

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И  
ОПТИКИ**

Факультет систем управления и робототехники

**Отчет по лабораторной работе №2  
«Модальные регуляторы и наблюдатели»  
по дисциплине «Теория автоматического управления»**

Выполнил: студенты гр. R3238  
Кравченко Д. В.

Преподаватель: Перегудин А.А.,  
ассистент фак. СУиР

Санкт-Петербург 2021

## 1. Цель работы:

Анализ модальных регуляторов и наблюдателей линейных.

## 2. Выполнение работы:

### 2.1. Модальное управление:

Вариант 5	$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} &\{-5, -5, -5, -5\} \\ &\{-5, -50, -500, -500\} \\ &\{-5, -10, 6i, -6i\} \\ &\{-5, -10, -2 + 6i, -2 - 6i\} \end{aligned}$
-----------	--	--	--

Рис. №1

Собственные значения матрицы A:

$$\lambda_1 = 2 + 6i$$

$$\lambda_2 = 2 - 6i$$

$$\lambda_3 = -5$$

$$\lambda_4 = 0$$

Управляемость  $\lambda_1$  :

$$[A - \lambda_1 \times E, \quad B] = \begin{bmatrix} -7 - 6i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - 6i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6i & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6i & 3 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  управляемое

Управляемость  $\lambda_2$  :

$$[A - \lambda_2 \times E, \quad B] = \begin{bmatrix} -7 + 6i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 + 6i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6i & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6i & 3 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  управляемое

Управляемость  $\lambda_3$  :

$$[A - \lambda_3 \times E, \quad B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$rank = 3 \Rightarrow$  не управляемое

Управляемость  $\lambda_4$  :

$$[A - \lambda_4 \times E, \quad B] = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  управляемое

Система  $\Rightarrow$  не управляема

Система  $\Rightarrow$  стабилизируема

Схема моделирования:

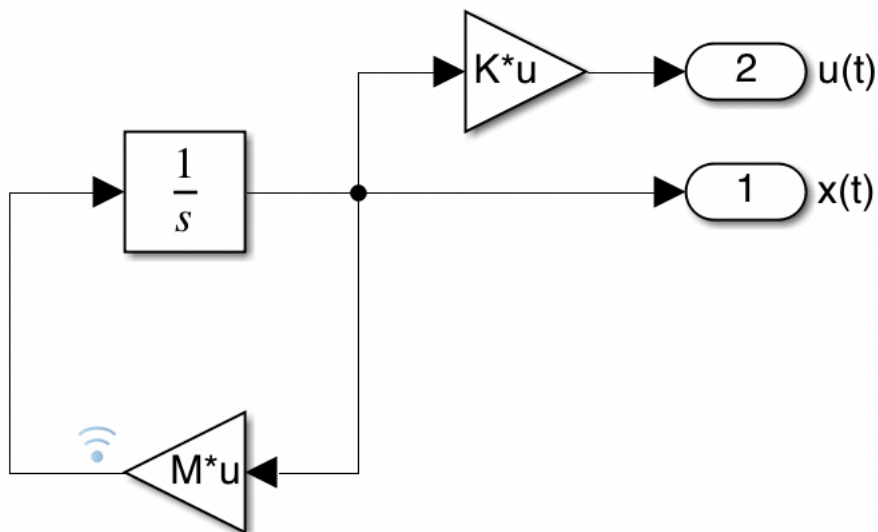


Рис. №2

Спектр  $\{-5, -5, -5, -5\}$ :

$$K = [2e^{-15} \quad -2.744 \quad -3.942 \quad -5.205]$$

$$x_0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

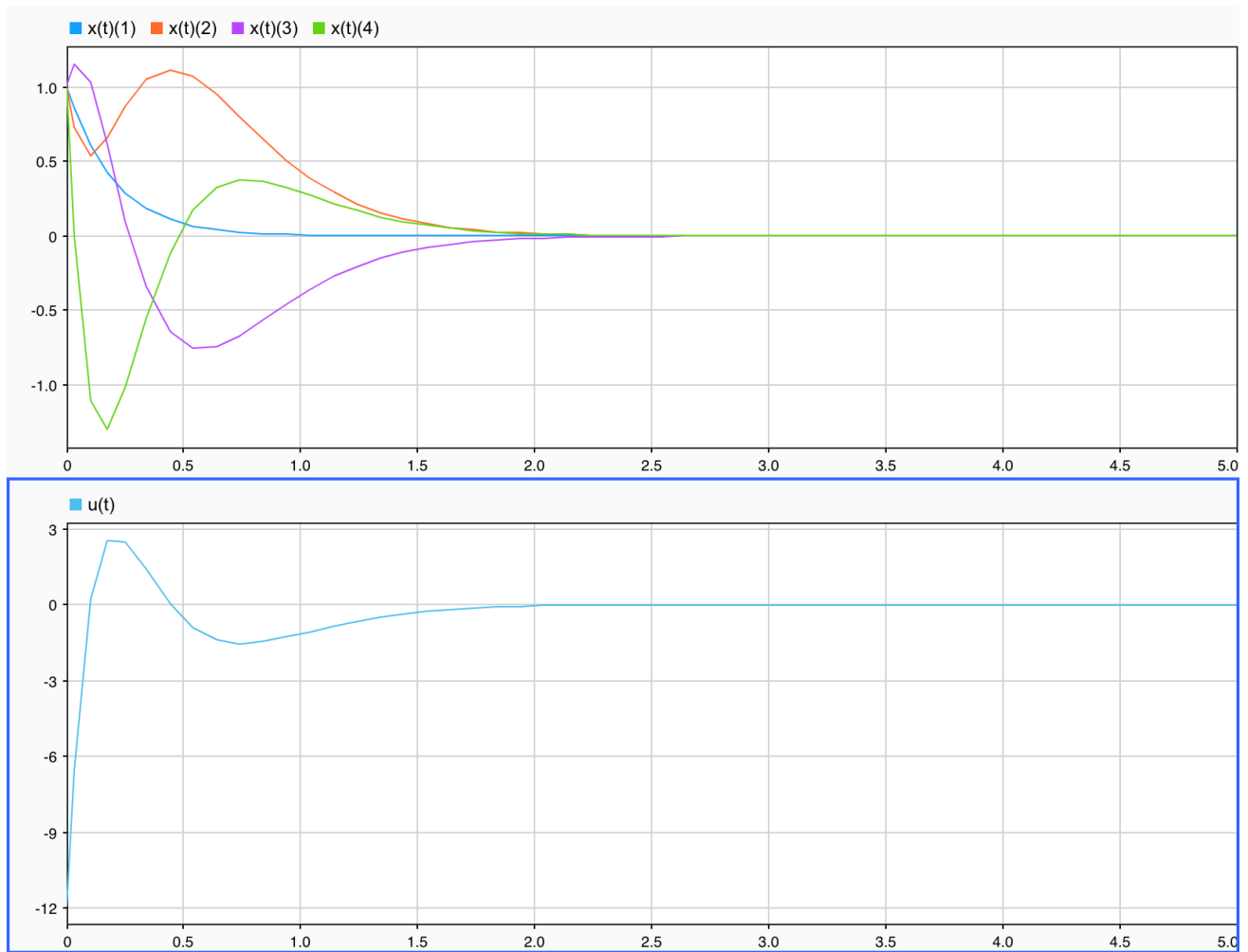


Рис. №3

Спектр  $\{-5, -10, -500, -500\}$ :

