

Группа M3212 К работе допущен _____

Студент Тимофеев В. Работа выполнена _____

Преподаватель Овчинников Отчет принят _____

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе № 1

Исследование распределения случайной величины

1. Цель работы.

Исследование распределения случайной величины на примере многократных измерений определённого интервала времени.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

- Провести многократные измерения определенного интервала времени
- Построить гистограмму распределения результатов измерения
- Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки
- Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией

3. Объект исследования.

Случайная величина (результат измерения заданного промежутка времени)

4. Метод экспериментального исследования.

Множество замеров, сравнение полученных величин и выявление закономерности.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\langle t \rangle)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ - функция Гаусса}$$

$$\langle t \rangle_N = \frac{1}{N} (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i \text{ - среднеарифметическое всех результатов измерений}$$

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} \text{ - выборочное среднеквадратичное отклонение}$$

$$\rho_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{ - максимальное значение функции Гаусса}$$

$$P(t_1 < t < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \approx \frac{N_{12}}{N} \text{ - соотношение для вероятности попадания результата измерения в интервал } [t_1, t_2]$$

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} \text{ - среднеквадратичное отклонение среднего значения}$$

$$\Delta t = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle} \text{ - доверительный интервал}$$

$$a = P(t \in [\langle t \rangle - \Delta t, \langle t \rangle + \Delta t]) \text{ - доверительная вероятность}$$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Аналоговый секундомер	Часы	60 секунд	0.5с
2	Цифровой секундомер	Хронограф	60 секунд	0.05с

8. Результаты прямых измерений и их обработка (таблицы, примеры расчетов).

Результаты измерений

№	t_i, c	$t_i - \langle t \rangle_N, c$	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2, c^2$
1	4,950	-0,150	0,010
2	4,780	-0,220	0,048
3	4,750	-0,250	0,068
4	5,050	0,050	0,002
5	5,280	0,280	0,078
6	5,280	0,280	0,078
7	5,170	0,170	0,029
8	4,920	-0,080	0,006
9	5,120	0,120	0,014
10	5,150	0,150	0,023
11	5,020	0,020	0,000
12	4,960	-0,040	0,002
13	5,000	0,000	0,000
14	4,930	-0,070	0,005
15	4,830	-0,170	0,029
16	4,960	-0,040	0,002
17	4,830	-0,170	0,029
18	5,080	0,080	0,006
19	5,110	0,110	0,012
20	4,990	-0,010	0,000
21	4,990	-0,010	0,000
22	5,100	0,100	0,010
23	5,020	0,020	0,000

24	4,940	-0,060	0,004
25	5,180	0,180	0,032
26	5,020	0,020	0,000
27	5,120	0,120	0,014
28	5,060	0,060	0,004
29	4,940	-0,060	0,004
30	4,900	-0,100	0,010
31	5,100	0,100	0,010
32	4,550	-0,450	0,203
33	5,120	0,120	0,014
34	4,960	-0,040	0,002
35	5,020	0,020	0,000
36	4,990	-0,010	0,000
37	5,050	0,050	0,002
38	5,050	0,050	0,002
39	4,930	-0,070	0,005
40	5,020	0,020	0,000
41	4,810	-0,190	0,036
42	5,050	0,050	0,002
43	4,830	-0,170	0,029
44	5,180	0,180	0,032
45	5,020	0,020	0,000
46	4,990	-0,010	0,000
47	4,930	-0,070	0,005
48	4,800	-0,200	0,040
49	5,120	0,120	0,014
50	5,020	0,020	0,000
	$\langle t \rangle_N = 5,02980 \text{ c}$	$\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)$ $= -0,75396 \text{ c}$	$\sigma_N = 0,12948645 \text{ c}$ $\rho_{max} = 3,080957738 \text{ c}^{-1}$

9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).

- $\langle t \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$, где $N = 50$ (количество измерений), а t_i – i-е измерение, тогда выборочное значение среднего $\langle t \rangle_{50} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} t_i = \frac{249,91}{50} \approx 5\text{с}$
- $\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N) = -0,09\text{с}$, контроль измерения показывает что выборочное значение среднего найдено с погрешностью
- $\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{50-1} \sum_{i=1}^N (t_i - 5)^2} = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{0,92} \approx 0,137\text{с}$ - выборочное среднеквадратичное отклонение
- $\rho_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{0,137\cdot\sqrt{2\pi}} \approx 2,912\text{с}^{-1}$ – максимальное значение функции Гаусса
- Дисперсия - $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2}{N-1} = \frac{0,92}{50-1} = \frac{0,92}{49} \approx 0,019$
- $m = \sqrt{N} = \sqrt{50} \approx 7$ – количество равных отрезков $t_{\min} = 4,55\text{с}; t_{\max} = 5,28\text{с}$ – наименьший t_{\min} и наибольший t_{\max} из результатов измерений
- $\Delta t = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{m} = \frac{5,28 - 4,55}{7} \approx 0,104\text{с}$ – размер интервалов
- $t_1 = \frac{4,55 + 4,654}{2} = 4,602\text{с}$ – середина первого интервала
- $p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\langle t \rangle)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{0,137\cdot\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(4,602-5)^2}{2\cdot 0,137^2}\right) \approx 0,043$

