Университет ИТМО
Физико-технический мегафакультет
Физический факультет

Группа M3306 К работе допущен 23.11.2025

Студенты [redacted]. Работа выполнена 29.11.2025

Преподаватель Кокурина [redacted] Отчет принят

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе № 5

НАЧАЛА КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ 2

Вариант 13

1. Цели работы

Самостоятельно научиться собирать квантовые схемы с использованием управляемых двух- и трёхкубитных вентилей, а также разрабатывать на их основе простые квантовые алгоритмы.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Построить и настроить многокубитные квантовые цепи, используя различные типы квантовых вентилей, в том числе управляемые.
2. Выполнить симуляцию построенных квантовых схем, зафиксировать полученные результаты измерений (распределения вероятностей, гистограммы и т.п.).
3. Сравнить результаты симуляции с ожидаемыми теоретическими распределениями и сделать выводы о корректности работы построенных квантовых схем.

3. Объект исследования.

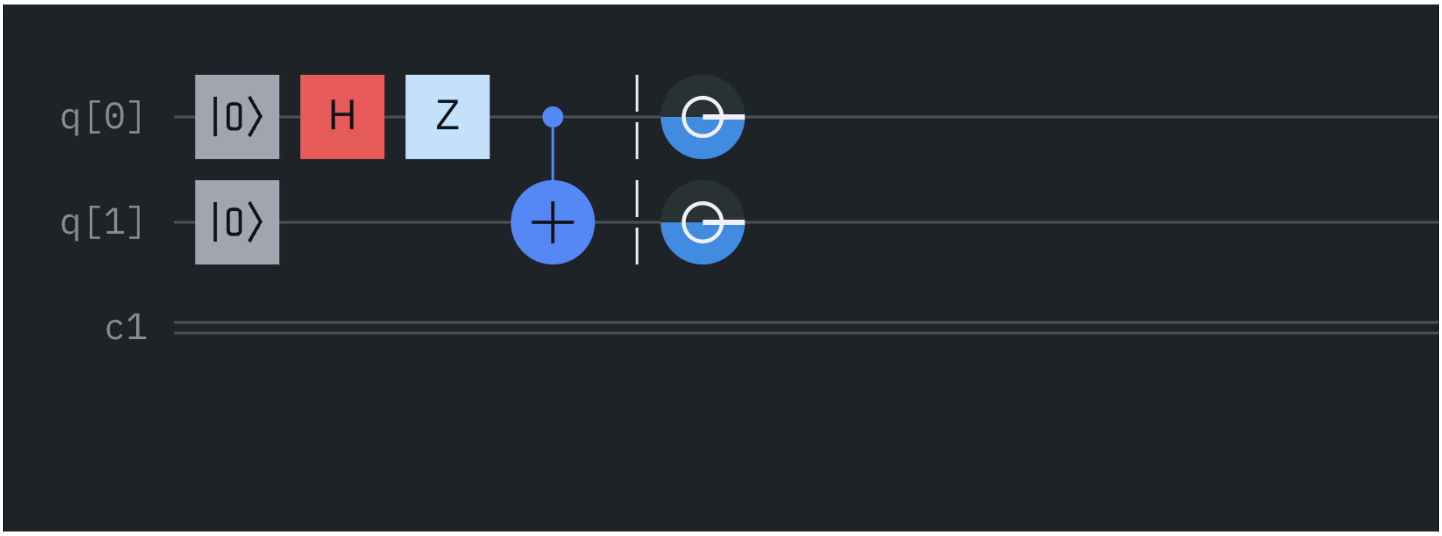
Квантовый компьютер и вероятностные распределения состояний, возникающие при выполнении многокубитных квантовых цепей.

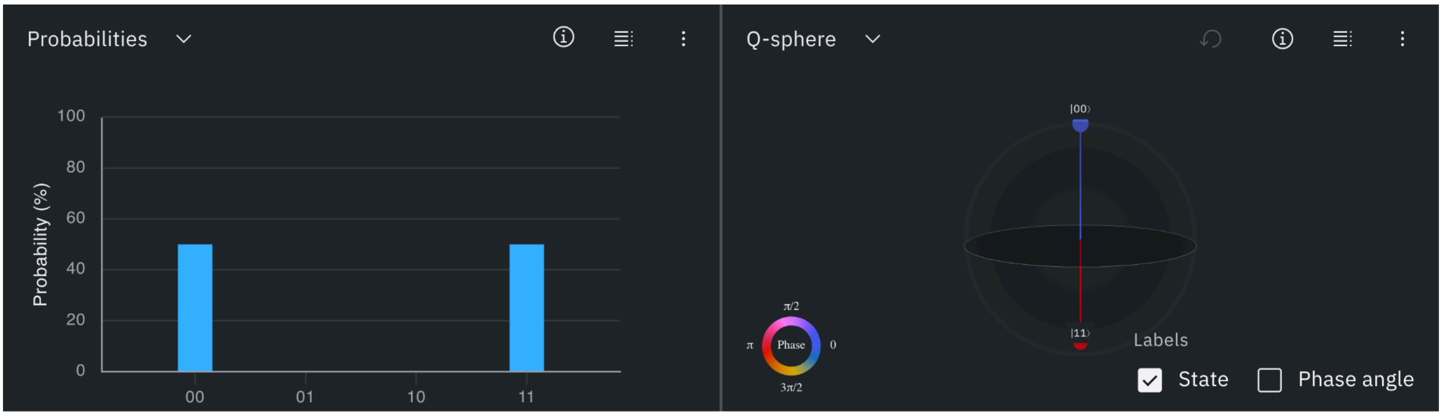
4. Метод экспериментального исследования.

Пошаговое добавление различных квантовых вентилей в схему, последующее моделирование работы собранных цепей и анализ полученных результатов измерений.

