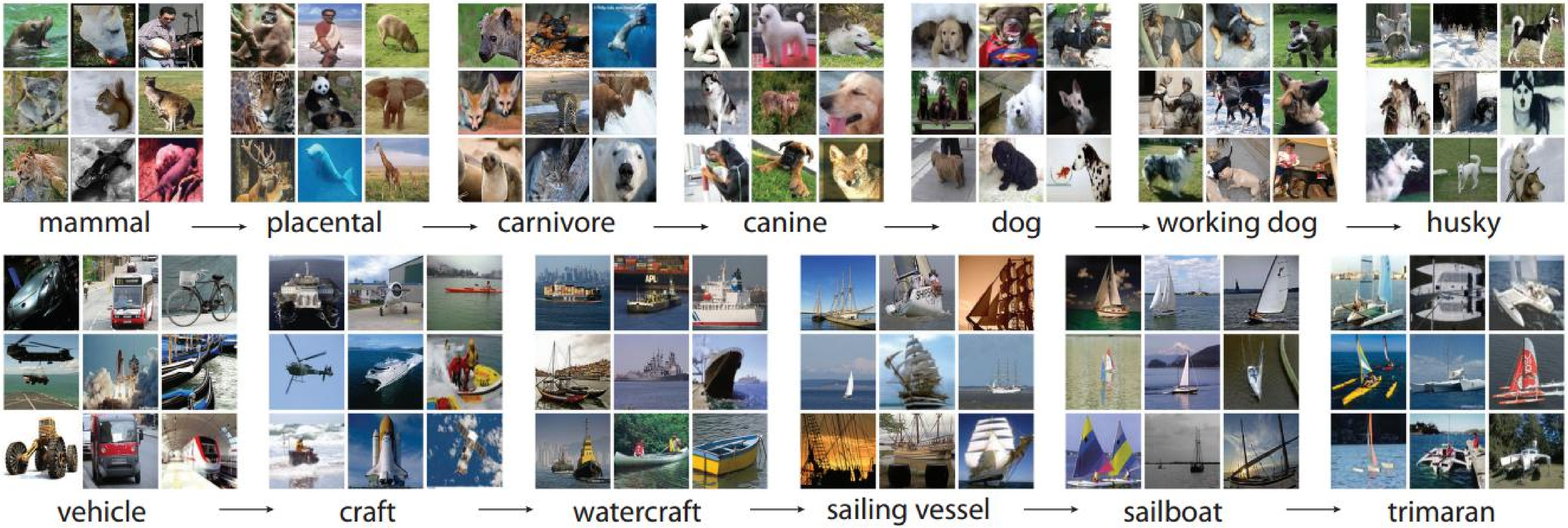
数据集：CIFAR-10

- **60000张32x32色彩图像，共10类，每类6000张图像。**

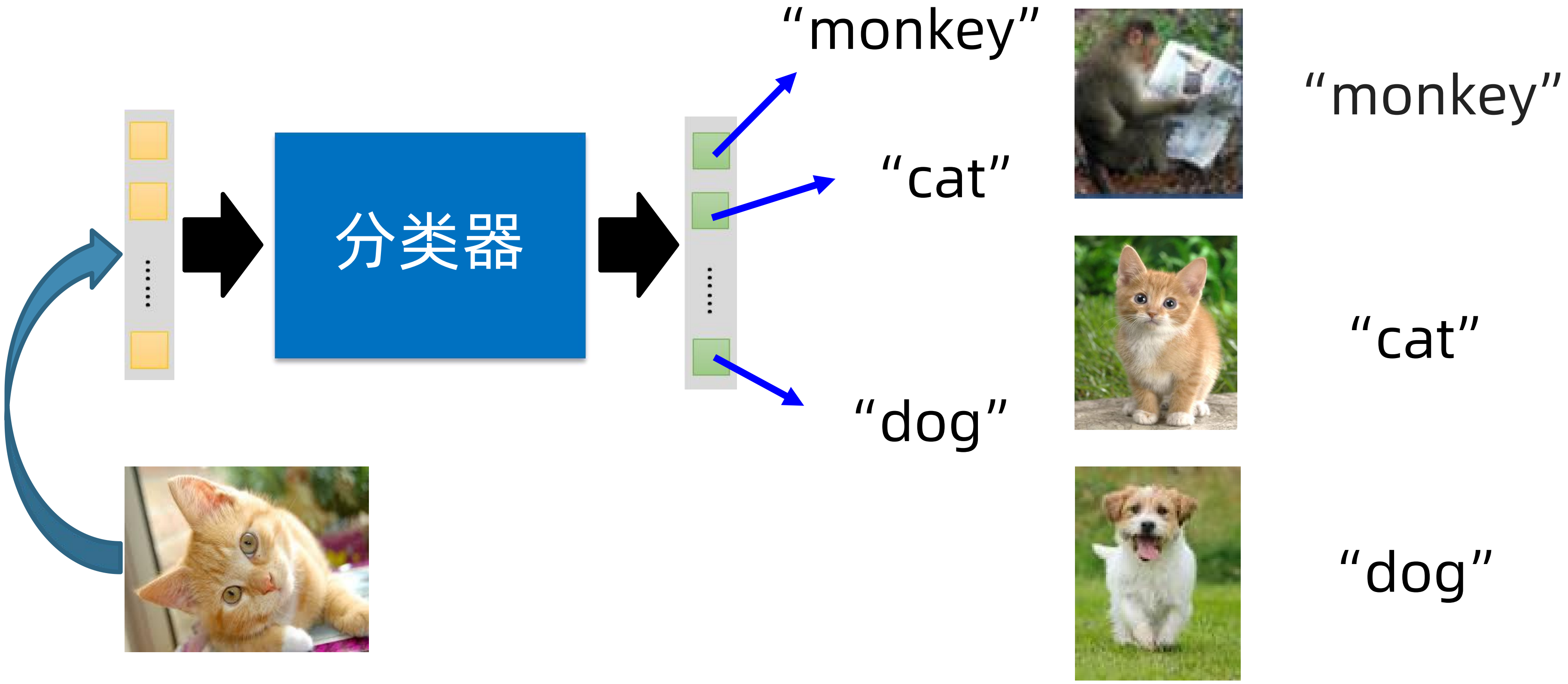


数据集：ImageNet

- 14,197,122 images, 21841 synsets



应用：图像分类



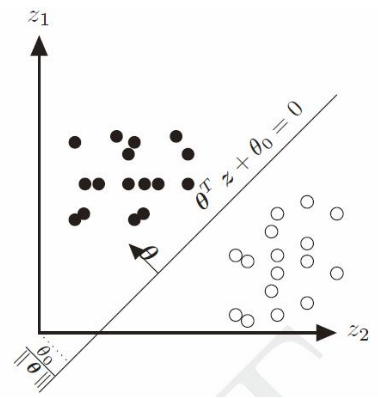
应用：文本情感分类

根据文本内容来判断文本的相应类别

D_1：“我喜欢读书”

D_2：“我讨厌读书”