Данные для построения гистограммы

Границы интервалов, с	ΔN	$\frac{\Delta N}{N * \Delta t}, \text{с}^{-1}$	t, с	$\rho, \text{с}^{-1}$
4,550				
4,691	1	0,141844	4,621	0,042595
4,691				
4,832	7	0,992908	4,762	0,569773
4,832				
4,973	11	1,560284	4,903	2,328521
4,973				
5,114	21	2,978723	5,044	2,907357
5,114				
5,255	8	1,134752	5,185	1,109063
5,255				
5,396	2	0,283688	5,326	0,129257
5,396				
5,610	0	0	5,503	0,0016

- P – значения соответствующие нормальному распределению вероятности

$$t \in [\langle t \rangle - \sigma, \langle t \rangle + \sigma], P_\sigma \cong 0,683$$

$$t \in [\langle t \rangle - 2\sigma, \langle t \rangle + 2\sigma], P_\sigma \cong 0,954$$

$$t \in [\langle t \rangle - 3\sigma, \langle t \rangle + 3\sigma], P_\sigma \cong 0,997$$

Таблица 3: Стандартные доверительные интервалы

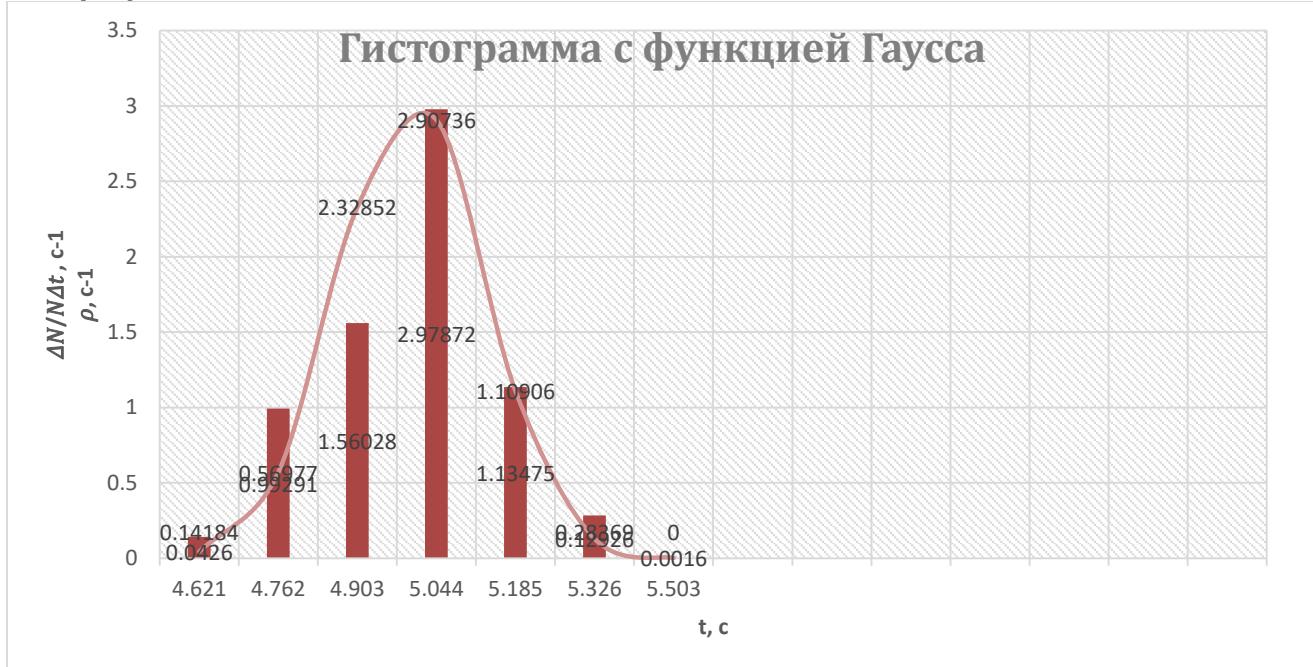
	Интервал, с		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
	От	До			
$\langle t \rangle_N \pm \sigma_N$	4,869	5,128	36	0.72	0,683

$\langle t \rangle_N \pm 2\sigma_N$	4,740	5,258	47	0.94	0,954
$\langle t \rangle_N \pm 3\sigma_N$	4,610	5,387	49	0.98	0,997

10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

- $\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{50(50-1)} \sum_{i=1}^{50} (t_i - 5)^2} = 0,019 \text{ с} - \text{среднеквадратичное отклонение среднего значения}$
- Коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ и количестве измерений $N = 50$ равен $t_{\alpha, N} = 2.01$, тогда случайная погрешность $\Delta t = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle} = 2.01 * 0.019 \text{ с}$

11. Графики



12. Окончательные результаты.

- $\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{50(50-1)} \sum_{i=1}^{50} (t_i - 5)^2} = 0,018 \text{ с} - \text{среднеквадратичное отклонение среднего значения}$
- Дисперсия - $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2}{N-1} = \frac{0,92}{50-1} = \frac{0,92}{49} \approx 0,021 \text{ с}^2$
- $\langle t \rangle_N \approx 5 \text{ с}$ - выборочное значение среднего
- $\Delta t = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle} = 2.01 * 0.021 \text{ с}$ - случайная погрешность
- $\sigma_N = 0,12948645 \text{ с}$ - выборочное среднеквадратичное отклонение
- $\rho_{max} = 3,080957738 \text{ с}^{-1}$ - максимальное значение плотности распределения

13. Выводы и анализ результатов работы.

В ходе прямых многократных измерений, использованных как метод экспериментального исследования, была построена гистограмма распределения полученных данных. Были рассчитаны среднее значение и дисперсия выборки. Кроме того, гистограмма была сопоставлена с графиком гауссовой функции. В результате мы освоили методику исследования распределения случайной величины.