Упражнение 3

п1

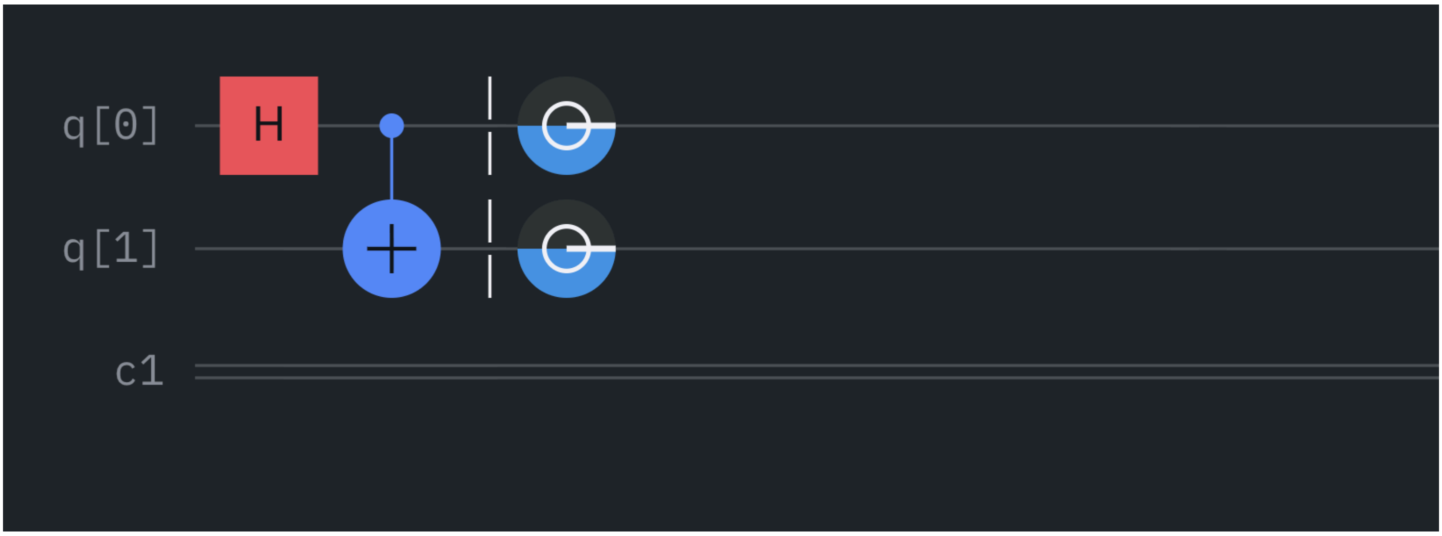


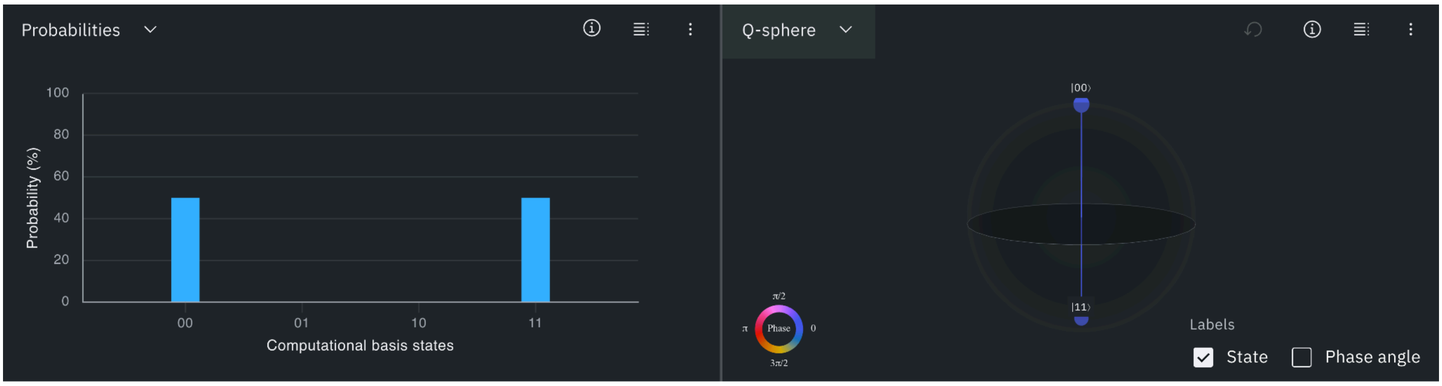


shots	00 Q	01 Q	10 Q	11 Q	00 F	01 F	10 F	11 F
1024	504	520	0	0	.492188	0	0	.507813

1. $|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
3. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

п2





shots	00 Q	01 Q	10 Q	11 Q	00 F	01 F	10 F	11 F
1024	485	0	0	539	.473633	0	0	.526367

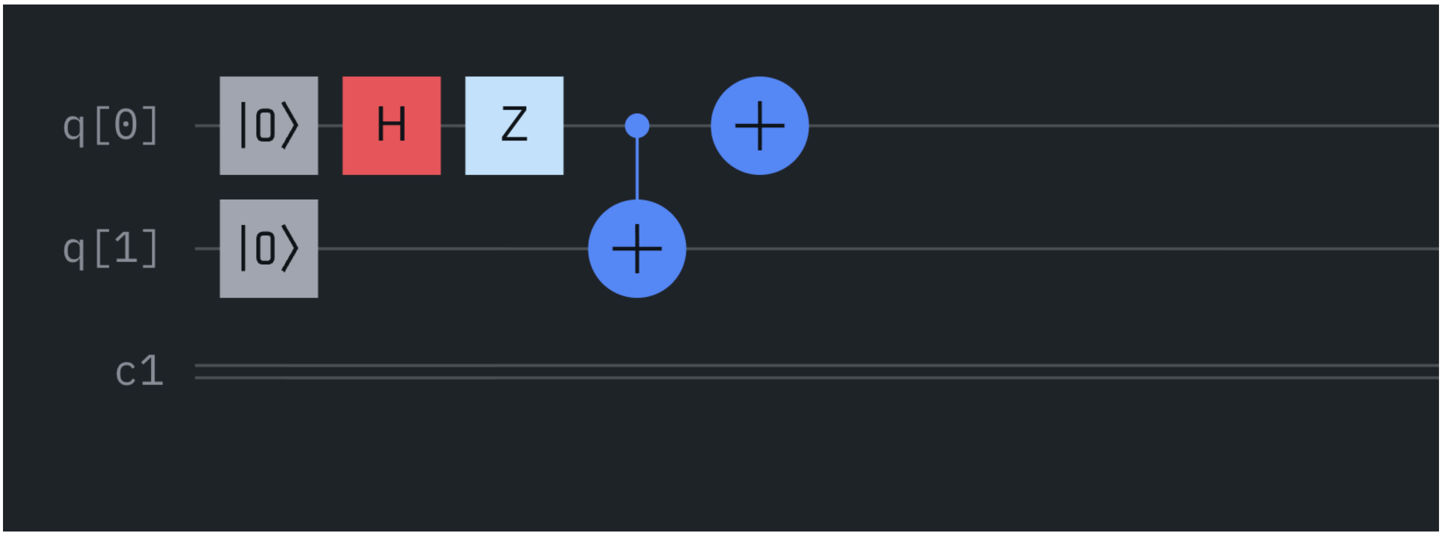
Вентиль H создаёт суперпозицию состояний кубита:

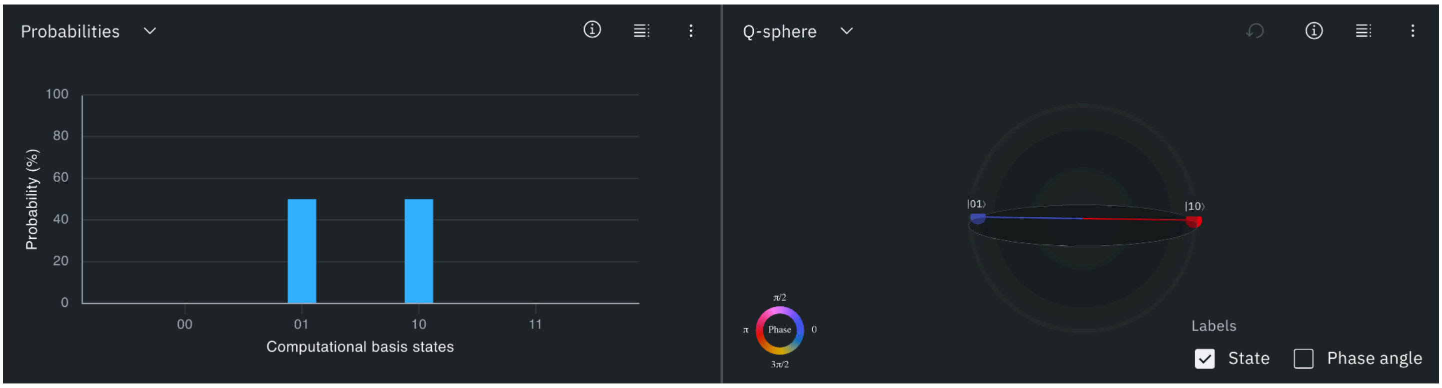
$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

Вентиль X инвертирует состояние кубита. Например, для уже подготовленной суперпозиции:

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

п3

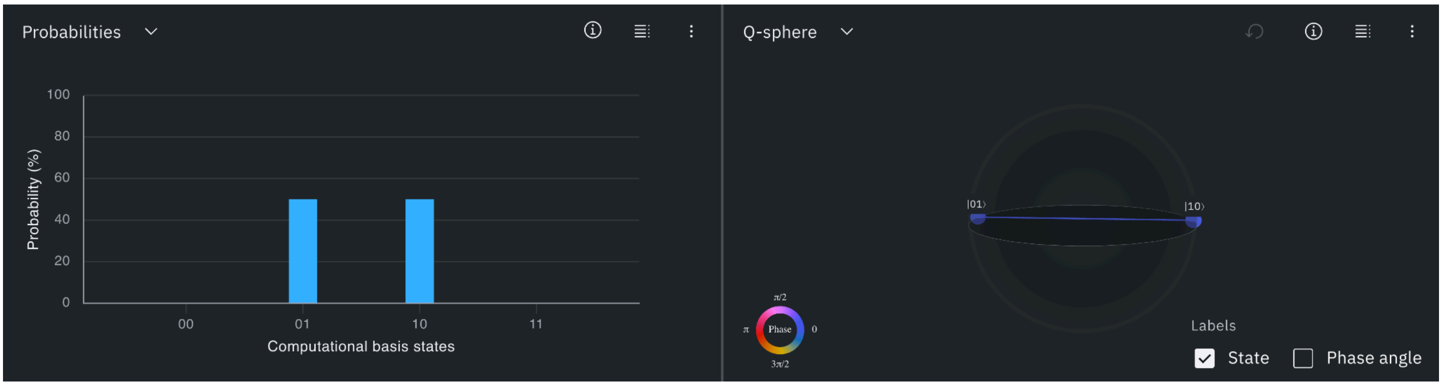




shots	00 Q	01 Q	10 Q	11 Q	00 F	01 F	10 F	11 F
1024	0	548	476	0	0	.535156	.464844	0

