Задание № 1 по ТВ

1. Сколько чисел, заключенных между 1000 и 9999, содержат в своей записи хотя бы одну цифру 3?

Всего 4 значных чисел $9999 - 1000 + 1 = 9000$.

К-во чисел не содержащих цифру 3: $8 \cdot 9^3 = 5832$.

К-во чисел содержащих хотя бы 1 цифру 3: $9000 - 5832 = 3168$

Ответ: 3168.

2. Сколько существует различимых результатов бросания r неразличимых игральных костей?

Пусть x_i — к-во костей, которые дали результат i. Тогда условие задачи можно записать как к-во решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = r$, данная задача тривиальна и её решение: $C^{6-1}_{r+6-1} = C^5_{r+5}$

Ответ: C^5_{r+5}.

3. Группа из n человек разного роста случайным образом выстраивается в шеренгу. Найти вероятность того, что между самым высоким и самым низким расположатся более k человек? ($k<n-2$)

- Обозначим L и H — самый низкий и самый высокий соответственно.
- Общее число перестановок: $n!$.
- Пусть мы зафиксировали позиции L и H, тогда остается $n-2$ человека и $n-2$ места, значит к-во способов их расставить $(n-2)!$, но т.к. нам подходят случаи H на i, L на j и случаи с L на i, H на j, то умножаем к-во комбинаций на 2 : $2\cdot(n-2)!$
- Благоприятные пары позиций: нам нужны пары $(i,j) \mid i<j$, $j-i \geq k+2$.

Пусть $d = j-i$, тогда $d = k+2, k+3, \dots, n-1$.

Для фиксированного d к-во пар (i,j): $n-d$.

Тогда всего благоприятных пар: $\sum_{d=k+2}^{n-1}(n-d) \underset{t=n-d}{=} \sum_{t=1}^{n-k-2} t = \frac{(n-k-2)(n-k-1)}{2}$

- Число „хороших" перестановок: $\frac{(n-k-2)(n-k-1)}{2} \cdot 2\cdot(n-2)! = (n-k-2)(n-k-1)(n-2)!$

- Вероятность: $P = \frac{(n-k-2)(n-k-1)(n-2)!}{n!} = \frac{(n-k-2)(n-k-1)}{n(n-1)}$

Ответ: $\frac{(n-k-2)(n-k-1)}{n(n-1)}$

4. Каждая из n палок одинаковой длины разламывается на две части — длинную и короткую — так, что все длинные (а значит, и все короткие) обломки одинаковы по длине. Полученные обломки, число которых составляет $2n$, случайным образом объединяют в пары, каждая из которых образует новую палку. Найти вероятность того, что: а) все обломки объединяются в первоначальном порядке, образуя исходные палки; б) все длинные обломки объединяются с короткими.

Способов разбить $2n$ различных объектов на n неупорядоченных пар: $\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}$

а) вероятность: $\frac{1}{\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}} = \frac{n!\cdot 2^n}{(2n)!}$, т.к. исходная комбинация 1 конкретная

б) нет пар (L, L) и (S, S) $\Rightarrow$ сопоставим каждому L один S : $n!$ способов.

вероятность: $\frac{n!}{\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}} = \frac{(n!)^2\cdot 2^n}{(2n)!}$

Ответ: а) $\frac{n!\cdot 2^n}{(2n)!}$; б) $\frac{(n!)^2\cdot 2^n}{(2n)!}$

5. В гардеробе все шляпы N посетителей оказались случайным образом перепутанными. Шляпы не имеют внешних отличительных признаков. Какова вероятность того, что хотя бы один посетитель получит свою шляпу?

Классическая задача о беспорядках:

$n!$ - способов выдать шляпы

$!n$ - способов выдать шляпы так, что никто не получит свою шляпу.

$P = 1 - \frac{!n}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}\cdot n!\cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$

Ответ: $\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$

6. Два игрока ведут некоторую игру, состоящую из отдельных партий, до полного разорения одного из них. Начальный капитал первого игрока равняется a руб., а капитал второго – b руб. (a и b – целые числа). Вероятность выигрыша каждой партии для первого игрока равна p, а для второго игрока равна q; $p + q = 1$ (ничьи отсутствуют). В каждой партии выигрыш одного игрока (а значит, проигрыш другого) равен 1 руб. Под разорением игрока понимается момент, когда капитал игрока становится равным нулю. Найти вероятность разорения каждого из игроков, если результаты отдельных партий независимы.

$n = a + b$; $p + q = 1$. P_k - вероятность, что первый разорится если у него k монет.

Составим рекуррентное соотношение: $P_k = P_{k+1}\cdot p + P_{k-1}\cdot q$. Теперь решим его:

$px^2 - x + q = 0$; $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{q}{p}$

Общее решение P_k имеет вид: $a\cdot 1^k + b\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^k$.

