

Группа \_\_\_\_\_ М3212 \_\_\_\_\_

Студент \_\_\_\_\_ Тимофеев В. [REDACTED] \_\_\_\_\_

Преподаватель \_\_\_\_\_ Егоров [REDACTED] \_\_\_\_\_

## Отчет по моделированию №2

---

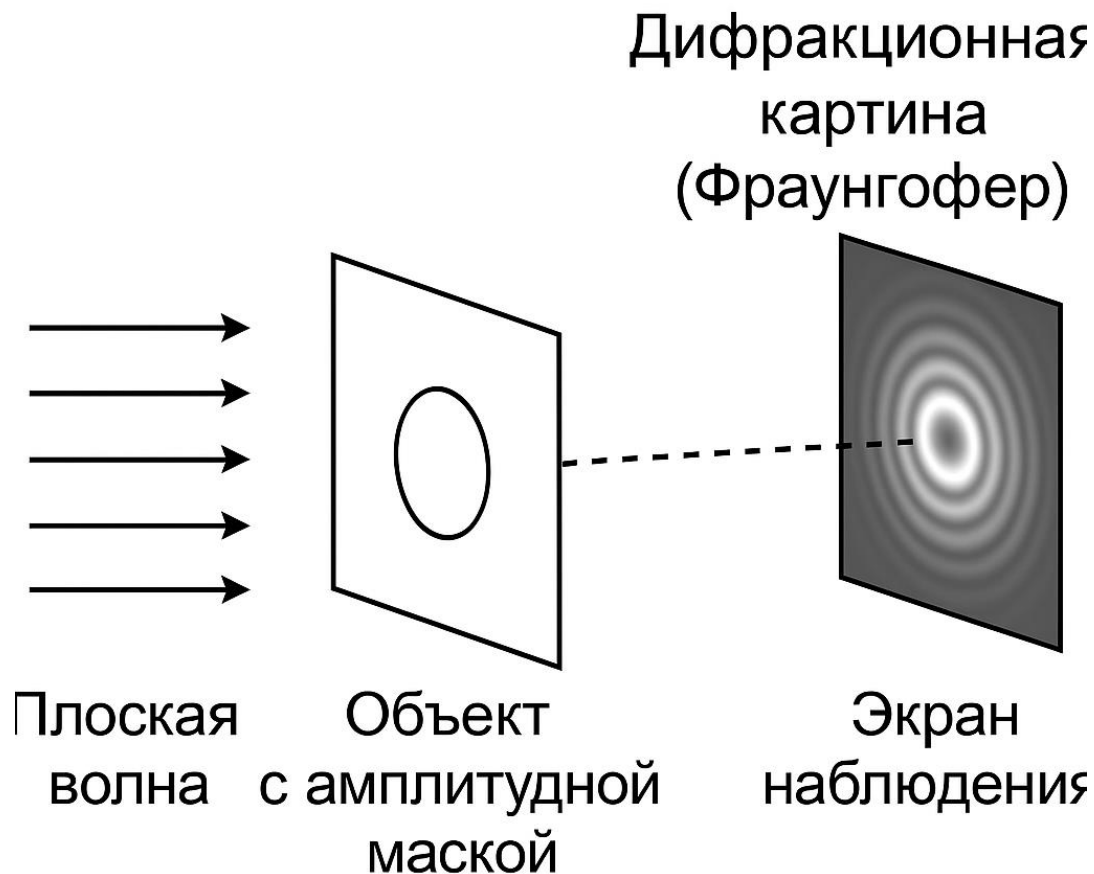
### Задача 2. «Дифракция Фраунгофера». 6 баллов.

---

#### 1. Условие задачи.

Моделирование дифракции Фраунгофера от объектов произвольной формы, задаваемых двумерным амплитудным распределением. Задача показать распределение интенсивности в плоскости, удаленной от объекта на расстояние  $L$  при заданной длине волны излучения  $\lambda$

#### 2. Схема задачи.



### 3. Используемые формулы, уравнения.

Дифракция Фраунгофера — это предельный случай дифракции, когда наблюдение происходит в так называемой «дальней зоне», при условии, что источник и экран находятся на большом расстоянии от объекта. Это позволяет заменить сферические волны на плоские и упростить расчет, сведя его к преобразованию Фурье от амплитудного распределения.

