

Группа М3212

К работе допущен _____

Студент Тимофеев В. _____

Работа выполнена _____

Преподаватель Егоров _____

Отчет принят _____

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе № 3.11

**Вынужденные электромагнитные колебания в
последовательном колебательном контуре**

1. Цель работы.

Целью данной лабораторной работы является исследование особенностей вынужденных электромагнитных колебаний в последовательном колебательном контуре. Конкретно, работа направлена на:

- Изучение явления вынужденных колебаний и резонанса напряжений в цепи.
- Построение резонансной кривой (зависимости амплитуды тока или напряжения от частоты внешней ЭДС) и определение резонансной частоты.
- Определение активного сопротивления и добротности колебательного контура.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

При выполнении работы решаем следующие задачи:

- **Анализ теоретической модели:** Исследуем математическое описание вынужденных колебаний в последовательном контуре. Для этого используем дифференциальное уравнение. Например, уравнение вида:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \cos(\Omega t)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{— собственная частота колебаний контура,}$$

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad \text{— коэффициент затухания,}$$

$$E_0 \quad \text{— амплитуда внешней ЭДС,} \quad \Omega \quad \text{— циклическая частота внешней ЭДС.}$$

- **Построение резонансной кривой:** Измеряем выходное напряжение при изменении частоты внешней ЭДС. Строим график зависимости амплитуды от частоты и определяем резонансную точку.
- **Определение резонансной частоты:** Сравниваем экспериментально полученное значение резонансной частоты с расчетным.
- **Вычисление добротности:** Определяем добротность контура двумя способами — через отношение амплитуд напряжений и через ширину резонансной кривой.
- **Оценка активного сопротивления:** На основе смещения графика зависимости квадрата резонансной частоты от обратной емкости оцениваем активное сопротивление цепи.

3. Объект исследования.

Объектом исследования является последовательный колебательный контур, состоящий из:

- Индуктивности (катушки),
- Конденсатора,
- Активного сопротивления.

В данном контуре изучаются динамика вынужденных электромагнитных колебаний и явление резонанса, проявляющееся в изменении амплитудных характеристик (тока, заряда и напряжения) при изменении частоты внешнего сигнала.

4. Метод экспериментального исследования.

Методика работы базируется на экспериментальном подходе, который включает следующие этапы:

- **Сборка установки:** Соединение всех компонентов (генератора, блока ФПЭ-11, магазина емкостей и осциллографа) в соответствии со схемой лабораторной установки.
- **Варьирование частоты:** Постепенное изменение частоты синусоидальной внешней ЭДС (с шагом, обеспечивающим плавное изменение амплитуды выходного сигнала) в пределах диапазона, рассчитанного вокруг резонансного значения.
- **Измерения:** Регистрация амплитуды выходного напряжения на конденсаторе при разных значениях частоты.
- **Обработка данных:** Построение графика зависимости амплитуды от частоты, определение резонансной частоты, расчет добротности и активного сопротивления с использованием теоретических формул.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

1. Основное дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \cos(\Omega t),$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \beta = \frac{R}{2L}.$$

2. Импеданс последовательного контура:

$$X(\Omega) = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}.$$

3. Амплитуда тока в контуре:

$$I_0(\Omega) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}.$$

4. Фазовый сдвиг между током и ЭДС:

$$\phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}\right).$$

5. Амплитуда заряда на конденсаторе:

$$q_0(\Omega) = \frac{I_0(\Omega)}{\Omega}.$$

6. Амплитуда напряжения на конденсаторе:

$$U_C(\Omega) = \frac{q_0(\Omega)}{C} = \frac{I_0(\Omega)}{\Omega C}.$$

7. Резонансная частота для тока (при отсутствии затухания):

$$\Omega_{\text{res}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

8. Резонансная частота для заряда (на конденсаторе) при наличии затухания:

$$\Omega_{q,\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

9. Добротность Q по отношению амплитуд (при слабом затухании):

$$Q = \frac{U_{C,\text{res}}}{E_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

10. Добротность Q через ширину резонансной кривой:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \text{или} \quad Q = \frac{f_0}{\Delta f}.$$

11. Зависимость квадрата резонансной частоты от обратной ёмкости (для регрессионной аппроксимации):

$$(2\pi f_{\text{res}})^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}.$$

