

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И
ОПТИКИ**

Факультет систем управления и робототехники

**Отчет по лабораторной работе №1
«Управляемость и наблюдаемость»
по дисциплине «Теория автоматического управления»**

Выполнил: студенты гр. R3238
Кравченко Д. В.

Преподаватель: Перегудин А.А.,
ассистент фак. СУиР

Санкт-Петербург 2021

1. Цель работы:

Анализ управляемости и наблюдаемости линейных систем.

2. Выполнение работы:

Номер варианта	Матрица A	Матрица B	Точка x_1
Вариант 1	$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

2.1. Расчет матрицы управляемости, её ранга, собственных значений A , жордановой формы A , определение управляемости каждого из собственных значений A , принадлежность точки x_1 управляемому подпространству, нахождение Грамиана управляемости

```
1 - A = [ 5, -4, 6; 4, -3, 4; -4, 2 -5];
2 - B = [ -5; -3; 5];
3 - x1 = [ 3; 2; -2];
4 - t1 = 3;
5
6 - U = [B, A*B, A*A*B];
7 - r = rank(U);
8 -
9 - e = eig(A);
10 - J = jordan(A);
11
12
13 - ranks_e = [];
14 - for i = 1:3
15 -     matrix = [A - eye(3)*e(i, 1), B];
16 -     ranks_e(end+1) = rank(matrix);
17 - end
18
19 - rank_x = rank([U, x1]);
20
21 - f = @(tau) expm(A*tau)*B*B'*expm(A'*tau);
22 - W = @(t_1) integral(f, 0, t_1, 'ArrayValued',1);
23 - Wt = W(t1);
24
25 - u = @(t) B'*expm(A'*(3-t))*inv(Wt)*x1;
26 - res = [];
27
28 - for i = 0.0:0.01:3.0
29 -     res(end+1) = u(i);
30 - end
31
```