	我	喜欢	讨厌	读书
D_1	1	1	0	1
D_2	1	0	1	1

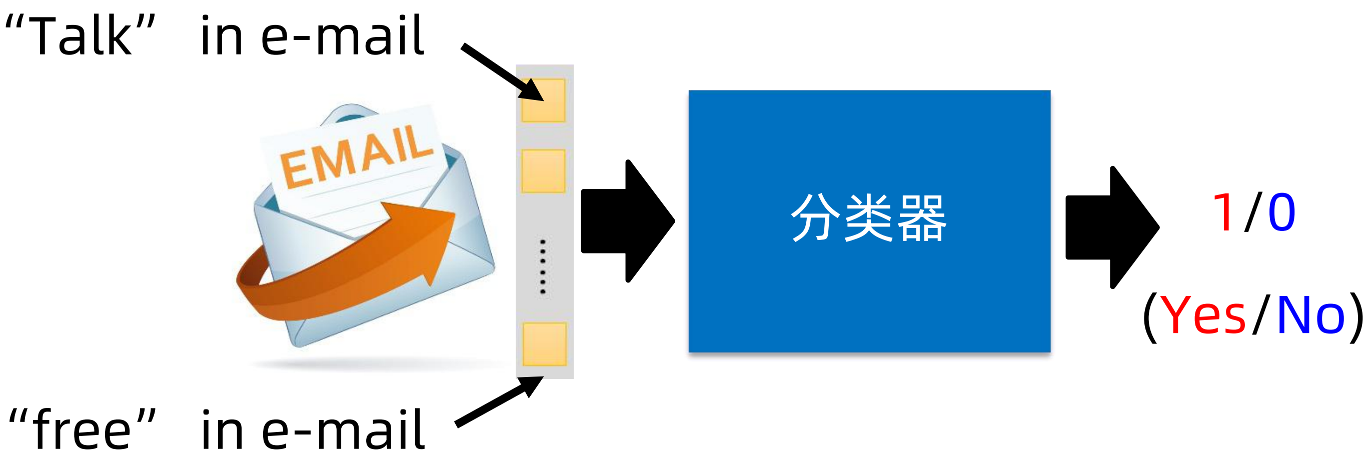


+

-

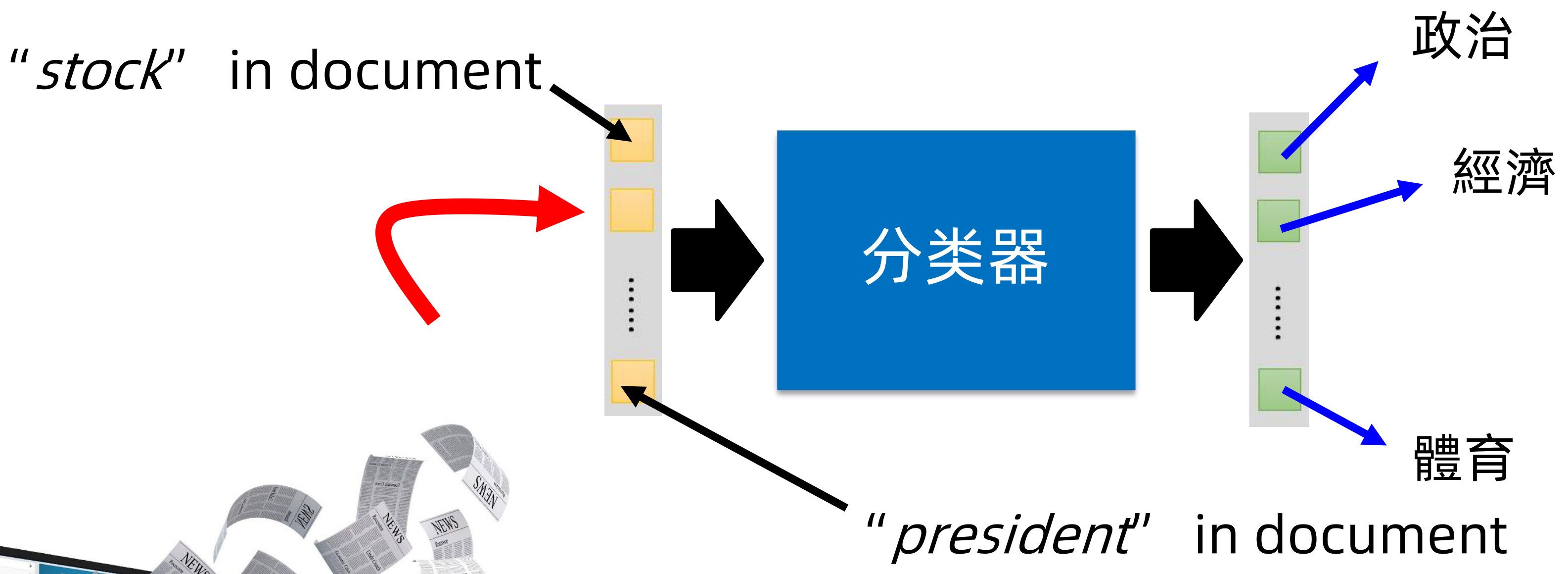
应用：垃圾邮件过滤

Spam filtering



(http://spam-filter-review.toptenreviews.com/)

应用：文档归类



http://top-breaking-news.com/

體育　政治　財經

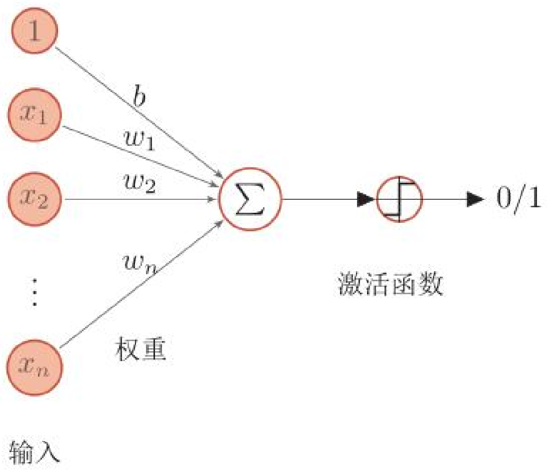
线性判别函数和决策边界

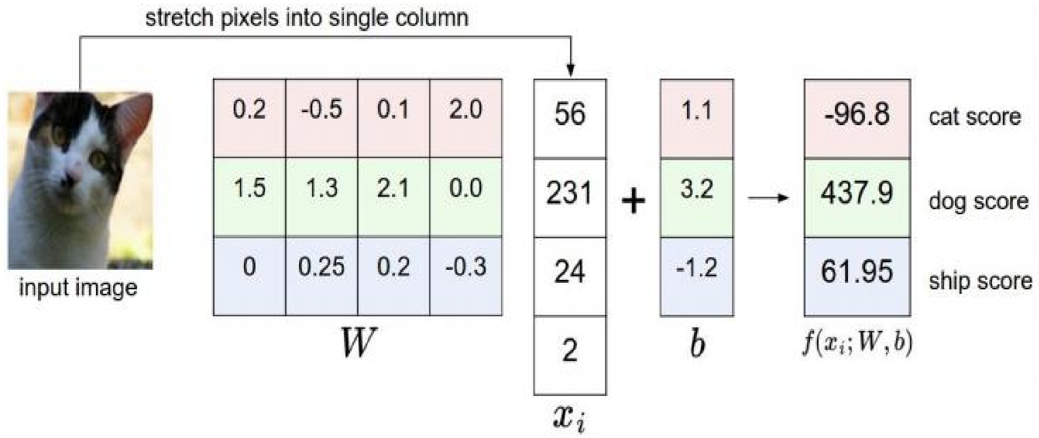
线性模型（Linear Model）是机器学习中应用最广泛的模型，指通过样本特征的线性组合来进行预测的模型。给定一个d维样本$[x_1, \cdots, x_d]^{\mathrm{T}}$，其线性组合函数为

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_d x_d + b \quad (3.1)$$

$$= \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} + b, \quad (3.2)$$

其中$\mathbf{w} = [w_1, \cdots, w_d]^{\mathrm{T}}$为$d$维的权重向量，$b$为偏置。





线性模型

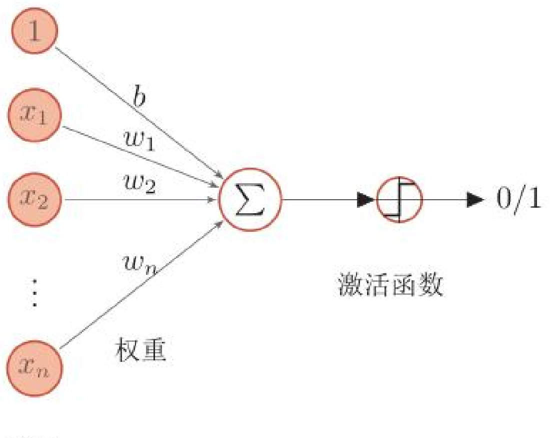
线性模型（Linear Model）是机器学习中应用最广泛的模型，指通过样本特征的线性组合来进行预测的模型。给定一个d维样本$[x_1, \cdots, x_d]^{\mathrm{T}}$，其线性组合函数为

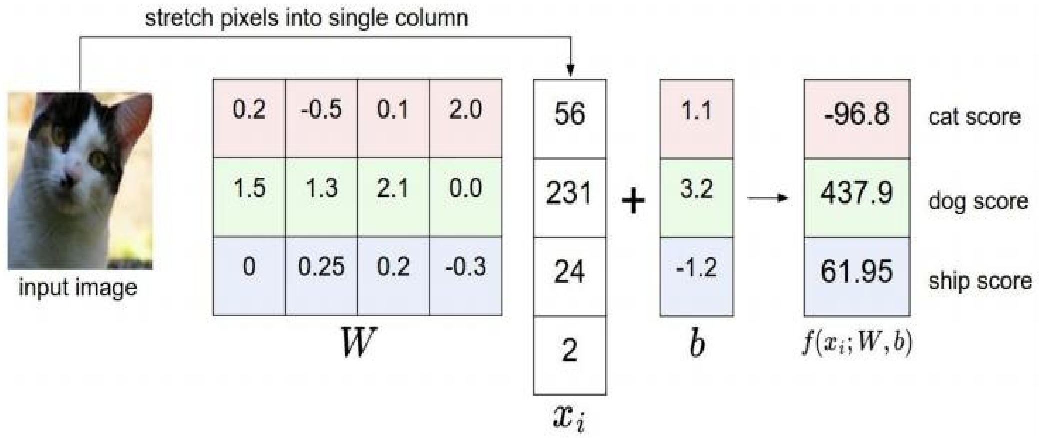
$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_d x_d + b \quad (3.1)$$

$$= \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} + b, \quad (3.2)$$

其中$\mathbf{w} = [w_1, \cdots, w_d]^{\mathrm{T}}$为$d$维的权重向量，$b$为偏置。

分类结果需要是离散值，怎么办？





决策函数/判别函数

在分类问题中，由于输出目标 y 是一些离散的标签，而 $f(\mathbf{x},\mathbf{w})$ 的值域为实数，因此无法直接用 $f(\mathbf{x},\mathbf{w})$ 来进行预测，需要引入一个非线性的决策函数（decision function）$g(\cdot)$ 来预测输出目标

$$y = g\big(f(\mathbf{x},\mathbf{w})\big), \tag{3.3}$$

其中 $f(\mathbf{x},\mathbf{w})$ 也称为判别函数（discriminant function）。

对于两类分类问题，$g(\cdot)$ 可以是符号函数（sign function）

$$g\big(f(\mathbf{x},\mathbf{w})\big) = \operatorname{sgn}\big(f(\mathbf{x},\mathbf{w})\big) \tag{3.4}$$

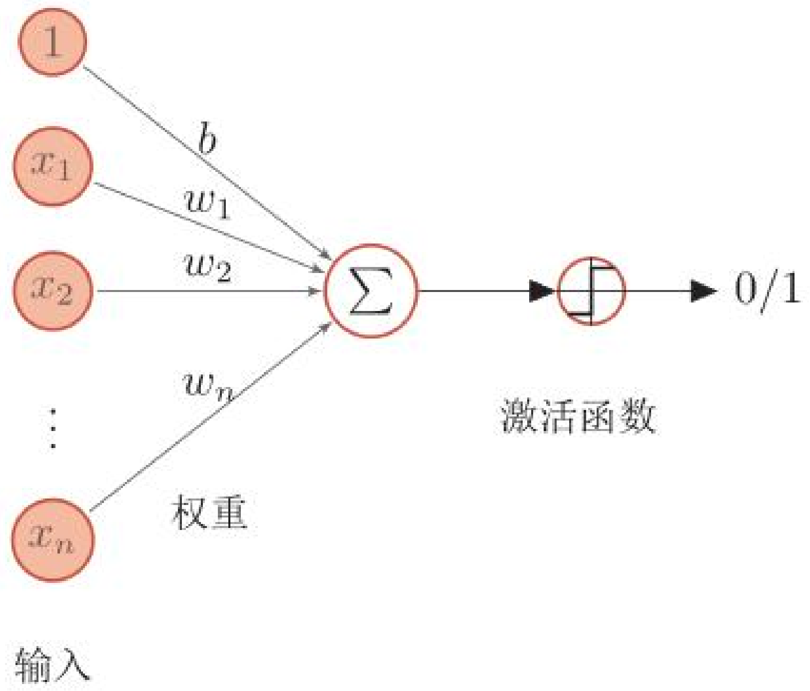
$$\triangleq \begin{cases} +1 & \text{if} \quad f(\mathbf{x},\mathbf{w}) > 0, \\ -1 & \text{if} \quad f(\mathbf{x},\mathbf{w}) < 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