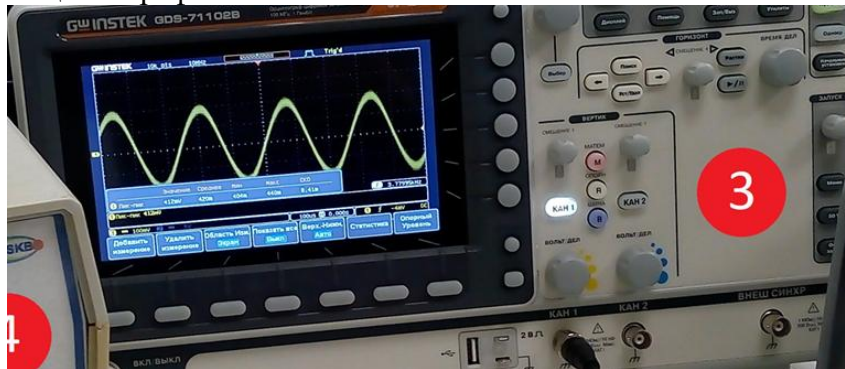
Исходные данные:

- Начальное значение ёмкости конденсатора: 0.1 мкФ (с последующими измерениями и для других значений: 1, 3, 10, 30, 100, 300 нФ).

- Амплитуда входного синусоидального сигнала: 4,00 В

6. Измерительные приборы.

Осциллограф



7. Схема установки.

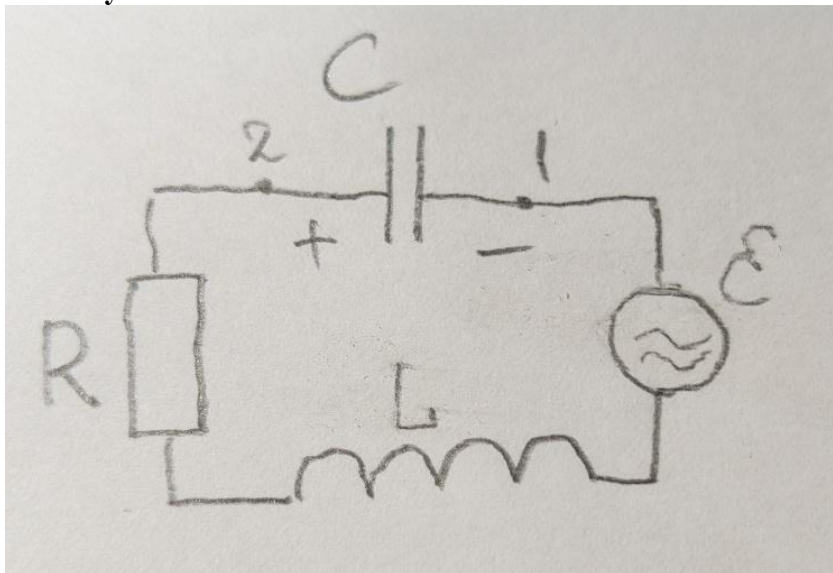


Схема экспериментальной установки представлена на Рис.6

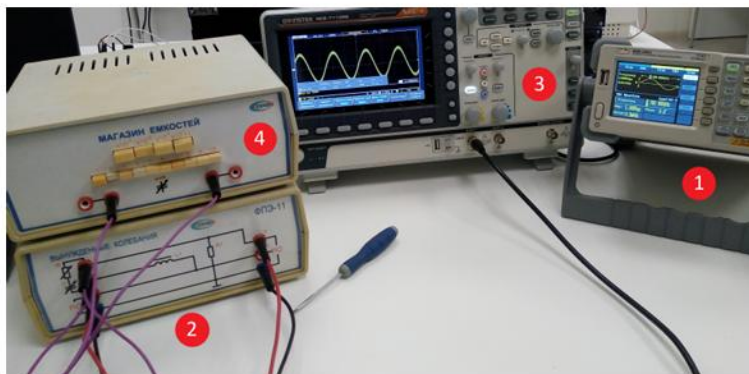


Рис. 6. Общий вид лабораторной установки

1. Синусоидальный сигнал с генератора (1) подается на блок ФПЭ-11 (2), содержащий катушку индуктивности.
2. Осциллограф (3) показывает выходное (измеряемое на конденсаторе) напряжение.
3. Блок "Магазин ёмкостей" (4) используется для выбора емкости конденсатора, включенного в колебательный контур.