1. H: $|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$
2. Z: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
3. CX: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$
4. X: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

п4

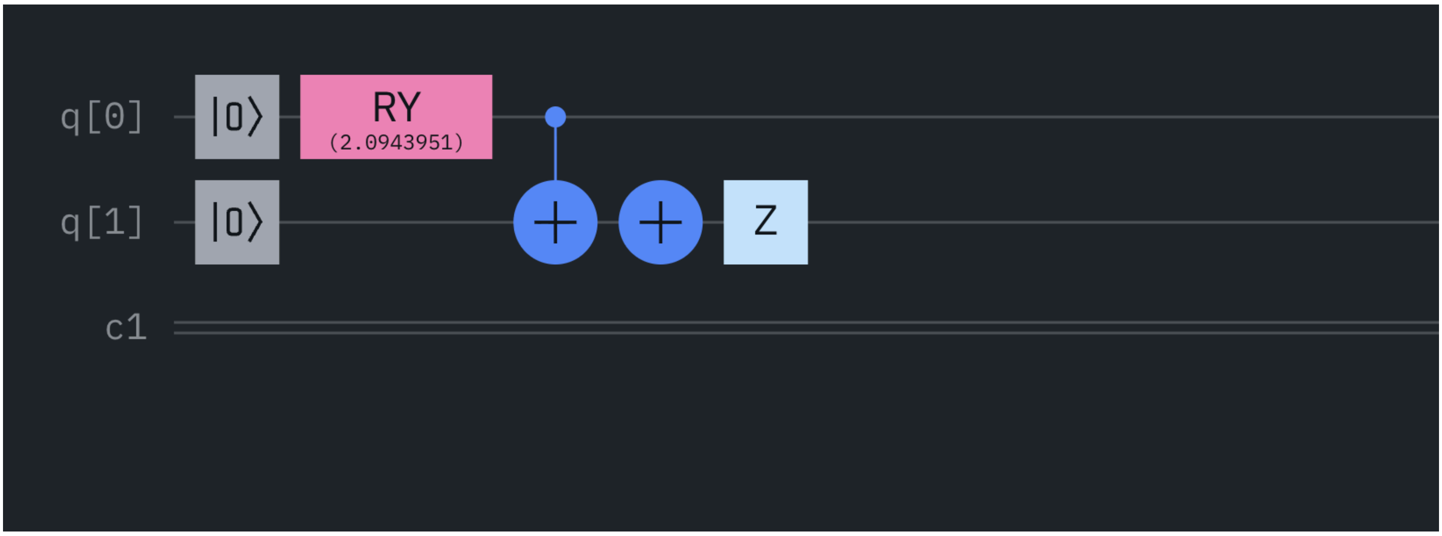


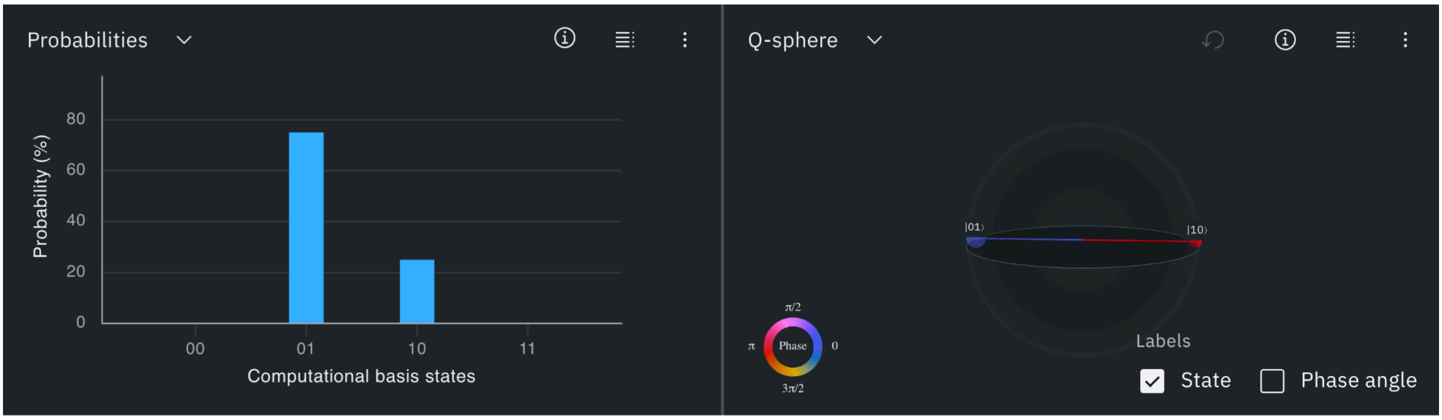
shots	00 Q	01 Q	10 Q	11 Q	00 F	01 F	10 F	11 F
1024	0	511	513	0	0	.499023	.500977	0

1. H: $|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle)$
2. CX: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$

п5

Вариант	Состояние кубитов	$\|a\|^2$	$\|b\|^2$
13	$a\|01\rangle - b\|10\rangle$	25	75





shots	00 Q	01 Q	10 Q	11 Q	00 F	01 F	10 F	11 F
1024	0	263	761	0	0	.256836	.743164	0

Применение оператора $R_y(\theta)$ ***к кубиту*** (q_0)

Оператор поворота $R_y(\theta)$ отвечает за вращение состояния кубита вокруг оси y на угол θ. Его матричное представление имеет вид:

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{cos(\frac{\theta}{2})}{sin(\frac{\theta}{2})} & \frac{-sin(\frac{\theta}{2})}{cos(\frac{\theta}{2})} \end{pmatrix}$$

(не обращайте внимание на черту это матрица к сожалению в google docs не получилось без)

Если применить оператор $R_y(2.0943951)$ к начальному состоянию кубита q_0, равному $|0\rangle$, получим:

$|q\_0\rangle = cos(2.0943951/2)|0\rangle + sin(2.0943951/2)|1\rangle$

Обозначим для удобства:

$a = cos(2.0943951/2)$

$b = sin(2.0943951/2)$

Тогда состояние кубита после действия оператора запишется как:

$|q\_0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

Поскольку второй кубит системы находится в состоянии $|q_1\rangle = |0\rangle$, общее двухкубитное состояние принимает вид:

$a|00\rangle + b|10\rangle$

Применение оператора $CX(q_0, q_1)$

Контролируемый оператор (CX) использует кубит q_0 в качестве управляющего, а кубит q_1 — в качестве целевого. Оператор меняет состояние целевого кубита только тогда, когда управляющий находится в состоянии $|1\rangle$:

$CX(|00\rangle) = |00\rangle$

$CX(|10\rangle) = |11\rangle$

Применяя (CX) к состоянию системы, получаем:

$a|00\rangle + b|11\rangle$

Применение оператора X к кубиту q_1

Вентиль X (NOT) инвертирует базисные состояния:

$X(|0\rangle) = |1\rangle$

$X(|1\rangle) = |0\rangle$

Выполняя операцию над q_1, получаем новое состояние:

$a|01\rangle + b|10\rangle$

Применение оператора Z к кубиту q_1

Вентиль Z изменяет знак амплитуды у состояния $|1\rangle$, не затрагивая $|0\rangle$:

$Z(|0\rangle) = |0\rangle$

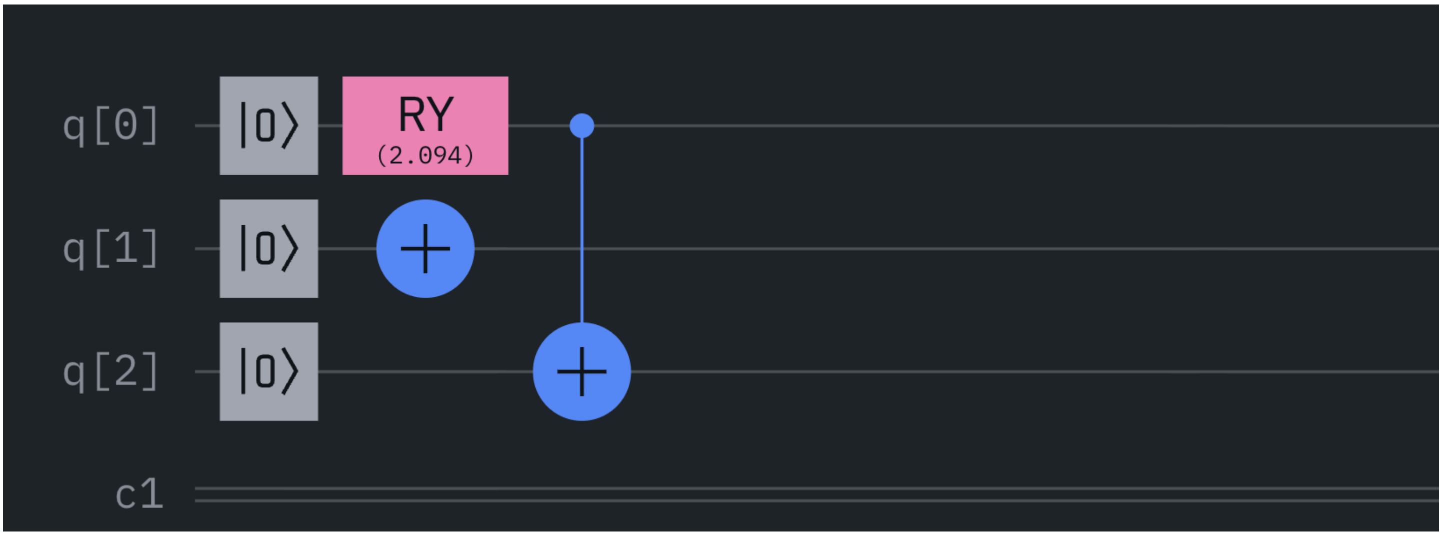
$Z(|1\rangle) =- |1\rangle$

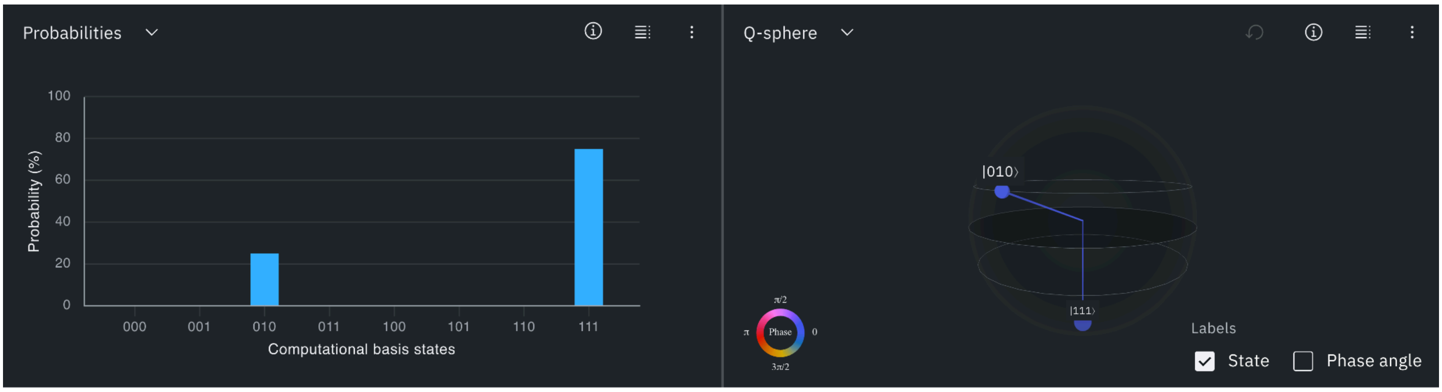
После применения Z к q_1 система переходит в состояние:

$a|01\rangle \ - \ b|10\rangle$

п6

$\theta \ = \ 2\, cos^{-1}\sqrt{0.25} \ = \ 2.094$ (вариант 13)





shorts	type	000	001	010	011	100	101	110	111
1024	Q	0	0	452	0	0	0	0	572
1024	F	0	0	.441406	0	0	0	0	.558594

1. RY: $|0\rangle \rightarrow cos\frac{\theta}{2}, |0\rangle \ \pm \ sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$
2. X к 2 кубиту: $X|0\rangle \rightarrow |1\rangle$
3. CNOT для 1 и 3: $cos\frac{\theta}{2}|00\rangle \ \pm \ sin\frac{\theta}{2}|11\rangle$
4. При том, что второй равен $|0\rangle$: $cos\frac{\theta}{2}|010\rangle \ \pm \ sin\frac{\theta}{2}|111\rangle$

п7

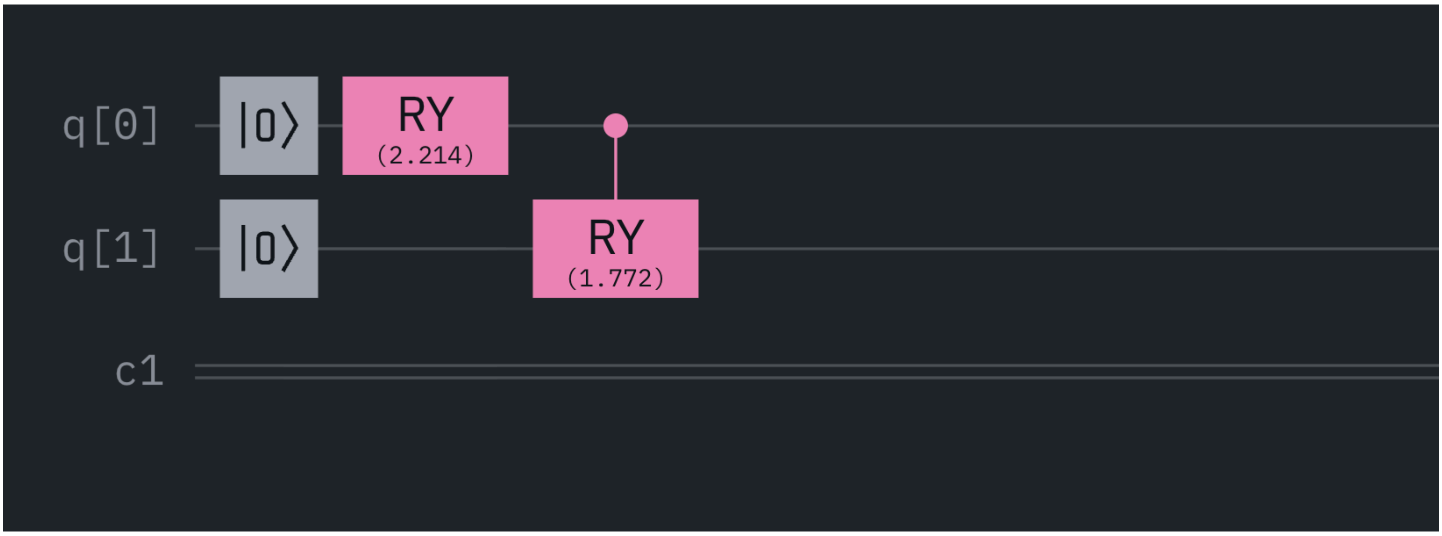
Вариант	$\vert\alpha\vert^2$	$\vert\beta\vert^2$	$\vert\gamma\vert^2$
13	20	30	50