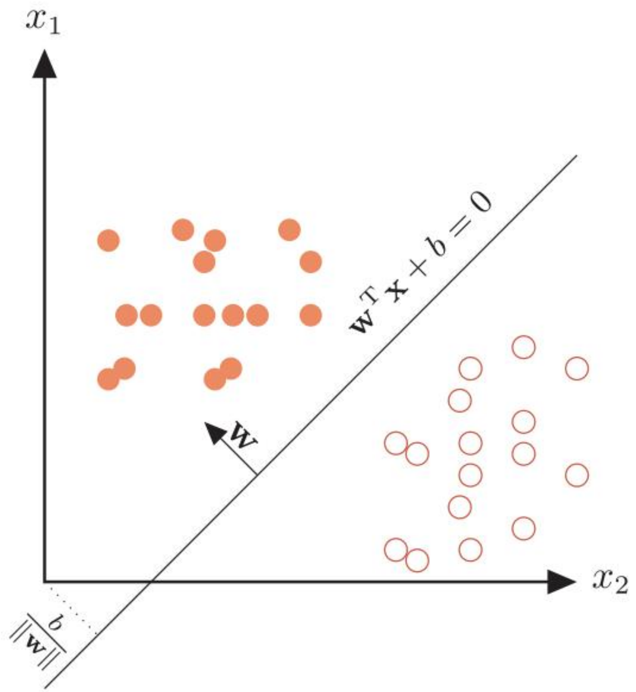
当 $f(\mathbf{x},\mathbf{w}) = 0$ 时不进行预测。公式 (3.5) 定义了一个典型的两类分类问题的决策函数，其结构如图3.1所示。

两类线性分类模型（符号函数）

$$g(f(\mathbf{x},\mathbf{w})) = \operatorname{sgn}\left(f(\mathbf{x},\mathbf{w})\right) \triangleq \begin{cases} +1 & \text{if} \quad f(\mathbf{x},\mathbf{w}) > 0, \\ -1 & \text{if} \quad f(\mathbf{x},\mathbf{w}) < 0. \end{cases}$$

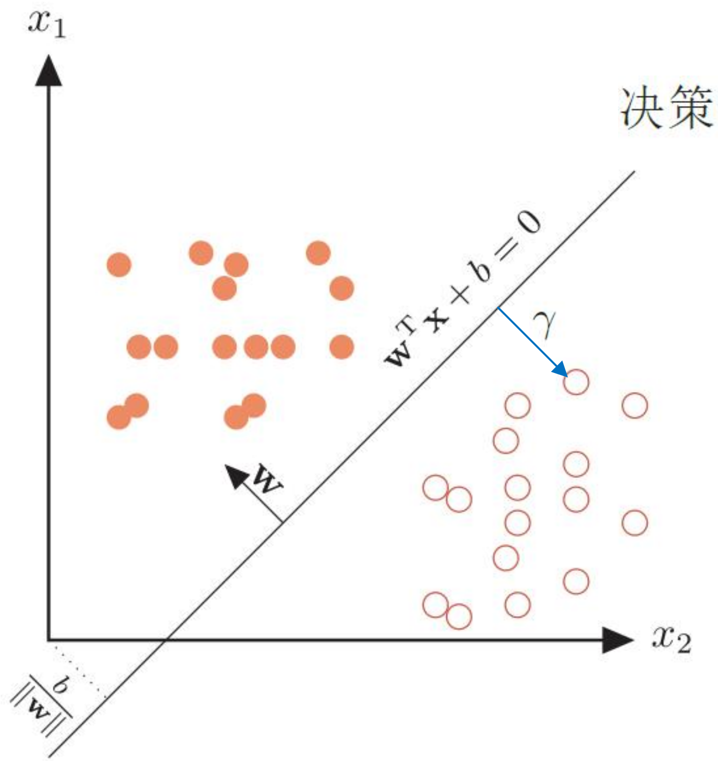
$$f(\mathbf{x},\mathbf{w}) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + b$$





决策边界/决策平面

在两个分类中，我们只需要一个线性判别函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + b$。特征空间 $\mathbb{R}^d$ 中所有满足 $f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = 0$ 的点组成用一个分割超平面（hyperplane），称为决策边界（decision boundary）或决策平面（decision surface）。决策边界将特征空间一分为二，划分成两个区域，每个区域对应一个类别。

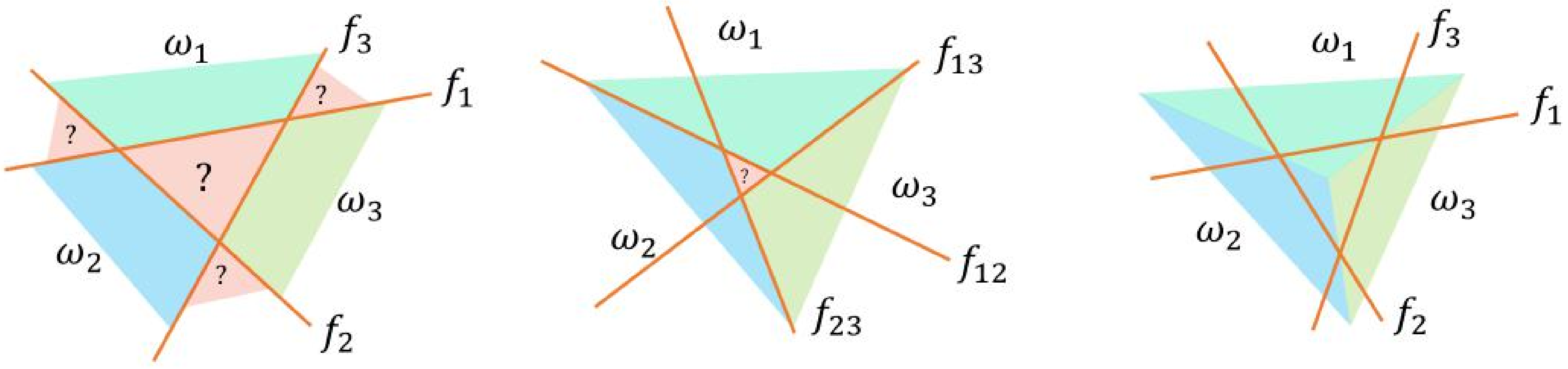


决策平面与权重向量 $\mathbf{w}$ 正交

有向距离 $\gamma = \dfrac{f(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|}$

权重向量 $\mathbf{w} = [w_1, w_2]$

多类分类（Multi-class Classification）



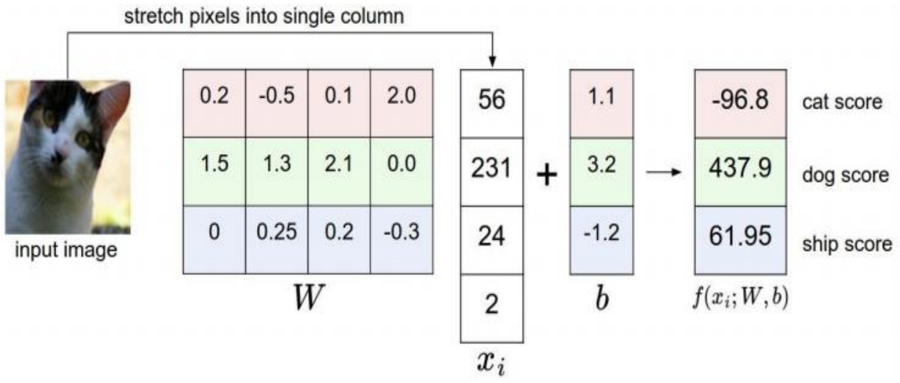
(a) “一对其余”方式　　(b) “一对一”方式　　(c) “argmax”方式

“*argmax*”方式：这是一种改进的“一对其余”方式，共需要C个判别函数

$$f_c(\mathbf{x};\mathbf{w}_c)=\mathbf{w}_c^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+b_c,\qquad c=[1,\cdots,C] \tag{3.10}$$

如果存在类别c,对于所有的其他类别$\tilde{c}(\tilde{c}\neq c)$都满足$f_c(\mathbf{x};\mathbf{w}_c)>f_{\tilde{c}}(\mathbf{x},\mathbf{w}_{\tilde{c}})$，那么$\mathbf{x}$属于类别$c$。即

$$y=\arg\max_{c=1}^{C} f_c(\mathbf{x};\mathbf{w}_c). \tag{3.11}$$



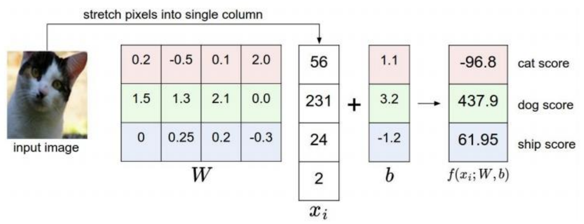
分类问题

- **将分类问题看作条件概率估计问题**
  - 为了解决连续的线性函数不适合进行分类的问题，引入非线性函数g 来预测类别标签的后验概率 p(y = c|x)。
  - 以两类分类为例，

$$p(y=1|\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x};\mathbf{w}))$$

  - 函数f：线性函数
  - 函数g：把线性函数的值域从实数区间“挤压”到了(0,1)之间，可以用来表示概率。

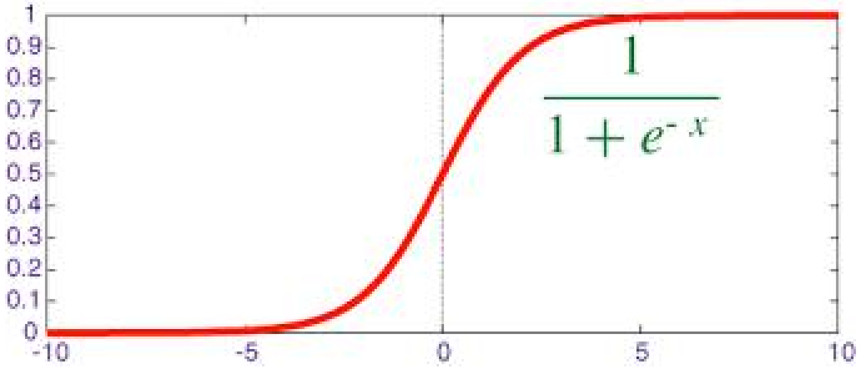
如何构建函数g?