$$K = [-1.15e^{-12} \quad -3.125e^3 \quad -1.948e^3 \quad 855.3]$$

$$x_0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

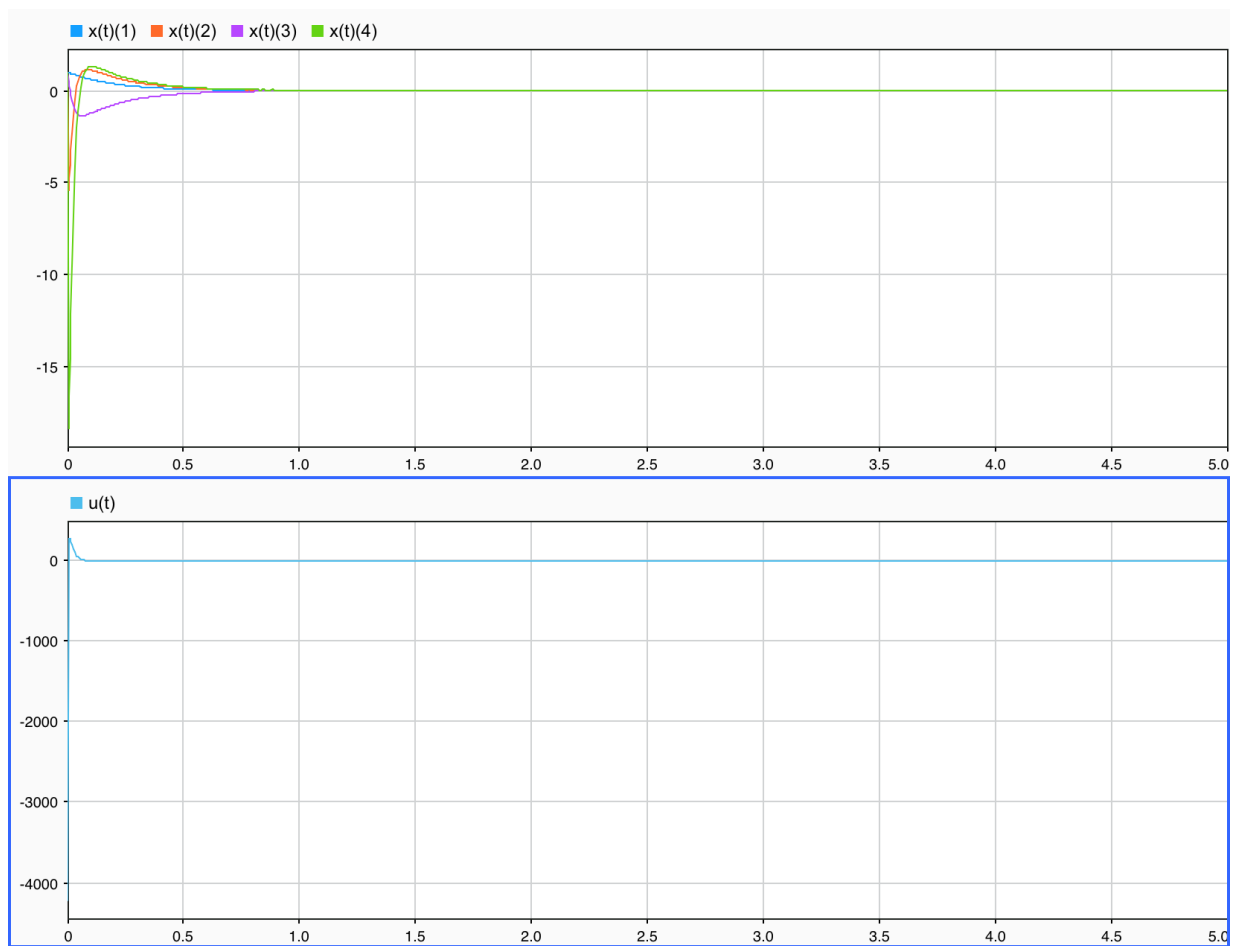
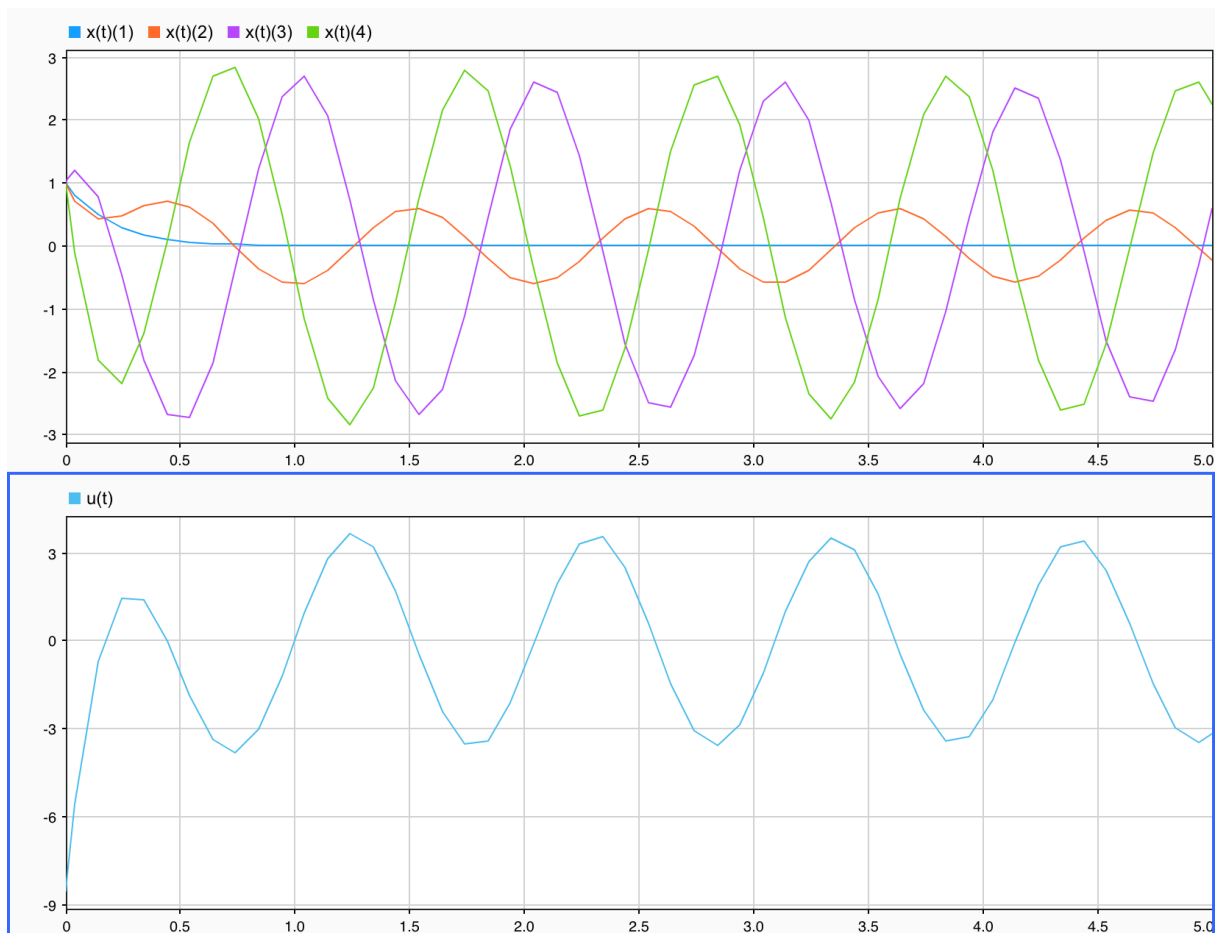


Рис. №4

Спектр  $\{-5, -50, 6i, -6i\}$ :

$$K = [2.08e^{-15} \quad -5.455 \quad -1.511 \quad -1.555]$$

$$x_0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$



Спектр  $\{-5, -10, -2+6i, -2-6i\}$ :

$$K = [1.621e^{-15} \quad -6.012 \quad -3.614 \quad -2.732]$$

$$x_0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

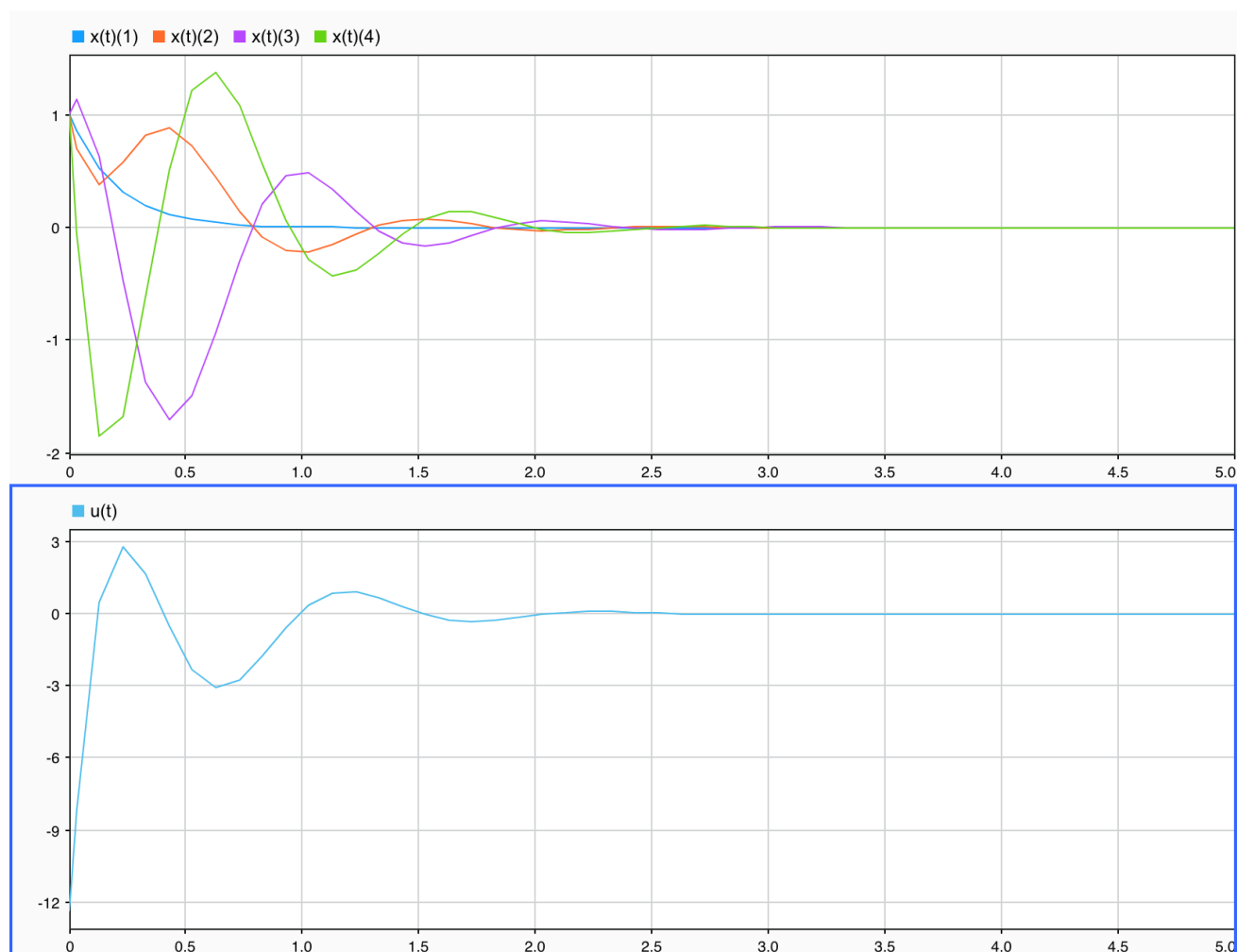


Рис. №6

```

1 - A = [-5, 0, 0, 0;
2       0, 0, 0, 0;
3       0, 0, 2, 6;
4       0, 0, -6, 2];
5
6 - B = [0; 1; 0; 3];
7
8 - U = [B, A*B, A*A*B, A*A*A*B];
9 - r = rank(U);
10 - e = eig(A);
11 - ranks_e = [];
12 - for i = 1:length(e)
13 -     matrix = [A - eye(4)*e(i, 1), B];
14 -     ranks_e(end+1) = rank(matrix);
15 - end
16
17 - G1 = [-5, 1, 0, 0;
18         0, -5, 1, 0;
19         0, 0, -5, 1;
20         0, 0, 0, -5];
21
22 - G2 = [-5, 0, 0, 0;
23         0, -50, 0, 0;
24         0, 0, -500, 0;
25         0, 0, 0, -500];

```

```

G3 = [-5, 0, 0, 0;
      0, -10, 0, 0;
      0, 0, 0, 6;
      0, 0, -6, 0];

G4 = [-5, 0, 0, 0;
      0, -10, 0, 0;
      0, 0, -2, 6;
      0, 0, -6, -2];

Y = [1 1 1 1];

cvx_begin sdp
variable P(4, 4)
A*P-P*G4 == B*Y;
cvx_end

K = -Y*pinv(P);

BK = B*K;

M = A+BK;

