1. Сколько различных словарей необходимо для непосредственного перевода с любого из n=7 языков на любой другой (из этих же n языков)?

Это к-во упор-ых пар $(i \to j)$, значит $n(n-1) = 7 \cdot 6 = 42$

Ответ: 42

2. В общежитии проживают 30 студентов. Ежедневно для дежурства назначаются два человека. Можно ли составить расписание дежурств на год так, чтобы никакая пара студентов не дежурила дважды?

$C_{30}^2 = 435$, т.к $435 < 365 \Rightarrow$ можно

Ответ: да, можно.

3. У одного книголюба 6 книг, у другого – 7, причём все 13 книг различны. Сколькими способами можно осуществить обмен двух книг на две книги? Трёх книг на три книги?

а) $C_6^2 \cdot C_7^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7}{4} = 315$

b) $C_6^3 \cdot C_7^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{6 \cdot 6} = 700$

Ответ: а) 315 b) 700

4. Студенту необходимо сдать 4 экзамена в течение 10 дней. Сколькими способами можно составить ему расписание экзаменов? Рассмотреть следующие случаи:
а) в один день можно сдавать только один экзамен, и студенту всё равно, какой именно экзамен будет сдаваться в тот или иной день;
б) в один день можно сдавать только один экзамен, и студенту важно, какой именно экзамен будет сдаваться в тот или иной день;
в) в один день можно сдавать один или два экзамена, причем студенту всё равно, какие именно экзамены попадают на экзаменационные дни;
г) в один день можно сдавать один или два экзамена, причем студенту важно, какие именно экзамены попадают на экзаменационные дни.

а) $C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$

б) $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$

в) $C_{10}^4 + 3 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^2 = 210 + 360 + 45 = 615$

г) $A_{10}^4 + 36 \cdot C_{10}^3 + 6 \cdot C_{10}^2 = 5040 + 4320 + 270 = 9630$

Ответ: а) 210 б) 5040 в) 615 г) 9630

5. В группе 12 девушек разного роста и 10 юношей разного роста. Сколькими способами можно выстроить их в очередь, если в ней как все девушки, взятые отдельно, так и все юноши, взятые отдельно, должны стоять по росту от самого высокого человека к самому низкому?

$C_{22}^{12} = \frac{22!}{12! \cdot 10!} = 646646$

Ответ: 646646

6. На фондовой бирже продаются акции 7 предприятий. Сколькими способами можно приобрести 21 акцию?

Это число решений ур-ия $x_1 + \dots + x_7 = 21$, $x_i \geq 0$.

$C_{21+7-1}^{7-1} = C_{27}^6$ Ответ: C_{27}^6

7. Для поступления в вуз нужно сдать 3 вступительных экзамена: русский язык, математику и физику. Оценки за экзамены ставятся по классической пятибалльной шкале, причем получение оценки «2» делает поступление невозможным. Сколькими способами абитуриент может поступить, набрав на экзаменах в сумме не менее 12 баллов?

Всего $3^3 = 27$ троек оценок. Исключим суммы ≤ 11

пусть $x_i = a_i - 3 \in \{0, 1, 2\}$, тогда $x_1 + x_2 + x_3 = s$, где s = сумма − 9

$$\left.\begin{array}{l} s=0: \ C_{0+3-1}^{3-1} = 1 \\ s=1: \ C_{1+3-1}^{3-1} = 3 \\ s=2: \ C_{2+3-1}^{3-1} = 6 \end{array}\right\} = 10$$

$27 - 10 = 17$

Ответ: 17.

8. Доказать формулу (Бином Ньютона): $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

При раскрытии скобок $\underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n}$ мы из каждого множителя выбираем либо a, либо b. Если выбрать ровно k букв a, то получится одно слагаемое вида $a^k b^{n-k}$. Число способов выбрать эти k множителей равно C_n^k. Суммируя по всем k получаем формулу. ч.т.д.

9. Придумать комбинаторное доказательство равенства $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$, не использующее формулу из предыдущей задачи.

Каждый к-т C_n^k – число подмножеств из мн-ва, где n элементов, содержащих k эл-ов. Сумма всех C_n^k считает к-во всех подмножеств множества, а их 2^n. ч.т.д.

10. События A и B, связанные с одним экспериментом, будем называть эквивалентными, если как A влечёт за собой B, так и B влечёт за собой A. В этом случае будем писать A=B. Определены операции (вводились на лекции) суммы A+B и произведения AB событий A и B, а также операция $\bar{A}$ взятия противоположного события к событию A. Для конечного числа событий A, B, … , C доказать равенства:

$$\overline{A+B+\dots+C} = \bar{A}\bar{B}\dots\bar{C} \quad \text{и} \quad \overline{AB\dots C} = \bar{A}+\bar{B}+\dots+\bar{C}.$$

Пусть $x \in \overline{A_1 \cup \dots \cup A_m}$, это значит: $x \notin A_1, x \notin A_2, \dots, x \in A_m$,

следовательно $x \in \bar{A}_1$, $x \in \bar{A}_2$, …, $x \in \bar{A}_m \Rightarrow x \in \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_m$.

Аналогично для $\overline{A_1 A_2 \dots A_m} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_m$. ч.т.д.