>> show

Matrix A		
5	-4	6
4	-3	4
-4	2	-5

Matrix B
-5
-3
5

Eigenvalues A
-1+2i
-1-2i
-1

Jordan
-1+2i
0
0

Matrix [A-I*(-1), B]
6
-4
6

Matrix X_1
3
2
-1

Matrix [A-I*(-1-2i), B]
6+2i
-4
6

Matrix [A-I*(-1+2i), B]
6-2i
-4
6

Matrix [A, x_1]
5
-4
6

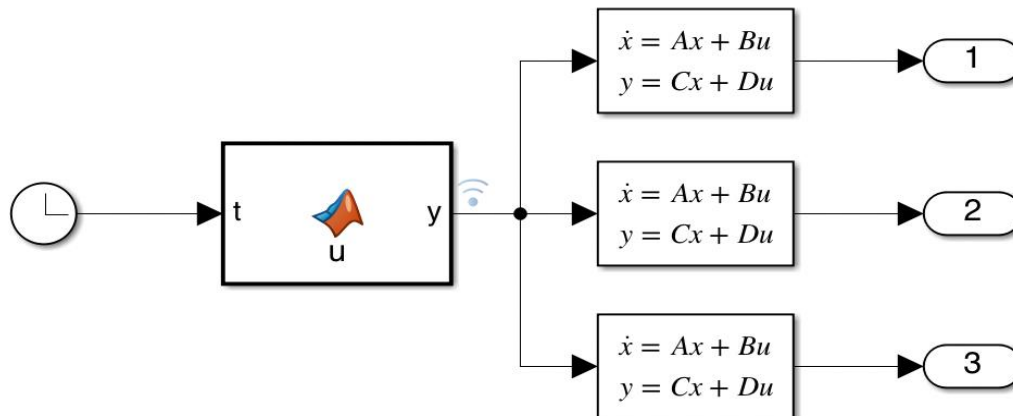
Rank [A, x_1]
3

Matrix U
-5
17
-17

Rank U
3

Gramian
8032795940881150.0
-37490.9
-46841074423.4

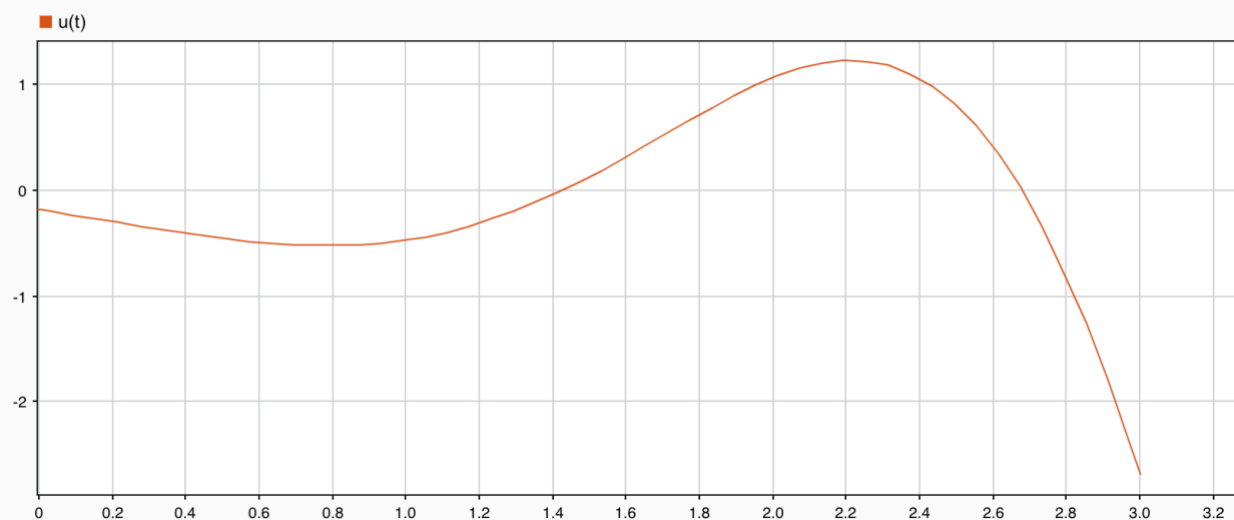
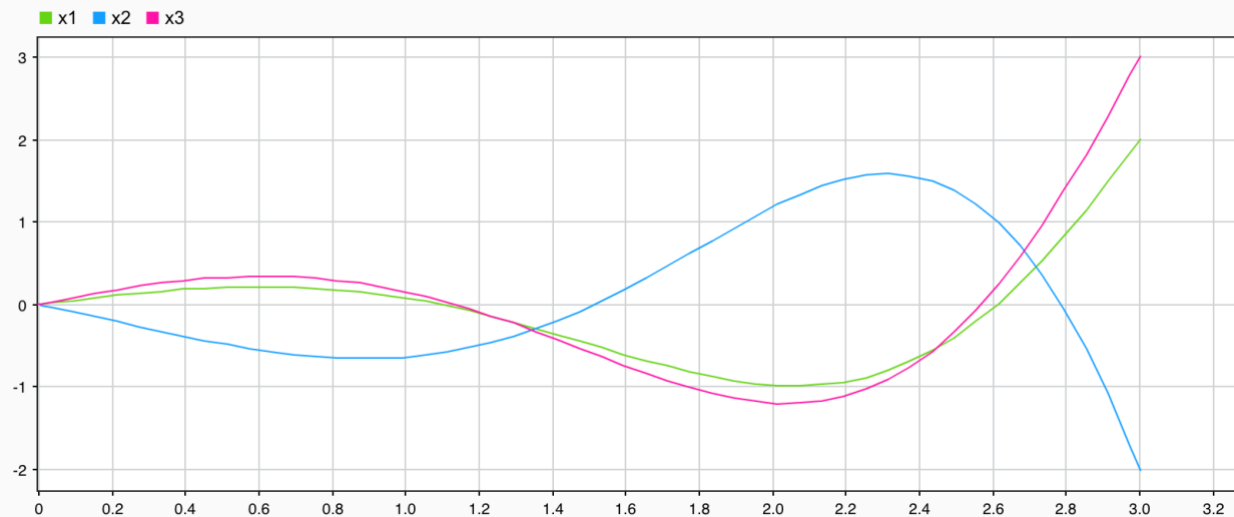
2.2. Моделирование:



```
function y = u(t)
A = [ 5, -4, 6; 4, -3, 4; -4, 2 -5];
B = [ -5; -3; 5];
x1 = [ 3; 2; -2];

Wt = [ 5.27961415735672, 3.58718097364118, -4.08267679758526;
      3.58718097364118, 2.69141365575201, -2.68933585042894;
      -4.08267679758526, -2.68933585042894, 4.68230054075254;];

y = B'*expm(A'*(3-t))*inv(Wt)*x1;
```



2.3. Расчет матрицы управляемости, её ранга, собственных значений A , жордановой формы A , определение управляемости каждого из собственных значений A , принадлежность точки x_1 управляемому подпространству, нахождение Грамиана управляемости

```

1 -   A = [ 5, -4, 6;
2       4, -3, 4;
3       -4, 2 -5];
4
5 -   B = [ 1; -1; 1];
6
7 -   x1 = [ 2; 2; -1];
8 -   x2 = [ 3; 2; -2];
9 -   t1 = 3;
10
11 -   U = [B, A*B, A*A*B];
12 -   r = rank(U);
13
14 -   e = eig(A);
15 -   J = jordan(A);
16

