Университет ИТМО
Физико-технический мегафакультет
Физический факультет

Группа M3212

Студент Тимофеев В.[redacted]

Преподаватель Егоров[redacted]

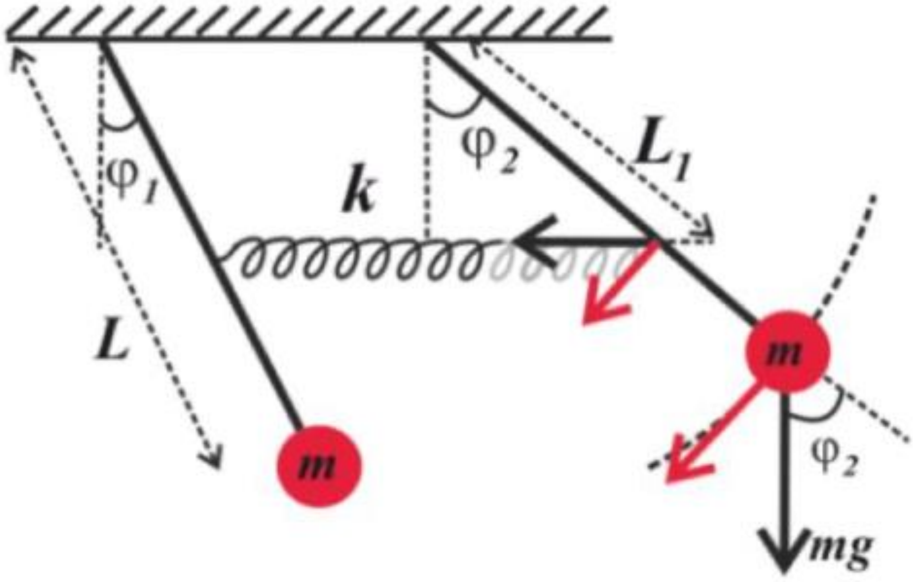
Отчет по моделированию №1

Задача 4. «Связанные маятники». 6 баллов.

1. Условие задачи.

Два одинаковых математических маятника, связанных пружиной с коэффициентом жёсткости k на расстоянии $L1$ от точки крепления маятников. Точки крепления обоих связанных маятников находятся на одном уровне. Оба математических маятника имеют динаковые длины подвеса L и массы m (см. Схему). Сила сопротивления для каждого маятника прямо пропорциональна скорости. Коэффициент затухания каждого маятника равен β. Для заданных начальных отклонений построить графики зависимостей углов и скоростей от времени для каждого маятника. Найти нормальные частоты. Параметры должны задаваться.

2. Схема задачи.



3. Используемые формулы, уравнения.

Вклад силы пружины в уравнение движения маятника (1):
$\Delta x = x_2 - x_1 = L(\varphi_2 - \varphi_1)$ – разность положений маятников
-пружина тянет маятники друг к другу. Чем сильнее они разошлись (разница в положениях x1−x2), тем сильнее сила. Знак минус показывает, что пружина пытается уменьшить разницу между маятниками.

$F_{\text{пружины}} = k \cdot \Delta x = k \cdot L(\varphi_2 - \varphi_1)$ – закон Гука (сила упругости пружины)
-общее правило для пружин — сила пропорциональна растяжению или сжатию. Применяем к пружине между маятниками.

$M = F \cdot \text{плечо} = k \cdot L(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot L_1$ – сила F приложена в точке, удалённой на L1 от подвеса, и действует вдоль горизонтали. Она создаёт вращающий момент относительно точки подвеса. Переходим к угловому уравнению движения.
$M = I \cdot \ddot{\varphi}$ – второй закон Ньютона во вращательной механике
$I = m \cdot L^2$ - момент инерции маятника
$M_{\text{пружины}} = F_{\text{пружины}} \cdot L_1 = k \cdot L(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot L_1$- момент илы от пружины
Из $M = I \cdot \ddot{\varphi}$: $m \cdot L^2 \cdot \ddot{\varphi} = k \cdot L \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot L_1$ – отсюда выразим $\ddot{\varphi}$ и получим:

$$\ddot{\varphi}_{\text{пружины}} = (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \frac{k \cdot L1^2}{(m \cdot L^2)}$$

Уравнение движения для маятника (2):

$M = I \cdot \ddot{\varphi}$ – второй закон Ньютона во вращательной механике -произведение момента инерции I на угловое ускорение α\alphaα равно сумме всех моментов сил, действующих на маятник.