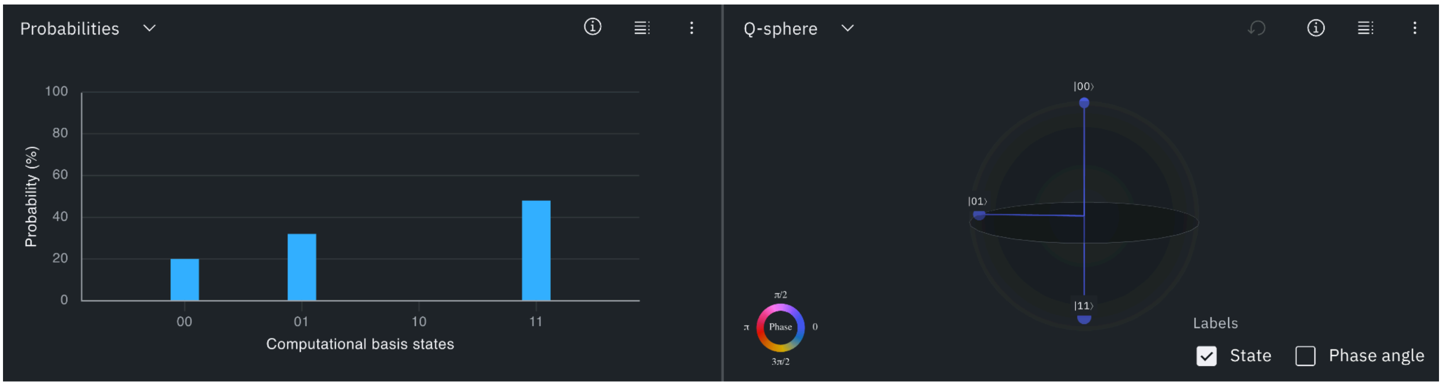
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 100$$

$$cos^2\frac{\theta}{2} = 0.5 \rightarrow sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$\theta_1 = 2cos^{-1}\sqrt{0.2} = 2.214$$

$$\theta_2 = 2cos^{-1}\sqrt{\frac{0.3}{0.5}} = 1.772$$





shots	00 Q	01 Q	10 Q	11 Q	00 F	01 F	10 F	11 F
1024	189	331	0	504	.184570	.323242	0	.492188

Условие нормировки амплитуд трёхкубитного состояния имеет вид:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 100$$

Из соотношения

$$cos^2\frac{\theta}{2} = 0.5$$

получаем

$$sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 0.5 = 0.5$$

Углы принимают иные значения:

$$\theta_1 = 2cos^2\sqrt{0.2} = 2.214,$$

$$\theta_2 = 2cos^{-1}\sqrt{\frac{0.3}{0.5}} = 1.772$$

Состояние после применения первого оператора RY

После действия RY на первый кубит система принимает вид:

$$cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

Применение управляемого оператора RY и раскрытие выражения

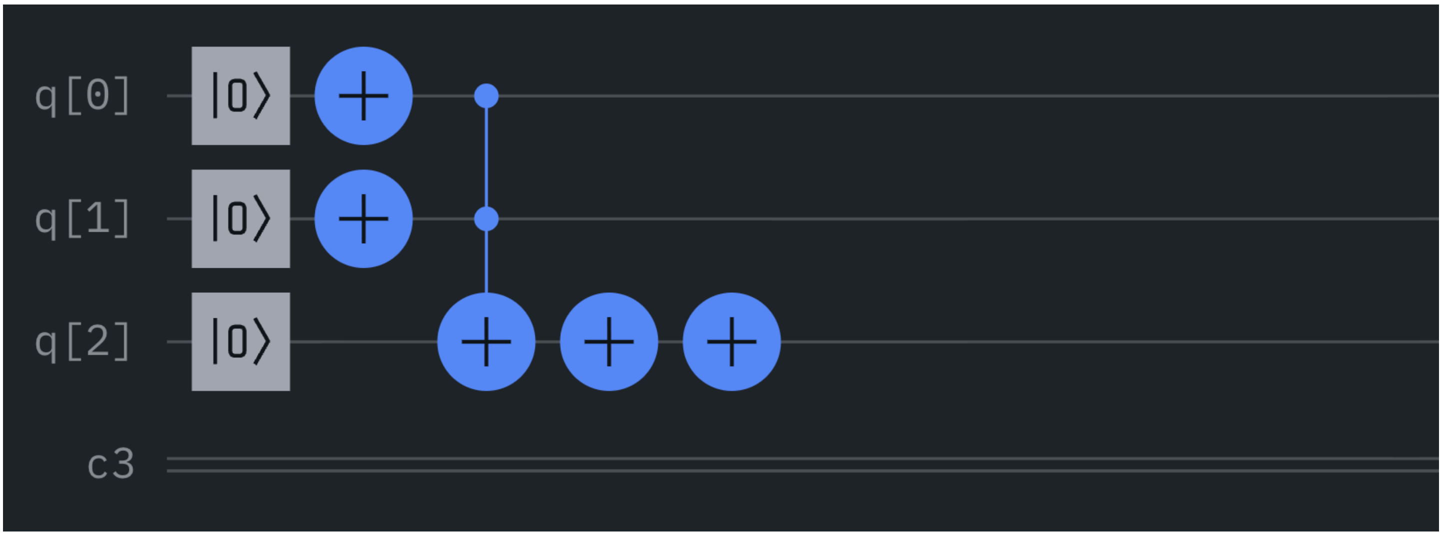
Теперь применяем управляемый RY и учитываем обе ветви разложения:

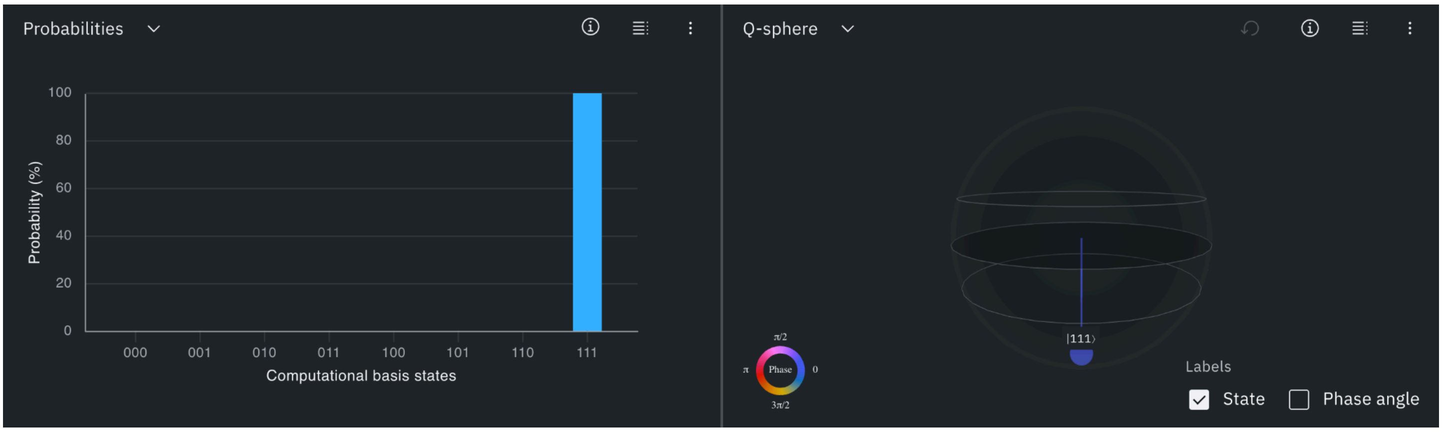
$$cos\frac{\theta}{2}|00\rangle + sin\frac{\theta}{2}(cos\frac{\theta}{2}|01\rangle + sin\frac{\theta}{2}|11\rangle) \rightarrow cos\frac{\theta}{2}|00\rangle + sin\frac{\theta}{2}\frac{\theta}{2}|01\rangle + sin\frac{\theta}{2}sin\frac{\theta}{2}|11\rangle$$