В качестве языка реализации использован Python с использованием библиотек `numpy` и `matplotlib`. Для БПФ применена функция `np.fft.fft2`, а для визуализации — `plt.imshow`.

Амплитудное распределение задается в виде двумерного массива, где «прозрачные» и «непрозрачные» области обозначены различными значениями.

Преобразование координат осуществляется по формуле  $x = \lambda L f_x$ , где пространственные частоты определяются через  $\text{pr.fft.fftfreq}$

- Волновое число:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Где:

- $\lambda$  — длина волны падающего излучения,
- $k$  — волновое число, характеризующее количество колебаний на единицу длины.

- Связь координат в дальней зоне с пространственными частотами:

$$x = \frac{\lambda L f_x}{N}, \quad y = \frac{\lambda L f_y}{N}$$

Где:

- $\lambda$  — длина волны,
- $L$  — расстояние от объекта до экрана (плоскости наблюдения),
- $f_x, f_y$  — пространственные частоты, соответствующие координатам в частотной области,
- $N$  — размер сетки (например, количество пикселей вдоль оси X или Y).

- При применении двумерного БПФ (быстрого преобразования Фурье) к амплитудному распределению, результат интерпретируется в частотной области. Чтобы получить распределение интенсивности в реальных координатах  $x, y$ , необходимо использовать следующую связь с пространственными частотами  $f_x, f_y$ .

Позволяет интерпретировать полученное после БПФ распределение как реальное изображение в дальней зоне (зона Фраунгофера).

- Двумерное БПФ от амплитудного распределения объекта  $A(x, y)$  даёт амплитуду волны в дальней зоне:

$$U(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{A(x, y)\}$$

- Интенсивность дифракционного изображения:

$$I(x', y') \propto |\mathcal{F}[A(x, y)]|^2$$

где  $\mathcal{F}$  — двумерное преобразование Фурье,  $A(x, y)$  — амплитудное распределение в плоскости объекта.