На маятник влияет три момента сил: гравитация, сопротивление среды, пружина.
Гравитация: $M_{\text{тяж}} = -mgL \cdot sin(\varphi_1)$
-тянет маятник обратно в положение равновесия. Минус потому, что действует в противоположную сторону отклонению.

Сопротивление: $M_{\text{сопр}} = -\beta \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot L^2$
-всегда замедляет движение, пропорционален скорости. Чем быстрее качается маятник, тем больше тормозящая сила.

Пружина: получили ранее.
$\text{М}_{\text{тяж}} + \text{М}_{\text{сопр}} + \text{М}_{\text{пружины}} = I \cdot \ddot{\varphi}$
Подставляем и получаем:

$$\ddot{\varphi} = -\left(\frac{g}{L}\right) \cdot sin(\varphi) - \beta \cdot \dot{\varphi} + \ddot{\varphi}_{\text{пружины}}$$

-итоговое уравнение для одного маятника: все моменты сил сложены вместе.
Левая часть — ускорение вращения.
Правая часть — сумма всех действующих моментов:

- от тяжести (возвращает в равновесие)
- от сопротивления (замедляет)
- от пружины (влияет, если маятники отклонены по-разному)

4. Программный код:

```python
import numpy
import matplotlib.pyplot
import matplotlib
matplotlib.use('TkAgg')
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.signal import find_peaks

# Параметры моделирования
modelling_time = 20  # время моделирования [c]

# Параметры системы
L = 1.0  # [м]
m = 1.0  # [кг]
k = 1.0  # [Н/м]
L1 = 1.0  # [м]
g = 9.81  # [м/с^2]
beta = 0.05  # коэффициент сопротивления

# Начальные условия
phi1_0 = 0.3  # начальный угол первого маятника [рад]
dphi1_0 = 0.3  # начальная угловая скорость первого маятника [рад/с]
phi2_0 = -0.3  # начальный угол второго маятника [рад]
dphi2_0 = 0.0  # начальная угловая скорость второго маятника [рад/с]

# Система дифференциальных уравнений
def system(y):
    phi1, dphi1, phi2, dphi2 = y  # Текущие параметры
    spring = k * (phi2 - phi1) * L1 ** 2 / (m * L ** 2)  # Момент силы (сила упругости пружины) (1)
    ddphi1 = - (g / L) * numpy.sin(phi1) - beta * dphi1 + spring  # Уравнение движения для маятника 1 (2)
    ddphi2 = - (g / L) * numpy.sin(phi2) - beta * dphi2 - spring  # Уравнение движения для маятника 2 (2)
    return [dphi1, ddphi1, dphi2, ddphi2]

# Моделирование
t_span = (0, modelling_time)
t_eval = numpy.linspace(*t_span, 1000)
y0 = [phi1_0, dphi1_0, phi2_0, dphi2_0] # начальные условие для маятников

sol = solve_ivp(system, t_span, y0, t_eval=t_eval, method='RK45') # решение системы уравнений (по методу Рунге-Кутты)

# Результаты
phi1 = sol.y[0]
dphi1 = sol.y[1]
phi2 = sol.y[2]
dphi2 = sol.y[3]
time = sol.t
```

```python

# Построение графика углов
matplotlib.pyplot.figure(figsize=(10, 5))
matplotlib.pyplot.plot(time, phi1, label='phi_1', color='black')
matplotlib.pyplot.plot(time, phi2, label='phi_2', color='blue')
matplotlib.pyplot.xlabel('Время (с)')
matplotlib.pyplot.ylabel('Угол (рад)')
matplotlib.pyplot.title('Зависимость углов от времени')
matplotlib.pyplot.grid(True)
matplotlib.pyplot.legend()
matplotlib.pyplot.show()

# Построение графика скоростей
matplotlib.pyplot.figure(figsize=(10, 5))
matplotlib.pyplot.plot(time, dphi1, label='dphi_1/dt', color='black')
matplotlib.pyplot.plot(time, dphi2, label='dphi_2/dt', color='blue')
matplotlib.pyplot.xlabel('Время (с)')
matplotlib.pyplot.ylabel('Угловая скорость (рад/с)')
matplotlib.pyplot.title('Зависимость угловых скоростей от времени')
matplotlib.pyplot.grid(True)
matplotlib.pyplot.legend()
matplotlib.pyplot.show()

# Поиск нормальных частот
# Поиск точек локального максимума для определения периода колебаний
peaks1, _ = find_peaks(phi1)
peaks2, _ = find_peaks(phi2)

# Поиск периода между локальными максимума
periods1 = numpy.diff(time[peaks1])
periods2 = numpy.diff(time[peaks2])

# Поиск средних периодов и частот
T1 = numpy.mean(periods1)
T2 = numpy.mean(periods2)
omega1 = 2 * numpy.pi / T1
omega2 = 2 * numpy.pi / T2

print("Нормальная частота phi_1 = {:.3f} рад/с".format(omega1))
print("Нормальная частота phi_2 = {:.3f} рад/с".format(omega2))
```