Известно по условию $P_0 = 1$; $P_n = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a+b\left(\frac{q}{p}\right)^n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 1-b+b\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^n=0 \end{cases} \Rightarrow b\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^n\right)=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n} \Rightarrow a = 1-\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n-1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n}{\left(\frac{q}{p}\right)^n-1}$$

$$P_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n}{\left(\frac{q}{p}\right)^n-1} + \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^n-1}$$

$$P_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-1} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a\cdot\left(\left(\frac{q}{p}\right)^b-1\right)}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-1}$$

Случай $p=q=\frac{1}{2}$:

$P_k = \frac{1}{2}P_{k+1}+\frac{1}{2}P_{k-1} \Rightarrow P_{k+1}-P_k = P_k - P_{k-1}$

Пусть $d = P_1 - P_0$, тогда: $P_k = P_0 + kd$

$P_0 = 1$, $P_n = 0 \Rightarrow 1+nd=0 \Rightarrow d = -\frac{1}{n} \Rightarrow P_k = 1-\frac{k}{n}$

$$P_a = 1-\frac{a}{a+b} = \frac{a+b-a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$

Ответ: $p \neq q$: $P(\text{проиграл } 1) = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-1}$; $P(\text{проиграл } 2) = 1 - P(\text{проиграл } 1)$.

$p=q=\frac{1}{2}$: $P(\text{проиграл } 1) = \frac{b}{a+b}$; $P(\text{проиграл } 2) = \frac{a}{a+b}$.

11. Пусть плотность *f(x)* распределения случайной величины *X* задана следующим образом: $f(x)=Cx^{-3/2}$ при $x\geq 1$ и $f(x)=0$ при $x<1$, где *C* – постоянная. Пусть $Y=1/X$. Найти плотность *g(y)* распределения случайной величины *Y* и вероятность попадания случайной величины *Y* в интервал (0,1;0,2).

$$f(x) = \begin{cases} Cx^{-\frac{3}{2}}, & x\geq 1 \\ 0, & x<1 \end{cases}$$

$$\int_1^{\infty} Cx^{-\frac{3}{2}}dx = C\cdot\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^{\infty} = C\cdot\left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^{\infty} = C\cdot\left(0-(-2\cdot 1)\right) = 2C \; ; \; 2C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},\ x\geq 1$$

$$y=\frac{1}{x}\ ;\ x=\frac{1}{y}\ ;\ \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{y^2},\ 0<y\leq 1$$

$g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}\cdot y^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$, т.е. $g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $0<y\leq 1$.

$P(0{,}1<y<0{,}2) = \int_{0,1}^{0,2}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\left(2y^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{0,1}^{0,2} = \frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}13$ Ответ: $\sqrt{0{,}2}-\sqrt{0{,}1}\approx 0{,}13$.

10. Обозначим через $K(t)$ случайную величину — число сбоев в работе компьютера, произошедших в промежутке времени $(0,t]$. Предположим, что последовательность сбоев образует простейший пуассоновский поток с интенсивностью λ, так что случайная величина $K(t)$ при любом $t > 0$ имеет распределение Пуассона с параметром λt. Предположим, что каждый сбой с вероятностью p приводит к ошибке независимо от других сбоев. Найти функцию распределения случайной величины X — числа ошибок в промежутке времени $(0,t]$.

$K \sim Pois(\lambda t)$, т.е. $P\{K(t)=k\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$X \mid K(t)=k \sim Bin(k,p)$, и для целого x $(0 \le x \le k)$ $P\{X=x \mid K(t)=k\} p^x \cdot (1-p)^{k-x}$

По формуле полной вероятности:

$$P\{X=x\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X=x \mid K(t)=k\} \, P\{K(t)=k\}$$

$$P\{X=x\} = \sum_{k=x}^{\infty} C_k^x p^x (1-p)^{k-x} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = P\{X=x\} = e^{-\lambda t} \frac{p^x}{x!} \cdot \sum_{k=x}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k (1-p)^{k-x}}{(k-x)!}$$

$$C_k^x \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \frac{k!}{x!(k-x)!} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \frac{1}{x!} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{(k-x)!}$$

Введём замену индекса $m = k - x$, тогда при $k = x$ – $m = 0$, при $k \to \infty$ – $m \to \infty$.

$$P\{X=x\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{p^x}{x!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{m+x} (1-p)^m}{m!} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{p^x (\lambda t)^x}{x!} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}}_{= e^{\lambda t(1-p)}} \Rightarrow P\{X=x\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t p)^x}{x!} \cdot e^{\lambda t(1-p)} =$$

$$= \frac{(\lambda t p)^x}{x!} \cdot e^{-\lambda t + \lambda t(1-p)}$$

$$-\lambda t + \lambda t(1-p) = -\lambda t p \Rightarrow P\{X=x\} = e^{-\lambda t p} \cdot \frac{(\lambda t p)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Ответ: $P\{X=x\} = e^{-\lambda t p} \cdot \frac{(\lambda t p)^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$