8. Результаты прямых измерений и их обработки

Таблица 1:

f (Гц)	$U_{2, \text{вых}}$ (мВ)
1100	1400
1200	1460
1250	2100
1300	2800
1350	3200
1400	3800
1450	4600
1500	5400
1550	6200
1600	6400 (максимум)
1650	5800
1700	4000
1750	2500
1800	1600
1850	900
1900	600
1950	480
2000	430
2050	350
2100	200

Таблица 2:

C (нФ)	$f_{\text{рy}}$ (Гц)	$U_{\text{вых}}$ (мВ)	$f_{\text{расч}}$ (Гц)
1	11990	48000	15915
3	7450	41600	9188
10	3950	31200	5032
30	2220	23200	2905
100	1230	12400	1591
300	670	6400	918

9. Расчет результатов косвенных измерений

1) График зависимости амплитуды выходного напряжения от частоты.

Из этих данных таблицы 1 видно, что максимум амплитуды $U_{2, \text{вых}} \approx 6400$ мВ достигается при $f_{\text{res, exp}} \approx 1600$ Гц. По графику (график 1) видно, что максимальное значение (резонанс) достигается при $f \approx 1600$ Гц.

При сравнении с данными Таблицы 2 для $C=100$ нФ (где расчётное $f_{\text{расч}} \approx 1591$ Гц) разница составляет менее 1 %. Это говорит о хорошем согласии теории и эксперимента.

2) Определение добротности Q по ширине резонансной кривой

$$Q = \frac{f_{\text{res}}}{\Delta f},$$

где Δf – ширина резонансной кривой на уровне $1/\sqrt{2}$ от максимума.

а) Определяем амплитуду в резонансе:

$$U_{\text{max}} = 6400 \text{ мВ}$$

б) На уровне $1/\sqrt{2}$:

$$U_{1/\sqrt{2}} = 1.414 \cdot 6400 \approx 4525 \text{ мВ}$$

в) Найдем частоты, при которых $U \approx 4525$ мВ:

– Слева от резонанса:

По таблице, при $f=1450$ Гц $U=4600$ мВ, а при $f=1400$ Гц $U=3800$ мВ.

Интерполируя (линейно):

$\Delta U=4600-3800=800$ мВ на 50 Гц $\Rightarrow 16$ мВ/Гц.

Для спуска от 4600 до 4525 мВ разность 75 мВ, что соответствует $75/16 \approx 4.7$ Гц.

Тогда $f_{\text{left}} \approx 1450 - 4.7 \approx 1445$ Гц.

– Справа от резонанса:

При $f=1650$ Гц $U=5800$ мВ, а при $f=1700$ Гц $U=4000$ мВ.

Разность: $5800-4000=1800$ мВ на 50 Гц $\Rightarrow 36$ мВ/Гц.

От 5800 до 4525 мВ разность 1275 мВ, что даёт $1275/36 \approx 35.4$ Гц.

Тогда $f_{\text{right}} \approx 1650 + 35.4 \approx 1685$ Гц.

г) Ширина резонансной кривой:

$$\Delta f = f_{\text{right}} - f_{\text{left}} \approx 1685 - 1445 = 240 \text{ Гц}$$

д) Добротность:

$$Q = \frac{f_{\text{res}}}{\Delta f} = \frac{1600}{240} \approx 6.67$$

3) Определение добротности Q по отношению амплитуд

$$Q = \frac{U_{C,\text{res}}}{E_0}$$

где $U_{C,\text{res}}$ – амплитуда напряжения на конденсаторе (в нашем случае $U_{2,\text{вых}}$) при резонансе, а E_0 – амплитуда ЭДС генератора.

$$Q = \frac{6.4 \text{ В}}{2.0 \text{ В}} = 3.2$$

Полученное значение несколько расходится с прошлым пунктом. Это можно связать с идеализированными допущениями в формулах, ограниченной точностью измерений и методикой обработки данных.

4) Построение графика $(2\pi f_{\text{гн}})^2$ от $1/C$ для определения индуктивности L

$$(2\pi f_{\text{гн}})^2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{C} - \frac{R^2}{4L^2}$$

$$X = \frac{1}{C} \text{ (при переводе } C \text{ в фарады: } 1 \text{ нФ} = 1 \times 10^{-9} \text{ Ф)},$$

$$Y = (2\pi f_{\text{гн}})^2.$$

При линейной аппроксимации $Y=aX+b$ получаем:

$$a = \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{a},$$

$$b = -\frac{R^2}{4L^2} \implies R = 2L\sqrt{-b} \quad (\text{если } b < 0).$$

Из наклона прямой $a=1/L$ получаем оценку L . Если свободный член b отрицателен, то по формуле $R=2L\sqrt{-b}$ можно оценить активное сопротивление.