```

```

17
18 - ranks_e = [];
19 - for i = 1:3
20 -     matrix = [A - eye(3)*e(i, 1), B];
21 -     ranks_e(end+1) = rank(matrix);
22 - end
23
24 - ranks_x = [];
25 - ranks_x(end+1) = rank([U, x1]);
26 - ranks_x(end+1) = rank([U, x2]);
27
28 - f = @(tau) expm(A*tau)*B*B'*expm(A'*tau);
29 - W = @(t_1) integral(f, 0, t_1, 'ArrayValued',1);
30 - Wt = W(t1);
31
32 - u = B'*expm(A'*(3))*pinv(Wt)*x1;
33

```

>> show

Matrix A

	5		-4		6	
	4		-3		4	
	-4		2		-5	

Matrix B

	1	
	-1	
	1	

Eigenvalues A

-1+2i		-1-2i		-1	
Eig	rangs				
3		3		2	

Jordan

	-1+2i		0		0	
	0		-1-2i		0	
	0		0		-1	

Matrix [A-I*(-1), B]

	6		-4		6		1	
	4		-2		4		-1	
	-4		2		-4		1	

Matrix X_1

	2	
	2	
	-1	

Matrix [A-I*(-1-2i), B]

6+2i		-4		6		1	
4		-2+2i		4		-1	
-4		2		-4+2i		1	

Matrix [A-I*(-1+2i), B]

	6-2i		-4		6		1	
	4		-2-2i		4		-1	
	-4		2		-4-2i		1	

Matrix U

	1		15		-35	
	-1		11		-17	
	1		-11		17	

Rank U

	2	
--	---	--

Matrix [A, x_1]

5		-4		6		2	
4		-3		4		2	
-4		2		-5		-1	

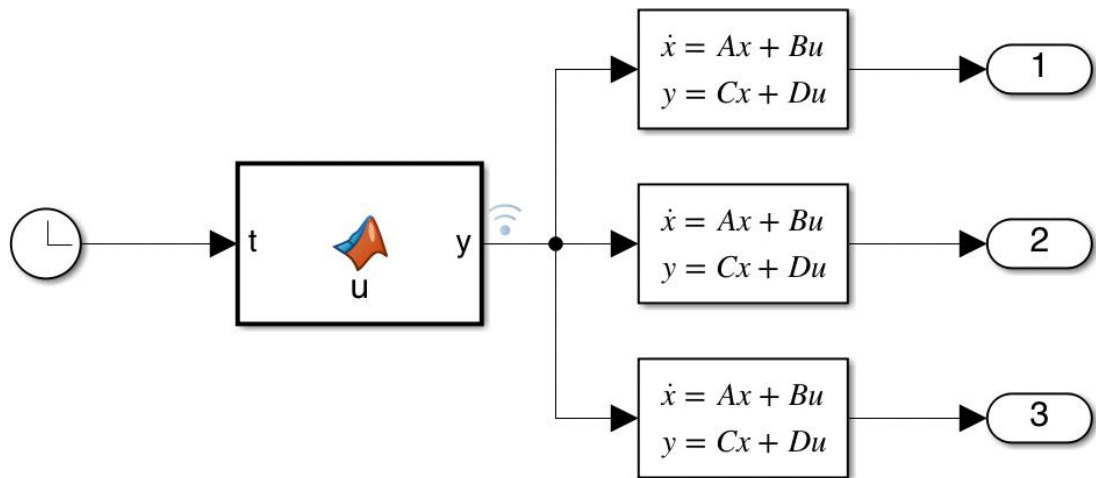
Rank [A, x_1]