Logistic Regression

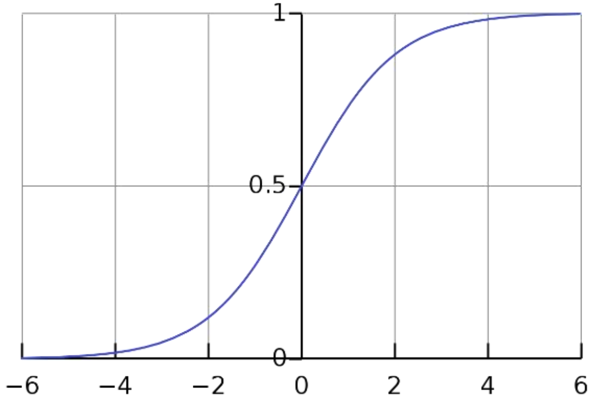
- **Logistic函数**

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$$



- **Logistic回归**

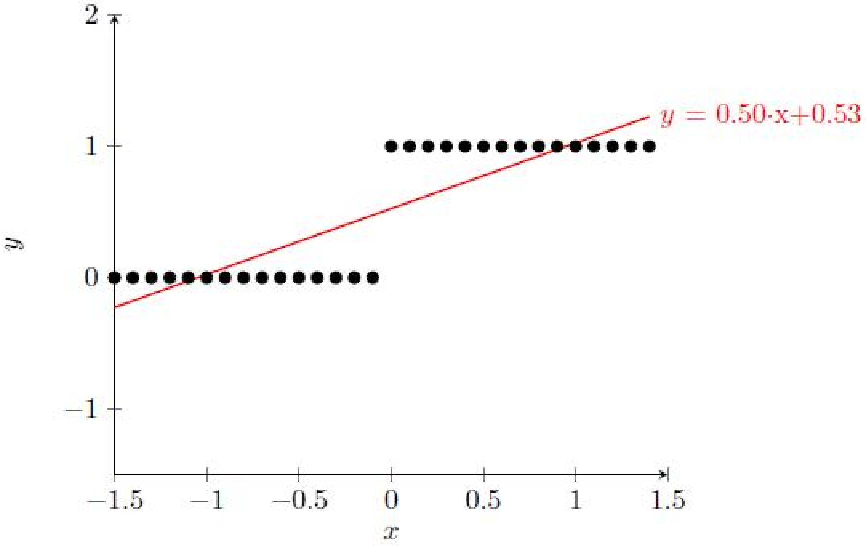
$$p(y=1|\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{1+\exp(-\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})}$$



Logistic分类

线性分类器

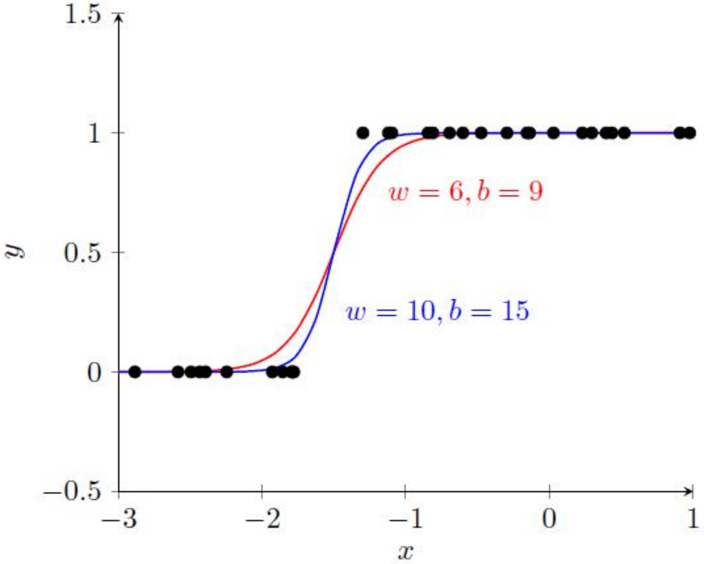
$$\hat{y} = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} > 0 \\ 0 & \text{if } \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \le 0 \end{cases}$$



(a) 线性回归

Logistic分类器

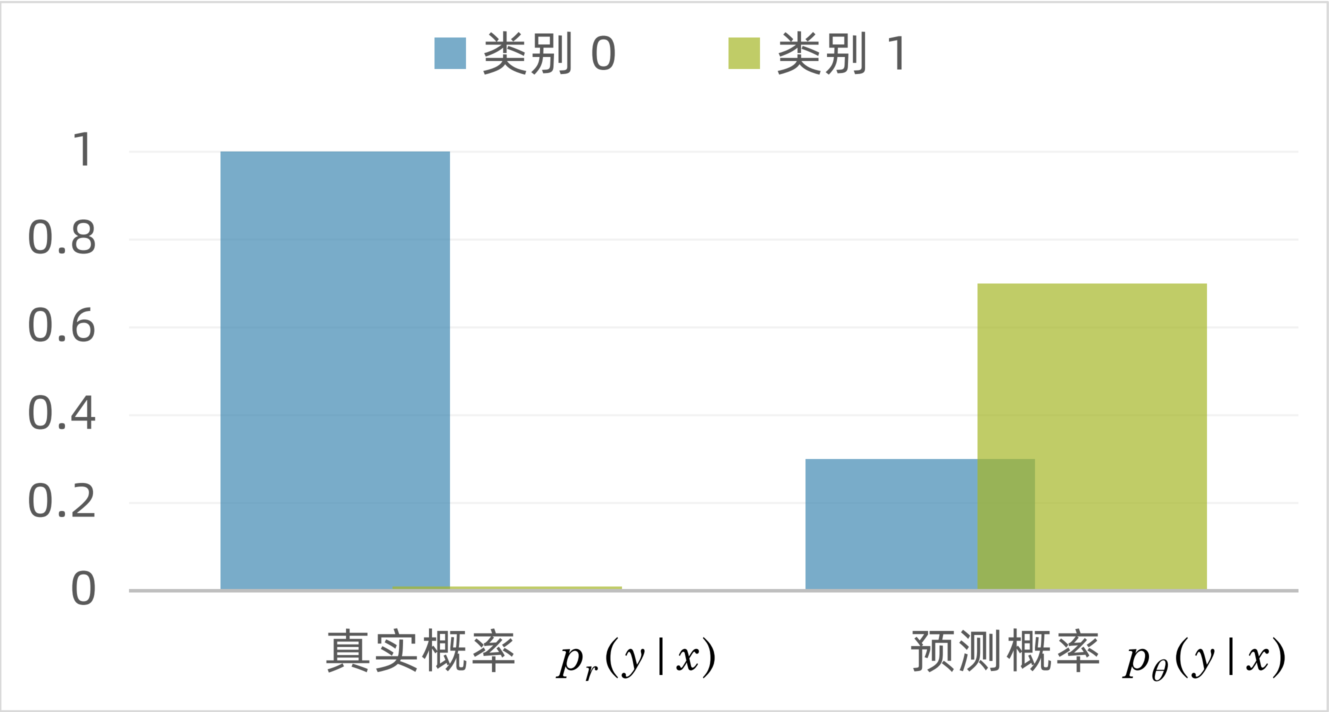
$$P(y=1|\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{1+\exp(-\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})},$$



(b) Logistic 回归

交叉熵损失

- **分类任务：真实概率 vs. 预测概率**



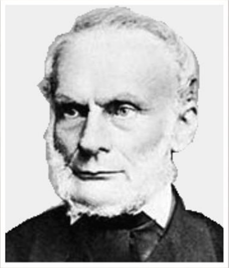
如何衡量两个条件分布的差异？

- **在信息论中，熵用来衡量一个随机事件的不确定性**
- **自信息（Self Information）**

$$I(x) = -\log(p(x))$$

- **熵**

$$\begin{aligned} H(X) &= \mathbb{E}_X[\mathrm{I}(x)] \\ &= \mathbb{E}_X[-\log(p(x))] \\ &= -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log p(x) \end{aligned}$$