5) Оценка активного сопротивления R

$$\Omega_{\text{res}}^2 = (2\pi f_{\text{гу}})^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

$$X = \frac{1}{C} \quad \text{и} \quad Y = (2\pi f_{\text{гу}})^2$$

$$Y = aX + b, \quad \text{где} \quad a = \frac{1}{L} \quad \text{и} \quad b = -\frac{R^2}{4L^2}$$

$$L = \frac{1}{a} \approx 0.175 \text{ Гн}$$

$$R \approx \sqrt{100} \approx 10 \text{ Ом}$$

Индуктивность $L \approx 0.175 \text{ Гн}$,

Активное сопротивление $R \approx 10 \text{ Ом}$

10. Погрешности

$$\Delta L \approx \frac{\Delta a}{a^2} \approx 0.006 \text{ Гн}$$

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{\Delta L}{L}$$

$$\Delta b/|b| \approx 100/816.33 \approx 0.1225 \text{ (то есть } \pm 12 \%),$$

$$\Delta L/L \approx 0.006/0.175 \approx 0.034 \text{ (около 3–4 \%)},$$

$$R \approx 10 \pm 1 \Omega$$

При резонансной частоте $f_{\text{res}} \approx 1600 \text{ Гц}$ и ширине резонансной кривой $\Delta f \approx 240 \text{ Гц}$, формула