	2	
--	---	--

Gramian

14.7		7.4		-7.4	
7.4		4.3		-4.3	
-7.4		-4.3		4.3	

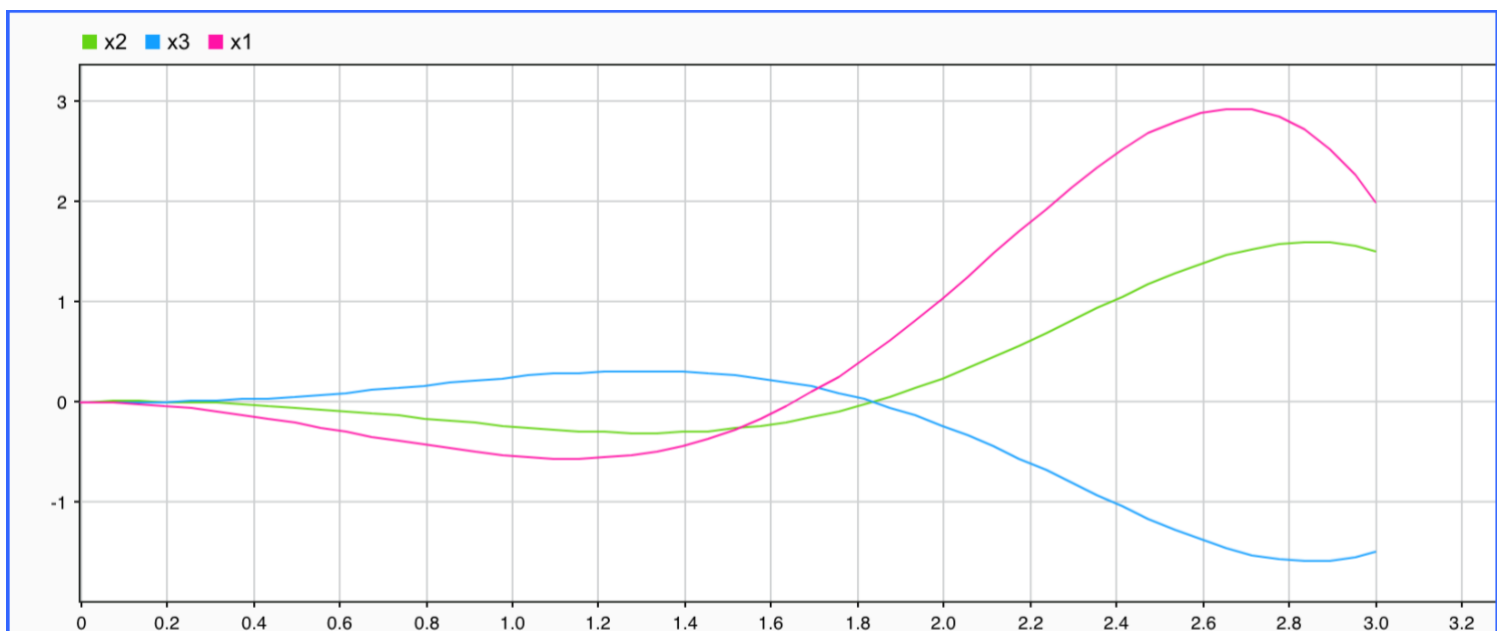
2.4. Моделирование:

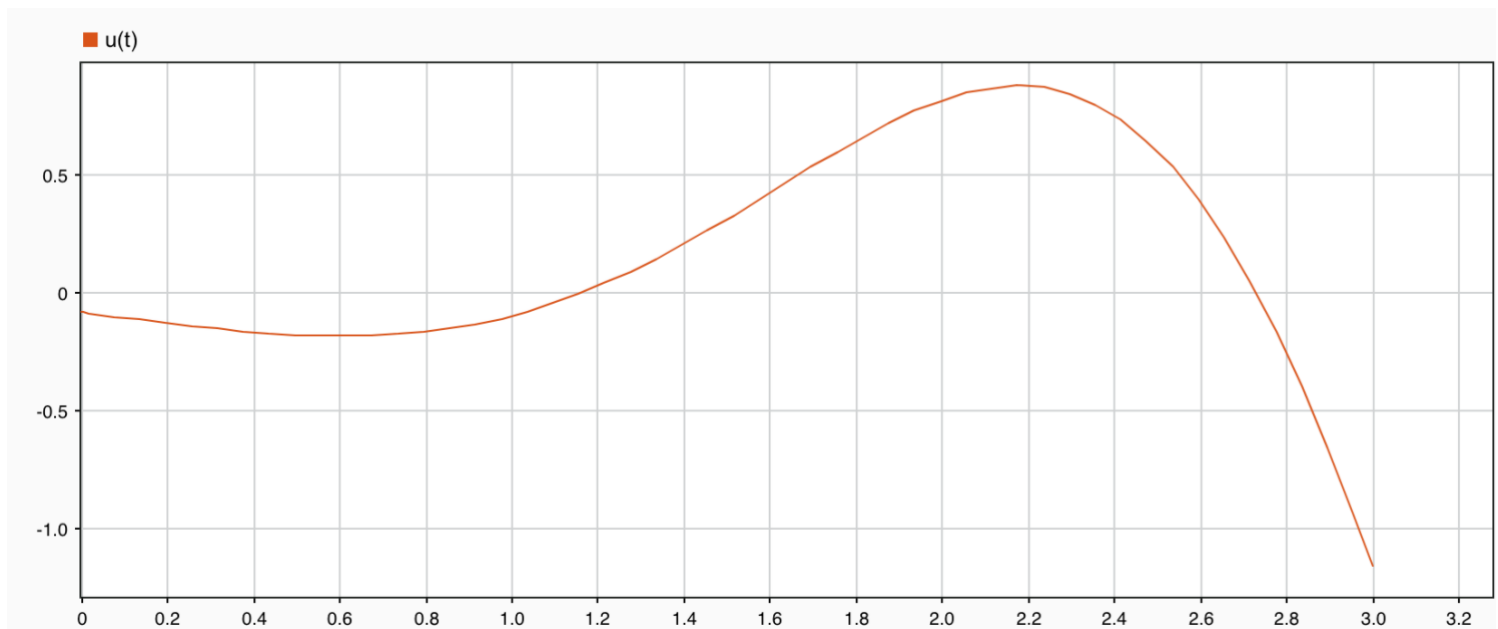


```

1  function y = u(t)
2  -   A = [ 5, -4, 6; 4, -3, 4; -4, 2 -5];
3  -   B = [ 1; -1; 1];
4  -   x1 = [ 2; 2; -1];
5
6  -   Wt = [ 14.6724056417744, 7.38600129623376, -7.38600129623376;
7  -         7.38600129623376, 4.29101692094108, -4.29101692094108;
8  -         -7.38600129623376, -4.29101692094108, 4.29101692094108;];
9
10 -   y = B'*expm(A'*(3-t))*pinv(Wt)*x1;
11