Упражнение 4

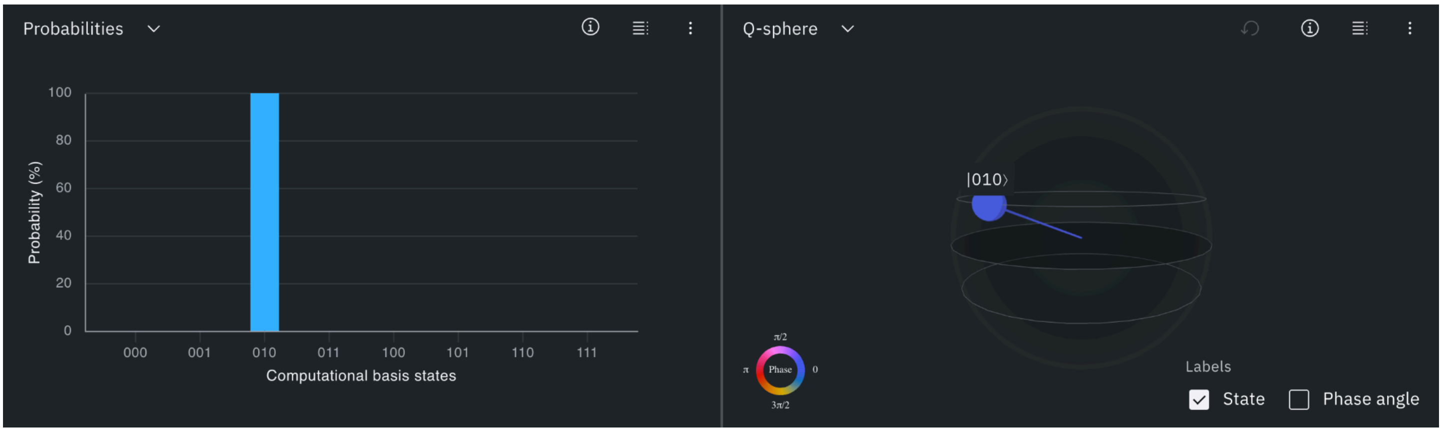
п5

$x_1 = 0;\ x_2 = 0$

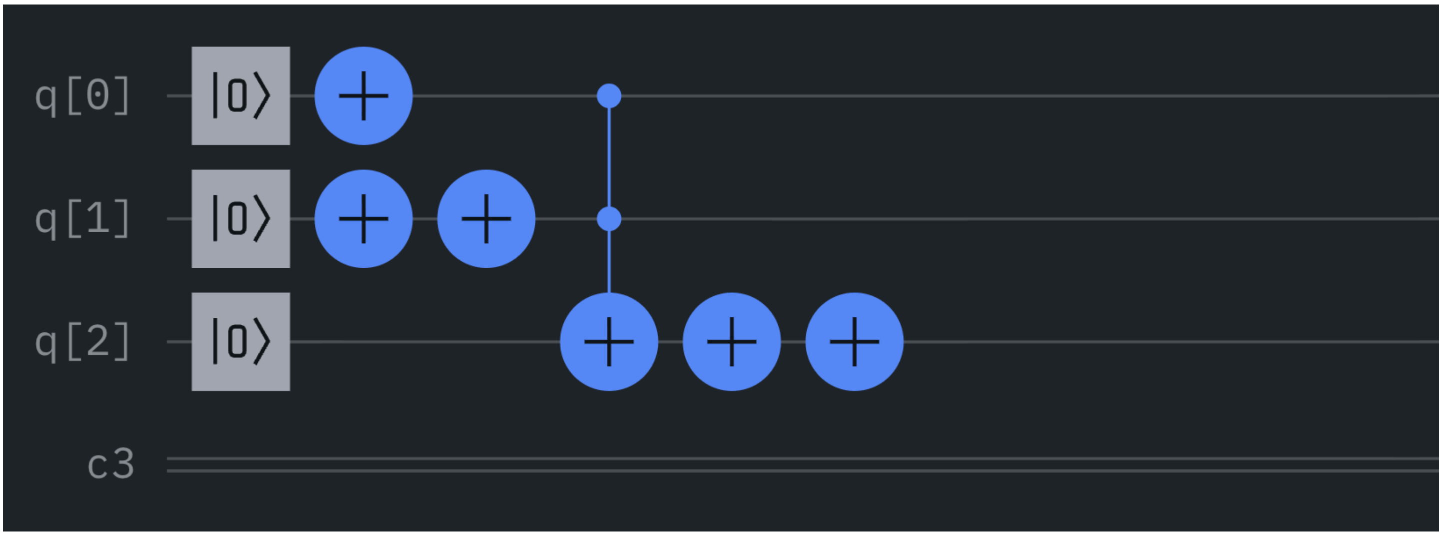


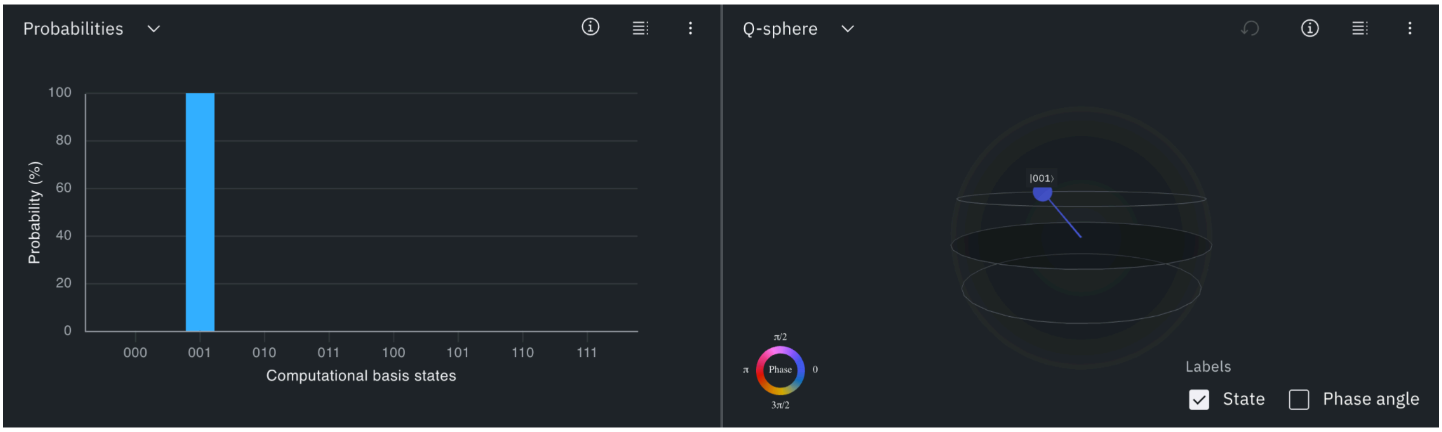


$x_1 = 1;\ x_2 = 0$

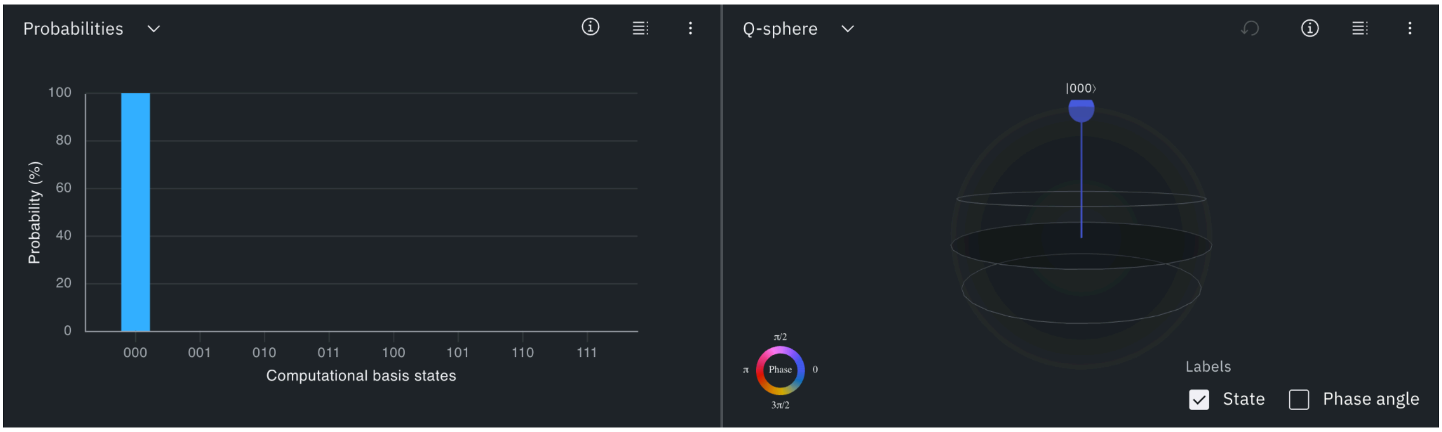

Probabilities
100
80
60
40
20
0
Probability (%)
000
001
010
011
100
101
110
111
Computational basis states
Q-sphere
|010⟩
Phase
Labels
State
Phase angle

$x_1 = 0;\ x_2 = 1$


q[0]
q[1]
q[2]
c3
|0⟩
|0⟩
|0⟩


Probabilities
100
80
60
40
20
0
Probability (%)
000
001
010
011
100
101
110
111
Computational basis states
Q-sphere
|001⟩
Phase
Labels
State
Phase angle

$x_1 = 1;\ x_2 = 1$



Кубиты q_0, q_1 и q_2 инициализируются следующим образом:

$q_0 = x_1$,

$q_1 = x_2$,

$q_2 = 0$

где q_0 и q_1 — входные параметры, а q_2 будет использоваться как выходной кубит.