```

## 2.2. Модальное наблюдение

Вариант 5	$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$	$C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} &\{-5, -5, -5, -5\} \\ &\{-5, -50, -500, -500\} \\ &\{-5, -10, 6i, -6i\} \\ &\{-5, -10, -2 + 6i, -2 - 6i\} \end{aligned}$
-----------	--	--	--

Рис. №7

Собственные значения матрицы A:

$$\lambda_1 = 2i$$

$$\lambda_2 = -2i$$

$$\lambda_3 = 7i$$

$$\lambda_4 = -7i$$

Наблюдаемость  $\lambda_1$  :

$$[A - \lambda_1 \times E; C] = \begin{bmatrix} -2i & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -2i \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  наблюдаемое

Наблюдаемость  $\lambda_2$  :

$$[A - \lambda_2 \times E; C] = \begin{bmatrix} 2i & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 2i \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  наблюдаемое

Наблюдаемость  $\lambda_3$  :

$$[A - \lambda_3 \times E; C] = \begin{bmatrix} -7i & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -7i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7i & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7i \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  наблюдаемое

Наблюдаемость  $\lambda_4$  :

$$[A - \lambda_4 \times E; C] = \begin{bmatrix} 7i & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 7i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7i & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 7i \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  наблюдаемое

Система  $\Rightarrow$  наблюдаема

Система  $\Rightarrow$  обнаруживаема

Схема моделирования:

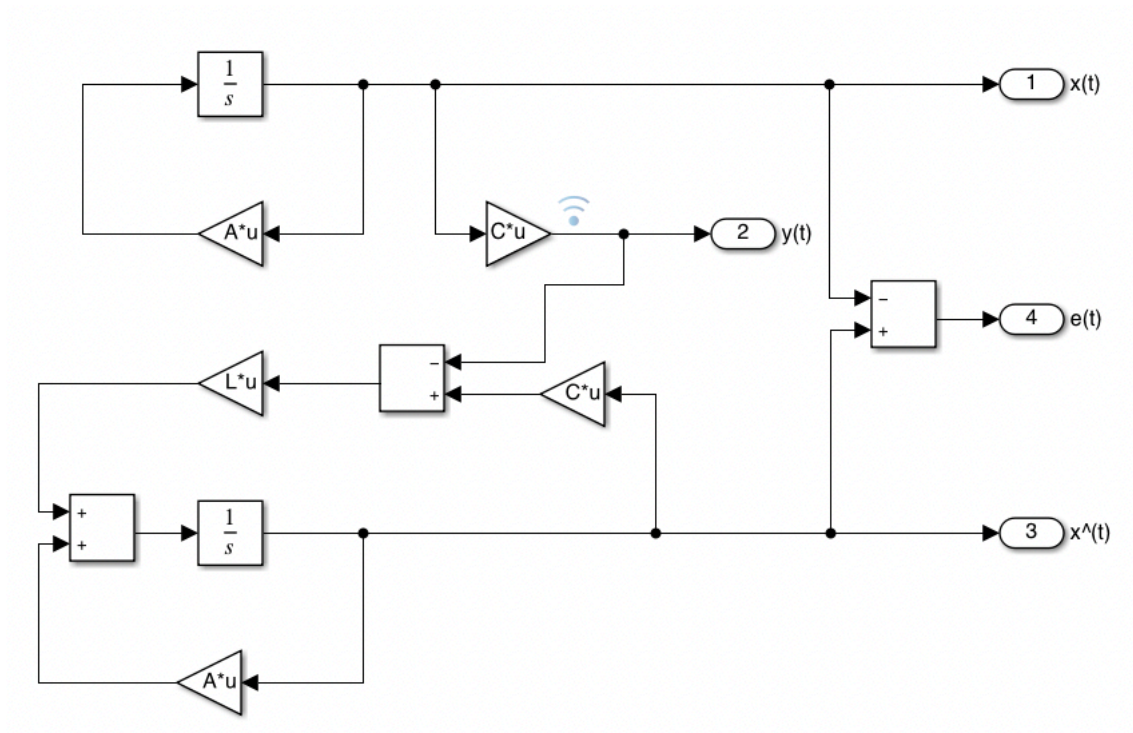


Рис. №8

Спектр  $\{-5, -5, -5, -5\}$ :

$$L = [0.456 \quad -9.333 \quad -1.778 \quad -2.288]^T$$

$$x_0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$



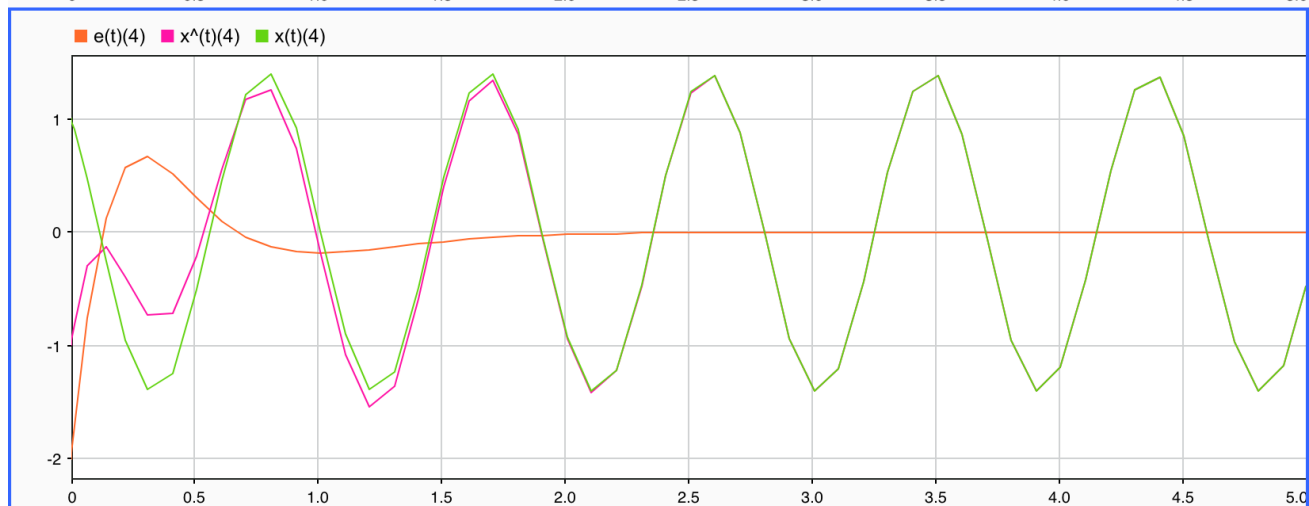
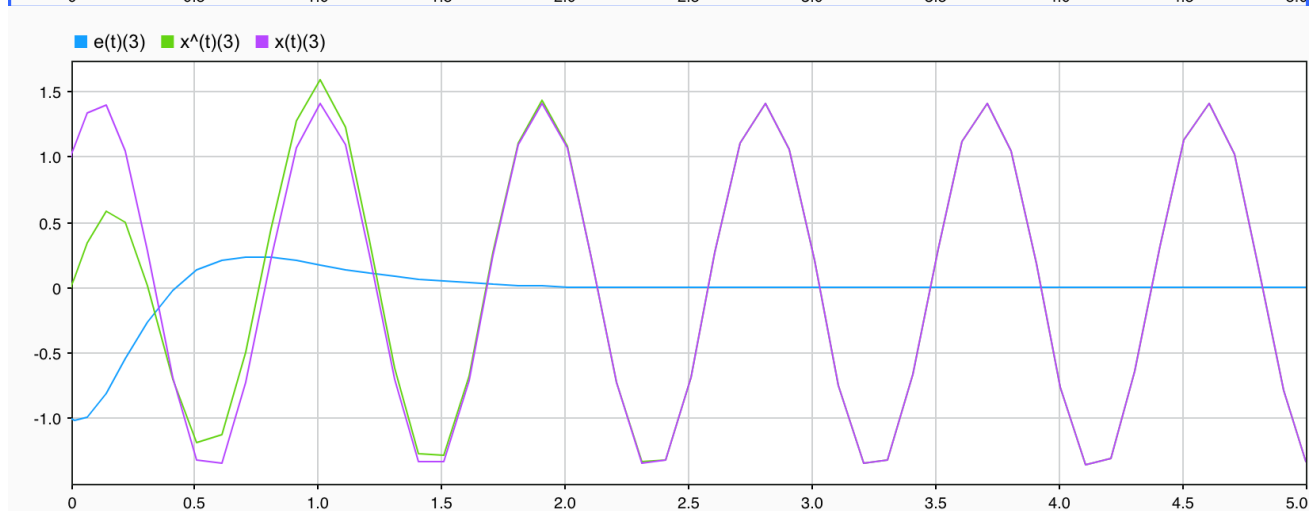
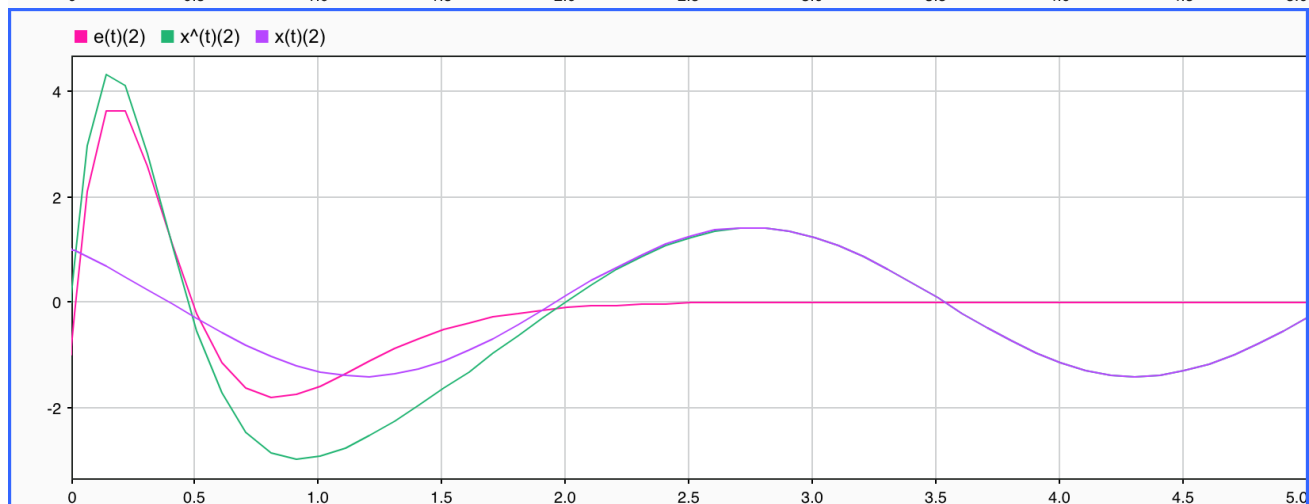
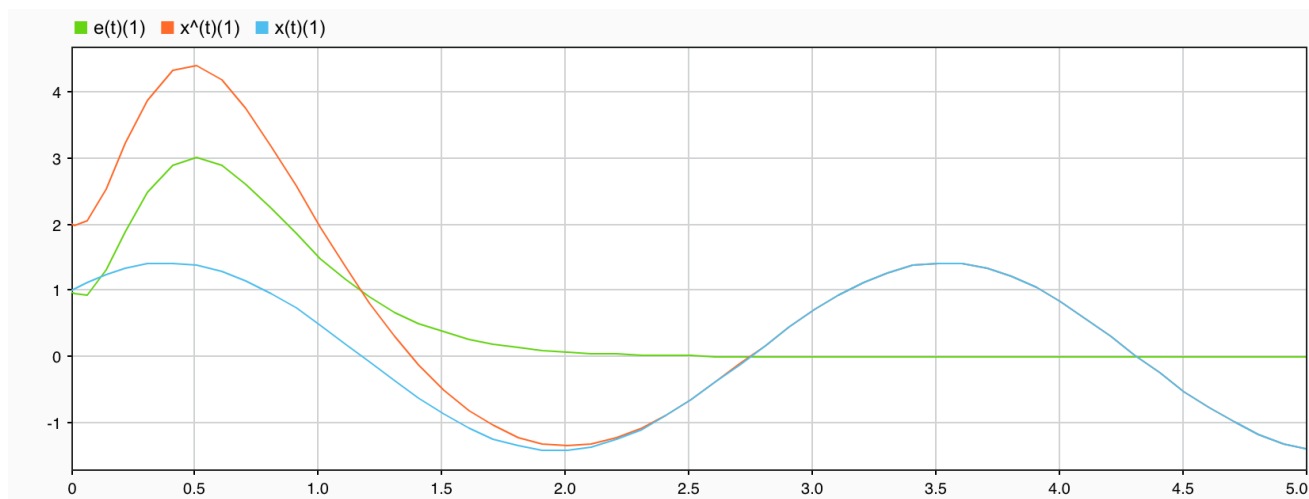