```





2.5. Расчет матрицы наблюдаемости, её ранга, собственных значений A , жордановой формы A , определение наблюдаемости каждого из собственных значений A , нахождение Грамиана наблюдаемости

```

1 -   A = [ -9, 0, -10;
2 -       -4, -1, -6;
3 -       6, -2, 5];
4 -   C = [2, -1, 2];
5 -   t1 = 3;
6
7 -   y = @(t) -3*exp(-3*t)*cos(2*t) - 2*exp(-3*t)*sin(2*t);
8
9 -   V = [C; C*A; C*A*A];
10 -  r = rank(V);
11
12 -  e = eig(A);
13 -  J = jordan(A);
14
15 -  ranks_e = [];
16 -  for i = 1:3
17 -      matrix = [A - eye(3)*e(i, 1); C];
18 -      ranks_e(end+1) = rank(matrix);
19 -  end
20
21 -  f = @(tau) expm(A'*tau)*C'*C*expm(A*tau);
22 -  Q = @(t_1) integral(f, 0, t_1, 'ArrayValued',1);
23 -  Qt = Q(t1);
24
25 -  e_q = eig(Qt);
26
27 -  g = @(x) expm(A'*x)*C'*y(x);
28 -  I = @(t_2) integral(g, 0, t_2, 'ArrayValued',1);
29 -  x0 = inv(Qt) * I(3);

```

Matrix A			
	-9		0
	-10		
	-4		-1
	-6		
	6		-2
	5		

Matrix C			
	2		-1
	2		

~~~~~  
 $y(t) = -3\exp(-3t)\cos(2t) - 2\exp(-3t)\sin(2t)$   
 ~~~~~