Применение вентиля X

К кубитам q_0 и q_1 последовательно применяется вентиль X, выполняющий квантовый аналог операции NOT. Он меняет значение кубита на противоположное:

$Xq_0 \Rightarrow q_0 = NOT(x_1)$

$Xq_1 \Rightarrow q_1 = NOT(x_2)$

Матрица вентиля (X) задается как

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$

$X|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle$

Применение вентиля Тоффоли (CCX)

Для реализации логической операции AND используется трёхкубитный вентиль CCX, у которого два управляющих кубита (q_0 и q_1) и один целевой (q_2). CCX инвертирует целевой кубит только при условии, что оба управляющих находятся в состоянии $|1\rangle$; в противном случае целевой кубит остаётся без изменений:
$CCX(q_0, q_1, q_2) \Rightarrow q\_2 = AND(NOT(x_1), NOT(x_2))$

Матрица CCX имеет блочную структуру:
$CCX = \left(\frac{I_4 \quad 0}{0 \quad X}\right)$
где I_4 — единичная матрица размером 4×4, а матрица X действует на последнюю пару состояний.

Инверсия результата

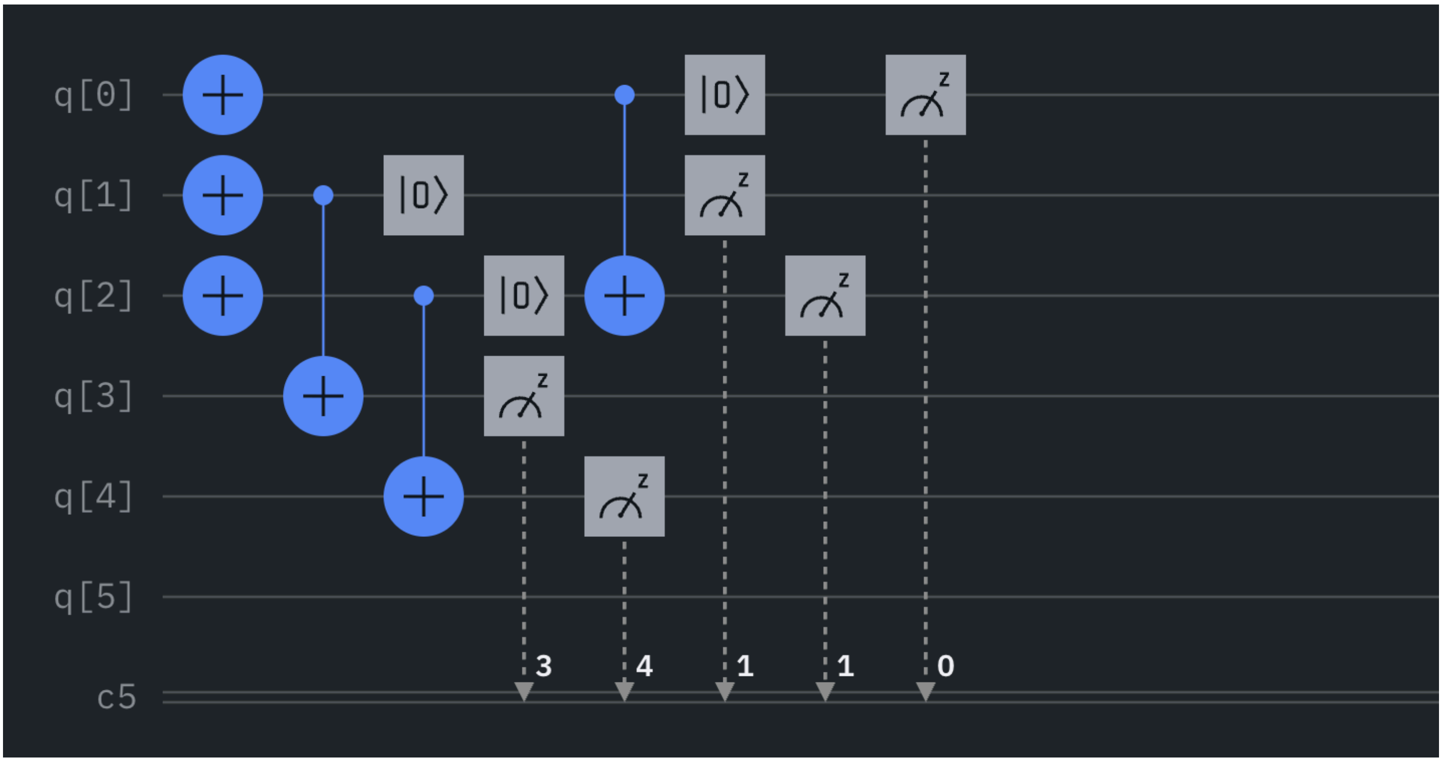
Чтобы получить отрицание результата операции AND, к кубиту (q_2) снова применяется вентиль (X):
$X\, q_2 \Rightarrow q_2 = NOT(AND(NOT(x_1), NOT(x_2)))$

Используем закон Де Моргана:
$NOT(AND(NOT(x_1), NOT(x_2))) = x_1 \vee x_2$

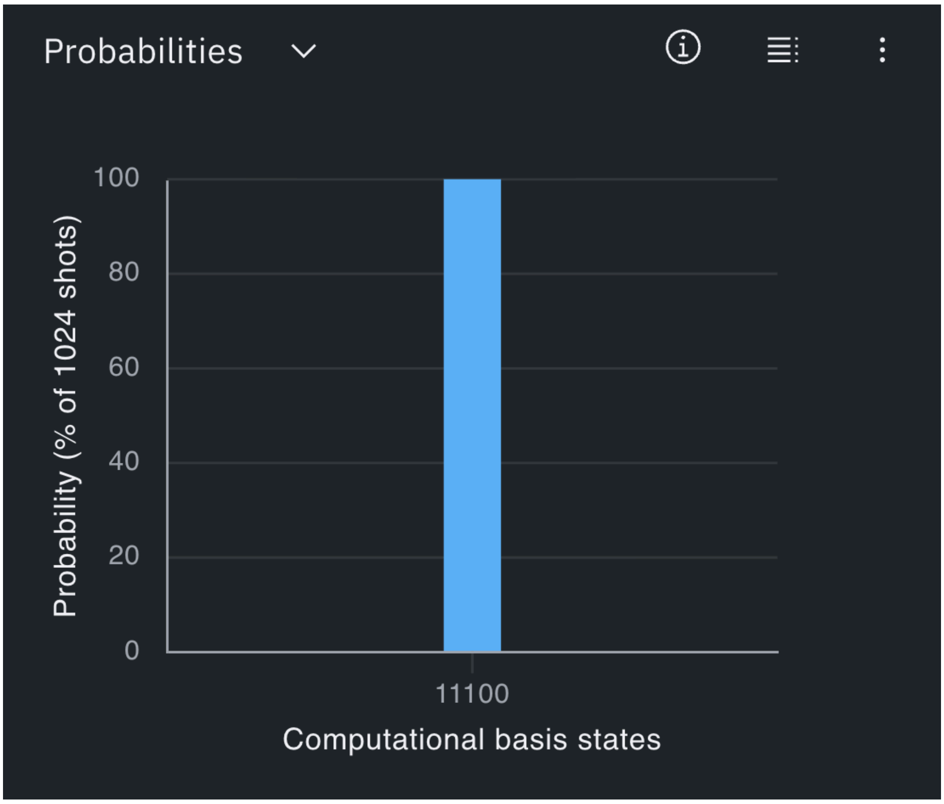
Финальная инверсия

Для получения отрицания дизъюнкции (операции NOR) снова применяется (X):
$Xq_2 \Rightarrow q_2 = NOT(x_1 \vee x_2)$