Рис. №9 и №10

Спектр  $\{-5, -50, -500, -500\}$ :

$$L = [-1.231e^3 \quad -2.731e^3 \quad 362.241 \quad -718.174]^T$$

$$x_0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

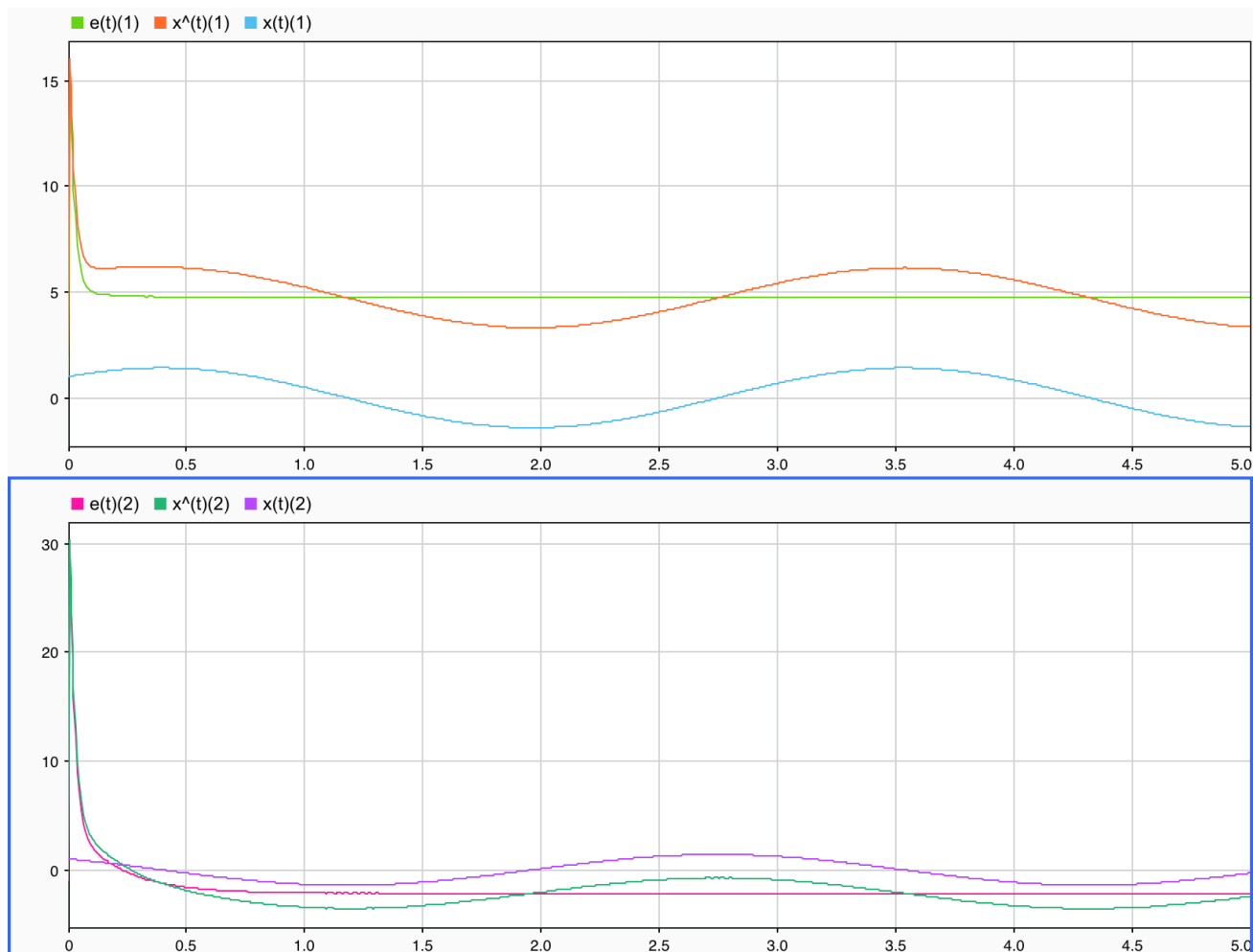