Matrix V			
	2		-1
	2		
	-2		-3
	-4		
	6		11
	18		

Rank V	
	3

Eigenvalues A			
	-1+0i		-3+2i
	-3-2i		
Eig rangs			
	3		3
	3		

Jordan			
	1		0
	0		0
	0		-3

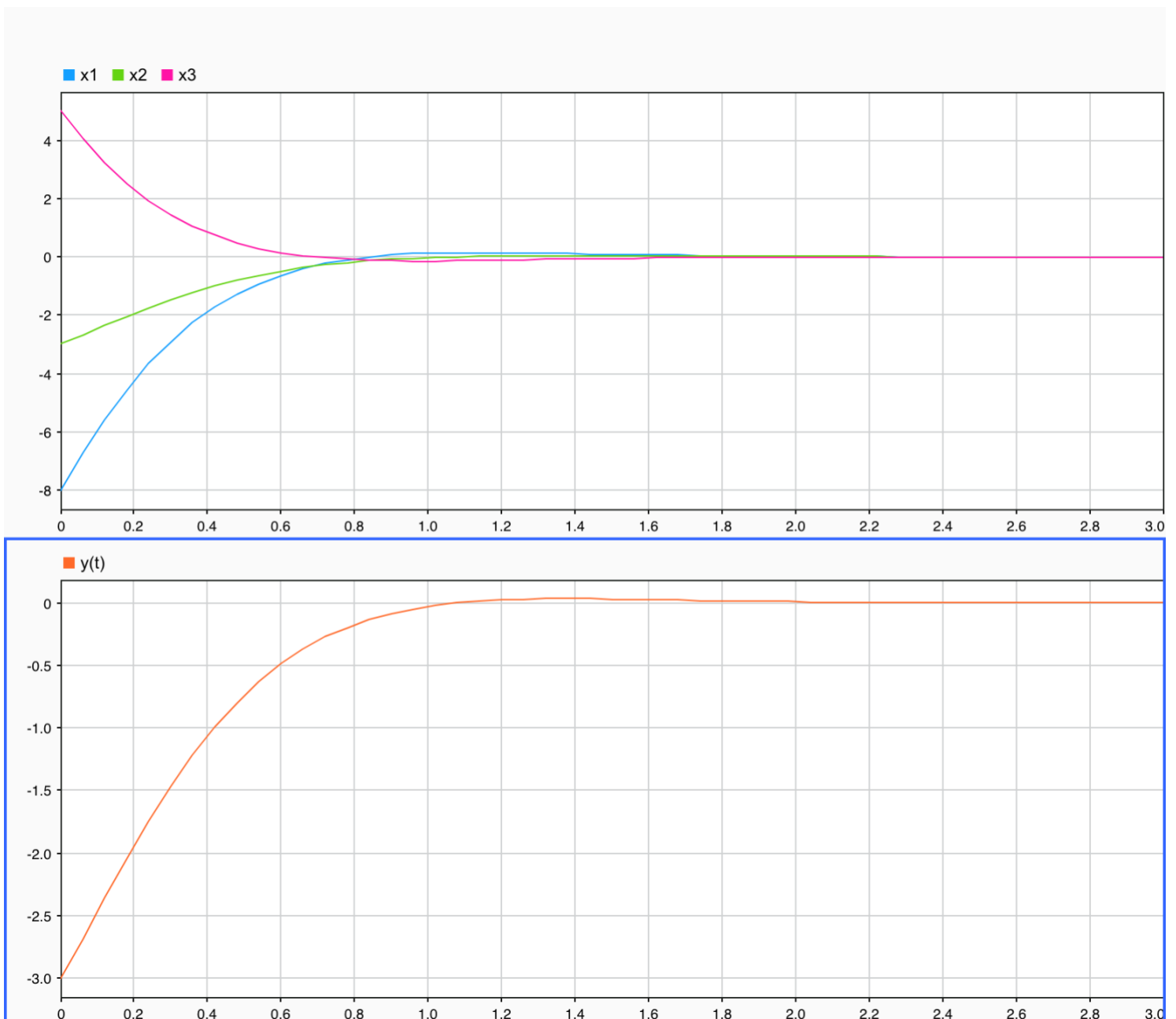
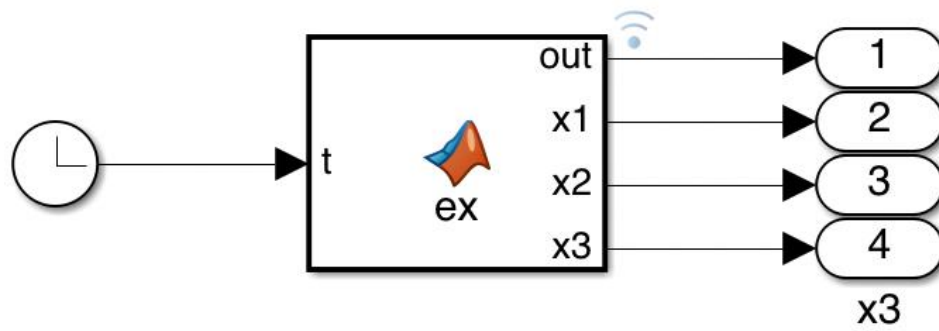
Matrix [A-I*(-1); C]			
	-8		0
	-10		
	-4		0
	-6		
	6		-2
	6		
	2		-1
	2		

Gramian			
	201.9		-201.8
			201.6
	-201.8		201.7
			-201.5
	201.6		-201.5
			201.3

Eigenvalues Q			
	604.828		0.013
	0.056		

Vector X_0	
	-8
	-3
	5

2.6. Моделирование



```

1  function [out, x1, x2, x3] = ex(t)
2  -     A = [ -9,  0, -10;
3            -4, -1, -6;
4            6, -2,  5];
5  -     C = [2, -1, 2];
6
7  -     x0 = [-8.0;-3.0;5.0];
8
9  -     x_t = expm(A*t)*x0;
10 -     x1 = [1, 0, 0]*x_t;
11 -     x2 = [0, 1, 0]*x_t;
12 -     x3 = [0, 0, 1]*x_t;
13 -     out = C*x_t;
14
15 -     [out, x1, x2, x3];
16

