

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И
ОПТИКИ**

Факультет систем управления и робототехники

**Отчет по лабораторной работе №2
«Модальные регуляторы и наблюдатели»
по дисциплине «Теория автоматического управления»**

Выполнил: студенты гр. R3238
Кравченко Д. В.

Преподаватель: Перегудин А.А.,
ассистент фак. СУиР

Санкт-Петербург 2021

1. Цель работы:

Синтез и анализ регуляторов линейных систем с помощью LMI.

2. Выполнение работы:

2.1. Регулятор с желаемой степенью устойчивости:

Вариант 5	$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} &\{-5, -5, -5, -5\} \\ &\{-5, -50, -500, -500\} \\ &\{-5, -10, 6i, -6i\} \\ &\{-5, -10, -2 + 6i, -2 - 6i\} \end{aligned}$
-----------	--	--	--

Рис. №1

Схема моделирования:

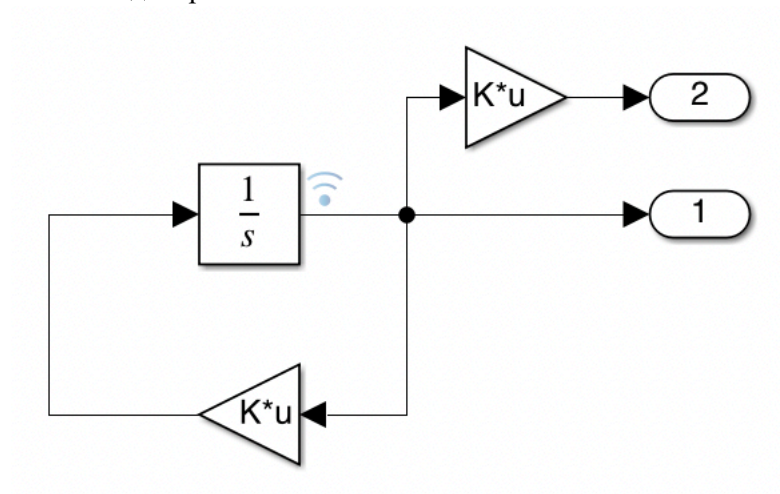


Рис. №2

Программный код Matlab:

```
1 - A = [-5, 0, 0, 0;
2       0, 0, 0, 0;
3       0, 0, 2, 6;
4       0, 0, -6, 2];
5
6 - B = [0; 1; 0; 3];
7
8 - e = eig(A);
9
10 - a1 = 0.5;
11 - a2 = 3;
12 - a3 = 5;
13
14 - cvx_begin sdp
15 - variable P(4,4)
16 - variable Y(1,4)
17 - P >= 0.0001*eye(4);
18 - P*A' + A*P + 2*a3*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
19 - cvx_end
20
21 - K = Y*inv(P);
22
23 - e_K = eig(A+B*K);
```

Значения K при $a = 0.5$:

$$K = [-3.07e^{-21} \quad -1.24 \quad -1.86 \quad -2.06]$$

Собственные значения $A+BK$:

$$\lambda_1 = -1.253 + 7.23i$$

$$\lambda_2 = -1.253 - 7.23i$$

$$\lambda_3 = -0.922$$

$$\lambda_4 = -5$$

Значения K при $a = 3$:

$$K = [-3.61e^{-21} \quad -25.62 \quad -19.19 \quad 0.81]$$

Собственные значения $A+BK$:

$$\lambda_1 = -7.271 + 12.932i$$

$$\lambda_2 = -7.271 - 12.932i$$

$$\lambda_3 = -4.656$$

$$\lambda_4 = -5$$

Значения K при $a = 5$:

$$K = [-3.48e^{-21} \quad -33.7 \quad -21.51 \quad 5.54]$$

Собственные значения $A+BK$:

$$\lambda_1 = -6.699 + 13.893i$$

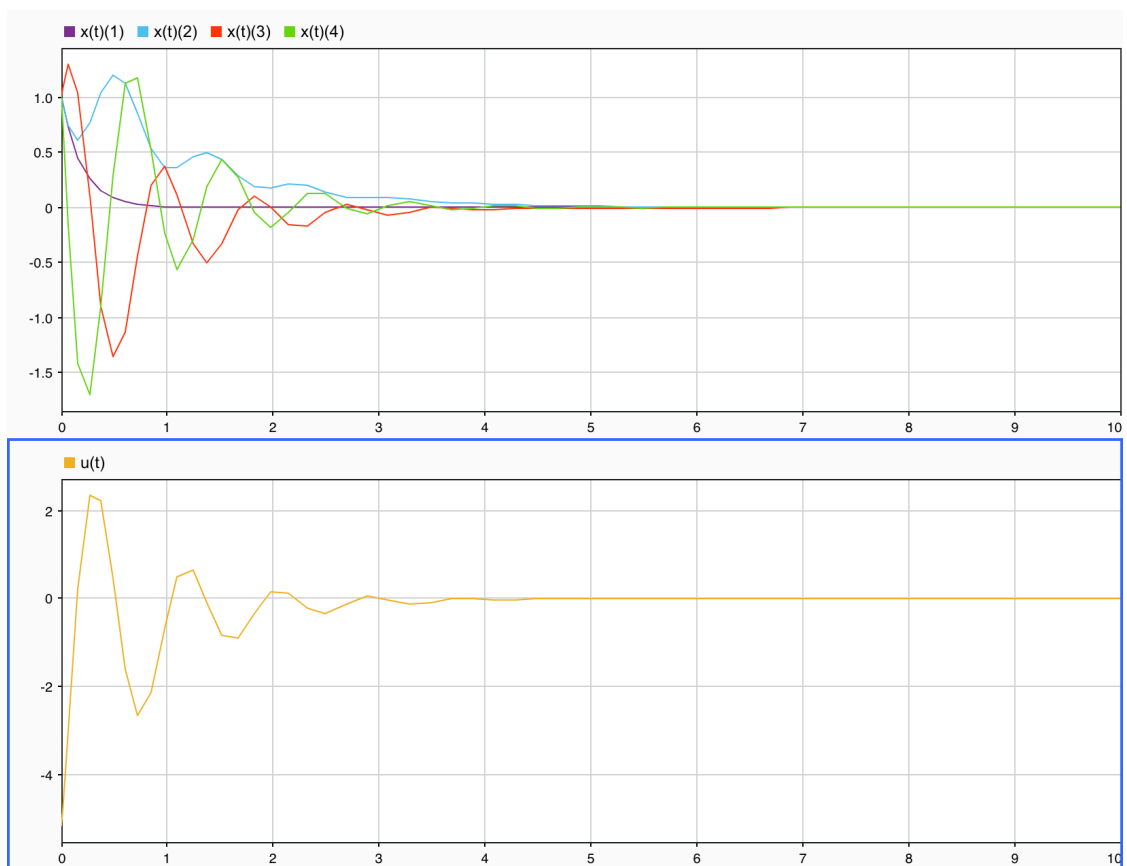
$$\lambda_2 = -6.699 - 13.893i$$

$$\lambda_3 = -5.666$$

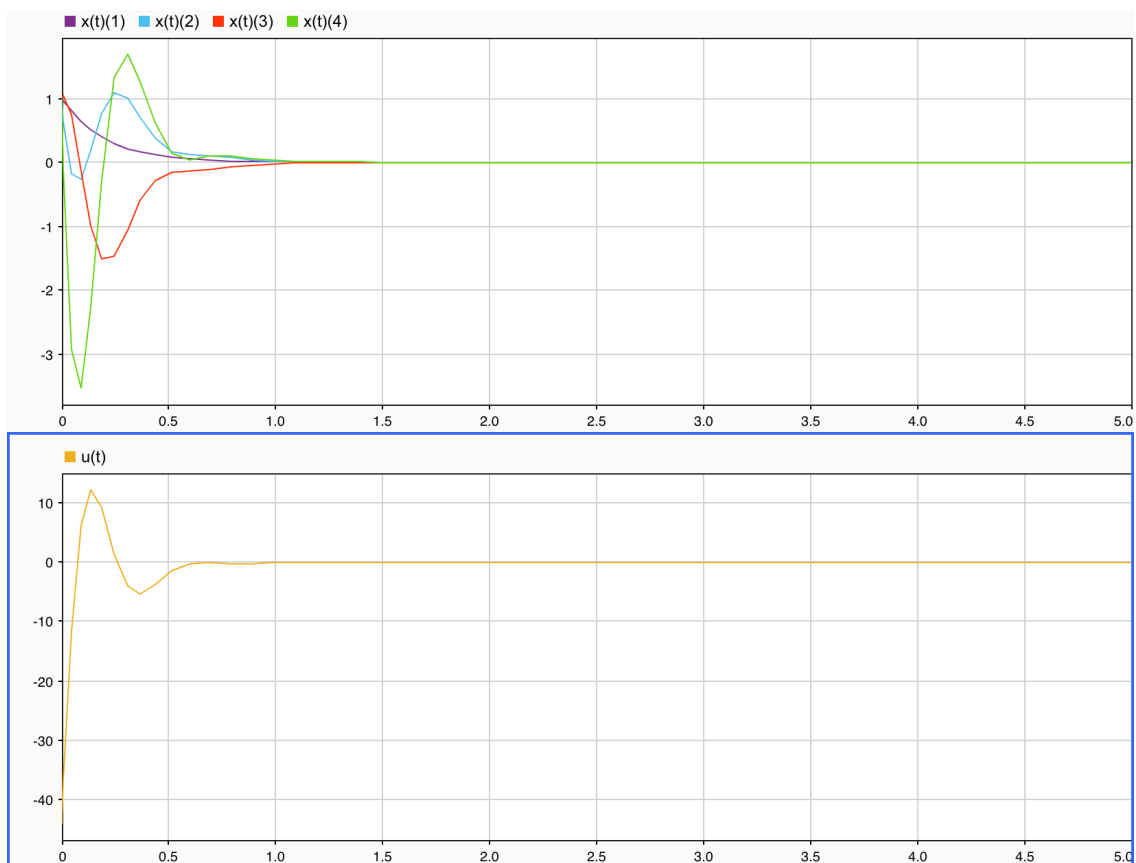
$$\lambda_4 = -5$$

Моделирование с начальными условиями $x_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$:

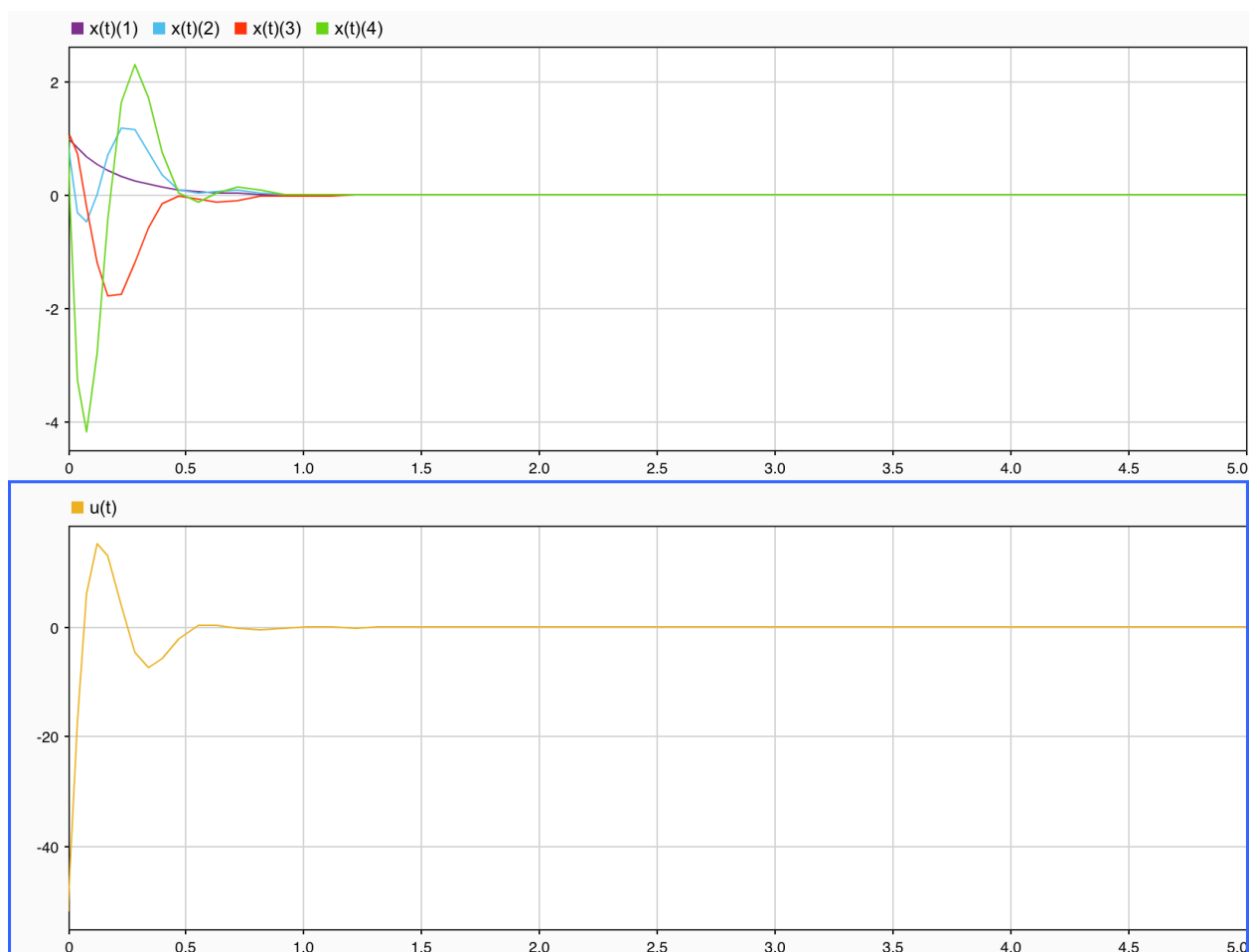
$a = 0.5$:



$a = 3$:



$a = 5$:



2.2. Ограничение на управление:

Зафиксируем $a = 3$

```
1 - A = [-5, 0, 0, 0;
2       0, 0, 0, 0;
3       0, 0, 2, 6;
4       0, 0, -6, 2];
5
6 - B = [0; 1; 0; 3];
7
8 - x0 = [1; 1; 1; 1];
9
10 - e = eig(A);
11
12 - a = 3;
13 - mu = 25 ;
14 - %25, 35, 50
15 - cvx_begin sdp
16 - variable P(4, 4)
17 - variable Y(1, 4)
18 - P >= 0.0001*eye(4);
19 - P*A' + A*P + 2*a*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
20 - [P, x0;
21     x0', 1] >= 0;
22 - [P, Y';
23     Y, mu^2] >= 0;
24 - cvx_end
25
26 - K = Y*inv(P);
27
28 - e_K = eig(A+B*K);
29
```

$\mu = 25$:

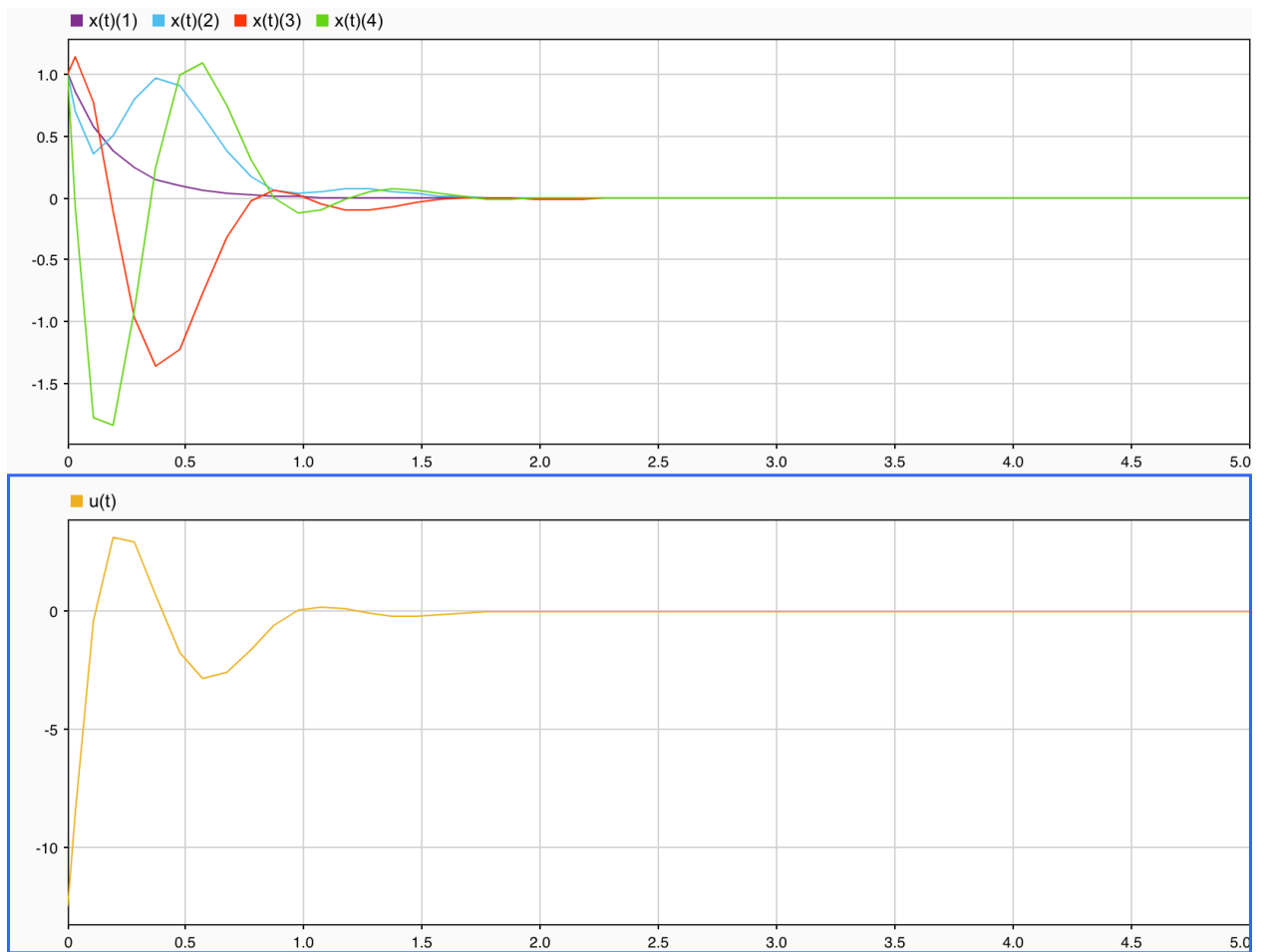
Собственные значения $A+BK$:

$$\lambda_1 = -3.213 + 7.48i$$

$$\lambda_2 = -3.213 - 7.48i$$

$$\lambda_3 = -3.079$$

$$\lambda_4 = -5$$



$\mu = 35$:

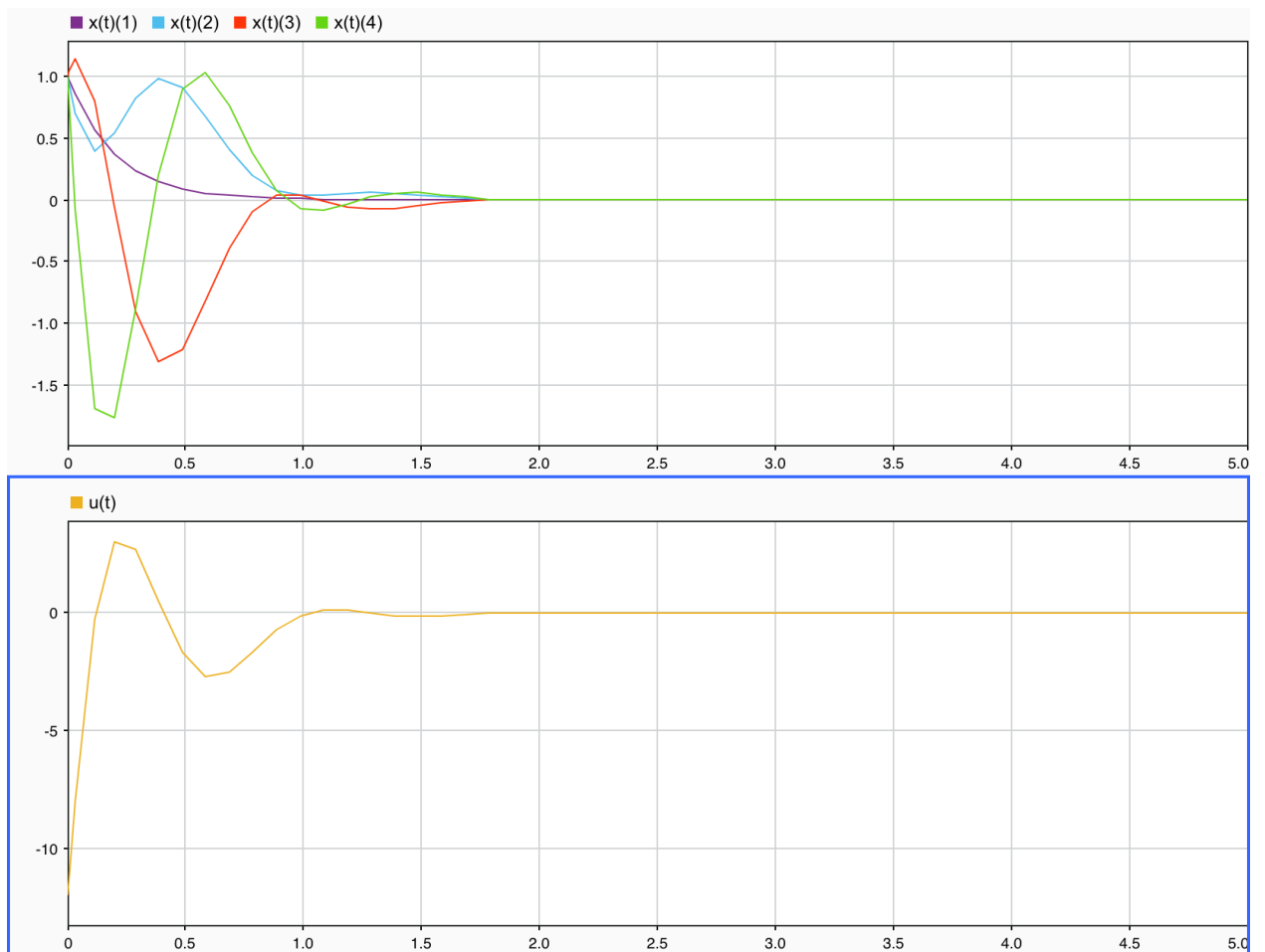
Собственные значения $A+BK$:

$$\lambda_1 = -3.28 + 7.06i$$

$$\lambda_2 = -3.28 - 7.06i$$

$$\lambda_3 = -3.115$$

$$\lambda_4 = -5$$



$\mu = 50$:

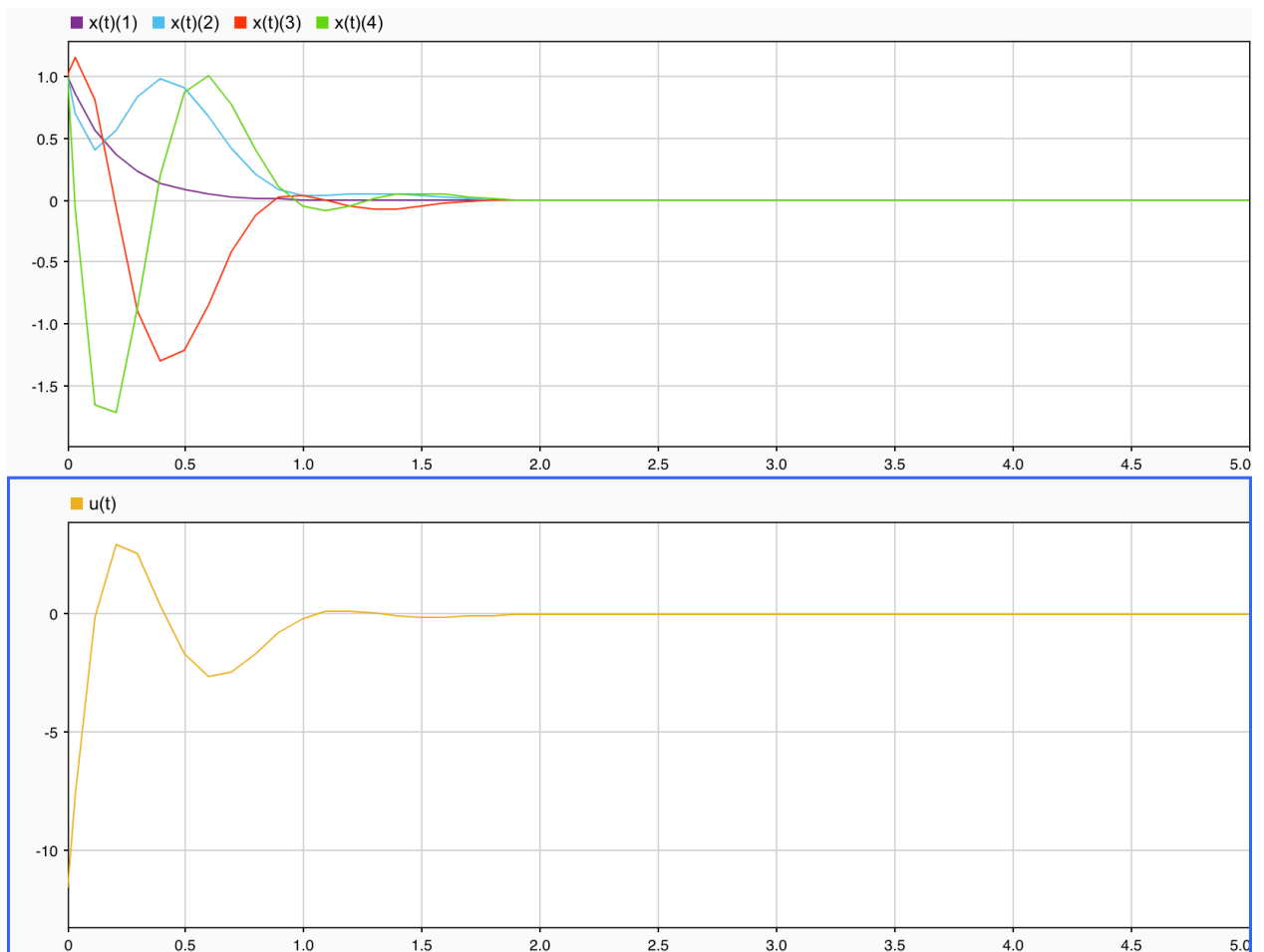
Собственные значения $A+BK$:

$$\lambda_1 = -3.237 + 6.88i$$

$$\lambda_2 = -3.237 - 6.88i$$

$$\lambda_3 = -3.1$$

$$\lambda_4 = -5$$



```

1 - A = [-5, 0, 0, 0;
2       0, 0, 0, 0;
3       0, 0, 2, 6;
4       0, 0, -6, 2];
5
6 - B = [0; 1; 0; 3];
7
8 - x0 = [1; 1; 1; 1];
9
10 - e = eig(A);
11
12 - a1 = 0.5;
13 - a2 = 3;
14 - a3 = 5;
15
16 - cvx_begin sdp
17 - variable P(4, 4)
18 - variable Y(1, 4)
19 - variable mumu
20 - minimize mumu
21 - P >= 0.0001*eye(4);
22 - P*A' + A*P + 2*a1*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
23 - [P, x0;
24   x0', 1] >= 0;
25 - [P, Y';
26   Y, mumu] >= 0;
27 - cvx_end
28
29 - K = Y*inv(P);
30 - mu = sqrt(mumu);
31

```

$a = 0.5$:

$$\mu = 3.96$$

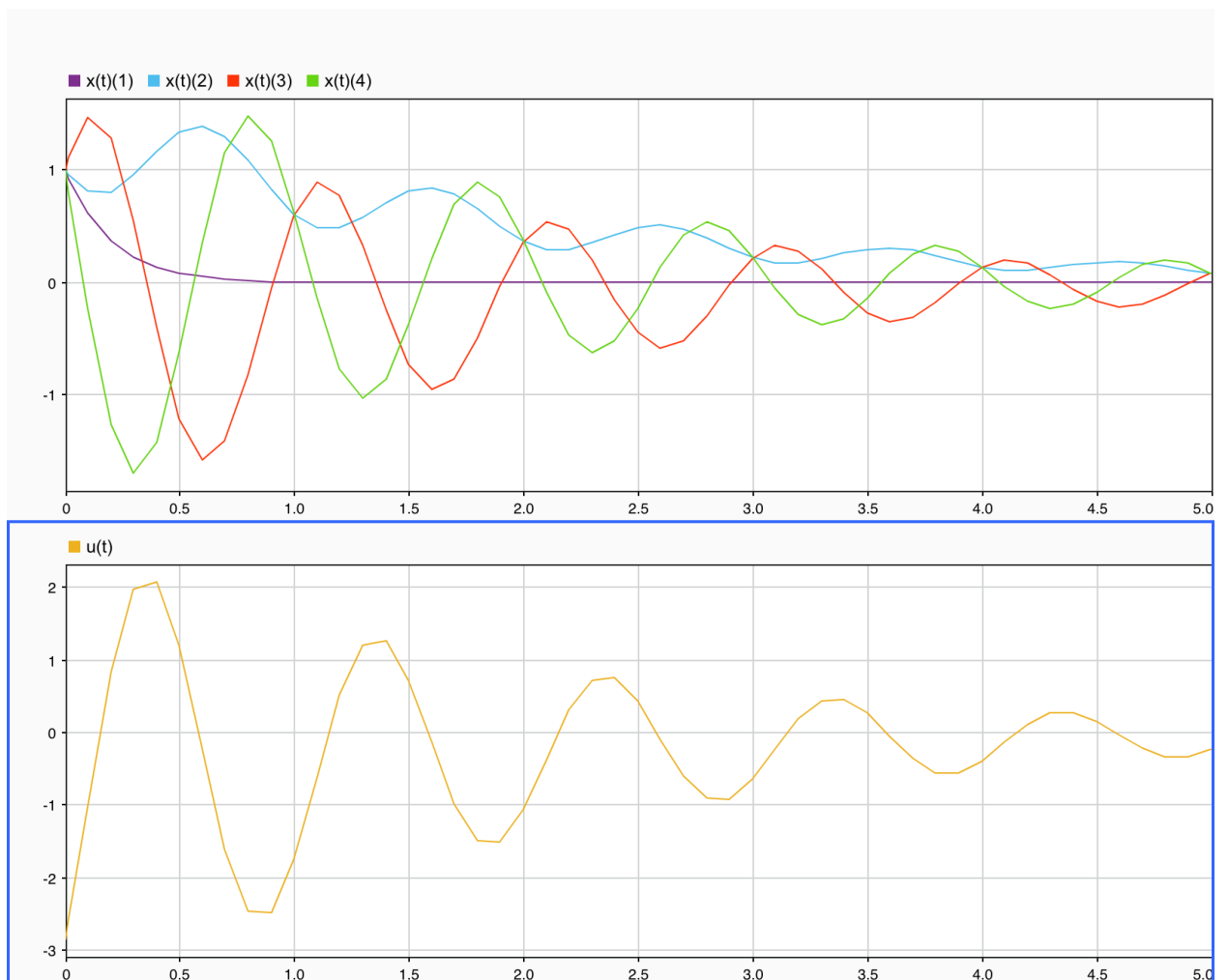
Собственные значения $A+BK$:

$$\lambda_1 = -0.5002 + 6.28i$$

$$\lambda_2 = -0.5002 - 6.28i$$

$$\lambda_3 = -0.5001$$

$$\lambda_4 = -5$$



a = 3:

$$\mu = 20.37$$

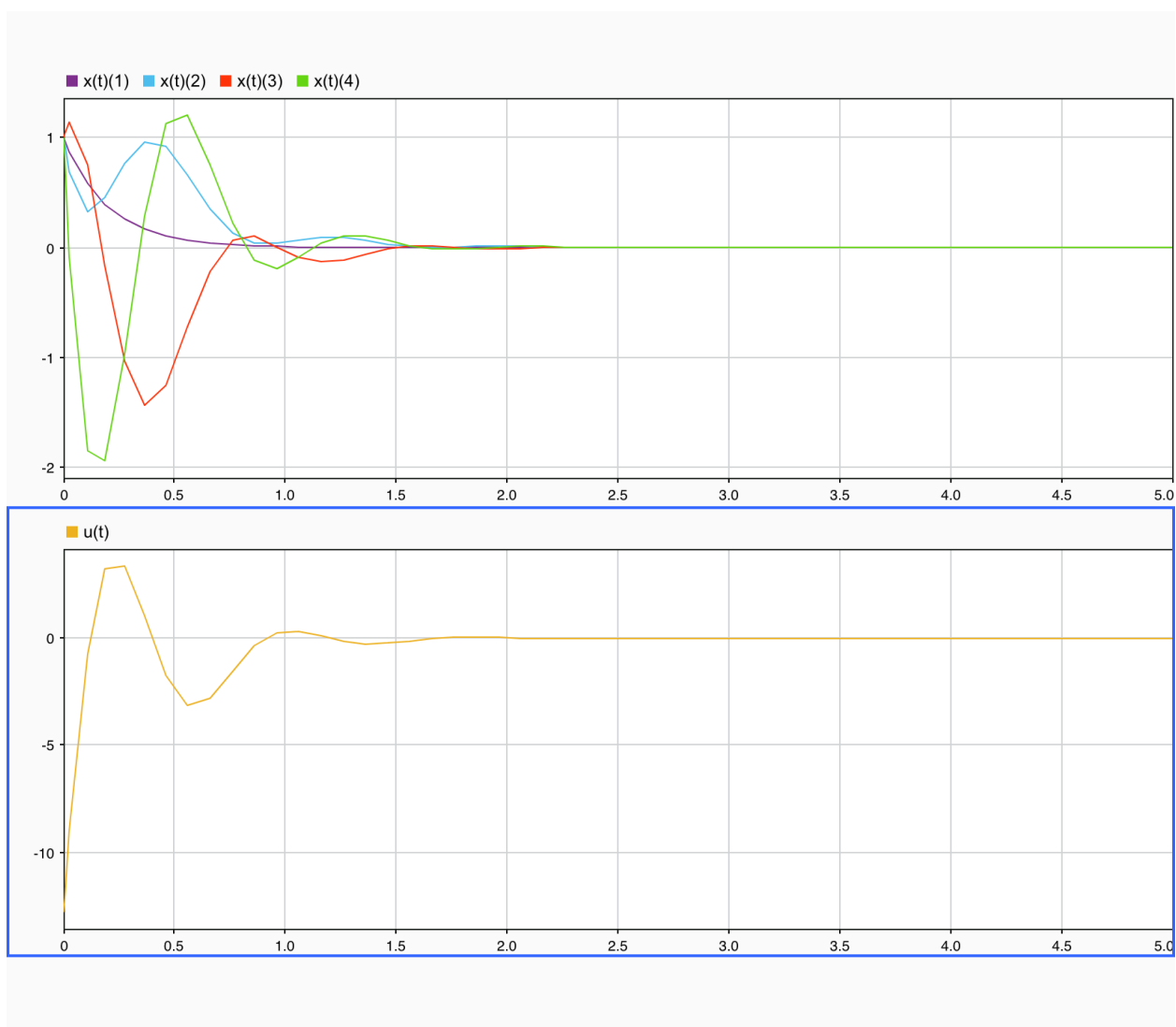
Собственные значения A+BK:

$$\lambda_1 = -3.001 + 7.95i$$

$$\lambda_2 = -3.001 - 7.95i$$

$$\lambda_3 = -3.004$$

$$\lambda_4 = -5$$



$a = 5$:

$$\mu = 48.1$$

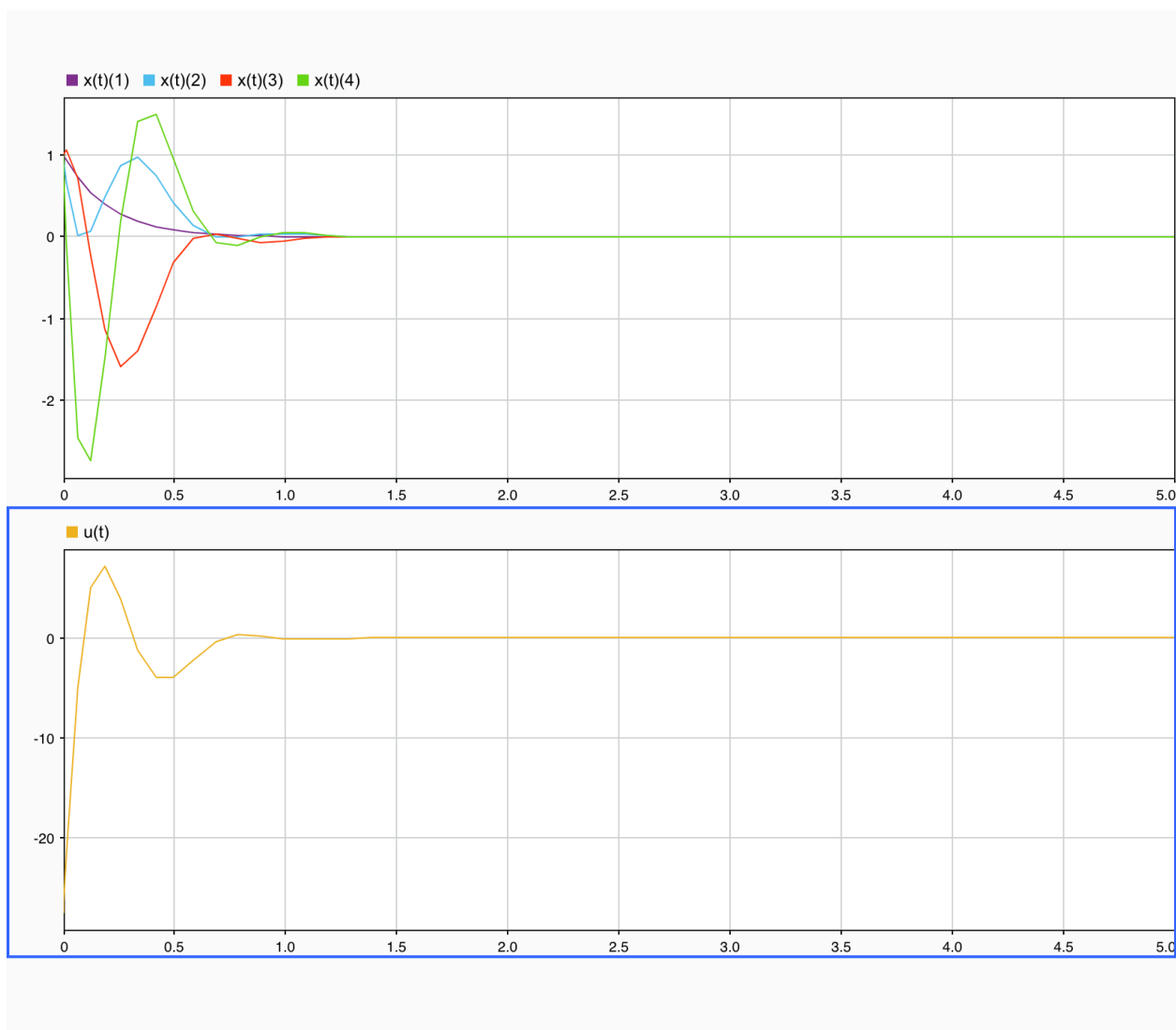
Собственные значения $A+BK$:

$$\lambda_1 = -5 + 9.78i$$

$$\lambda_2 = -5 - 9.78i$$

$$\lambda_3 = -5$$

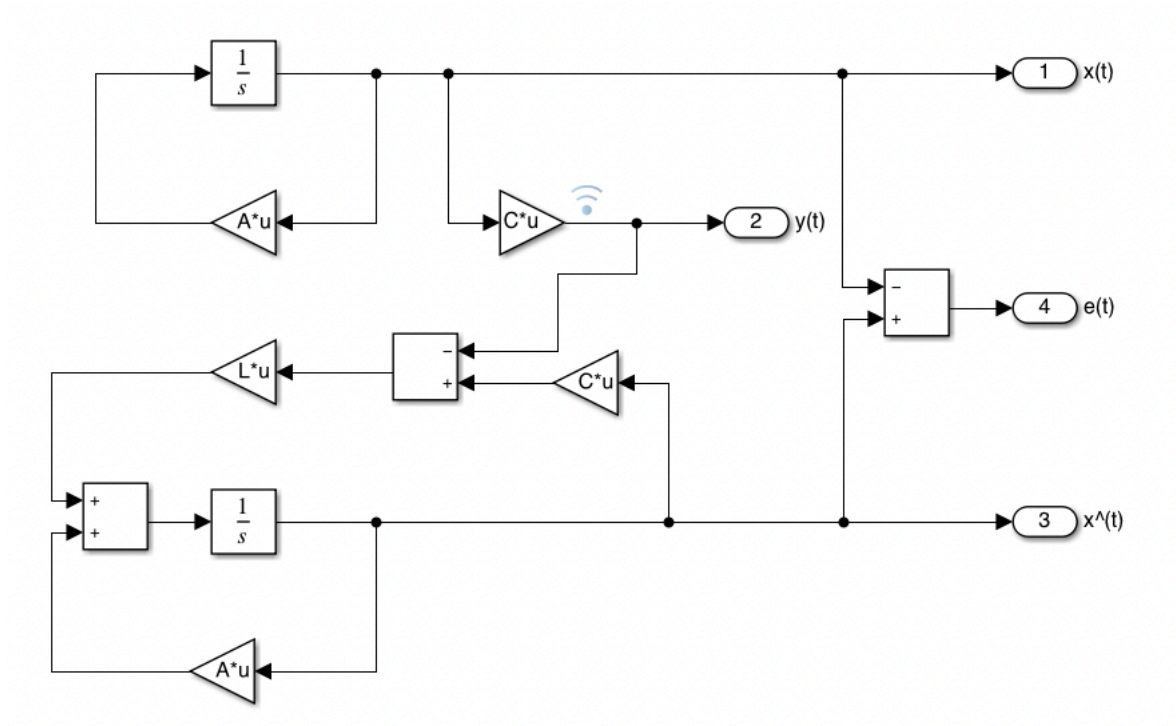
$$\lambda_4 = -5$$



Наблюдатель с заданной степенью устойчивости:

Вариант 5	$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$	$C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\{-5, -5, -5, -5\}$ $\{-5, -50, -500, -500\}$ $\{-5, -10, 6i, -6i\}$ $\{-5, -10, -2 + 6i, -2 - 6i\}$
-----------	--	--	--

Схема моделирования:



Значения L при $a = 0.5$:

$$L = [0.74 \quad -3.29 \quad -0.17 \quad -1.65]$$

Собственные значения $A+LC$:

$$\lambda_1 = -0.658 + 2.09i$$

$$\lambda_2 = -0.658 - 2.08i$$

$$\lambda_3 = -1.5 + 10.61i$$

$$\lambda_4 = -1.5 - 10.61i$$

Значения L при $a = 3$:

$$L = \begin{bmatrix} 114.28 & -113.04 & 13.37 & -12.04 \end{bmatrix}$$

Собственные значения $A+LC$:

$$\lambda_1 = -12.264 + 20.249i$$

$$\lambda_2 = -12.264 - 20.249i$$

$$\lambda_3 = -4.131 + 2.622i$$

$$\lambda_4 = -4.131 - 2.622i$$

Значения L при $a = 5$:

$$L = \begin{bmatrix} 385.59 & -255.82 & 35.15 & -9.7 \end{bmatrix}$$

Собственные значения $A+LC$:

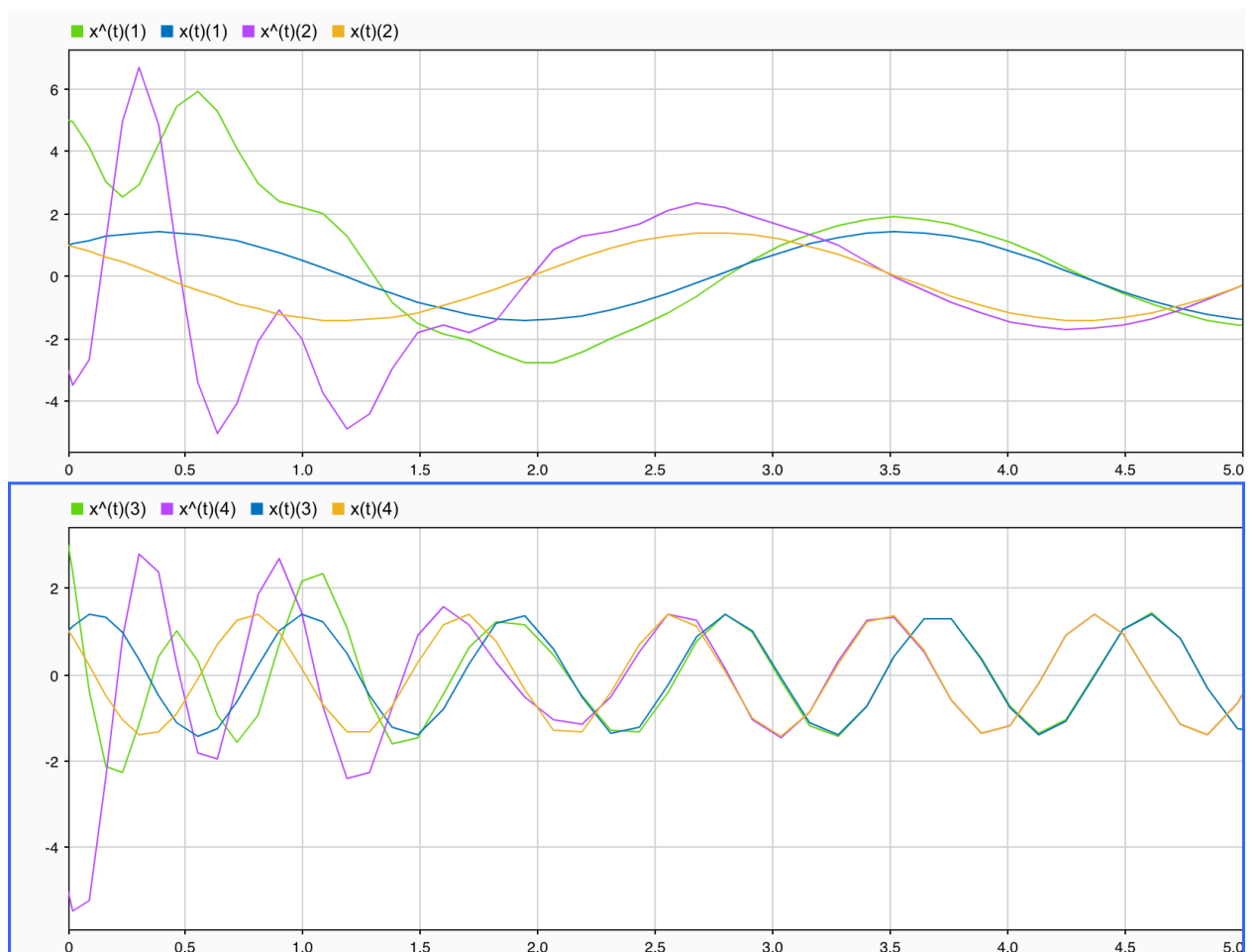
$$\lambda_1 = -15.875 + 22.553i$$

$$\lambda_2 = -15.875 - 22.553i$$

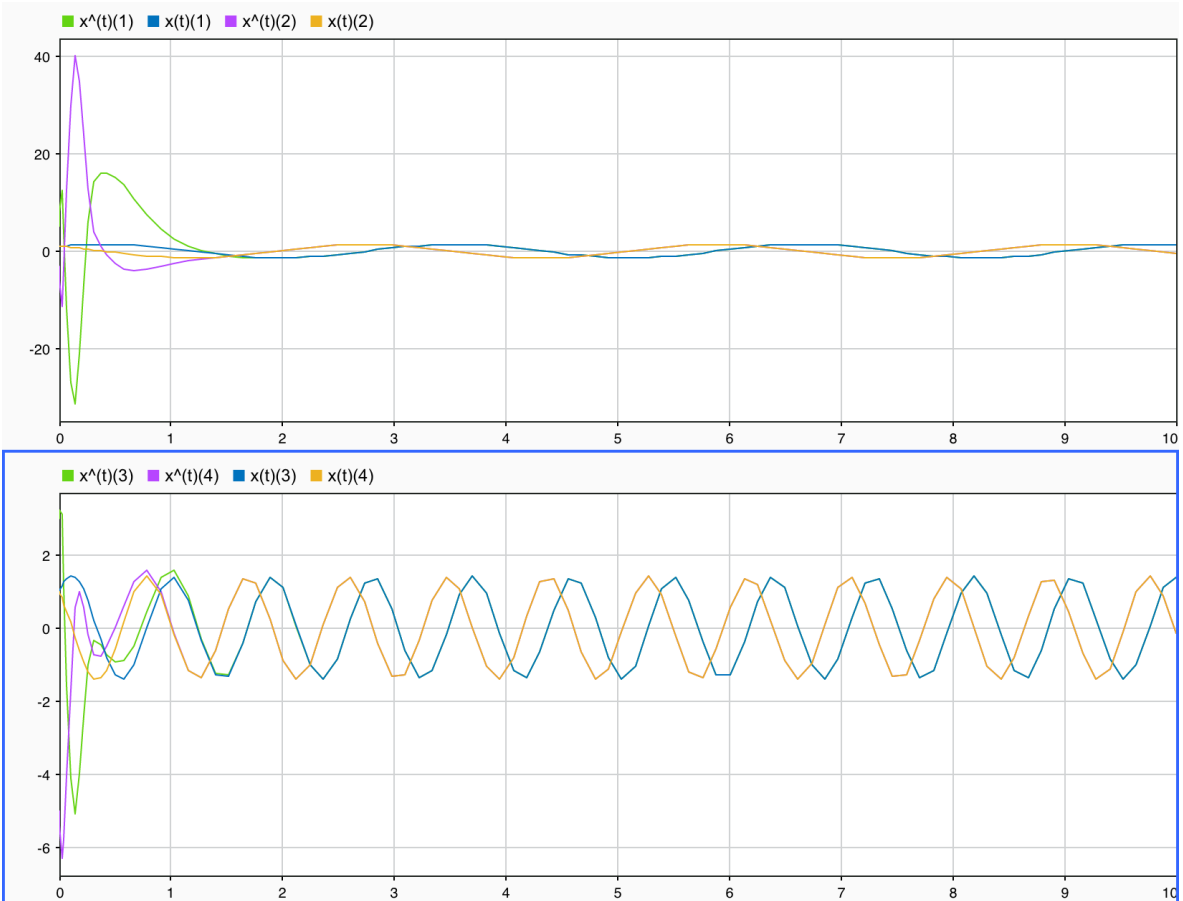
$$\lambda_3 = -6.6 + 2.992i$$

$$\lambda_4 = -6.6 - 2.992i$$

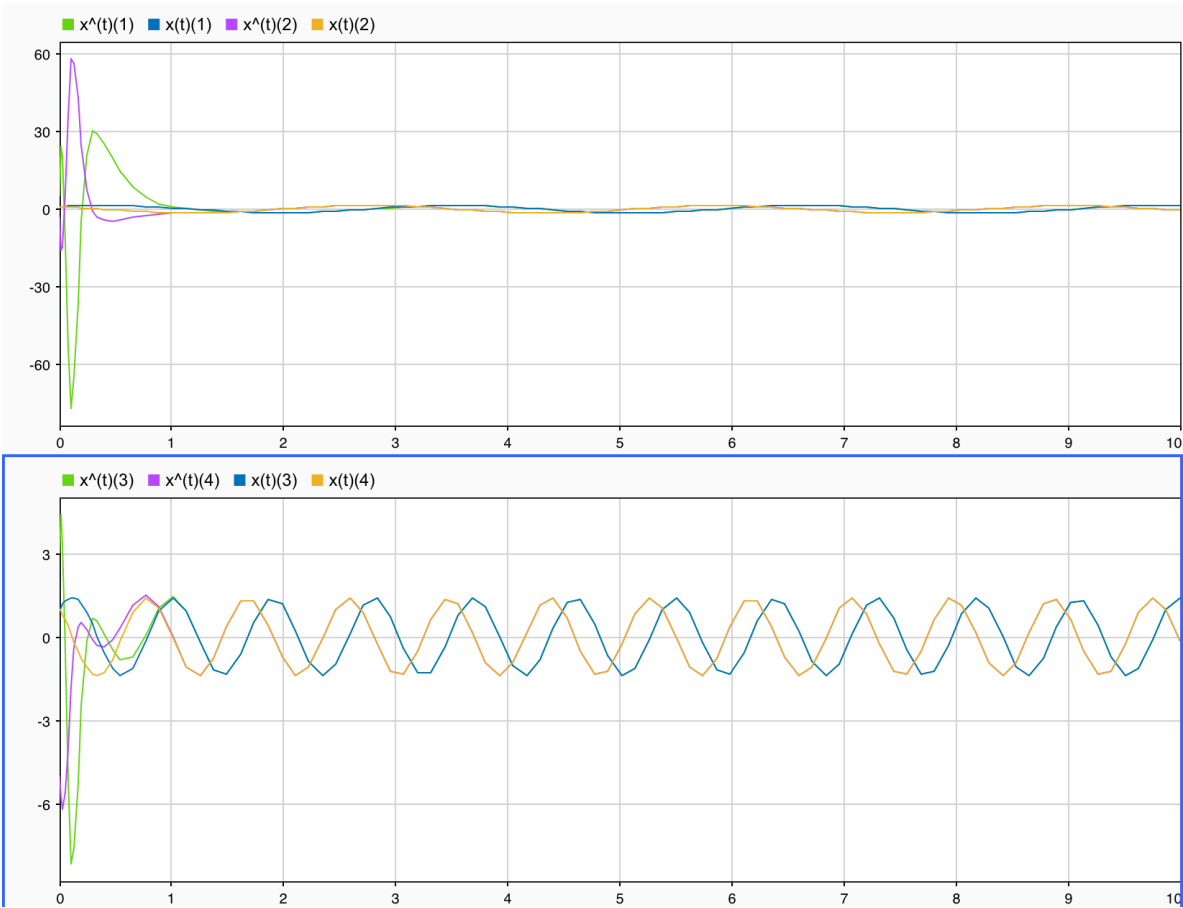
$a = 0.5$



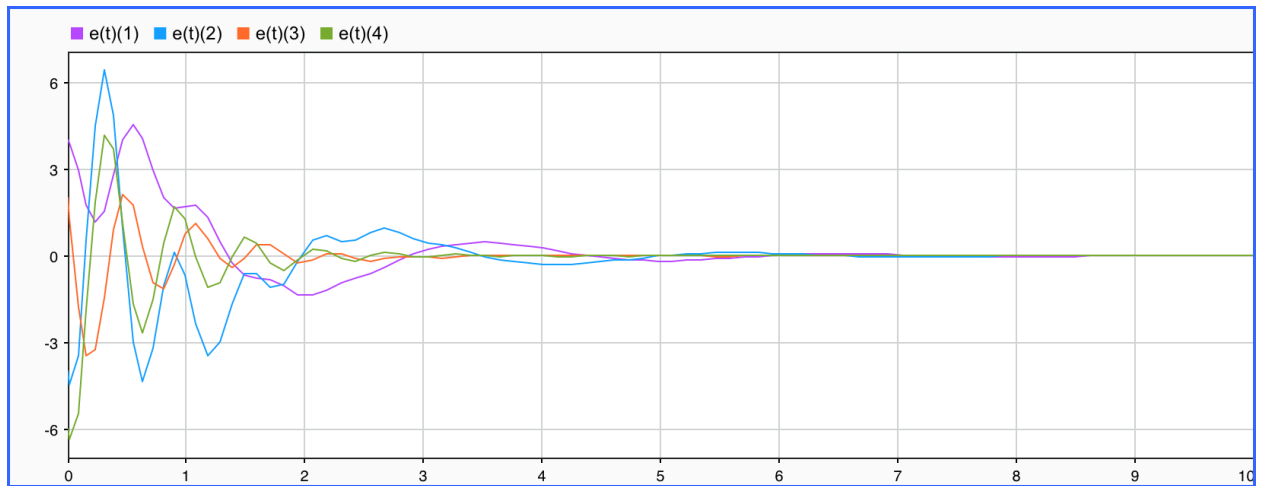
a = 3:



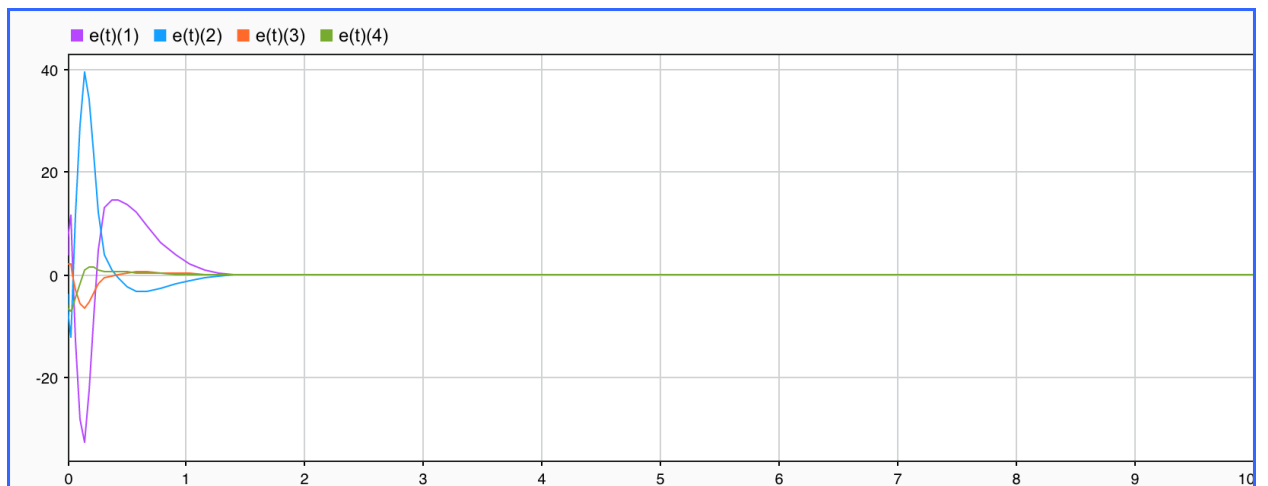
a = 5:



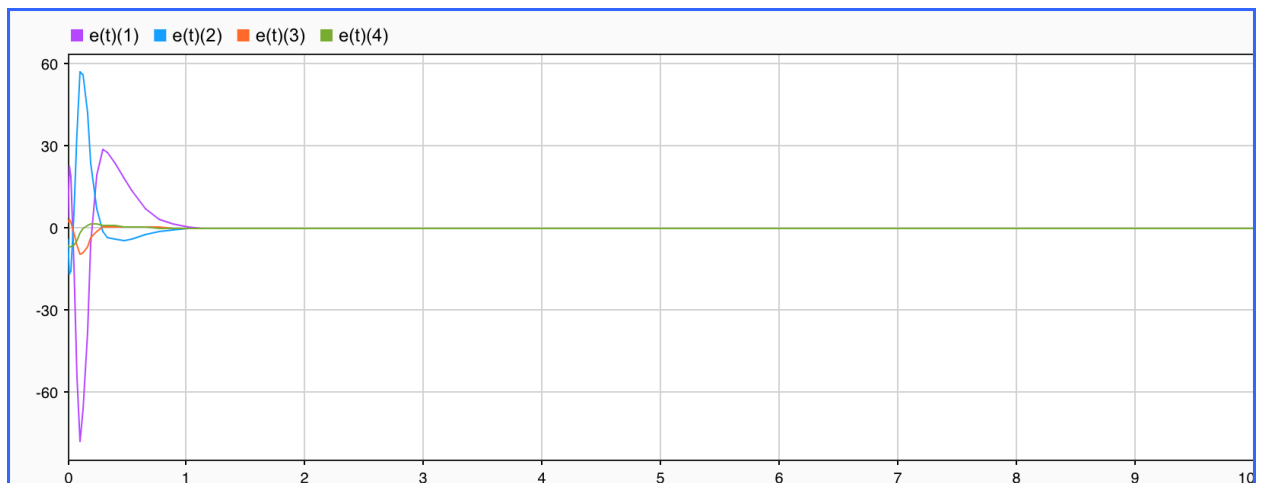
$a = 0.5$:



$a = 3$:



$a = 5$:



2.3. Синтез наблюдателя и основанного на нем регулятора с помощью линейных матричных нер-в:

Вариант 5	$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
-----------	--	--	---