Рис. №11

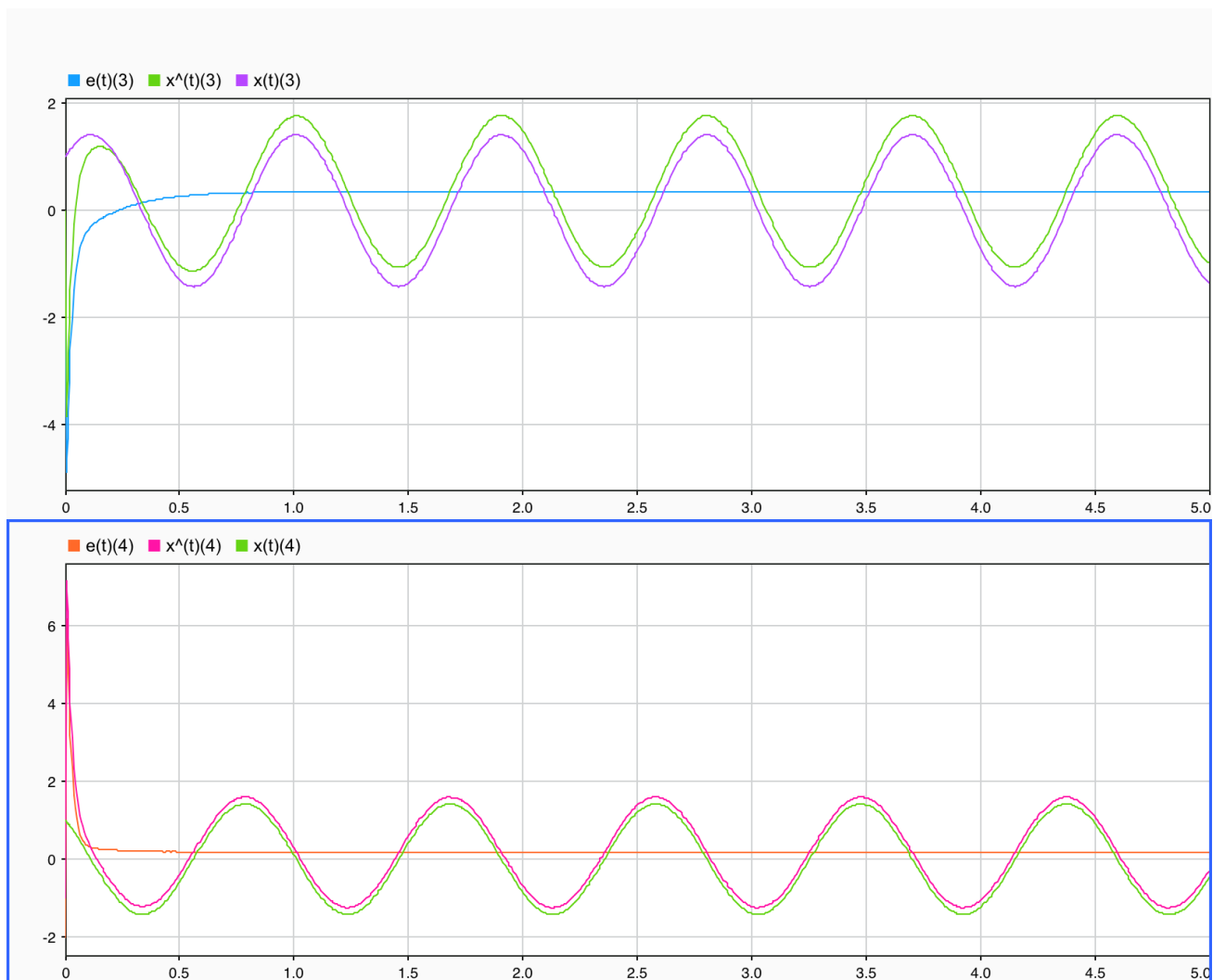
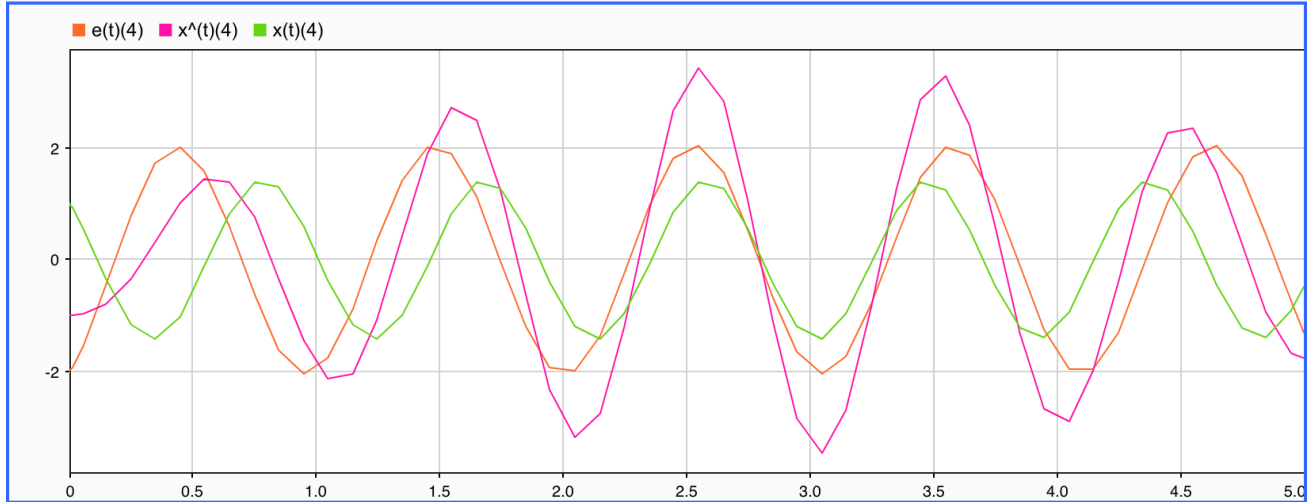
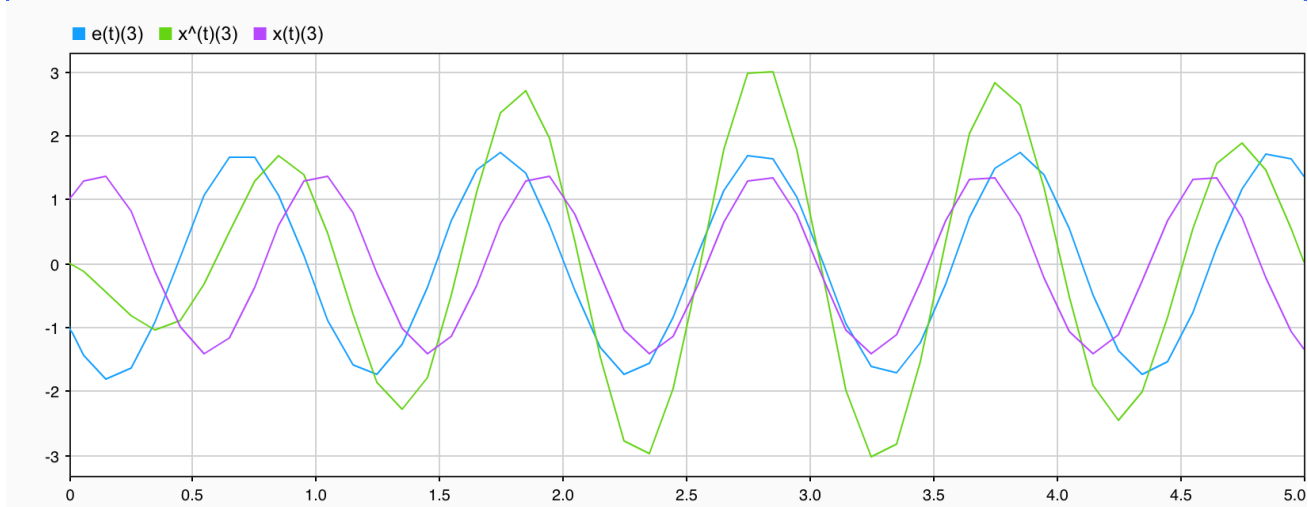
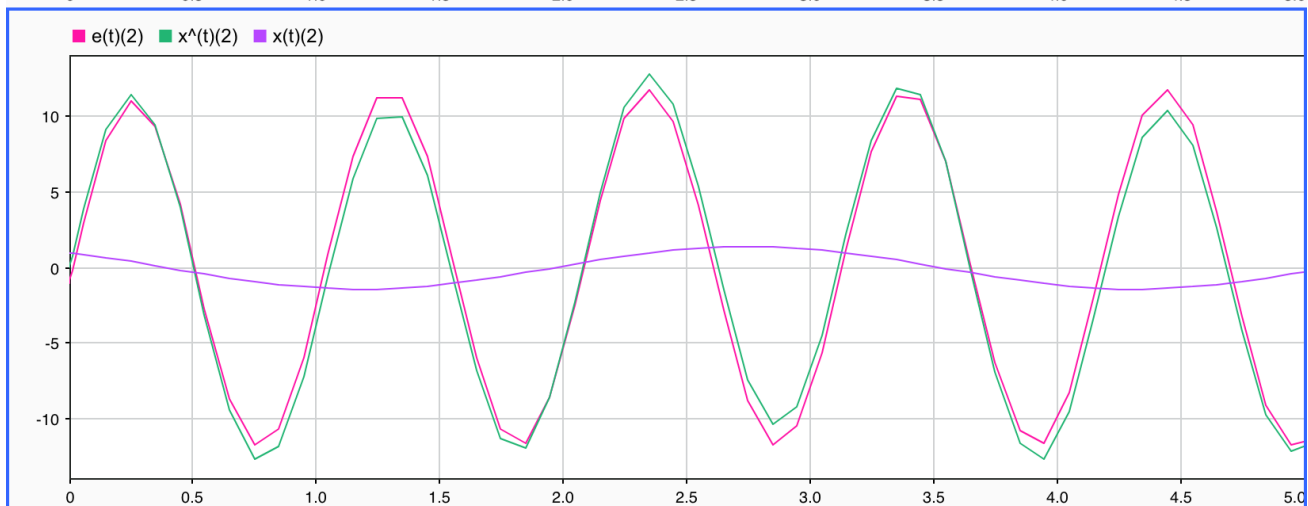
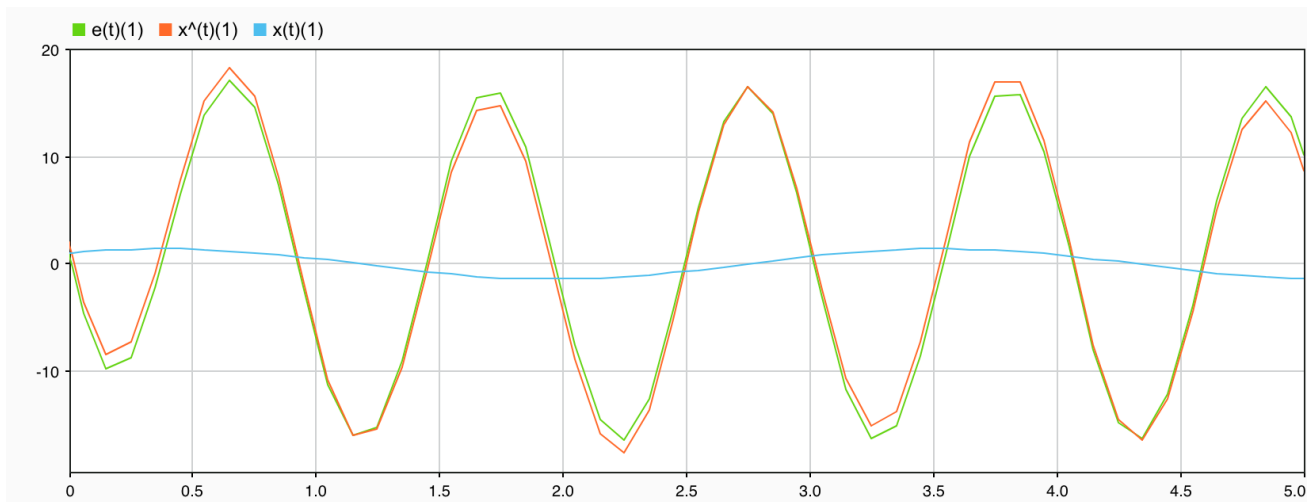