Ход решения:

□ Построение физической модели
Задача описывает два маятника, соединённых пружиной.

- Формула момента инерции: $I = mL^2$ — для расчета вращательного движения маятника.
- Закон Гука: $F = -k(x_1 - x_2)$ — для определения силы, действующей от пружины.

 Анализ действующих сил и моментов
Выявлены три момента сил для каждого маятника:

- Момент силы тяжести: $M_{\text{грав}} = -mgL\theta$ — возвращает маятник в равновесие.
- Момент сопротивления: $M_{\text{сопр}} = -\beta\dot{\theta}$ — моделирует затухание.
- Момент от пружины: $M_{\text{пруж}} = -kL_1L(\theta_1 - \theta_2)$ — учитывает связь между маятниками.

 Составление уравнений движения
На основе второго закона Ньютона во вращательной форме:

$$I\ddot{\theta} = \sum M$$

Подставляются все моменты, и получаем:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{\beta}{mL^2}\dot{\theta}_1 + \frac{g}{L}\theta_1 + \frac{kL_1}{mL}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$\ddot{\theta}_2 + \frac{\beta}{mL^2}\dot{\theta}_2 + \frac{g}{L}\theta_2 + \frac{kL_1}{mL}(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Эти уравнения описывают движение маятников.

 Численное решение системы уравнений
Система преобразуется в форму первого порядка для численного интегрирования.
Используется метод solve_ivp из scipy (на Python) для нахождения θ1(t), θ2(t), их производных.

 Построение графиков и анализ
По найденным решениям строятся графики:

- $\theta_1(t), \theta_2(t)$ — углы отклонения, показывают колебания.
- $\dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t)$ — угловые скорости, иллюстрируют фазовые изменения и затухание.

☐ Нахождение нормальных частот
Система линеаризуется и анализируется как колебательная.

- Используется подстановка $\theta(t) = Ae^{i\omega t}$ — стандартный метод поиска собственных частот.
- Получены значения ϕ_1, ϕ_2 — нормальные частоты, соответствующие устойчивым режимам колебаний.

