1. Показать, что если СВ Х имеет непрерывную строго возрастающую функцию распределения $F_X(x)$, то
СВ У= $F_X(X)$ равномерно распределена на отрезке [0;1].

1. Т.к. $F_X(x)$ непрерывна и строго возрастает, у неё существует обратная функция F_X^{-1} на образе $F_X(\mathbb{R}) = (0;1)$. Для любого $y \in (0;1)$ значение $F_X^{-1}(y)$ единственно и удовлетворяет $F_X(F_X^{-1}(y)) = y$, $F_X^{-1}(F_X(x)) = x$.

2. Найдём функцию распределения $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(F_X(x) \le y)$. Для $y < 0$ выполнено $F_X(X) \ge 0$, значит $F_Y(y) = 0$. Для $y > 1$ всегда $F_X(X) \le 1$, значит $F_Y(y) = 1$. Рассмотрим $y \in [0;1]$. Т.к. F_X строго возрастает, неравенство $F_X(X) \le y$ эквивалентно $X \le F_X^{-1}(y)$. Поэтому $F_Y(y) = P(F_X(X) \le y) = P(X \le F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$.

3. Мы получили, что для всех $y \in [0;1]$ выполняется $F_Y(y) = y$. Это и есть функция распределения равномерного распределения на $[0;1]$. Следовательно, $Y = F_X(X) \sim Uniform(0;1)$.

2. Пусть СВ Х имеет плотность распределения f(x).
Найти плотность распределения g(y) случайной величины У=αХ+β, где α b β - заданные постоянные причем $\alpha \neq 0$.

$\alpha > 0$:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\alpha X + \beta \le y). \Rightarrow F_Y(y) = P\left(X \le \frac{y-\beta}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

$$g_Y(y) = \frac{d}{dy} \cdot F_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) = f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

$\alpha < 0$:

$$F_Y(y) = P(\alpha X + \beta \le y) = P\left(X \ge \frac{y-\beta}{\alpha}\right) = 1 - P\left(X < \frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

$$g_Y(y) = \left|\frac{1}{\alpha}\right| \cdot f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

Ответ: $g_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$, $\alpha \neq 0$.