Рис. №12

Спектр  $\{-5, -10, 6i, -6i\}$ :

$$L = [16.356 \quad -10.667 \quad -0.722 \quad -0.007]^T$$

$$x_0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$



Спектр  $\{-5, -10, -2+6i, -2-6i\}$ :

$$L = [15.733 \quad -16.089 \quad -0.485 \quad -1.56]^T$$

$$x_0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

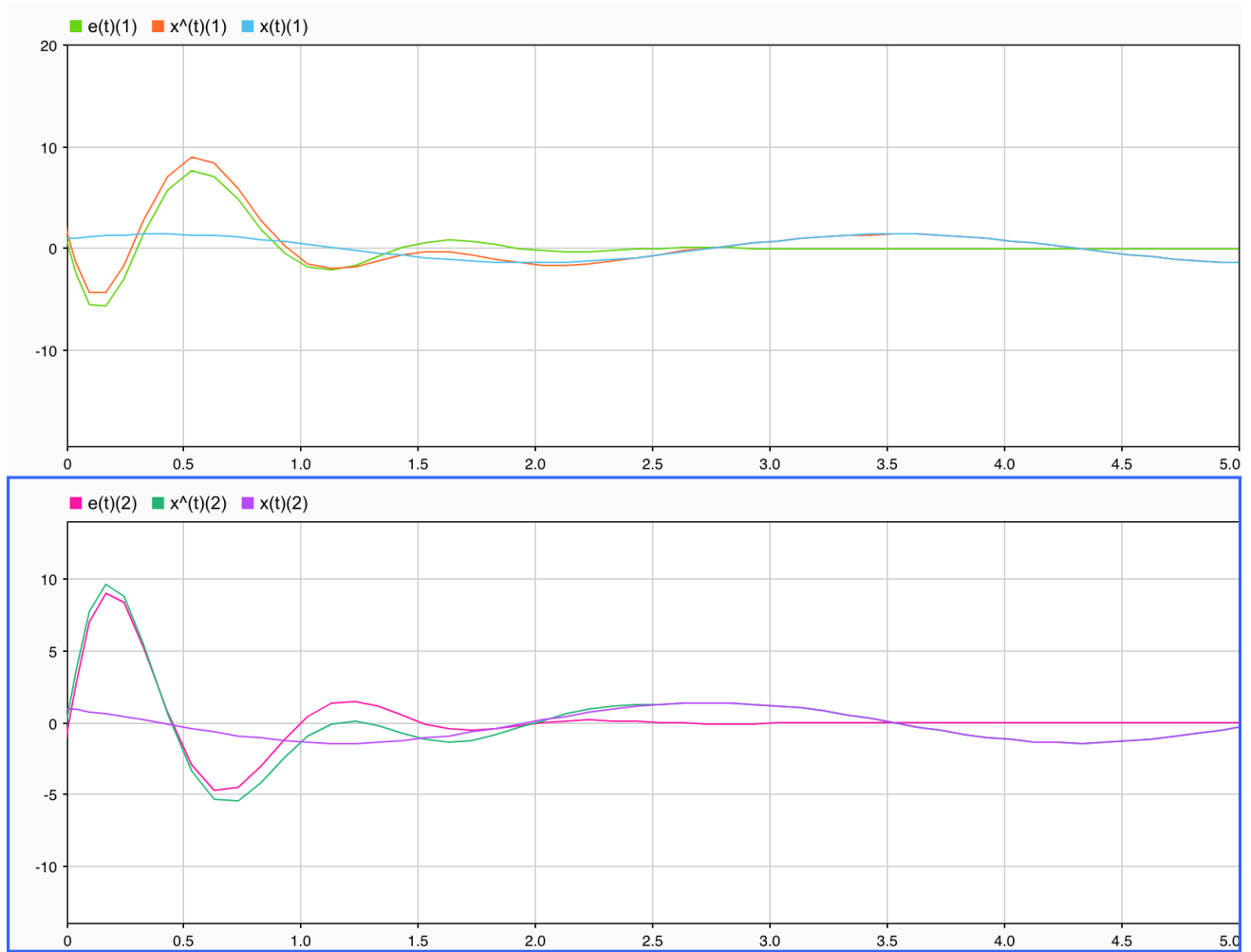


Рис. №15

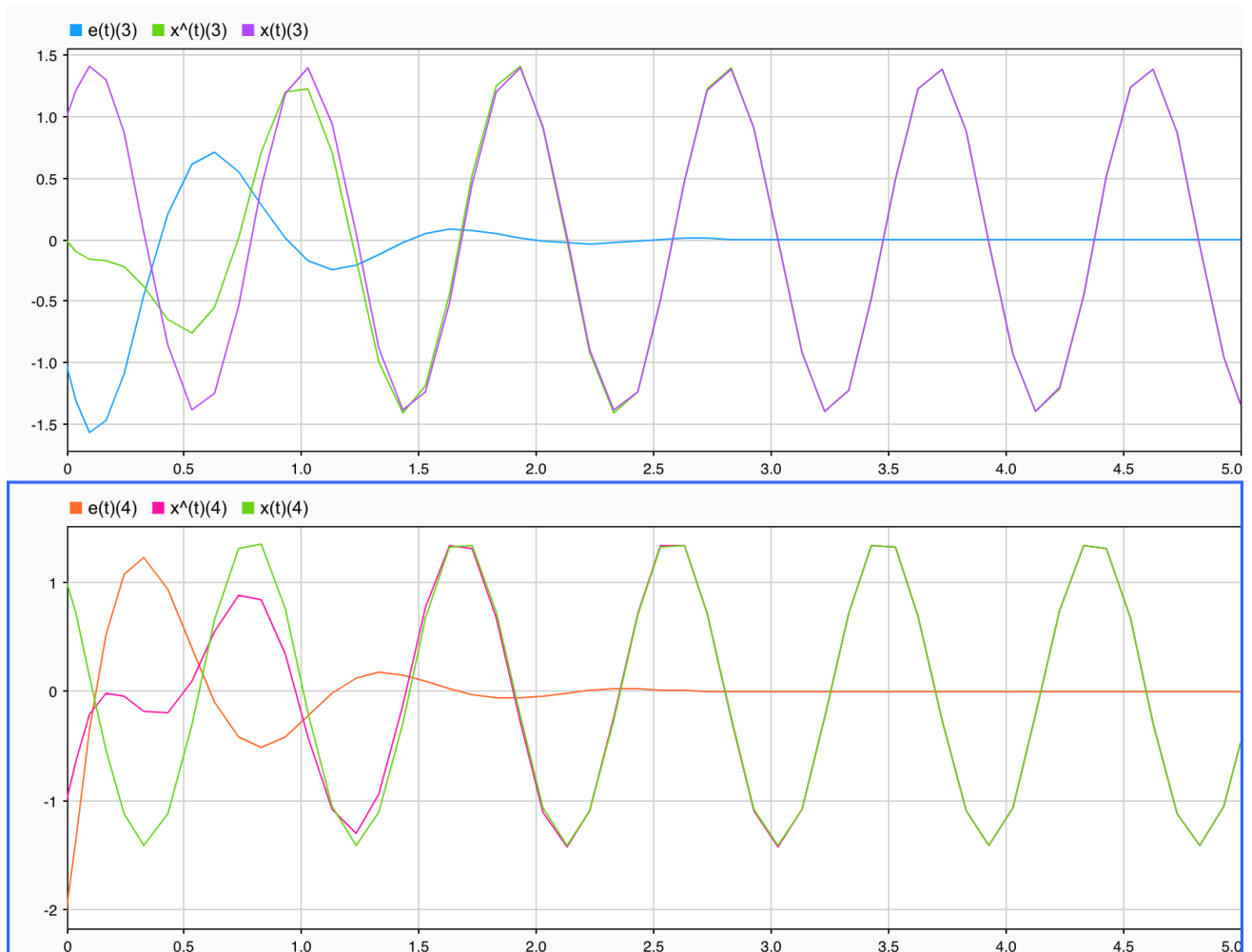


Рис. №16

```

1 - A = [0, 2, 0, 0;
2       -2, 0, 0, 0;
3       0, 0, 0, 7;
4       0, 0, -7, 0];
5
6 - C = [0, 1, 6, 0];
7
8 - V = [C; C*A; C*A*A; C*A*A*A];
9 - r = rank(V);
10 - e = eig(A);
11 - ranks_e = [];
12 - for i = 1:length(e)
13 -     matrix = [A - eye(4)*e(i, 1); C];
14 -     ranks_e(end+1) = rank(matrix);
15 - end
16
17 - G1 = [-5, 1, 0, 0;
18        0, -5, 1, 0;
19        0, 0, -5, 1;
20        0, 0, 0, -5];
21
22 - G2 = [-5, 0, 0, 0;
23        0, -50, 0, 0;
24        0, 0, -500, 0;
25        0, 0, 0, -500];

```

```

G3 = [-5, 0, 0, 0;
      0, -10, 0, 0;
      0, 0, 0, 6;
      0, 0, -6, 0];

```

```

G4 = [-5, 0, 0, 0;
      0, -10, 0, 0;
      0, 0, -2, 6;
      0, 0, -6, -2];

```

```

Y = [1; 1; 1; 1];

```

```

cvx_begin sdp
variable Q(4, 4)
G4*Q-Q*A == Y*C;
cvx_end

```

```

L = inv(Q)*Y;
LC = L*C;

```

### 2.3. Наблюдатель + регулятор:

Вариант 5	$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
-----------	--	--	---

Рис. №17

Собственные значения матрицы А:

$$\lambda_1 = -8.4853$$

$$\lambda_2 = 18.4853$$

$$\lambda_3 = 1.5147$$

$$\lambda_4 = 8.4853$$

Управляемость  $\lambda_1$  :

$$[A - \lambda_1 \times E, \quad B] = \begin{bmatrix} 13.4853 & -5 & -9 & 3 & 1 \\ -5 & 13.4853 & -3 & 9 & 9 \\ -9 & -3 & 13.4853 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 5 & 13.4853 & 5 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  управляемое

Управляемость  $\lambda_2$  :

$$[A - \lambda_2 \times E, \quad B] = \begin{bmatrix} -13.4853 & -5 & -9 & 3 & 1 \\ -5 & -13.4853 & -3 & 9 & 9 \\ -9 & -3 & -13.4853 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 5 & -13.4853 & 5 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  управляемое

Управляемость  $\lambda_3$  :

$$[A - \lambda_3 \times E, \quad B] = \begin{bmatrix} 3.4853 & -5 & -9 & 3 & 1 \\ -5 & 3.4853 & -3 & 9 & 9 \\ -9 & -3 & 3.4853 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 5 & 3.4853 & 5 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  управляемое

Управляемость  $\lambda_4$  :

$$[A - \lambda_4 \times E, \quad B] = \begin{bmatrix} -3.4853 & -5 & -9 & 3 & 1 \\ -5 & -3.4853 & -3 & 9 & 9 \\ -9 & -3 & -3.4853 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 5 & -3.4853 & 5 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  управляемое

Система  $\Rightarrow$  управляема

Система  $\Rightarrow$  стабилизируема

Наблюдаемость  $\lambda_1$  :

$$[A - \lambda_1 \times E; \quad C] = \begin{bmatrix} 13.4853 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 13.4853 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 13.4853 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 13.4853 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  наблюдаемое

Наблюдаемость  $\lambda_2$  :

$$[A - \lambda_2 \times E; \quad C] = \begin{bmatrix} -13.4853 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & -13.4853 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & -13.4853 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & -13.4853 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  наблюдаемое