```

2.7. Расчет матрицы наблюдаемости, её ранга, собственных значений A, жордановой формы A, определение наблюдаемости каждого из собственных значений A, нахождение Грамиана наблюдаемости

```

1  -     A = [ -9,  0, -10;
2            -4, -1, -6;
3            6, -2,  5];
4
5  -     C = [1, 0, 1];
6
7  -     t1 = 3;
8
9  -     y = @(t) -3*exp(-3*t)*cos(2*t) - 2*exp(-3*t)*sin(2*t);
10
11 -     V = [C; C*A; C*A*A];
12 -     r = rank(V);
13
14 -     e = eig(A);
15 -     J = jordan(A);
16
17 -     ranks_e = [];
18 -     for i = 1:3
19 -         matrix = [A - eye(3)*e(i, 1); C];
20 -         ranks_e(end+1) = rank(matrix);
21 -     end
22
23 -     f = @(tau) expm(A'*tau)*C'*C*expm(A*tau);
24 -     Q = @(t_1) integral(f, 0, t_1, 'ArrayValued',1);
25 -     Qt = Q(t1);
26
27 -     e_q = eig(Qt);
28
29 -     g = @(x) expm(A'*x)*C'*y(x);
30 -     I = @(t_2) integral(g, 0, t_2, 'ArrayValued',1);
31 -     x0 = inv(Qt) * I(3);

```

Matrix A

-9 0 -10
-4 -1 -6
6 -2 5

Matrix C

1 0 1

$$y(t) = -3\exp(-3t)\cos(2t) - 2\exp(-3t)\sin(2t)$$

Matrix V

1 0 1
-3 -2 -5
5 12 17

Rank V

2

Eigenvalues A

-1+0i -3+2i -3-2i
Eig rangs
2 3 3

Jordan

1 0 0
0 -3 0
0 0 -3

Matrix [A-I*(-1); C]