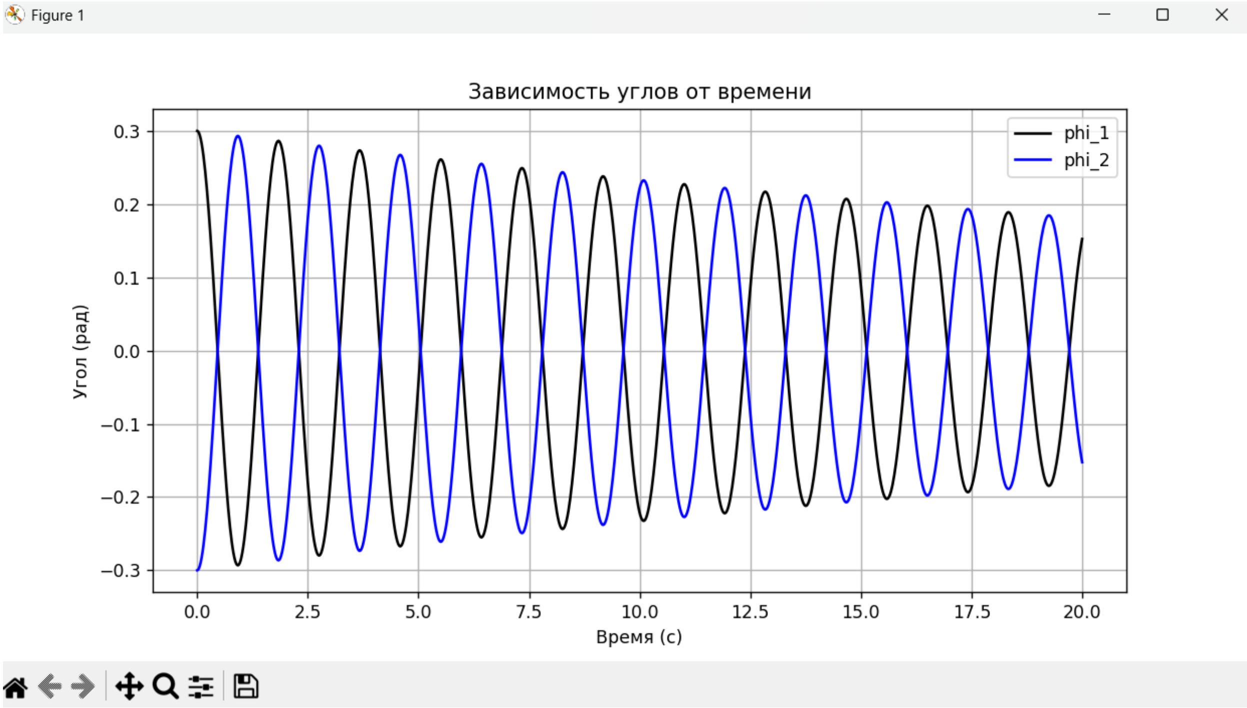
5. Пример моделирования.