Наблюдаемость  $\lambda_3$  :

$$[A - \lambda_3 \times E; \quad C] = \begin{bmatrix} 3.4853 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 3.4853 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 3.4853 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 3.4853 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  наблюдаемое



Наблюдаемость  $\lambda_4$  :

$$[A - \lambda_4 \times E; C] = \begin{bmatrix} -3.4853 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & -3.4853 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & -3.4853 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & -3.4853 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow$  наблюдаемое

Система  $\Rightarrow$  наблюдаема

Система  $\Rightarrow$  обнаруживаема

Схема моделирования:

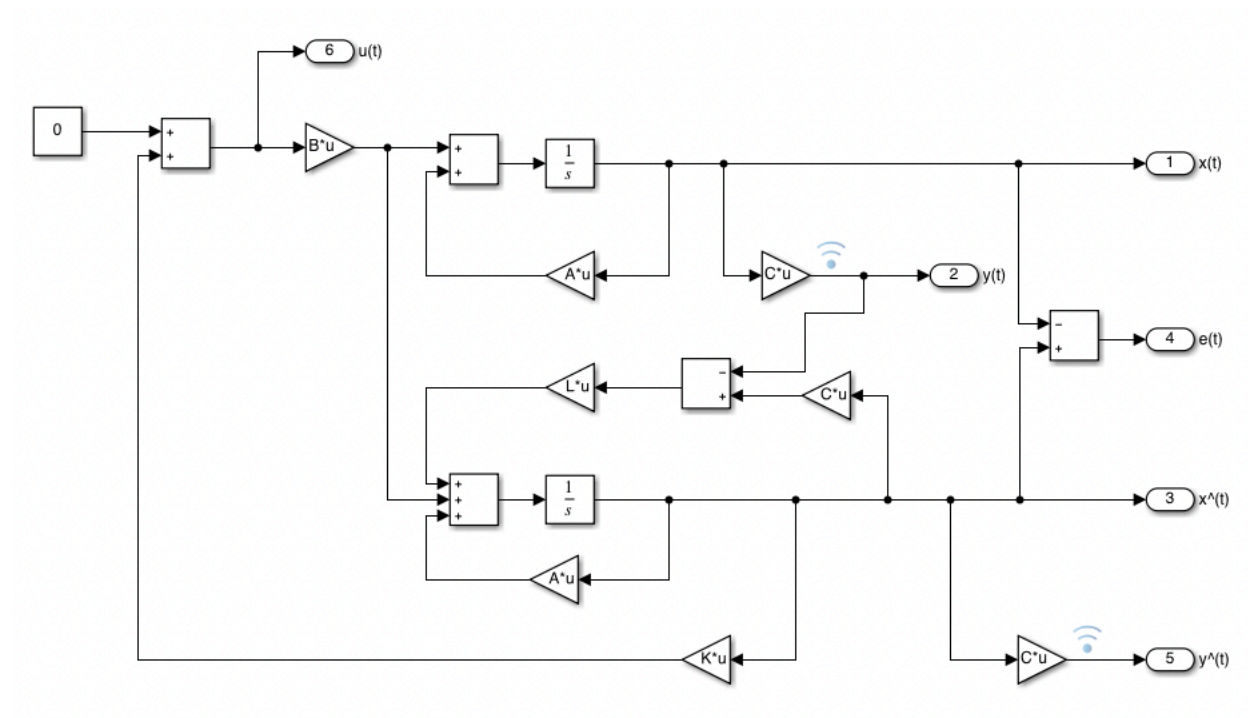


Рис. №19

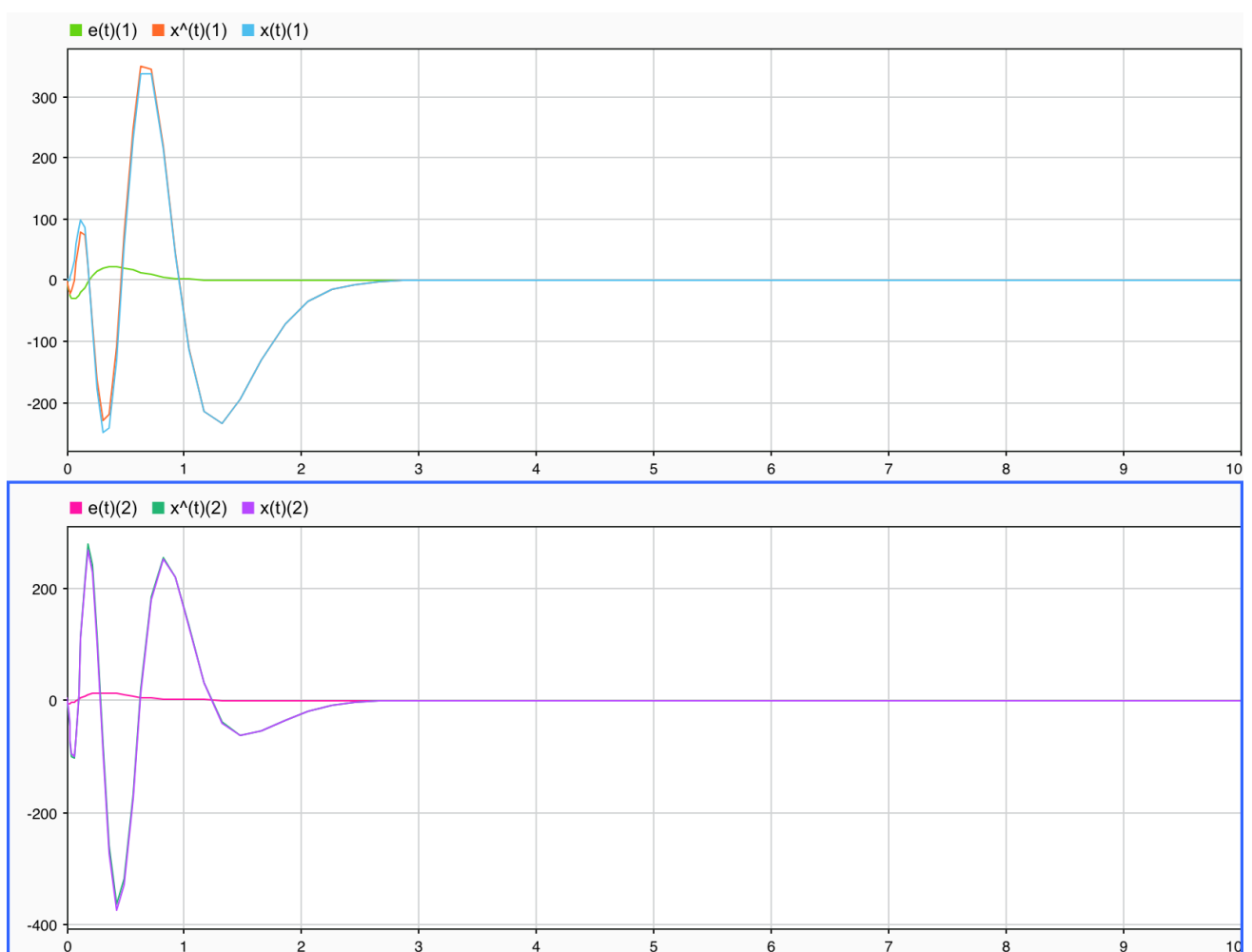
Спектр  $\{-11, -6, -8, -7\}$ :