Rudolf Julius Emanuel Clausius

热力学第二定律

Entropy

熵

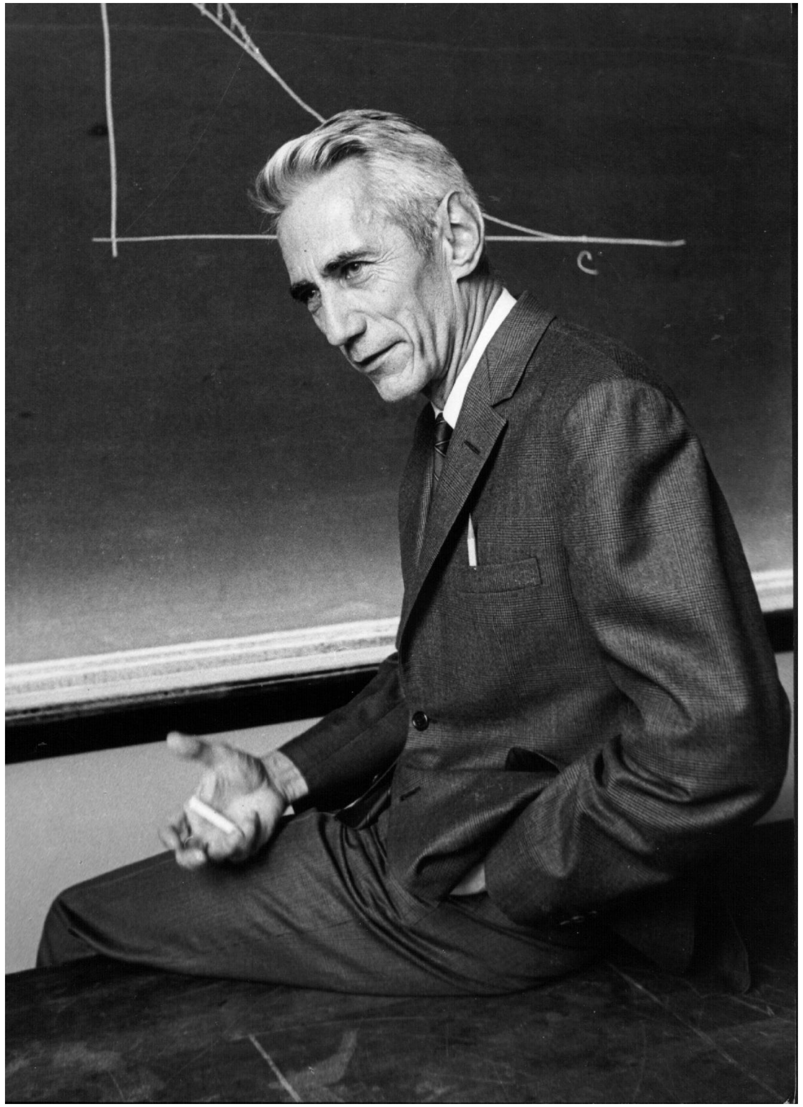
香农创造性的引入
“信息熵”
解决了对信息的量化问题

IEEE INFORMATION THEORY SOCIETY
SCIE . CQUPT

熵（Entropy）

- **克劳德·香农Claude E. Shannon**
  - 生卒年：1916-2001
  - 信息论之父

贝尔实验室雕像



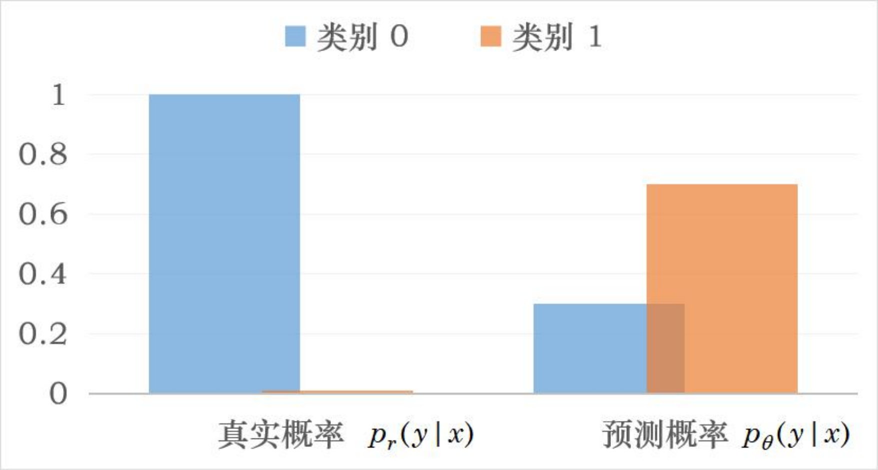
交叉熵（Cross Entropy）

- **交叉熵是按照概率分布q的最优编码对真实分布为p的信息进行编码的长度。**

$$H(p,q) = \mathbb{E}_p[-\log q(x)] \\ = -\sum_x p(x) \log q(x)$$

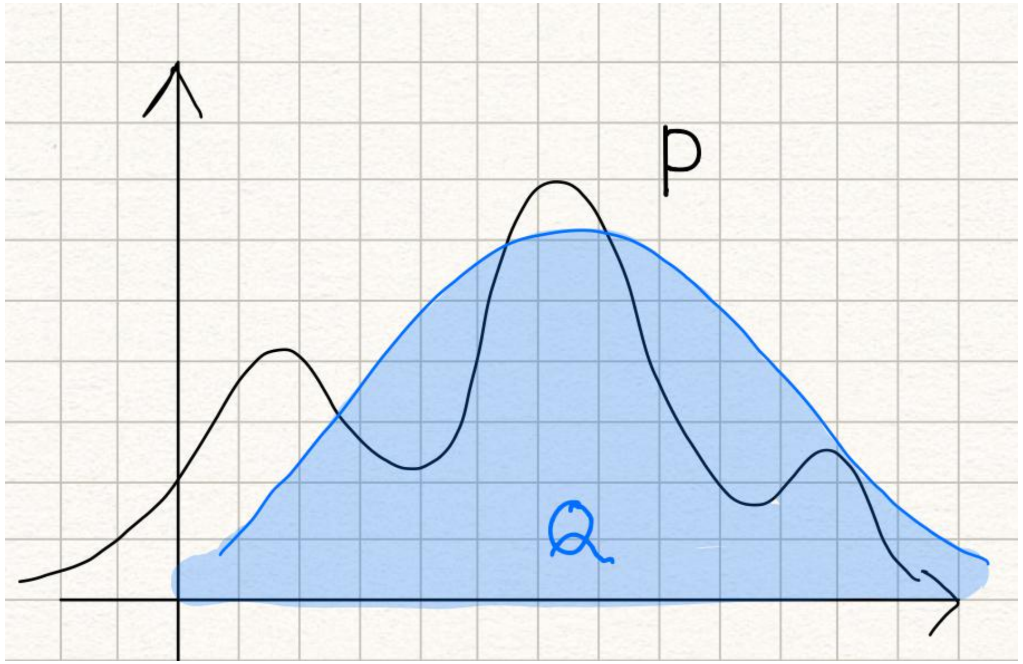
- **二分类问题中**

$$H(p,q) = \begin{cases} ? & if\ p = q \\ ? & if\ p = [1,0], q = [0.3, 0.7] \end{cases}$$



KL散度（Kullback-Leibler Divergence）

- **KL散度是用概率分布q来近似p时所造成的信息损失量。**
  - KL散度是按照概率分布q的最优编码对真实分布为p的信息进行编码，其平均编码长度（即交叉熵）H(p,q)和p的最优平均编码长度（即熵）H(p)之间的差异。



$$D_{KL}(P||Q) = \sum_i P(i) \log \frac{P(i)}{Q(i)}$$

$$D_{KL}(P||Q) = \int P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

交叉熵损失

- **交叉熵损失 → 负对数似然**

$$D_{\mathrm{kl}}(p_r(y|x)||p_\theta(y|x)) = \sum_{y=0}^{1} p_r(y|x)\log\frac{p_r(y|x)}{p_\theta(y|x)}$$ KL散度

$$\propto -\sum_{y=0}^{1} p_r(y|x)\log p_\theta(y|x)$$ 交叉熵损失

y^* 为x的真实标签

$$= -I(y^*=1)\log p_\theta(y=1|x) - I(y^*=0)\log p_\theta(y=0|x)$$

$$= -y^*\log p_\theta(y=1|x) - (1-y^*)\log p_\theta(y=0|x)$$

$$= -\log p_\theta(y^*|x)$$ 负对数似然

交叉熵损失函数

- **负对数似然损失函数**

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, f(\mathbf{x}, \theta)) = -\sum_{c=1}^{C} y_c \log f_c(\mathbf{x}, \theta)$$

  - 对于一个三类分类问题，类别为[0,0,1]，预测的类别概率为[0.3,0.3,0.4]，则

Ex:

Computed ($\hat{y}$)	Targets (y)
[0.3, 0.3, 0.4]	[0, 0, 1]

$$\mathcal{L}(\theta) =$$

- **负对数似然损失函数**

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, f(\mathbf{x},\theta)) = -\sum_{c=1}^{C} y_c \log f_c(\mathbf{x},\theta)$$

  - 对于一个三类分类问题，类别为[0,0,1]，预测的类别概率为[0.3,0.3,0.4]，则

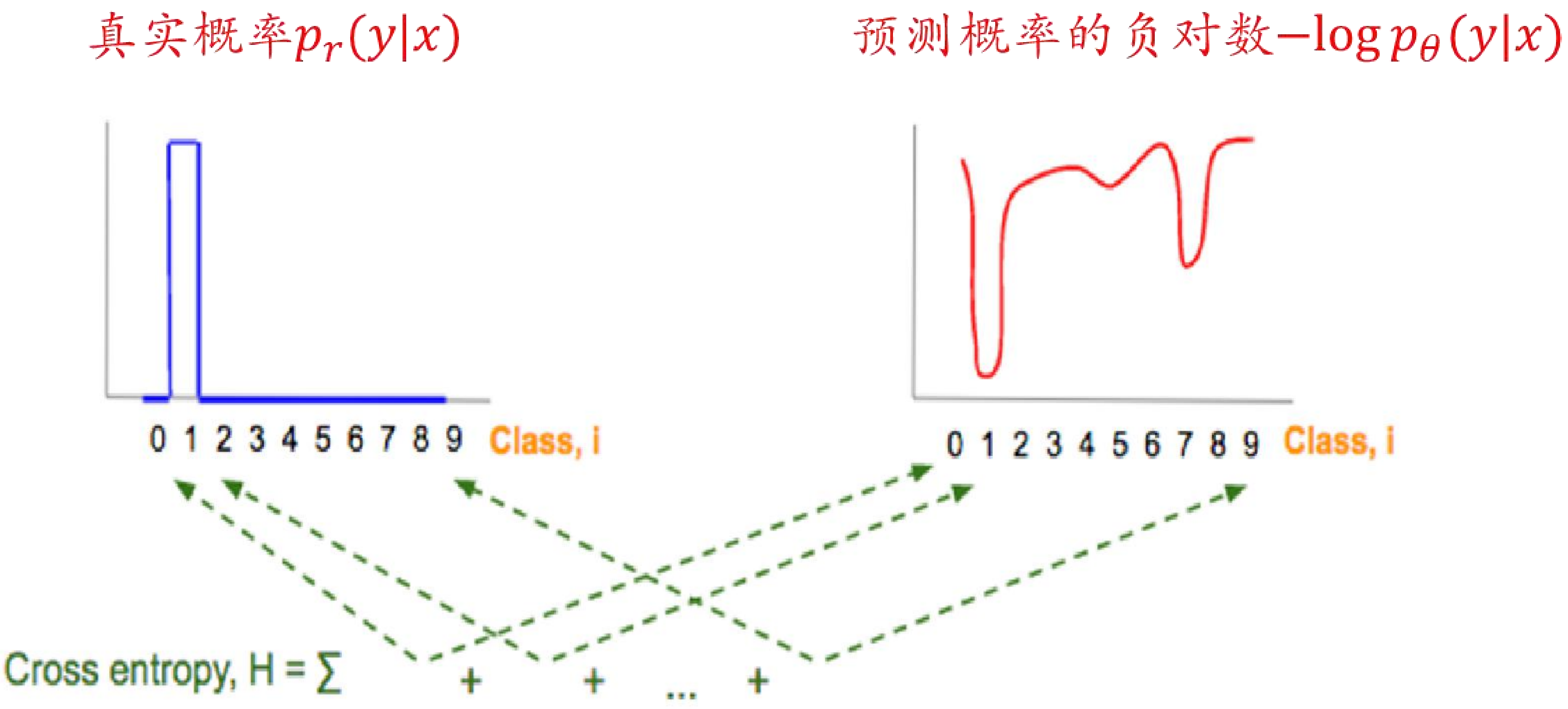
Ex:

Computed ($\hat{y}$)	Targets (y)
[0.3, 0.3, 0.4]	[0, 0, 1]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta) &= -\big(0\times\log(0.3)+0\times\log(0.3)+1\times\log(0.4)\big)\\ &= -\log(0.4).\end{aligned}$$

- **交叉熵损失 → 负对数似然**

$$-\sum_{y=1}^{C} p_r(y|x)\log p_\theta(y|x)$$



梯度下降

- **交叉熵损失函数，模型在训练集的风险函数为**

$$\mathcal{R}(\mathbf{w}) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y^{(i)}\log\left(\sigma(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(i)})\right) + (1-y^{(i)})\log\left(1-\sigma(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(i)})\right)\right).$$

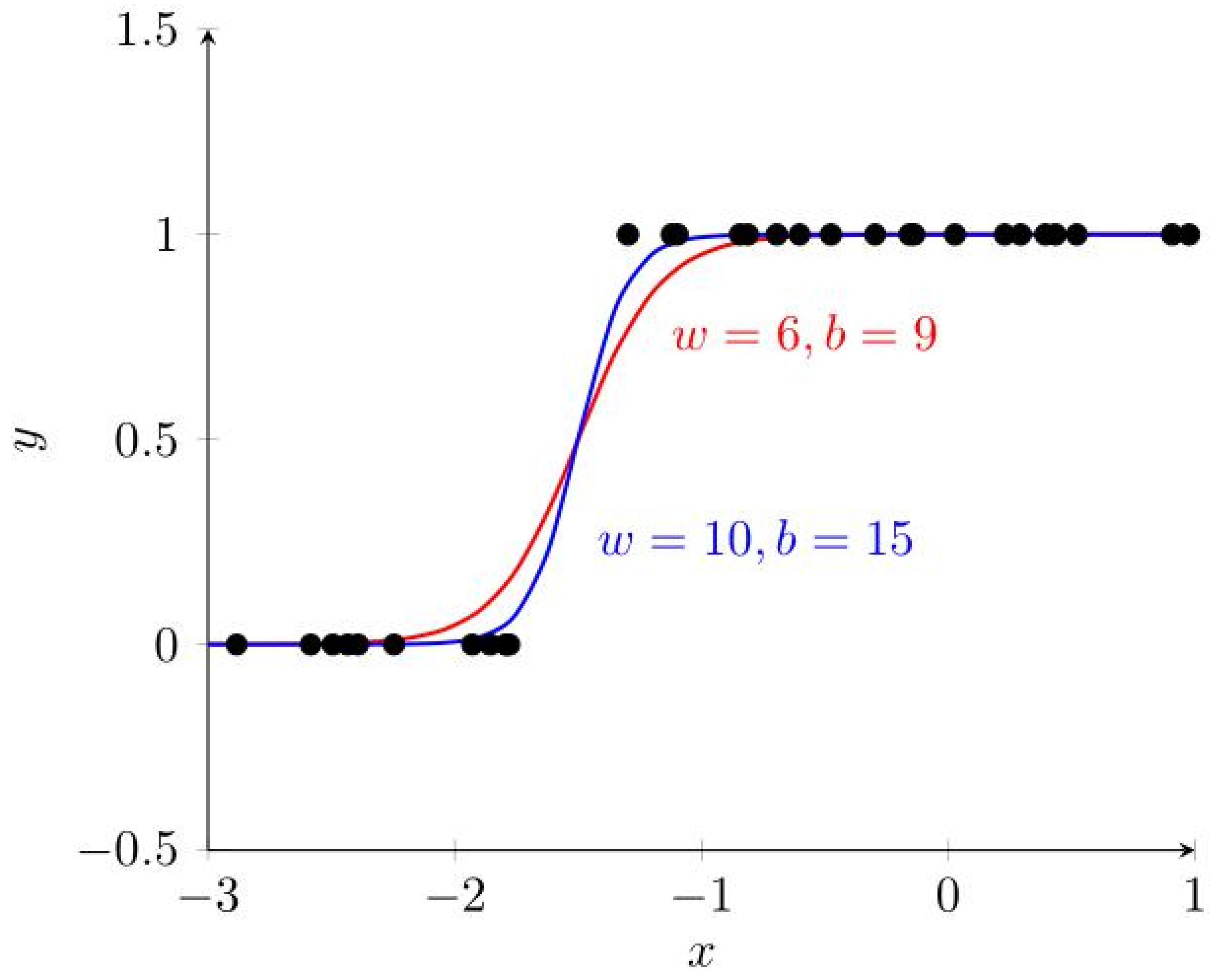
- **梯度为**

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{x}^{(i)}\cdot\left(\sigma(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)}\right)\right)$$

- 推导

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} &= -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(y^{(n)}\frac{\hat{y}^{(n)}(1-\hat{y}^{(n)})}{\hat{y}^{(n)}}\mathbf{x}^{(n)} - (1-y^{(n)})\frac{\hat{y}^{(n)}(1-\hat{y}^{(n)})}{1-\hat{y}^{(n)}}\mathbf{x}^{(n)}\right) \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(y^{(n)}(1-\hat{y}^{(n)})\mathbf{x}^{(n)} - (1-y^{(n)})\hat{y}^{(n)}\mathbf{x}^{(n)}\right) \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{x}^{(n)}\left(y^{(n)} - \hat{y}^{(n)}\right).
\end{aligned}$$

Logistic回归



Softmax Regression

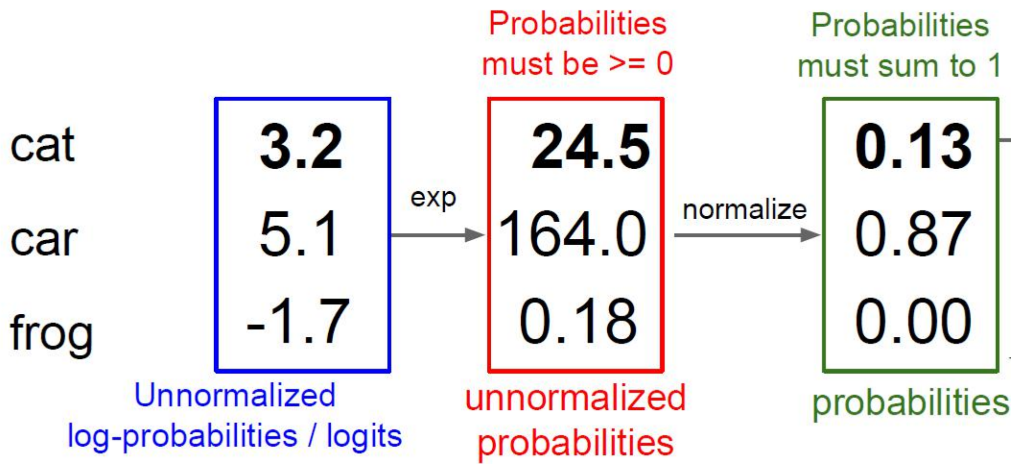
Softmax判别函数

Softmax函数

$$\mathrm{softmax}(x_k) = \frac{\exp(x_k)}{\sum_{i=1}^{K}\exp(x_i)}$$

Softmax回归

$$P(y=c|\mathbf{x}) = \mathrm{softmax}(\mathbf{w}_c^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) = \frac{\exp(\mathbf{w}_c^{\top}\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{C}\exp(\mathbf{w}_i^{\top}\mathbf{x})}.$$

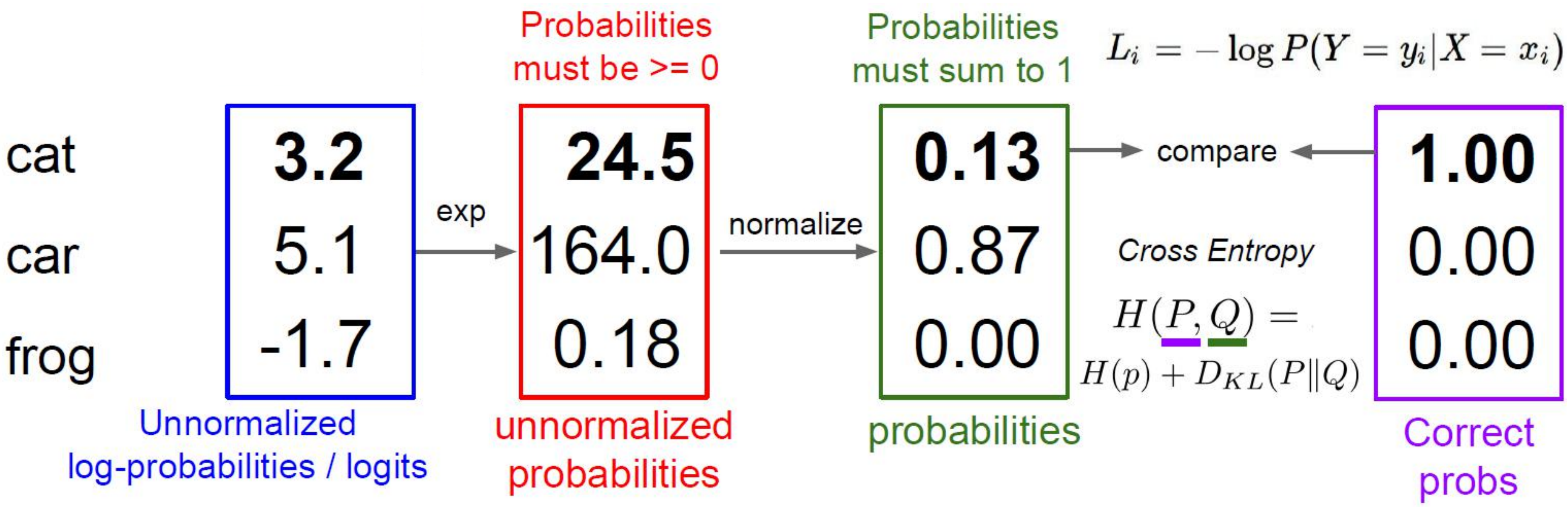


- Softmax回归是logistic回归的多类推广： $\hat{y} = \arg\max_{c=1}^{C} \mathbf{w}_c^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