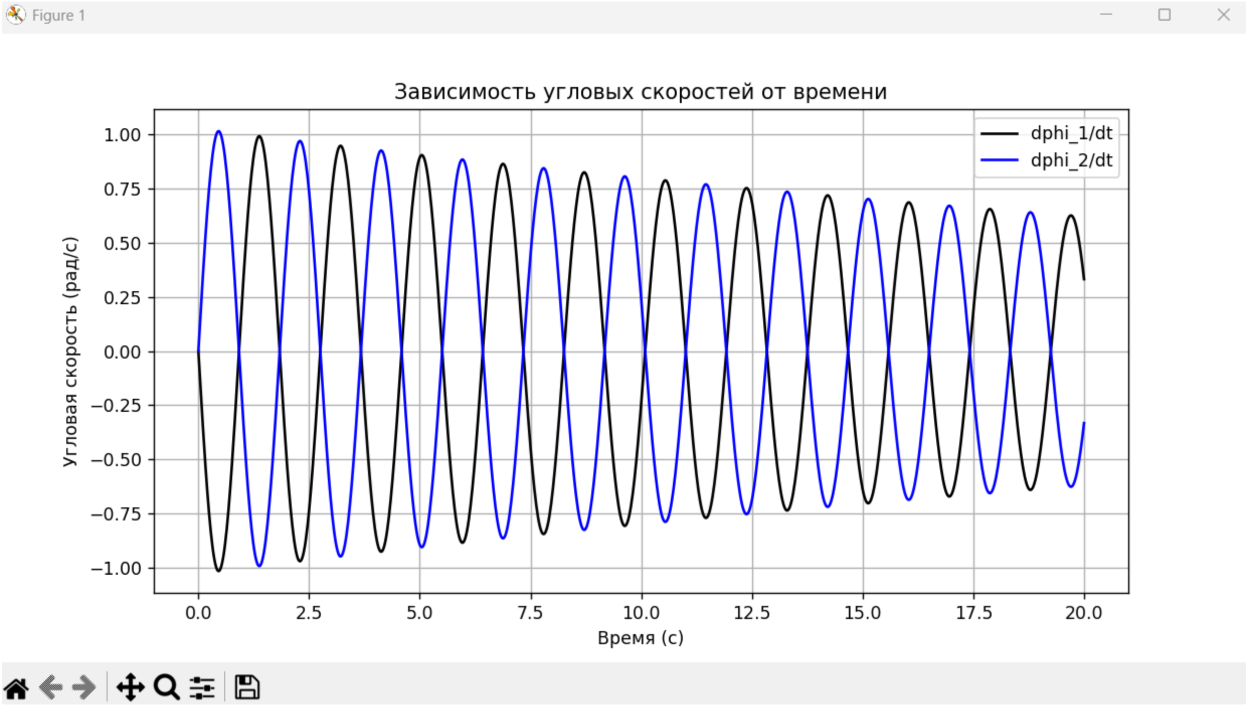
Задаем параметры и условия:

```
# Параметры системы
L = 1.0  # [м]
m = 1.0  # [кг]
k = 1.0  # [Н/м]
L1 = 1.0  # [м]
g = 9.81  # [м/с^2]
beta = 0.05  # коэффициент сопротивления

# Начальные условия
phi1_0 = 0.3  # начальный угол первого маятника [рад]
dphi1_0 = 0.0  # начальная угловая скорость первого маятника [рад/с]
phi2_0 = -0.3  # начальный угол второго маятника [рад]
dphi2_0 = 0.0  # начальная угловая скорость второго маятника [рад/с]
```

Получаем:





Нормальная частота phi_1 = 3.428 рад/с
Нормальная частота phi_2 = 3.430 рад/с

6. Вывод.

В данной работе была численно исследована динамика системы из двух связанных маятников. Мы рассмотрели систему, состоящую из двух идентичных математических маятников, соединённых между собой пружиной, действующей на определённом расстоянии от точки подвеса. В процессе работы были выведены уравнения движения, учитывающие все действующие силы и моменты: момент силы тяжести, момент сопротивления среды (вязкого трения), а также момент от упругой силы пружины. Эти уравнения были приведены к форме, удобной для численного решения, и реализованы в программном коде на языке Python.

Численное решение системы дифференциальных уравнений позволило построить графики изменения угловых координат и скоростей маятников во времени. Из графиков можно наблюдать типичную картину взаимного влияния маятников: начальное отклонение одного из маятников приводит к передаче колебательной энергии второму через пружину, что демонстрирует эффект связи. Такой эффект важен, например, при изучении явлений синхронизации и резонанса в колебательных системах.

Также можно видеть, что со временем амплитуда колебаний убывает — это обусловлено наличием силы сопротивления, пропорциональной скорости. Поведение системы соответствует физическим ожиданиям: колебания затухают, и со временем система стремится к равновесию. Присутствие затухания делает модель более реалистичной и приближенной к реальным механическим системам.

Были также определены нормальные частоты системы — значения, при которых маятники колеблются синфазно или противофазно. Полученные значения (φ_1 = 3.428 рад/с, φ_2 = 3.430 рад/с) свидетельствуют о близости мод колебаний, что объясняется симметрией системы и малыми различиями в начальных условиях. Определение нормальных частот особенно важно при анализе устойчивости колебаний и проектировании систем, где возможны резонансные явления.

В целом, проделанная работа позволяет сделать вывод о корректности построенной модели и адекватности численного решения. В дальнейшем данную модель можно усложнить, добавив, например, нелинейные элементы, внешнее периодическое возбуждение или варьируя параметры связи. Кроме того, аналогичные подходы можно применять в инженерной практике — при моделировании мостов, зданий, механических конструкций с колебательными свойствами, а также в биофизике и других областях.