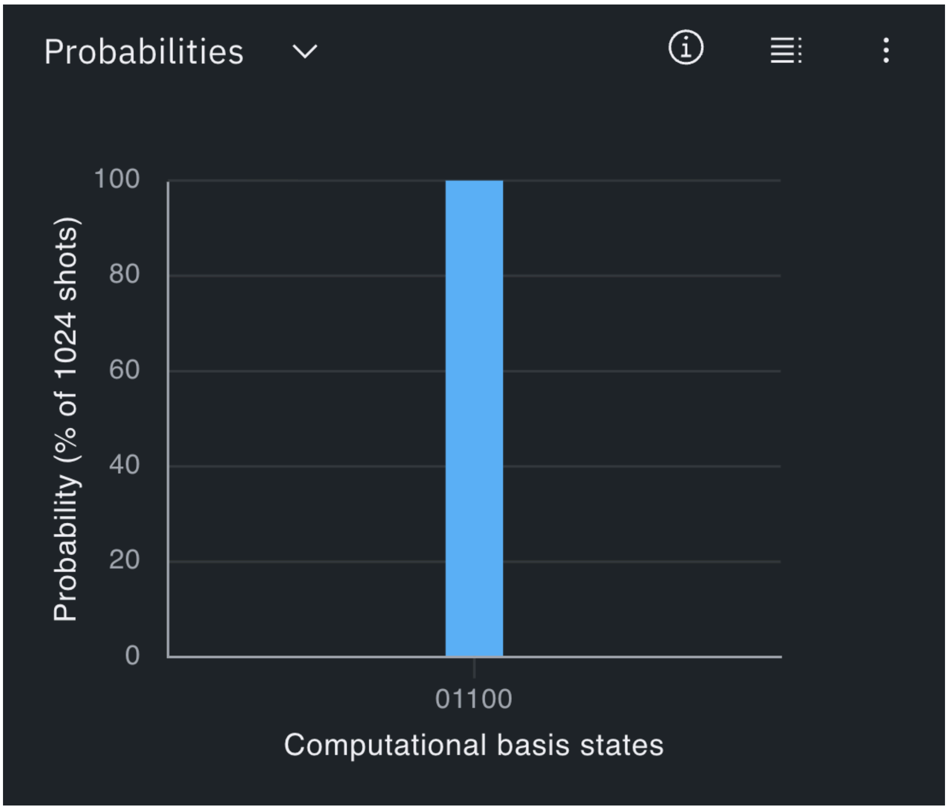
п13



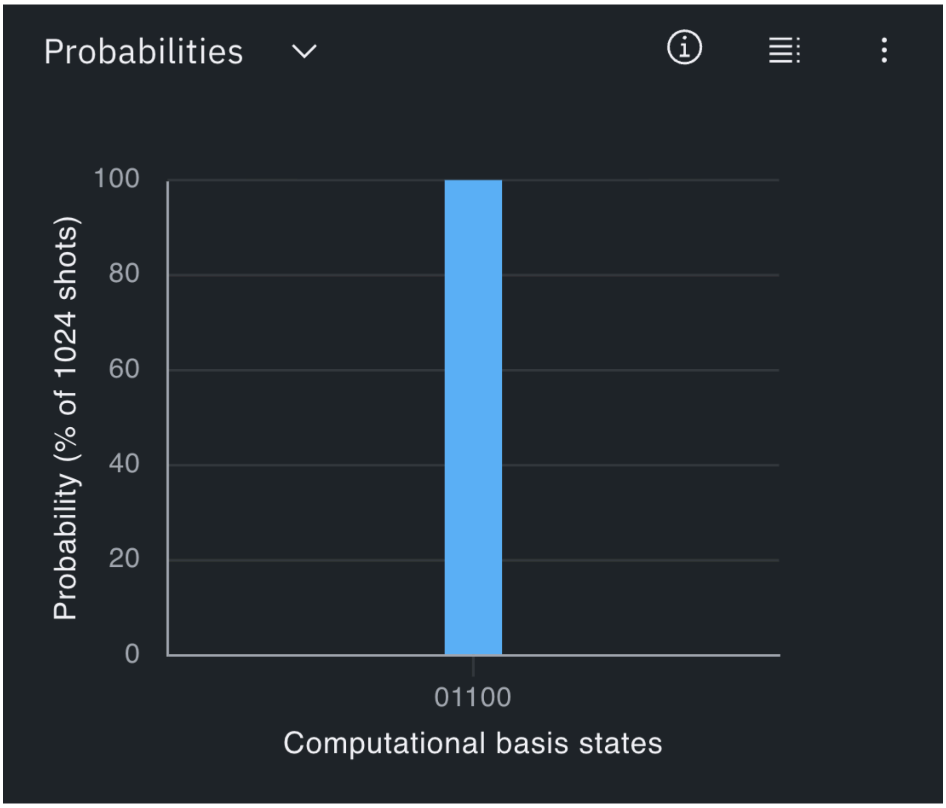
Умножение 4 на 7



Умножение 3 на 7



Умножение 4 на 5



|q⟩ = |q[2], q[1], q[0]⟩ = |1,1,1⟩

Три кубита изначально находятся в состоянии единицы:
$|q\rangle \; = \; |q[2],\, q[1],\, q[0]\rangle \; = \; |1, 1, 1\rangle$

В десятичной системе это соответствует числу

$N = 2^2 \cdot q[2] + 2^1 \cdot q[1] + 2^0 \cdot q[0] = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 7$

Операция умножения числа на 4 эквивалентна сдвигу бинарного представления влево на два разряда. Для этого выполняем поэтапное перенесение значений кубитов в новые позиции.

1. Перенос значения старшего разряда q[1] в позицию q[3]

Используем оператор CX(q[1], q[3]).
Если q[1] = 1, тогда q[3] становится равным 1. Это соответствует увеличению разрядности:
$q[3] = q[1] \cdot 2^2$

После переноса младший кубит старой позиции сбрасывается:
$reset(q[1]) \rightarrow q[1] = 0$

2. Перенос значения q[2] в позицию q[4]

Применяем CX(q[2], q[4]).
Если q[2] = 1, то новый разряд получает значение:
$q[4] = q[2] \cdot 2^3$

После чего:
$reset(q[2]) \rightarrow q[2] = 0$

3. Перенос младшего разряда q[0] в позицию q[2]

Оператор CX(q[0], q[2]) устанавливает:
$q[2] = 1$, если $q[0] = 1$

Затем:
$reset(q[0]) \rightarrow q[0] = 0$

Итоговое состояние кубитов после операций

1. q[0] = 0 — очищен.
2. q[1] = 0 — очищен.
3. q[2] — теперь хранит младший разряд результата.
4. q[3] — содержит второй разряд результата.
5. q[4] — старший разряд после переноса.

Таким образом, финальное состояние записывается как:
$|q\rangle = |q[4], q[3], q[2], q[1], q[0]\rangle]$

И новое число определяется формулой:
$N_{new} = 2^3 \cdot q[4] + 2^2 \cdot q[3] + 2^1 \cdot q[2]$

Проверка результата по общей формуле

Начальное число представляется как:
$N = 2^2 q[2] + 2^1 q[1] + 2^0 q[0]$

После сдвига влево на два разряда:
$N_{new} = 4N = 2^2 \cdot (2^2 q[2] + 2^1 q[1] + 2^0 q[0])$

Подстановка числового примера

Исходное число:
$N = 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 7$

После квантового алгоритма:
$N_{new} = 4 \cdot 7 = 28$

Двоичная форма:
$28 = 11100_2$

что соответствует значениям кубитов (q[4], q[3], q[2]).

Вывод

В рамках данной работы мы освоили использование управляемых квантовых вентилей для реализации операций над несколькими кубитами. На практике были применены 2, 3 и 5 кубитные вентили, а также разработаны собственные квантовые схемы на их основе. В ходе выполнения алгоритмов мы научились формировать квантовые функции и применять полученные знания для построения корректных и эффективных схем обработки данных, включая реализацию бинарных операций посредством квантовых преобразований.