学习准则

- **交叉熵损失 Cross Entropy Loss**

$$\mathcal{R}(W) = -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\mathbf{y}^{(n)})^{\mathrm{T}}\log\hat{\mathbf{y}}^{(n)}$$

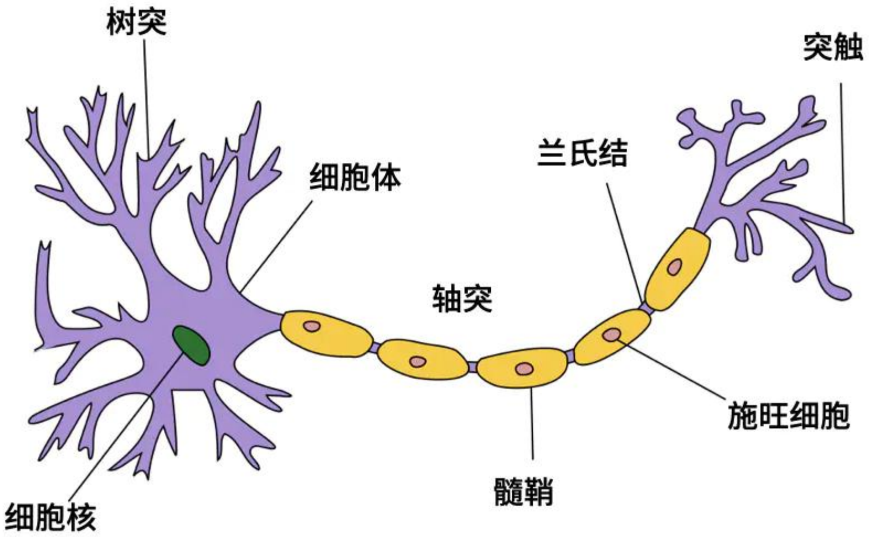


Perceptron 感知器

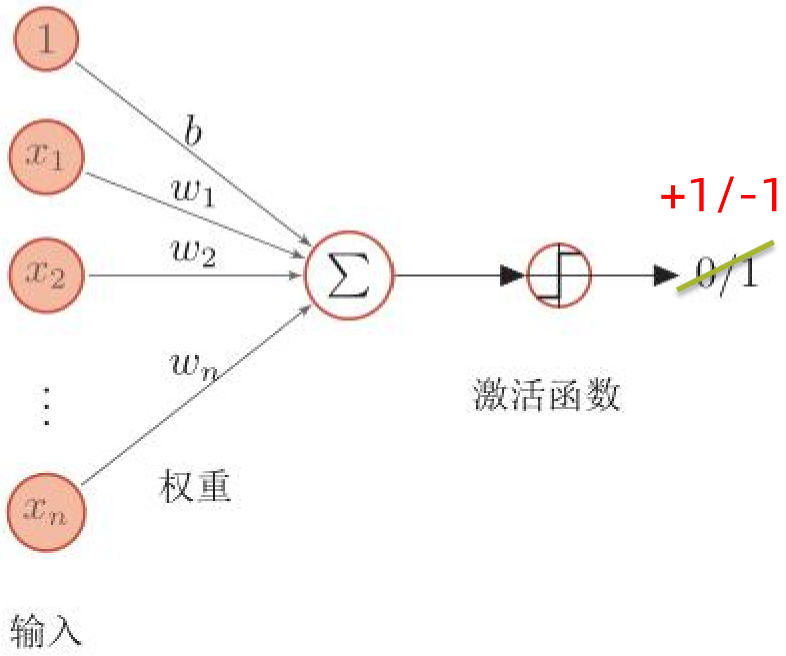
感知器

- 模拟生物神经元行为的机器，有与生物神经元相对应的部件，如权重（突触）、偏置（阈值）及激活函数（细胞体），输出为+1或-1。

标准神经元结构



$$\hat{y} = \begin{cases} +1 & \text{当}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} > 0 \\ -1 & \text{当}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq 0 \end{cases},$$



- **一种错误驱动的在线学习方法**

1. 初始化权重向量

2. 每分错一个样本时更新权重

$$\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + y\mathbf{x}$$

输入: 训练集: $(\mathbf{x}_i, y_i), i = 1, \cdots, N$，迭代次数: T

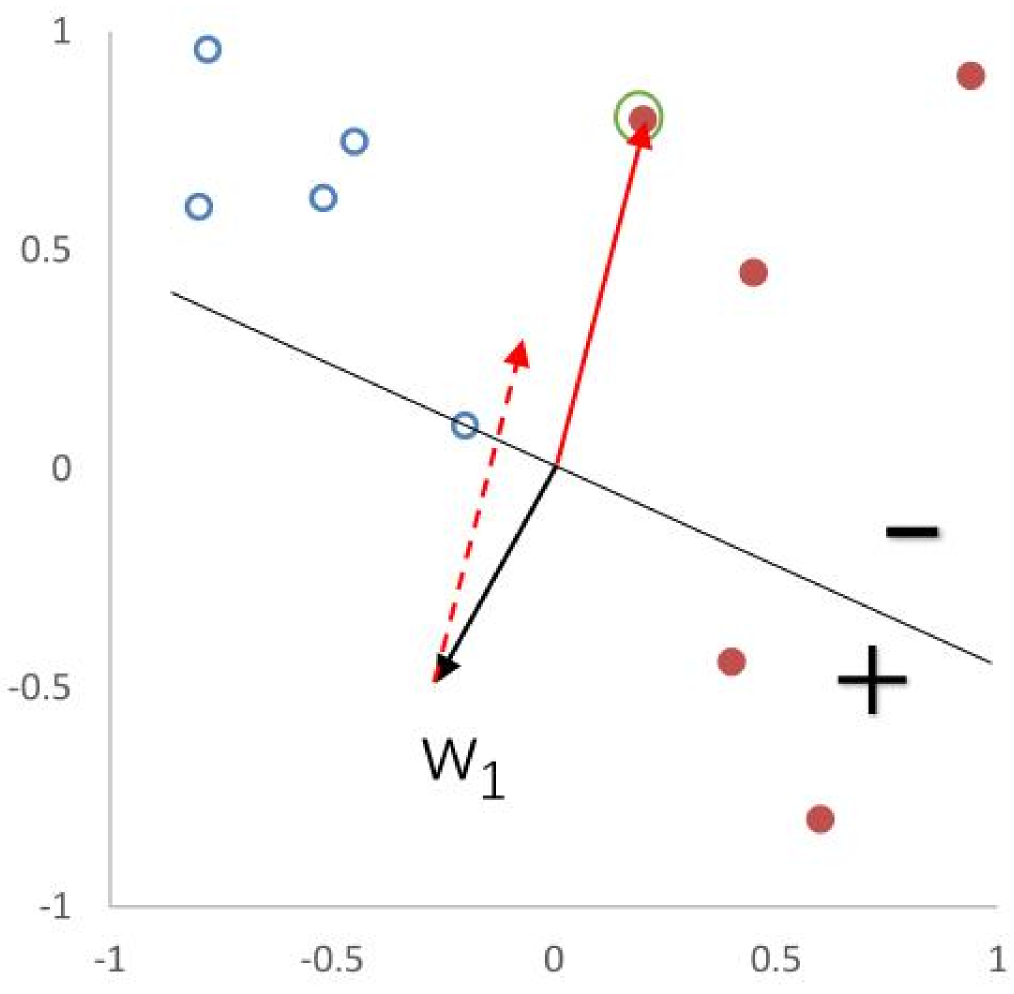
```
初始化: w_0 = 0 ;
k = 0 ;
for t = 1 ··· T do
    for i = 1 ··· N do
        选取一个样本 (x_i, y_i)，if w^T(y_i x_i) < 0 then
            w_{k+1} = w_k + y_i x_i， ;
            k = k + 1;
        end
    end
end
```

输出: $\mathbf{w}_k$

$\boxed{\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(y_i\mathbf{x}_i) < 0}$ 表示分错

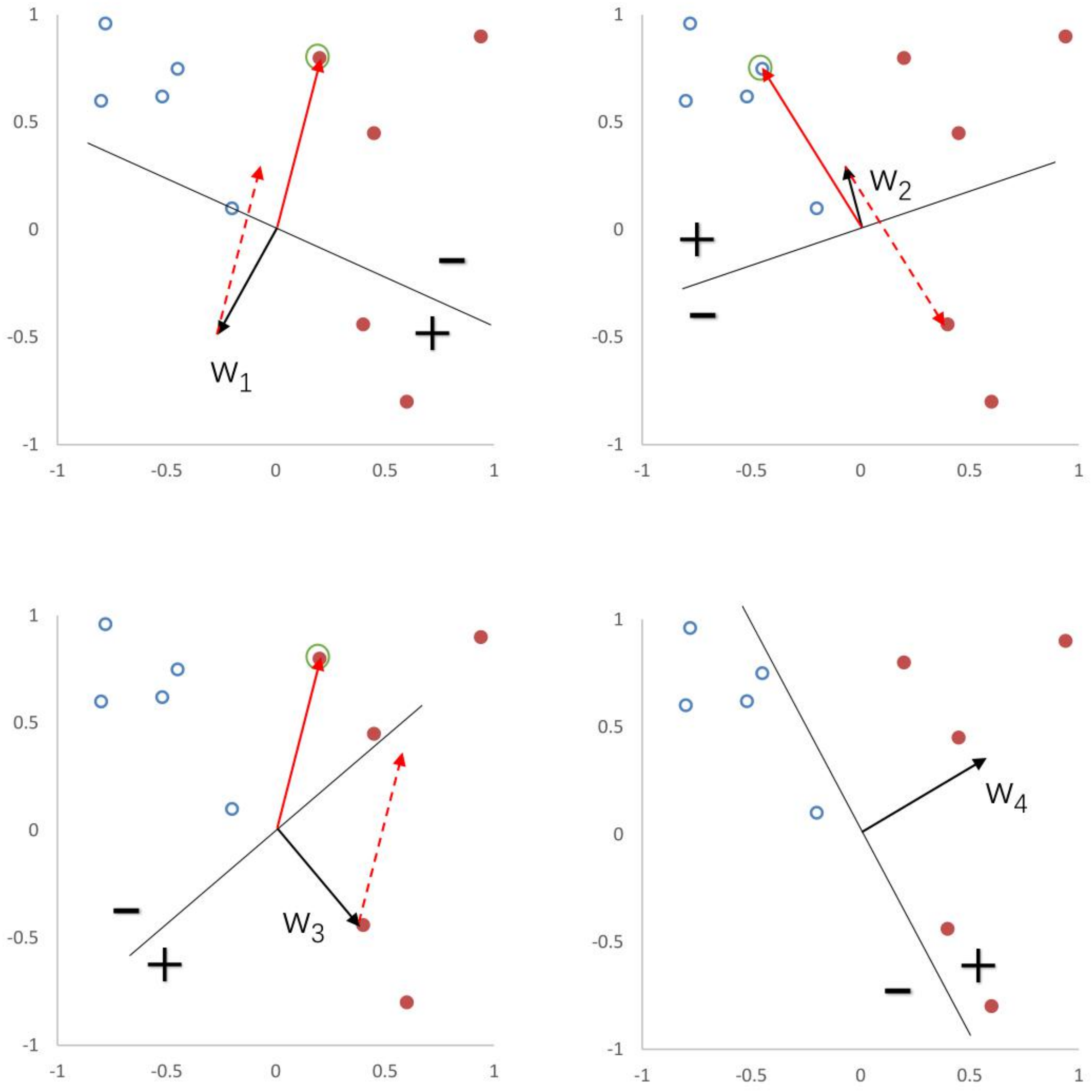
$$\hat{y} = \begin{cases} +1 & 当\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} > 0 \\ -1 & 当\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \le 0 \end{cases},$$