-8 0 -10
-4 0 -6
6 -2 6
1 0 1

Gramian

0.1 -0.0 0.1
-0.0 0.0 -0.0
0.1 -0.0 0.1

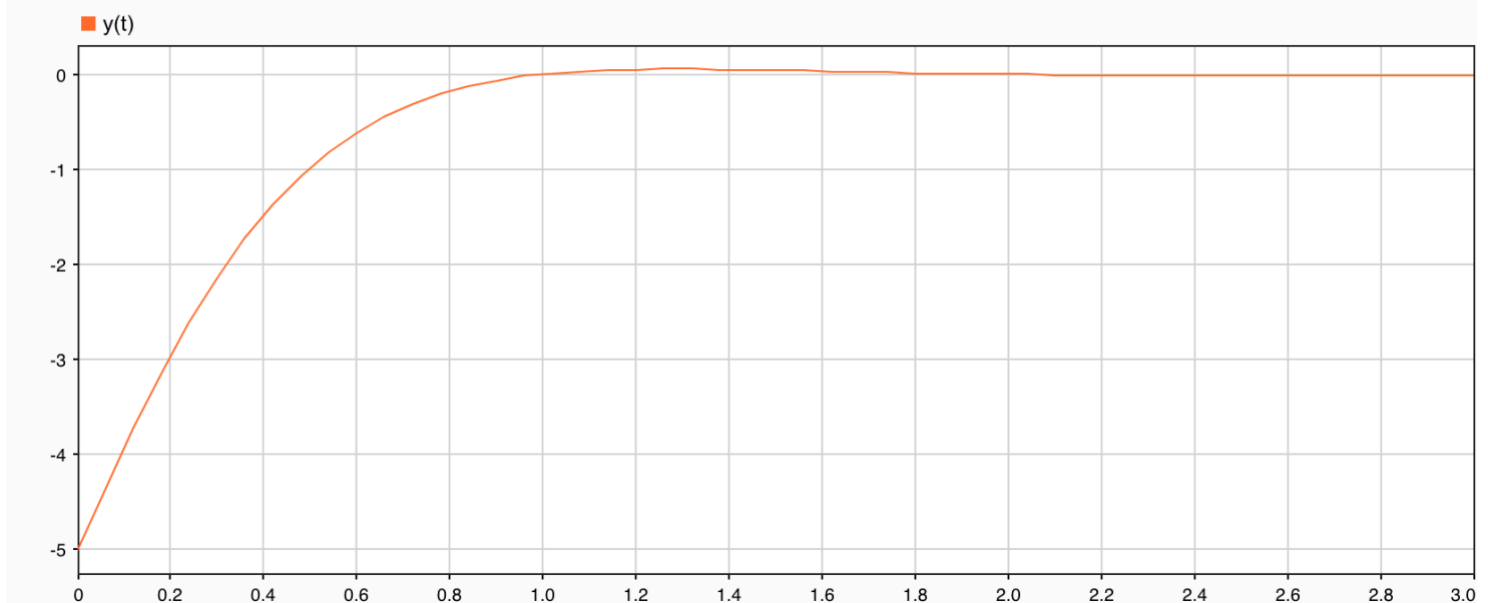
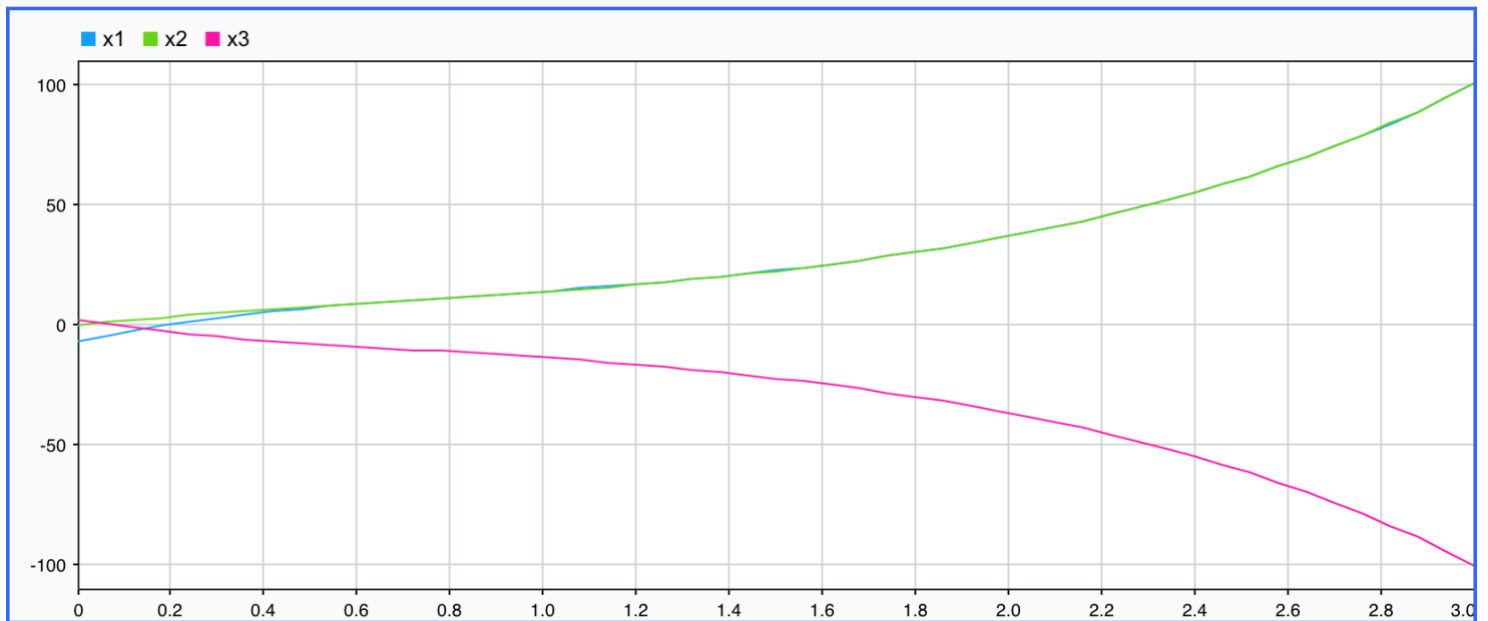
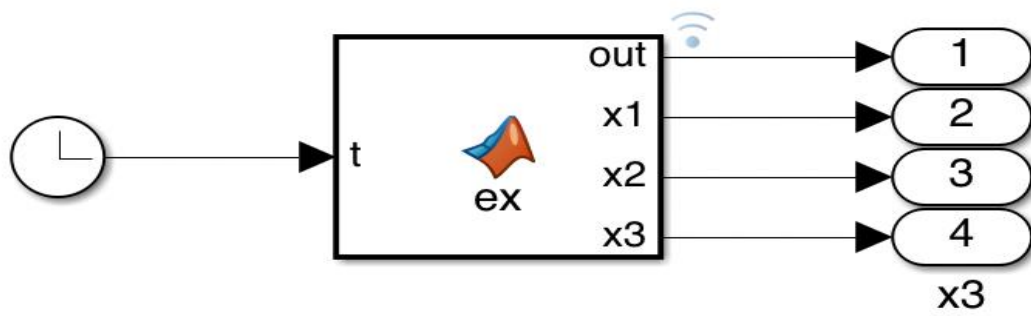
Eigenvalues Q

0.228 -0.000 0.028

Vector X_0

-7
0
2

2.8. Моделирование



```

1  function [out, x1, x2, x3] = ex(t)
2  -   A = [ -9, 0, -10;
3        -4, -1, -6;
4          6, -2, 5];
5
6  -   C = [1, 0, 1];
7
8  -   x0 = [-7.0;-0.0;2.0];
9
10 -   x_t = expm(A*t)*x0;
11 -   x1 = [1, 0, 0]*x_t;
12 -   x2 = [0, 1, 0]*x_t;
13 -   x3 = [0, 0, 1]*x_t;
14 -   out = C*x_t;
15
16 -   [out, x1, x2, x3];
17

```

3. Вывод: был произведен расчет наблюдаемости и управляемости систем, также были найдены их Грамианы и сделано моделирование.