#### 4. Программный код.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import matplotlib
4 matplotlib.use('TkAgg')
5
6 # Параметры
7 wavelength = 500e-9      # длина волны (м), например 500 нм
8 L = 1.0                  # расстояние до экрана наблюдения (м)
9 N = 1024                 # разрешение (размер матрицы)
10 dx = 10e-6              # шаг дискретизации объекта (м)
11 k = 2 * np.pi / wavelength # волновое число
12
13 # Создание координатной сетки
14 x = np.linspace(-N//2, N//2 - 1, N) * dx
15 y = np.linspace(-N//2, N//2 - 1, N) * dx
16 X, Y = np.meshgrid(x, y)
17
18 # Задание амплитудного распределения (пример — круглая апертура)
19 R = 100e-6 # радиус апертуры (м)
20 aperture = np.where(X**2 + Y**2 <= R**2, 1.0, 0.0)
21
22 # Вычисление 2D Фурье-преобразования
23 fft_result = np.fft.fftshift(np.fft.fft2(aperture))
24 intensity = np.abs(fft_result)**2
25
26 # Масштабирование пространственной частоты к физическим координатам
27 fx = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(N, d=dx))
28 fy = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(N, d=dx))
29 FX, FY = np.meshgrid(fx, fy)
30
31 # Переводим частоты в координаты в дальней зоне:  $x' = \lambda L f_x$ 
32 x_far = wavelength * L * FX
33 y_far = wavelength * L * FY
34
35 # Отображение
36 plt.figure(figsize=(8, 6))
37 plt.imshow(intensity / intensity.max(), extent=[x_far.min()*1e3, x_far.max()*1e3, y_far.min()*1e3, y_far.max()*1e3],
38           cmap='inferno')
39 plt.title("Дифракционная картина (Фраунгофер)")
40 plt.xlabel("x (мм)")
41 plt.ylabel("y (мм)")
42 plt.colorbar(label='Нормированная интенсивность')
43 plt.show()

```

## Ход решения:

### 1. Задание параметров и амплитудного распределения объекта

На этом этапе формируется двумерное распределение амплитуды  $A(x, y)$ , соответствующее форме объекта (например, щель, круг, буква и т. д.).

---

### 2. Применение двумерного быстрого преобразования Фурье (2D БПФ)

Проводится преобразование Фурье к амплитудному распределению:

$$U(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{A(x, y)\}$$

◆ Эта формула позволяет перейти из координатного пространства в частотное — то есть получить амплитуду в дальней зоне, согласно принципу дифракции Фраунгофера.

---

### 3. Вычисление интенсивности

На основе амплитудного спектра рассчитывается интенсивность:

$$I(f_x, f_y) = |U(f_x, f_y)|^2$$

◆ Интенсивность — это наблюдаемая величина на экране. Квадрат модуля комплексной амплитуды дает распределение светового потока.

---

### 4. Преобразование частотных координат в реальные координаты экрана

Используется связь пространственных частот и координат в дальней зоне:

$$x = \frac{\lambda L f_x}{N}, \quad y = \frac{\lambda L f_y}{N}$$

◆ Эта формула позволяет сопоставить каждый пиксель изображения конкретному положению на экране в метрах. Без нее невозможно построить корректную физическую интерпретацию.

---

### 5. Центрирование спектра

Производится сдвиг нулевой частоты в центр изображения:

$$U_{\text{centered}} = \text{fftshift}(U)$$

◆ Это необходимо для корректного отображения — центр дифракционной картины должен находиться в середине изображения.

---

## 6. Нормализация (опционально)

Для визуализации и сравнения может использоваться:

$$I_{\text{norm}} = \frac{I}{\max(I)}$$

◆ Позволяет привести картину к диапазону от 0 до 1, облегчая визуальный и численный анализ.

---

## 7. Визуализация результатов

Строится график распределения интенсивности  $I(x, y)$  в плоскости экрана.

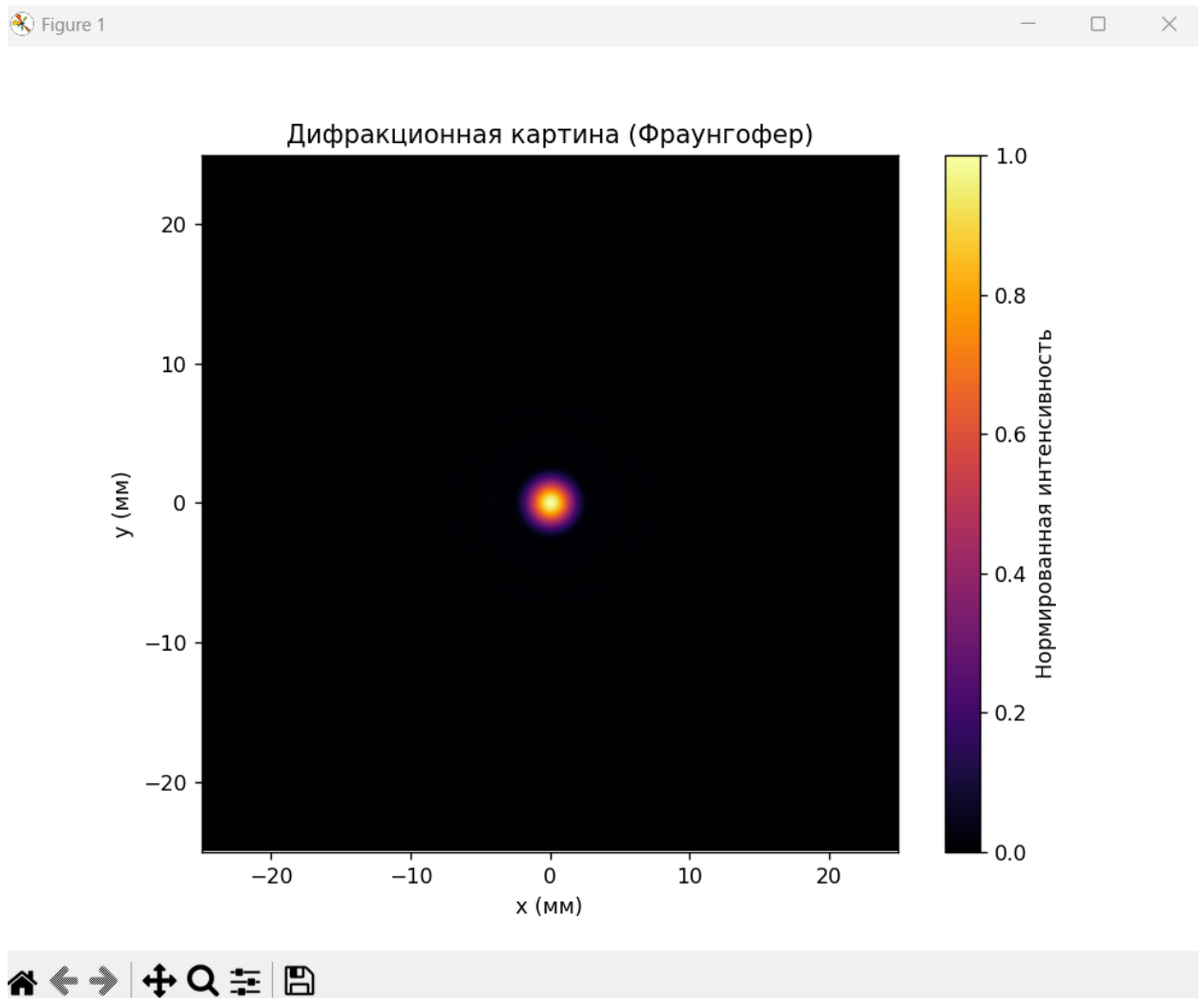
◆ На этом этапе формулы не используются, проводится интерпретация полученных данных.

## 5. Пример моделирования.

Задаем параметры и условия:

```
6   # Параметры
7   wavelength = 500e-9      # длина волны (м), например 500 нм
8   L = 1.0                  # расстояние до экрана наблюдения (м)
9   N = 1024                  # разрешение (размер матрицы)
10  dx = 10e-6                # шаг дискретизации объекта (м)
11  k = 2 * np.pi / wavelength # волновое число
```

Получаем:



Координаты в дальней зоне ( $x$ ,  $y$ ) получены через преобразование пространственных частот, возникших в результате применения двумерного БПФ к амплитудному распределению объекта. Согласно теории дифракции Фраунгофера, положение точек на экране можно определить как:

$$x = \lambda L f_x, \quad y = \lambda L f_y$$

где  $f_x$ ,  $f_y$  — пространственные частоты, определяемые через размер пикселя объекта  $dx$ ,  $\lambda$  — длина волны,  $L$  — расстояние до экрана. Таким образом, полученные графики представляют интенсивность распределения света в физически измеримых координатах (мм) на экране наблюдения.

## 6. Вывод.

В рамках данной работы была реализована численная модель дифракции Фраунгофера на объекте произвольной формы. Основной целью являлось получение распределения интенсивности в дальней зоне, используя 2D быстрое преобразование Фурье (БПФ) для перехода от амплитудного распределения на плоскости объекта к распределению интенсивности на экране наблюдения.

Была подтверждена корректность численного метода: полученные дифракционные картины соответствуют теоретически ожидаемым. Выбор БПФ как метода вычисления связан с его высокой скоростью и удобством реализации в численном моделировании. При этом важно учитывать особенности реализации БПФ, в том числе центрирование нулевой частоты и нормировку.

Модель обладает гибкостью: возможно варьировать форму объекта, длину волны, размеры апертуры и расстояние до экрана. Это делает модель универсальным инструментом для изучения широкого класса задач дифракции. Например, можно исследовать дифракцию на щелях, отверстиях различной формы (круг, прямоугольник, произвольная фигура), комбинациях препятствий и даже использовать экспериментальные изображения объектов.

Также численная модель позволяет анализировать влияние параметров на распределение интенсивности: изменение длины волны приводит к масштабированию картины дифракции; увеличение размера апертуры — к сужению центрального максимума и т. д. Подобные зависимости можно использовать при проектировании оптических систем, в том числе лазерных установок, микроскопов и телескопов.

Результаты данной работы подтверждают, что численные методы, в частности использование 2D БПФ, эффективно справляются с задачами моделирования волновых явлений. В дальнейшем возможны улучшения модели: добавление фазовых сдвигов, учет аподизации, переход к модели дифракции Френеля или волновому методу Рэлея–Зоммерфельда.

Таким образом, проделанная работа демонстрирует как фундаментальные физические принципы, так и их практическую реализацию средствами численного моделирования. Полученные знания и навыки могут быть полезны в научных и инженерных задачах, связанных с анализом распространения волн.