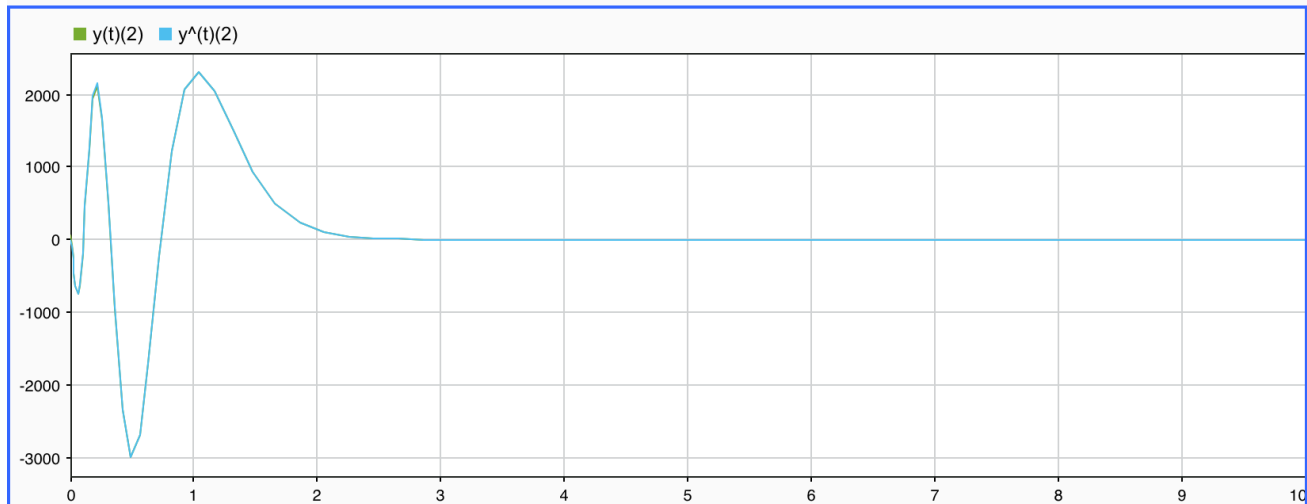
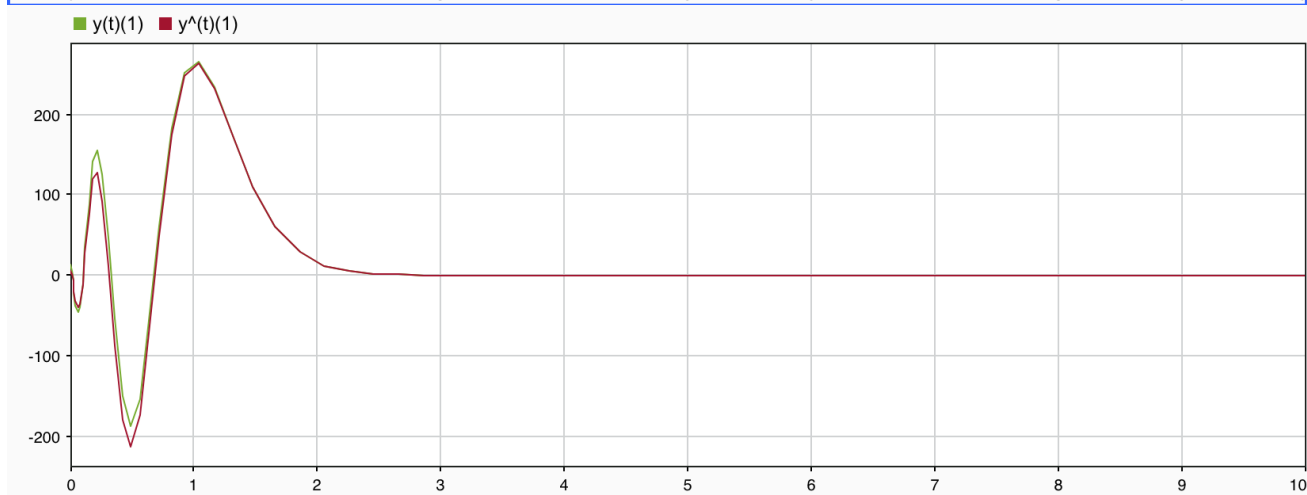
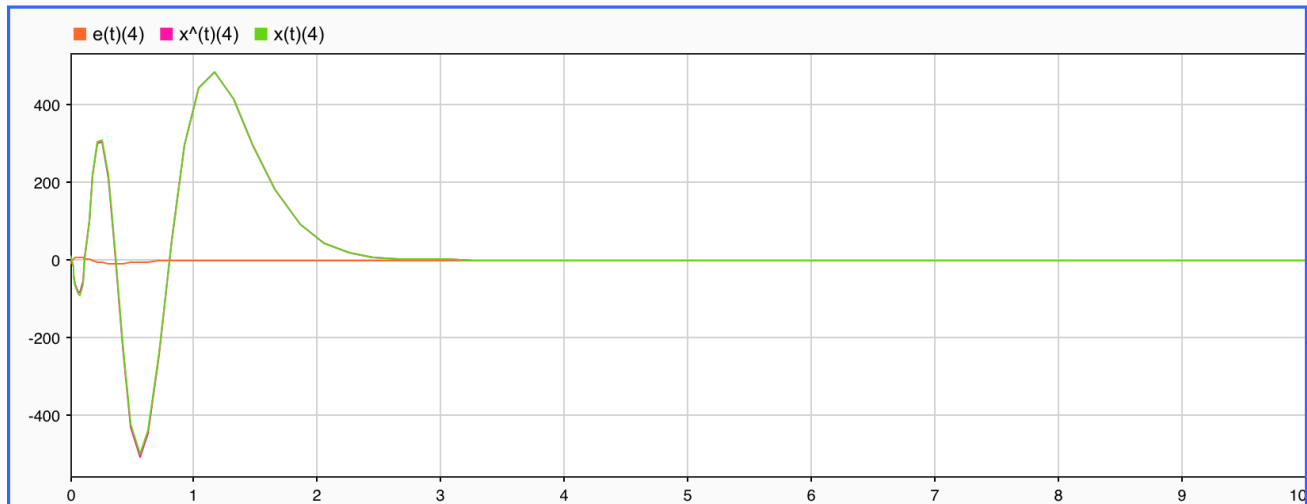
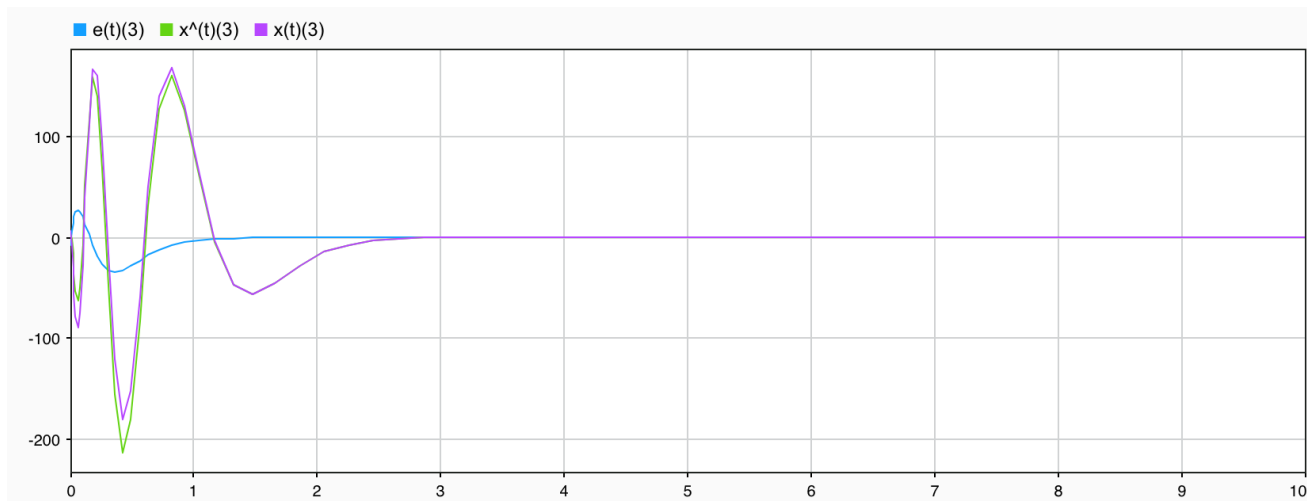
$$L = \begin{bmatrix} 18.08 & -0.24 & -22.07 & -9.45 \\ 18.08 & -0.24 & -22.07 & -9.46 \end{bmatrix}^T$$

$$K = [1.68 \quad 15.31 \quad -25.96 \quad -1.94]$$

$$x_0 = [3 \quad 5 \quad 7 \quad 9]^T$$

$$\tilde{x}_0 = [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]^T$$





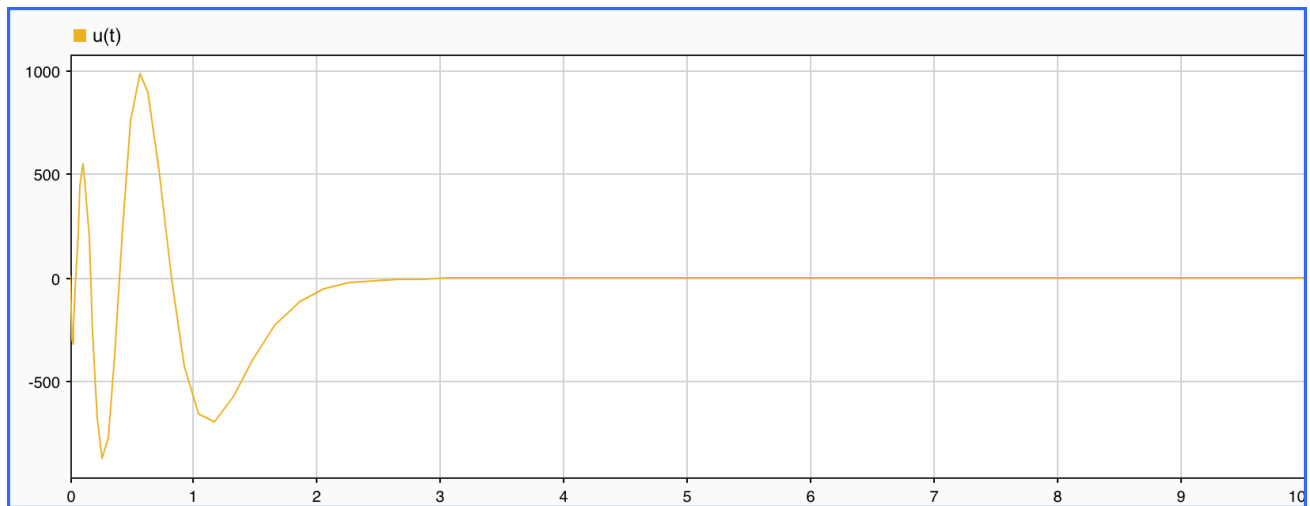


Рис. №23

Передаточные функции:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(\tilde{y} - y)$$

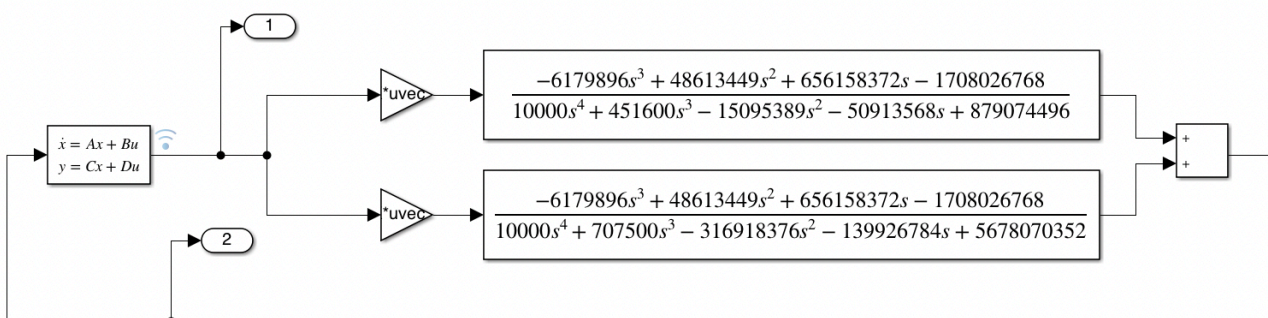
$$\dot{\tilde{x}} = (A + BK + LC)\tilde{x} - Ly$$

$$\tilde{x} = -(sI - (A + BK + LC))^{-1}L(y)$$

$$u = -K(sI - (A + BK + LC))^{-1}L(y)$$

$$W_{y1 \rightarrow u}(s) = \frac{-6179896s^3 + 48613449s^2 + 656158372s - 1708026768}{10000s^4 + 451600s^3 - 15095389s^2 - 50913568s + 879074496}$$

$$W_{y2 \rightarrow u}(s) = \frac{-6179896s^3 + 48613449s^2 + 656158372s - 1708026768}{10000s^4 + 707500s^3 - 316918376s^2 - 139926784s + 5678070352}$$



### 3. Вывод:

В ходе лабораторной работы было реализовано модальное управление и наблюдение, а также их композиция.