感知器参数学习的更新过程



- 红色实心点为正例
- 蓝色空心点为负例
- 黑色箭头表示权重向量
- 红色虚线箭头表示权重的更新方向

感知器参数学习的更新过程



- 红色实心点为正例
- 蓝色空心点为负例
- 黑色箭头表示权重向量
- 红色虚线箭头表示权重的更新方向

感知器的学习过程

- **一种错误驱动的在线学习方法**

根据感知器的学习策略，可以反推出感知器的损失函数为：

$$\mathcal{L}(\mathbf{w};\mathbf{x},y)=\max(0,-y\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}).$$

采用随机梯度下降，其每次更新的梯度为

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{w};\mathbf{x},y)}{\partial\mathbf{w}}=\begin{cases}0 & \text{if}\quad y\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}>0,\\ -y\mathbf{x} & \text{if}\quad y\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}<0.\end{cases}$$

每分错一个样本时更新权重 $\mathbf{w}\leftarrow\mathbf{w}+y\mathbf{x}$

感知器的学习过程

- **一种错误驱动的在线学习方法**

1. 初始化权重向量

2. 每分错一个样本时更新权重

$$\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + y\mathbf{x}$$

输入: 训练集: $(\mathbf{x}_i, y_i), i = 1, \cdots, N$，迭代次数：$T$

初始化：$\mathbf{w}_0 = 0$;
$k = 0$;
for $t = 1 \cdots T$ **do**
  for $i = 1 \cdots N$ **do**
    选取一个样本 $(\mathbf{x}_i, y_i)$，**if** $\boxed{\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(y_i \mathbf{x}_i) < 0}$ **then**
      $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + y_i \mathbf{x}_i$, ;
      $k = k + 1$;
    end
  end
end
输出: $\mathbf{w}_k$

表示分错

对比Logistic回归的更新方式：

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{x}^{(i)} \cdot \left(\sigma(\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)} \right) \right)$$

收敛性

定义 3.1 – 两类线性可分：对于训练集 $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}^{(n)}, y^{(n)})\}_{n=1}^{N}$，如果存在权重向量 $\mathbf{w}^*$，对所有样本都满足 $yf(\mathbf{x};\mathbf{w}^*) > 0$，那么训练集 $\mathcal{D}$ 是线性可分的。

定理 3.1 – 感知器收敛性：给定一个训练集 $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}^{(n)}, y^{(n)})\}_{n=1}^{N}$，假设 R 是训练集中最大的特征向量的模，

$$R = \max_n \|x^{(n)}\|.$$

如果训练集 $\mathcal{D}$ 线性可分，感知器学习算法3.1的权重更新次数不超过 $\frac{R^2}{\gamma^2}$。

小结

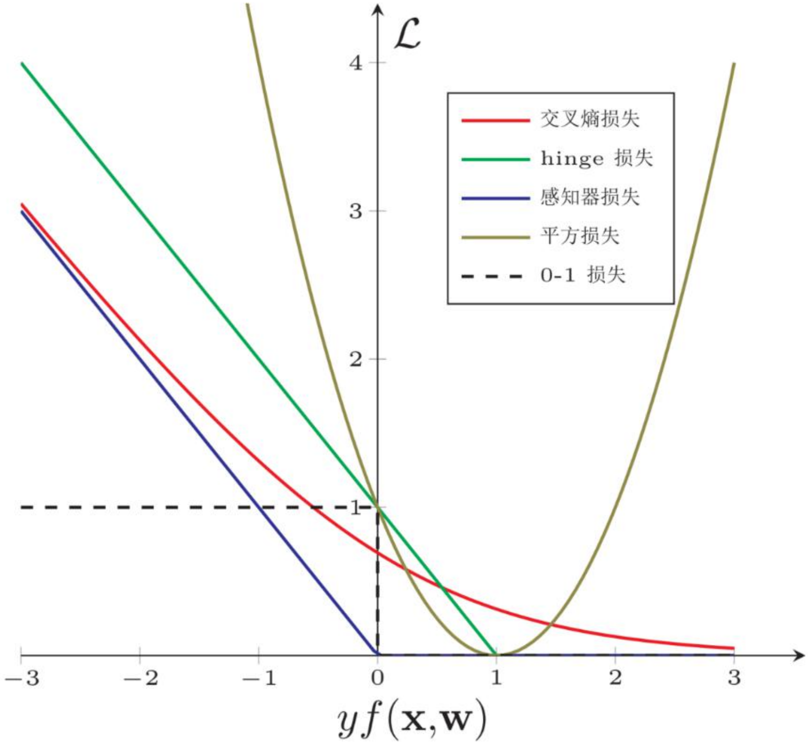
线性分类器小结

	激活函数	损失函数	优化方法
线性回归	-	$(y-\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})^2$	最小二乘、梯度下降
Logistic 回归	$\sigma(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	$\mathbf{y}\log\sigma(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	梯度下降
Softmax 回归	$\mathrm{softmax}(W^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	$\mathbf{y}\log\mathrm{softmax}(W^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	梯度下降
感知器	$\mathrm{sgn}(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	$\max(0,-y\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	随机梯度下降
支持向量机	$\mathrm{sgn}(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	$\max(0,1-y\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	二次规划、SMO 等

表 3.1 几种不同的线性模型对比

不同损失函数的对比

为了比较这些损失函数，我们统一定义类别标签 $y \in \{+1, -1\}$，并定义 $f(\mathbf{x}; \mathbf{w}) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + b$。这样对于样本 $(\mathbf{x}, y)$，若 $yf(\mathbf{x}; \mathbf{w}) > 0$，则分类正确，相反则分类错误。这样为了方便比较这些模型，我们可以将它们的损失函数都表述为定义在 $yf(\mathbf{x}; \mathbf{w})$ 上的函数。



$$\mathcal{L}_{LR} = \log\left(1 + \exp\left(-yf(\mathbf{x}; \mathbf{w})\right)\right)$$

$$\mathcal{L}_{hinge} = \max\left(0, 1 - yf(\mathbf{x}; \mathbf{w})\right)$$

$$\mathcal{L}_{p} = \max\left(0, -yf(\mathbf{x}; \mathbf{w})\right)$$

$$\mathcal{L}_{squared} = \left(1 - yf(\mathbf{x}; \mathbf{w})\right)^2$$

课后练习

- **编程练习：chap3_softmax_regression**

	激活函数	损失函数	优化方法
线性回归	-	$(y-\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})^2$	最小二乘、梯度下降
Logistic 回归	$\sigma(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	$\mathbf{y}\log\sigma(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	梯度下降
Softmax 回归	$\mathrm{softmax}(W^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	$\mathbf{y}\log\mathrm{softmax}(W^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	梯度下降
感知器	$\mathrm{sgn}(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	$\max(0,-y\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	随机梯度下降
支持向量机	$\mathrm{sgn}(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	$\max(0,1-y\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})$	二次规划、SMO 等

表 3.1 几种不同的线性模型对比

机器学习 & 深度学习

附录：概率基本概念

关于概率的一些基本概念

- **概率（Probability）**
  - 一个随机事件发生的可能性大小，为0到1之间的实数。
- **随机变量（Random Variable）**
  - 比如随机掷一个骰子，得到的点数就可以看成一个随机变量X，其取值为{1,2,3,4,5,6}。
- **概率分布（Probability Distribution）**
  - 一个随机变量X取每种可能值的概率

$$P(X = x_i) = p(x_i), \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

  - 并满足

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1,$$

$$p(x_i) \geq 0, \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

伯努利分布（Bernoulli Distribution）

- 在一次试验中，事件A出现的概率为μ，不出现的概率为$1 - \mu$。若用变量X 表示事件A出现的次数，则X 的取值为0和1，其相应的分布为

$$p(x) = \mu^x (1-\mu)^{(1-x)}$$

二项分布（Binomial Distribution）

- 在n次伯努利分布中，若以变量X 表示事件A出现的次数，则X 的取值为{0,… ,n}，其相应的分布

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \mu^k (1-\mu)^{n-k}, \qquad k = 1 \cdots, n$$

二项式系数，表示从n个元素中取出k个元素而不考虑其顺序的组合的总数。

概率的一些基本概念

- **条件概率（Conditional Probability）**
  - 对于离散随机向量(X,Y)，已知X = x的条件下，随机变量Y = y的条件概率为：

$$p(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{p(x,y)}{p(x)}$$

- **贝叶斯公式**
  - 两个条件概率p(y|x)和p(x|y)之间的关系

$$p(y|x) = \frac{p(x|y)p(y)}{p(x)}$$