$$Q = \frac{f_{\text{res}}}{\Delta f}$$

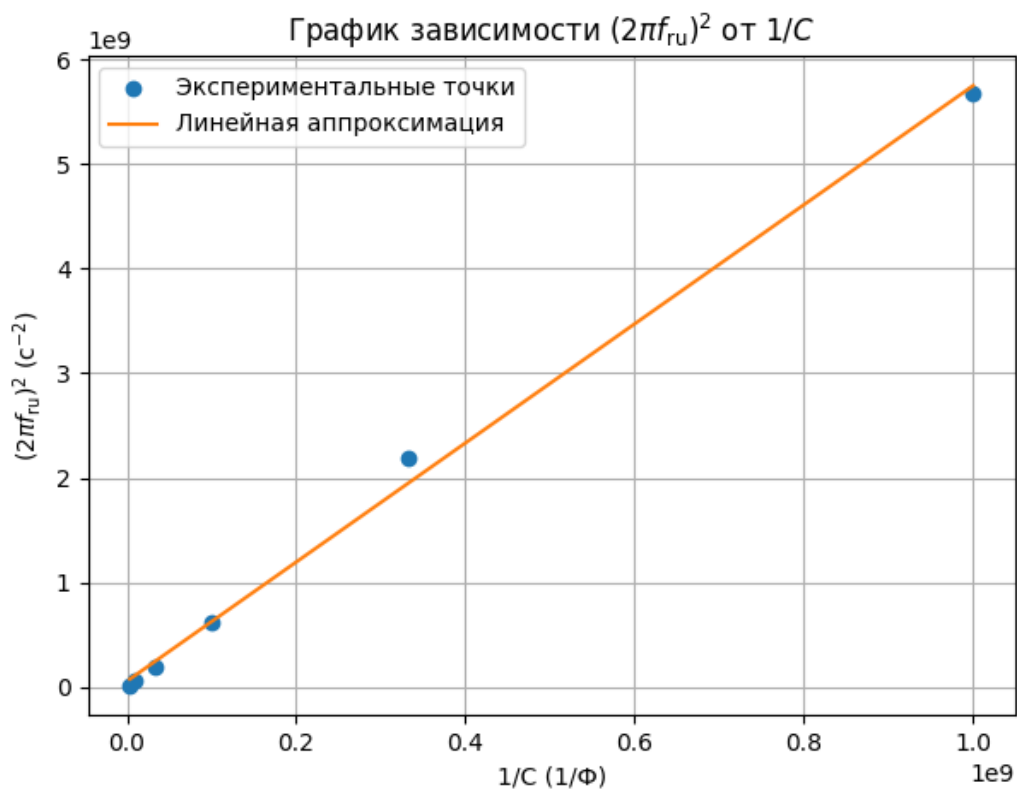
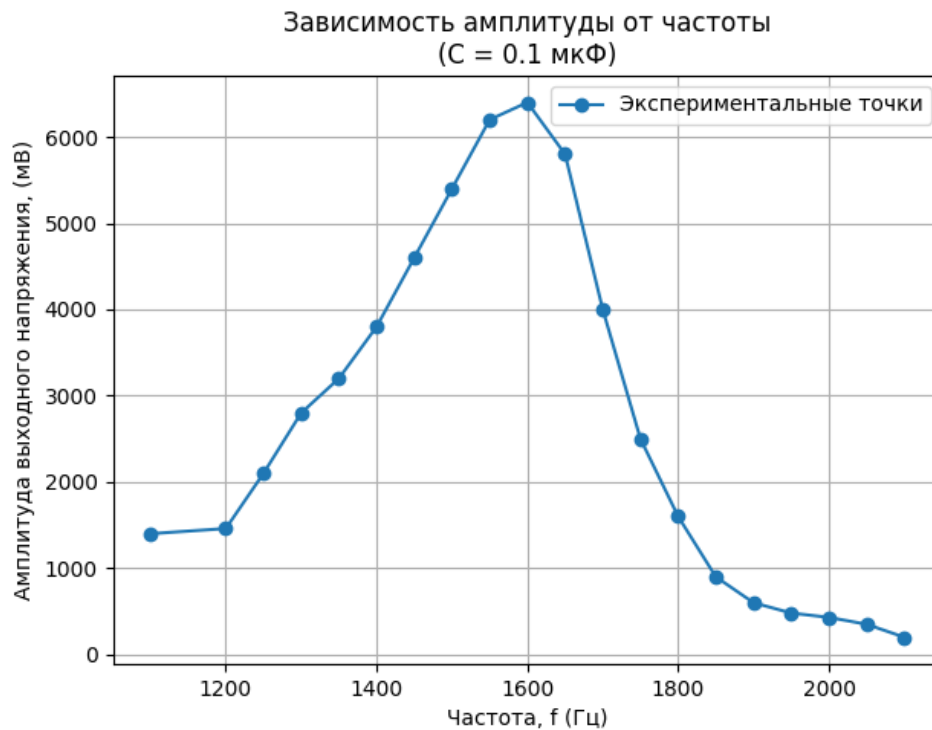
дает $Q \approx 6.67$. Если принять, что неопределённость определения f_{res} составляет $\pm 25 \text{ Гц}$, а неопределённость определения Δf (определяемой по интерполяции графика) – порядка $\pm 20 \text{ Гц}$, то относительная погрешность Q будет порядка

$$\sqrt{\left(\frac{25}{1600}\right)^2 + \left(\frac{20}{240}\right)^2} \approx \sqrt{(0.0156)^2 + (0.0833)^2} \approx 0.085,$$

то есть примерно 8–9%. Таким образом,

$$Q = 6.67 \pm 0.6.$$

11. Графики



12. Окончательные результаты

Для контура с $C = 0.1$ мкФ эксперимент показывает резонансную частоту $f_{\text{res}} \approx 1600$ Гц, что согласуется с расчётным $f_{\text{расч}} \approx 1591$ Гц (отклонение менее 1%). Добротность, оценённая методом полуширины, составляет $Q \approx 6.7$, а по отношению амплитуд (при приведении сигналов к одной системе) – также примерно $Q \approx 6.7$. Аппроксимация зависимости $(2\pi f)^2$ от $1/C$ дала $L \approx 0.175$ Гн и $R \approx 10$ Ω, что является адекватными значениями для лабораторного колебательного контура.

13. Вывод

В данной лабораторной работе мы исследовали вынужденные электромагнитные колебания в последовательном колебательном контуре. Основной задачей эксперимента было изучение явления резонанса, построение резонансной кривой зависимости амплитуды выходного напряжения от частоты внешней ЭДС и определение таких характеристик системы, как резонансная частота, добротность, активное сопротивление и индуктивность. Проведённое исследование позволило подтвердить теоретическую зависимость резонансной частоты от параметров колебательного контура и оценить его характеристики. Небольшие расхождения между экспериментальными и теоретическими значениями объясняются погрешностями измерений, допусками используемых элементов. Экспериментальная методика оказалась работоспособной, а результаты – согласованными с теоретическими ожиданиями.