Программный код:

```

1 - A = [5, -5, -9, 3;
2       -5, 5, -3, 9;
3       -9, 3, 5, 5;
4       -3, 9, 5, 5];
5
6 - B = [1; 9; 7; 5];
7
8 - C = [1, -1, 1, 1;
9       0, 4, 0, 4];
10
11 - x0 = [1; 2; 3; 4];
12
13 - e = eig(A);
14
15 - a = 0.5;
16
17 - cvx_begin sdp
18 - variable P(4, 4)
19 - variable Y1(1, 4)
20 - variable mumu
21 - minimize mumu
22 - P >= 0.0001*eye(4);
23 - P*A' + A*P + 2*a*P + Y1'*B' + B*Y1 <= 0;
24 - [P, x0;
25     x0', 1] >= 0;
26 - [P, Y1';
27     Y1, mumu] >= 0;
28 - cvx_end

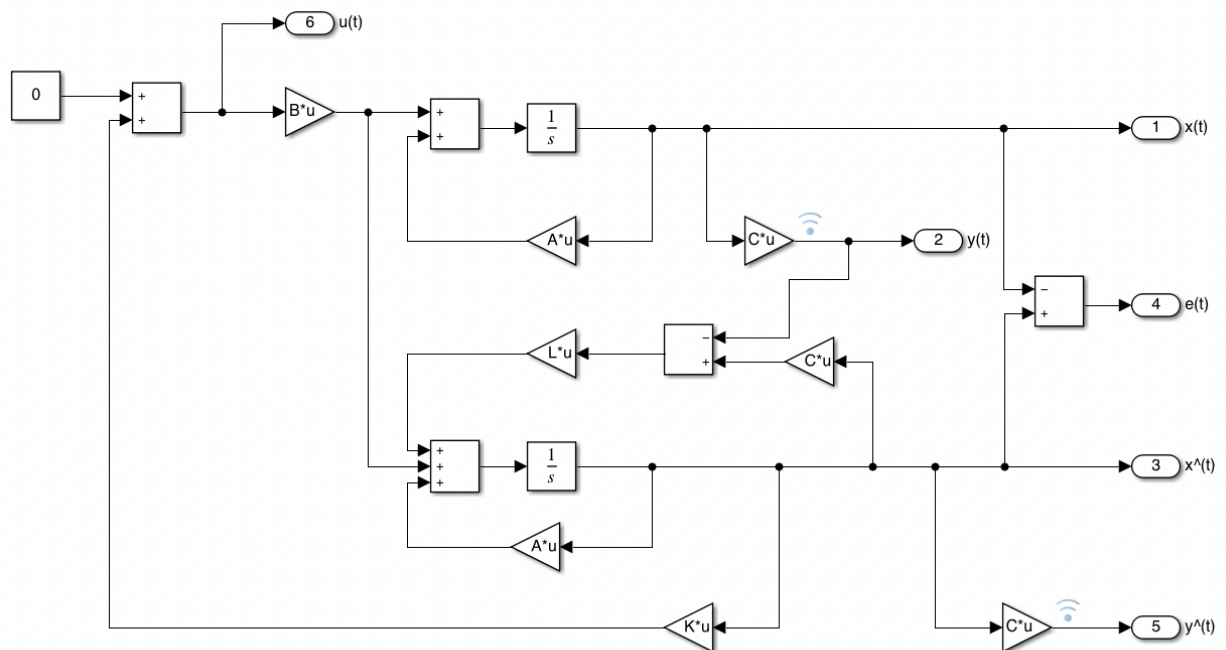
```

```

30 - K = Y1*inv(P);
31 - mu = sqrt(mumu);
32 - e_K = eig(A+B*K);
33
34 - cvx_begin sdp
35 - variable Q(4,4)
36 - variable Y2(4,2)
37 - Q >= 0.0001*eye(4);
38 - A'*Q + Q*A + 2*a*Q + C'*Y2' + Y2*C <= 0;
39 - cvx_end
40
41 - L = inv(Q)*Y2;
42 - e_L = eig(A+L*C);

```

Схема моделирования:



a = 8:

Значения K при a = 8:

$$K = \begin{bmatrix} -33.24 & 69.22 & -74.69 & -23.83 \end{bmatrix}$$

Собственные значения A+BK:

$$\lambda_1 = -8 + 16.77i$$

$$\lambda_2 = -8 - 16.77i$$

$$\lambda_3 = -8.09 + 0.99i$$

$$\lambda_4 = -8.09 - 0.99i$$

Значения L при a = 8:

$$L = \begin{bmatrix} 37.1 & -2.37 & -37.26 & -11.78 \\ 4.49 & 3.7 & -10.98 & -4.98 \end{bmatrix}^T$$

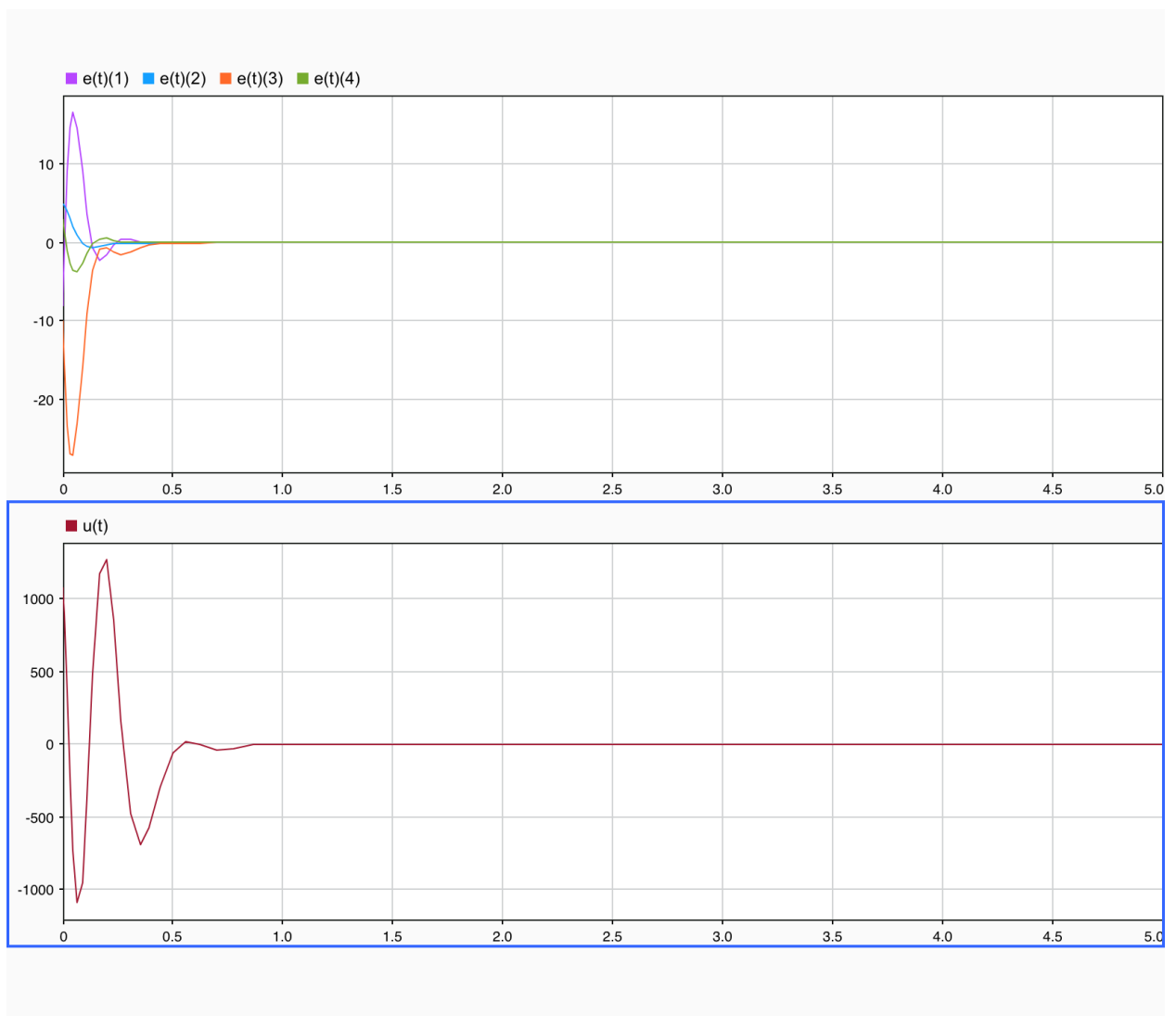
Собственные значения A+LC:

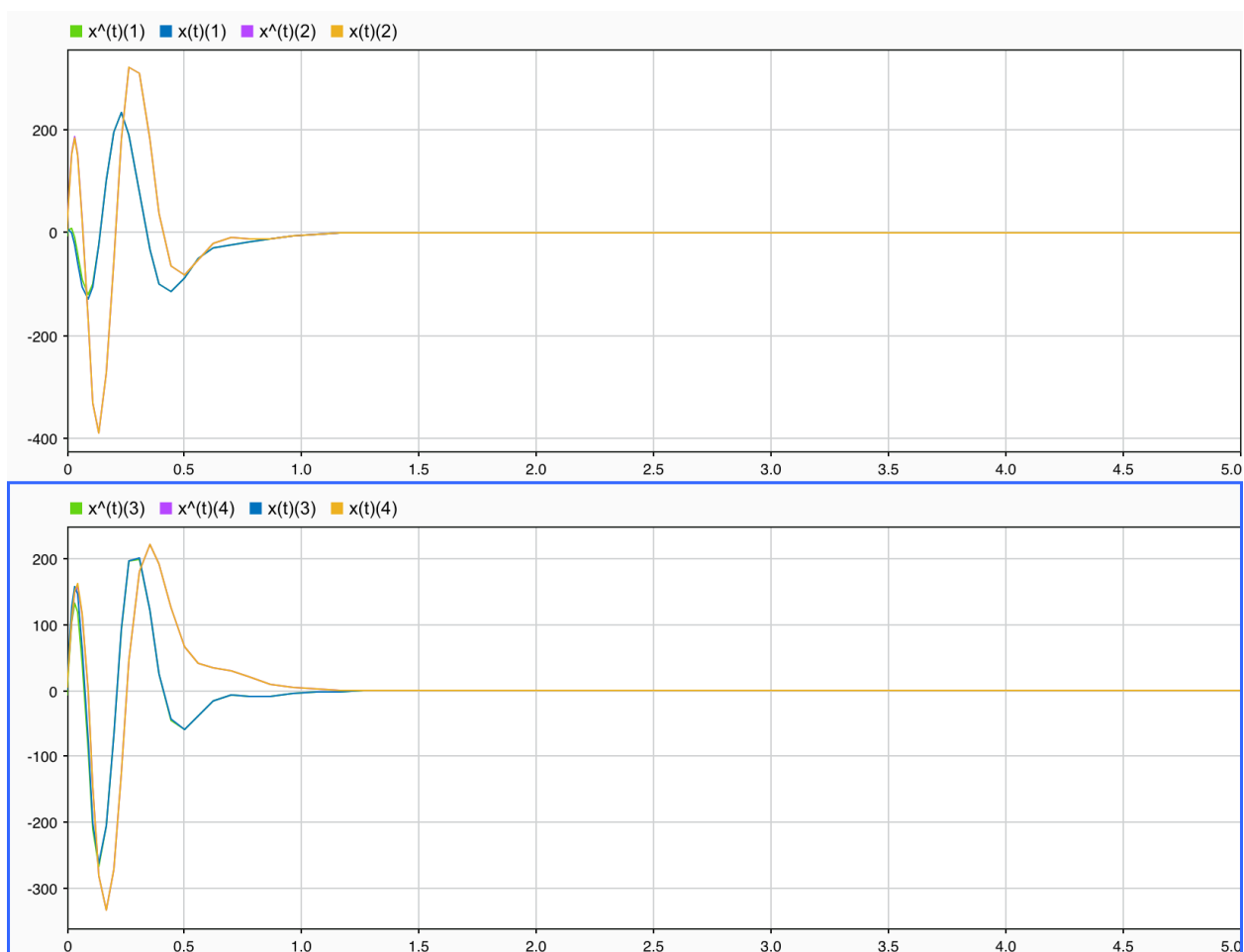
$$\lambda_1 = -15.42 + 26.17i$$

$$\lambda_2 = -15.42 - 26.17i$$

$$\lambda_3 = -12.18$$

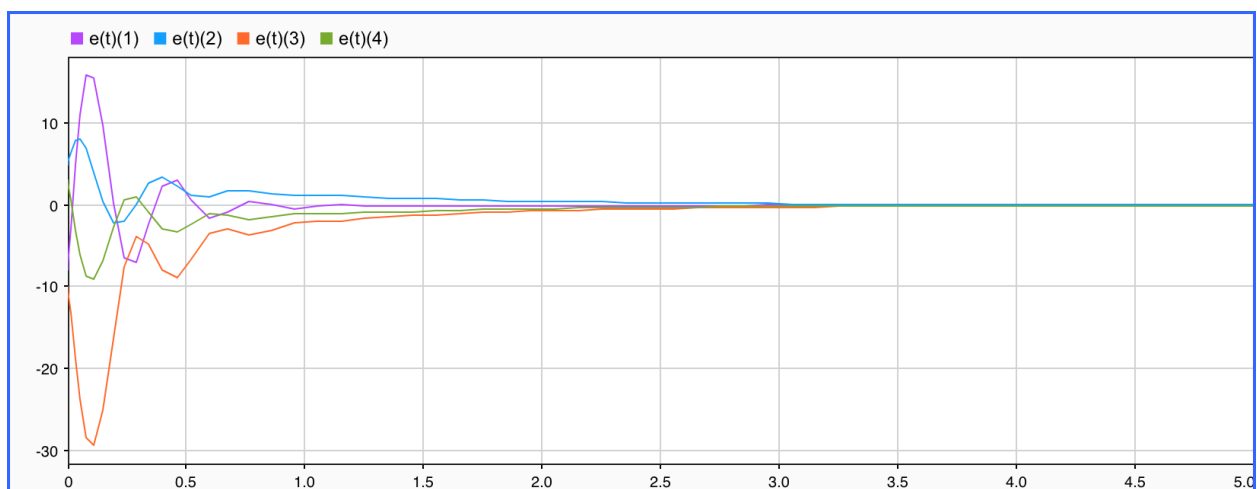
$$\lambda_4 = -8.72$$



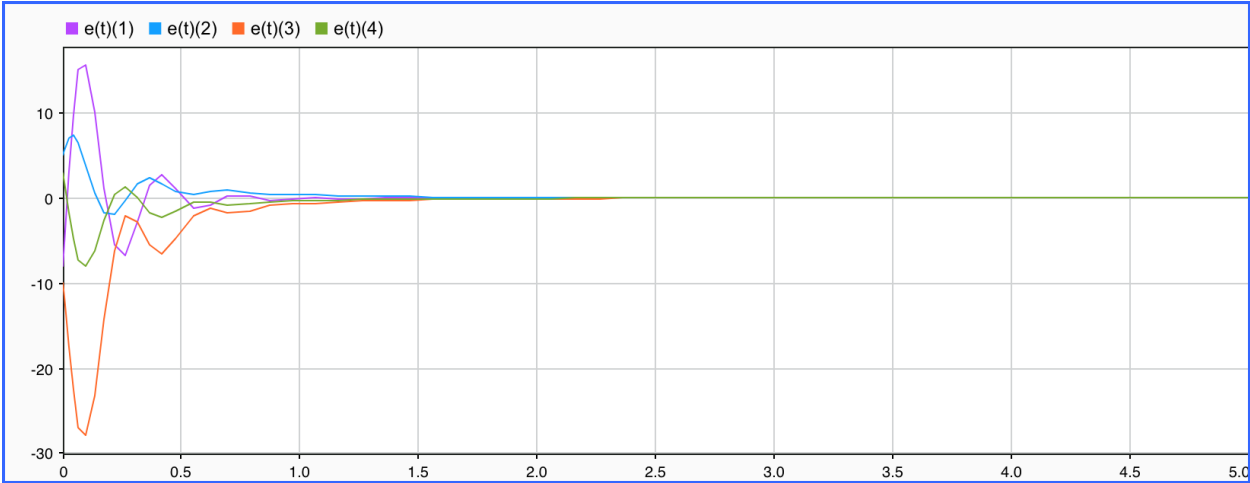


Сравнение при различных $a = \{0.1; 1; 4; 8\}$:

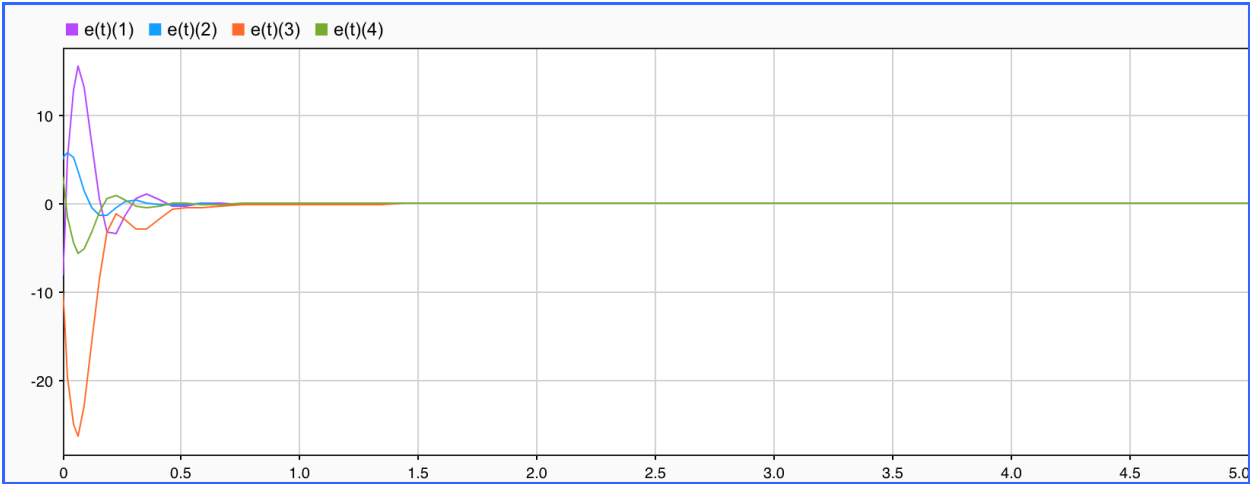
$a = 0.1$



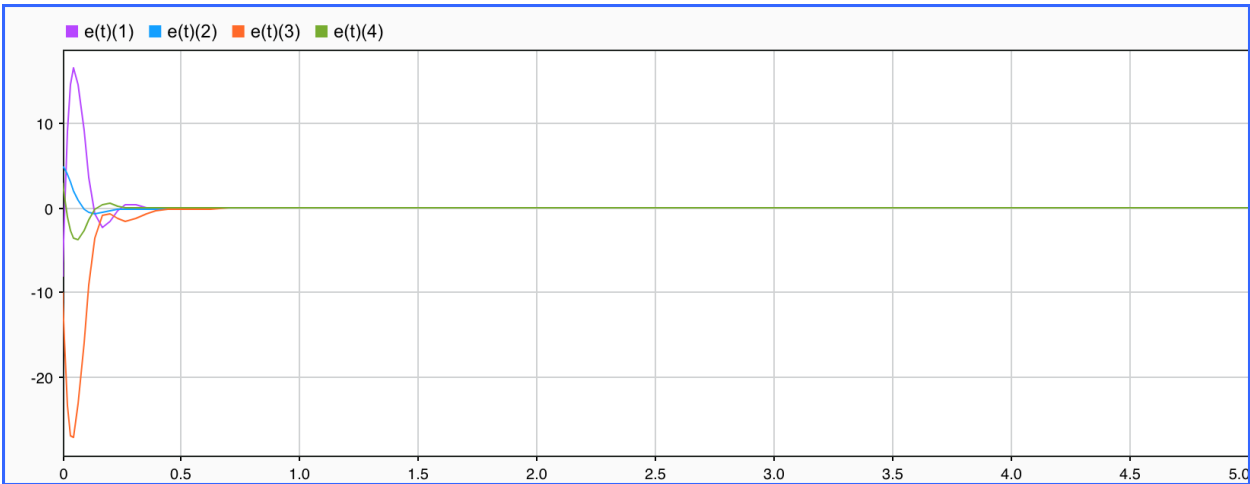
a = 1:



a = 4:



a = 8:



3. **Вывод:** В данной работе был произведен синтез LMI регуляторов и наблюдателей, а также их композиция. Была исследована зависимость степени сходимости и матриц регулятора и наблюдателя, и их собственные значения.